فصل ۱

مجموعه، الگو و دنباله

درس ۱	درس ۲	درس ۳	درس ۴	درس ۵
مجموعه های متناهی و نامتناهی	متمم یک مجموعه	الگو و دنباله	دنباله حسابی	دنباله هندسی

دید ویژه | نکته | مثال | روش‌حل | نتیجه | اثبات فرمول | تعریف | یادآوری | تذکر | فراراز اشتباه

درس ۱ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۱ یادآوری مجموعه‌های مهم و روابط بین مجموعه‌ها
۲ بازه (فاصله)
۳ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۱ یادآوری مجموعه‌های مهم و روابط بین مجموعه‌ها

تیپ ۴

مجموعه: به دسته‌ای از اعداد یا اشیای کاملاً مشخص و متمایز (غیرتکراری) مجموعه می‌گوییم. مثل مجموعهٔ اعداد اول یک رقمی که اعضای آن کاملاً مشخص هستند: $\{۲,۳,۵,۷\}$

ترتیب نوشتن اعضای مجموعه مهم نیست. **مثلاً:** $\{۴,۳\}$ همان $\{۳,۴\}$ است. از طرفی تکرار در مجموعه اثر ندارد.

مجموعه‌های $\{۱,۲\}$ و $\{۱,۱,۱,۲,۲\}$ با هم مساوی‌اند.

عضویت در مجموعه: اگر x، عضو مجموعه A باشد می‌نویسیم $x \in A$ و اگر عضو مجموعه A نباشد، می‌نویسیم $x \notin A$.

در مجموعهٔ $A = \{۰,\{۱\}\}$ داریم:

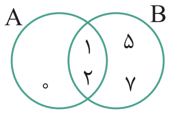
$۰ \in A$: زیرا دقیقاً صفر را در مجموعهٔ A می‌بینیم.

$\{۰\} \notin A$: زیرا $\{۰\}$ را در مجموعهٔ A نمی‌بینیم، دقت کنید $\{۰\}$ را با ۰ اشتباه نگیرید.

$\{۱\} \in A$: زیرا دقیقاً $\{۱\}$ را در مجموعهٔ A می‌بینیم.

نمودار وِن: مجموعه را علاوه بر نوشتن اعضاء درونِ $\{\}$، به‌صورت‌های دیگری نیز می‌توان نمایش داد. نمایش مجموعه‌ها به کمک شکل‌هایی مانند دایره، مستطیل یا ... را نمایش به‌صورت «نمودار وِن» می‌گویند.

نمایش مجموعه‌های $A = \{۰,۱,۲\}$ و $B = \{۱,۲,۵,۷\}$ با نمودار وِن به‌صورت مقابل است:



A و B دو عضو مشترک ۱ و ۲ دارند.

مجموعهٔ تهی: مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد را مجموعهٔ تهی می‌نامیم و آن را با علامت $\varnothing$ یا $\{\}$ نمایش می‌دهیم.

مجموعهٔ اعداد طبیعی بین ۱/۵ و ۱/۶، تهی است. زیرا بین ۱/۵ و ۱/۶ عدد طبیعی وجود ندارد.

مجموعه‌های $\{\varnothing\}$، $\{\{\}\}$ یا $\{۰\}$ تهی نیستند، زیرا هرکدام یک عضو دارند.

دو مجموعهٔ برابر: اگر هر عضو مجموعهٔ A، عضو مجموعهٔ B بوده و هر عضو مجموعهٔ B نیز، عضو مجموعهٔ A باشد، آن‌گاه می‌گوییم A و B برابرند و می‌نویسیم $A = B$. **مثلاً** دو مجموعهٔ $A = \{۱,۲\}$ و $B = \{۱,۱,۲\}$ برابرند. زیرا اگر عضو تکراری ۱ را در B حذف کنیم، $B = \{۱,۲\}$ دقیقاً مثل A است.

زیرمجموعه: هرگاه هر عضو مجموعهٔ A، عضو مجموعهٔ B نیز باشد، مجموعهٔ A را زیر مجموعهٔ B می‌گوییم و آن را به‌صورت $A \subseteq B$ نمایش می‌دهیم. همچنین زیر مجموعه نبودن را با علامت $\nsubseteq$ نمایش می‌دهیم.

برای مجموعهٔ $A = \{۰,\{۱\}\}$ داریم:

$\{۰\} \subseteq A$: زیرا تنها عضوِ $\{۰\}$ یعنی عدد ۰، عضوی از مجموعهٔ A است.

$\{۱\} \nsubseteq A$: زیرا تنها عضوِ $\{۱\}$ یعنی عدد ۱، عضو مجموعهٔ A نیست.

$\{\{۱\}\} \subseteq A$: زیرا تنها عضوِ $\{\{۱\}\}$ یعنی $\{۱\}$، عضوی از مجموعهٔ A است.

$\{۰,\{۱\}\} \subseteq A$: زیرا عضوهای آن یعنی ۰ و $\{۱\}$، هر دو عضو مجموعهٔ A هستند.

- مجموعهٔ تهی، زیرمجموعهٔ هر مجموعهٔ دلخواهی است. **مثلاً:** اگر A یک مجموعهٔ دلخواه باشد، آن‌گاه: $\varnothing \subseteq A$
- هر مجموعه‌ای، زیرمجموعهٔ خودش است. **مثلاً:** $A \subseteq A$
- **نوشتن مجموعه به زبان ریاضی:** گاهی اوقات برای نمایش یک مجموعه، شکل کلی عضوهای آن مجموعه را بیان می‌کنند. **مثلاً:** هر عدد طبیعی زوج به شکل $2k$ است که در آن k عددی طبیعی است. پس مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج را به زبان ریاضی به‌صورت $\{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ نمایش می‌دهیم.
- فقط محض اطلاع بدانید که علامت «|» در $\{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ به معنی «به‌طوری‌که» می‌باشد.

اعضای مجموعهٔ $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} , x^2 < 25\}$ را بنویسید.

پاسخ ابتدا با توجه به شرط $x \in \mathbb{N}$ متوجه می‌شویم x عددی طبیعی است و چون $x^2 < 25$، پس $x = 1, 2, 3, 4$ و داریم: $A = \{1, 2, 3, 4\}$

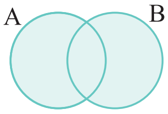
منتخب مدارس تهران

● **اعضای مجموعهٔ $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} , x^2 \leq 16\}$ را بنویسید.**

پاسخ نهایی $B = \{1, 2, 3, 4\}$

منتخب مدارس تهران

اجتماع، اشتراک و تفاضل



اجتماع دو مجموعهٔ A و B: مجموعه‌ای است که اعضایش در A یا B یا هر دو مجموعهٔ A و B هستند (اعضایش متعلق به حداقل یکی از مجموعه‌های A و B است.) و آن را به‌صورت $A \cup B$ نمایش می‌دهیم. نمودار ون آن به‌صورت مقابل است:

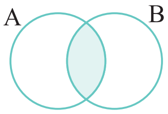
ویژگی‌ها:

۱) $A \cup A = A$

۲) $A \cup \varnothing = A$

۳) $A , B \subseteq (A \cup B)$

۴) اگر $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$



اشتراک دو مجموعهٔ A و B: مجموعه‌ای است که هر عضو آن هم به A و هم به B تعلق داشته (متعلق به هر دو مجموعه) و آن را به‌صورت $A \cap B$ نشان می‌دهند. نمودار ون آن به‌صورت مقابل است:

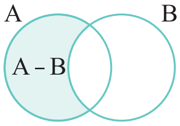
ویژگی‌ها:

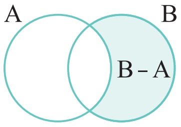
۱) $A \cap A = A$

۲) $A \cap \varnothing = \varnothing$

۳) $A \cap B \subseteq A , B$

۴) اگر $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$





تفاضل دو مجموعه: مجموعهٔ $A - B$، مجموعه‌ای است که عضوهای آن در A هستند ولی در B حضور ندارند. (عضوها فقط در A هستند.) نمودار ون آن به‌صورت مقابل است:

به‌طور مشابه مجموعهٔ $B - A$، مجموعه‌ای است که عضوهای آن در B هستند ولی در A حضور ندارند. (عضوها فقط در B هستند.) نمودار ون آن به‌صورت مقابل است:

ویژگی‌ها:

۱) $A - B = A - (A \cap B)$

۲) $B - A = B - (A \cap B)$

۳) $A - \varnothing = A , \varnothing - A = \varnothing$

۴) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

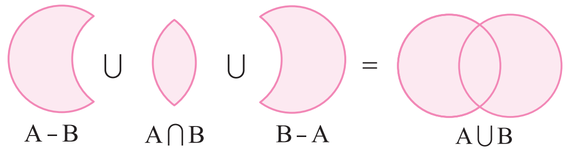
۵) $(B - A) \cup (A \cap B) = B$

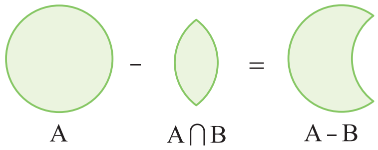
۶) $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$

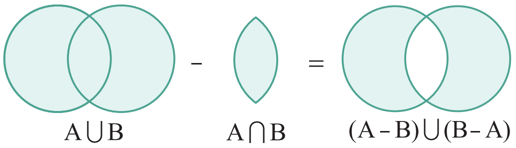
۷) $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

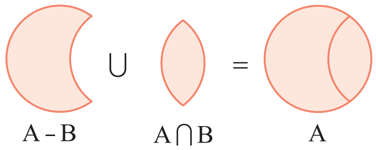
۸) اگر $A \subseteq B \Rightarrow A - B = \varnothing$

ویژگی‌های بیان‌شده را حفظ نکنید، بلکه به کمک نمودار ون آن را بفهمید تا در ذهن شما بمانند. مثلاً ویژگی‌های ۱، ۴، ۶ و ۷ را به‌صورت زیر به کمک نمودار ون به خاطر می‌سپاریم:

ویژگی ۶:


ویژگی ۱:


ویژگی ۷:


ویژگی ۴:


اگر $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه $A \cap B = A$ و $A \cup B = B$. **مثلاً:** چون $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z}$ است، پس $\mathbb{W} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{W}$ و $\mathbb{W} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

چند مجموعهٔ مهم

۱ مجموعهٔ اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{۱,۲,۳,...\}$

۲ مجموعهٔ اعداد حسابی: $\mathbb{W} = \{۰,۱,۲,۳,...\}$

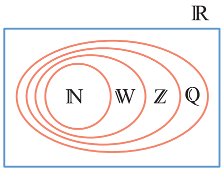
۳ مجموعهٔ اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{...,-۲,-۱,۰,۱,۲,...\}$

۴ مجموعهٔ اعداد گویا: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{Z}, n \neq ۰\}$

۵ مجموعهٔ اعداد گنگ $(\mathbb{Q}')$: مجموعه اعدادی هستند که نمی‌توان آن‌ها را به‌صورت نسبت دو عدد صحیح به صورت $\frac{p}{q}$ $(q \neq ۰)$ نوشت. مثل $\sqrt{۲}$ و π.
این مجموعه را به‌صورت $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ نیز نشان می‌دهند.

۶ مجموعهٔ اعداد حقیقی: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

روابط زیر را که بسیار مهم است حتماً به‌خاطر بسپارید:



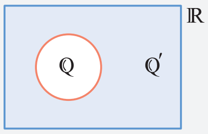
۱ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ۲ $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ ۳ $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \varnothing$

۴ $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$ ۵ $\mathbb{Q} \cup \overbrace{(\mathbb{R} - \mathbb{Q})}^{\text{همان } \mathbb{Q}' \text{ است.}} = \mathbb{R}$ ۶ $\mathbb{Q} \cap \overbrace{(\mathbb{R} - \mathbb{Q})}^{\text{همان } \mathbb{Q}' \text{ است.}} = \varnothing$

آقا پس $\mathbb{Q}'$ چی شد؟

سؤال دانش‌پژوه | احمد جوشکار

پاسخ درود بر $\mathbb{Q}'$! مطمئن باش گم نشده! درواقع اون قسمتِ بین $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ یعنی $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ همان $\mathbb{Q}'$ هست. به شکل مقابل نگاه کن تا بفهمی $\mathbb{Q}'$ کجاست.



کتاب درسی زیر ذره‌بین

صفحهٔ ۲

کتاب درسی پس از معرفی مجموعه‌های مهم، یک نتیجهٔ مهم را آورده که می‌تواند به صورت جای خالی (به صورت زیر) در امتحان مطرح شود:

«هر عدد دلخواهی باید جایی روی ......محور اعداد حقیقی...... داشته باشد و همچنین هر نقطه روی این محور، نشان دهندهٔ ......یک عدد حقیقی...... است.»

در ادامه انواع تیپ‌های مهمی که از این درس می‌تواند در امتحان مطرح شود را با هم بررسی می‌کنیم:

تیپ ۱

A و B را به ما می‌دهند و از ما می‌خواهند $A\bigcup B$، $A\bigcap B$ یا ... را به دست آوریم.

برای حل این تیپ مسائل، کافی است از ویژگی‌های مطرح شده در درسنامه استفاده کنیم و مجموعهٔ خواسته شده را بنویسیم.

اگر $A=\{۲,۴,۶,۸\}$ و $B=\{۳,۶,۹\}$ باشد، مجموعه‌های $A\bigcap B$، $A\bigcup B$، $A-B$ و $B-A$ را بیابید.

پاسخ

$$A\bigcap B \xrightarrow[\text{هر دو مجموعه}]{\text{اعضای مشترک}} \{۶\} \quad , \quad A\bigcup B \xrightarrow[\text{A و B}]{\text{تمام اعضای}} \{۲,۳,۴,۶,۸,۹\}$$

$$A-B=A-(A\bigcap B)=\{۲,۴,\cancel{۶},۸\}-\{۶\} \xrightarrow[\text{حذف کن}]{\text{مشترک‌ها را از A}} \{۲,۴,۸\}$$

$$B-A=B-(A\bigcap B)=\{۳,\cancel{۶},۹\}-\{۶\} \xrightarrow[\text{حذف کن B}]{\text{مشترک‌ها را از}} \{۳,۹\}$$

منتخب مدارس تهران

● اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۳,۴,۵\}$ باشد، مجموعه‌های $A\bigcap B$، $A\bigcup B$، $A-B$ و $B-A$ را بیابید.

پاسخ نهایی

$A\bigcap B=\{۳,۴\}$

$A\bigcup B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$

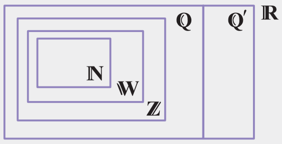
$A-B=\{۱,۲\}$ ، $B-A=\{۵\}$

تیپ ۲

تعدادی عدد را داده و از ما می‌خواهند آن‌ها را در جای مناسب در نمودار وِن قرار دهیم.

برای پاسخ‌گویی به این مسائل، باید تشخیص دهیم که آن عدد متعلق به کدام‌یک از مجموعه‌های $\mathbb{N}$، $\mathbb{W}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ یا $\mathbb{Q}'$ است تا بتوانیم آن را در جای مناسب بنویسیم.

عددهای $-\frac{۲}{۵}$، -۳، $\sqrt{۰/۰۱}$، π، $-\sqrt{۵}$، ۰ و ۱ را در جای مناسب در شکل بنویسید.

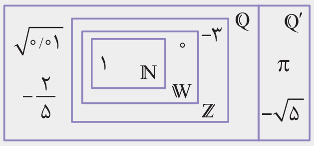


پاسخ

$۱\in\mathbb{N}\ ,\ ۰\in\mathbb{W}\ ,\ -۳\in\mathbb{Z}$

$\sqrt{۰/۰۱}=\sqrt{(۰/۱)^۲}=۰/۱=\frac{۱}{۱۰}\ ,\ -\frac{۲}{۵}\in\mathbb{Q}$

$\pi\ ,\ -\sqrt{۵}\in\mathbb{Q}'$



منتخب مدارس یزد

● درستی یا نادرستی هریک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

آ) $\frac{\pi}{۲}\in\mathbb{Q}$ ب) $\sqrt{۱۷}\in\mathbb{Q}'$

پ) $\sqrt{۰/۶۴}\in\mathbb{Z}$ ت) $-\frac{۳}{۵}\in\mathbb{Q}$

پاسخ نهایی

آ) نادرست ب) درست

پ) نادرست ت) درست

تیپ ۳

از ارتباط بین مجموعه‌های معروف $\mathbb{N}$، $\mathbb{W}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{Q}'$ و $\mathbb{R}$، سؤالات صحیح و غلط یا جای خالی می‌دهند.

کلید حل این سؤالات، تسلط به روابط مجموعه‌های مهم مانند: $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$، $\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R}$، $\mathbb{Q}'=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ و ... و نمودار وِن آن‌ها است.

جاهای خالی را پر کنید.

پ) $\mathbb{W}-\mathbb{N}=$ ...... ب) $\mathbb{W}-\mathbb{Z}=$ ...... آ) $(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\bigcap\mathbb{Q}=$ ......

ج) $\mathbb{R}-(\mathbb{Q}\bigcup\mathbb{Q}')=$ ...... ث) $\mathbb{Q}\bigcup\mathbb{Z}=$ ...... ت) $\mathbb{Q}\bigcap\mathbb{W}=$ ......

پاسخ

ب) $\mathbb{W}-\mathbb{Z}\xlongequal{\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}}\varnothing$ آ) $(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\bigcap\mathbb{Q}=\mathbb{Q}'\bigcap\mathbb{Q}=\varnothing$

ت) $\mathbb{Q}\bigcap\mathbb{W}\xlongequal{\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Q}}\mathbb{W}$ پ) $\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{۰,۱,۲,...\}-\{۱,۲,...\}=\{۰\}$

ج) $\mathbb{R}-(\mathbb{Q}\bigcup\mathbb{Q}')=\mathbb{R}-\mathbb{R}=\varnothing$ ث) $\mathbb{Q}\bigcup\mathbb{Z}\xlongequal{\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}}\mathbb{Q}$

منتخب مدارس ساری

● درستی یا نادرستی هریک از عبارات زیر را مشخص کنید.

آ) $(\mathbb{N}\bigcup\mathbb{Z})\subseteq\mathbb{Q}$

ب) $\mathbb{Q}'-\mathbb{Z}=\mathbb{Q}$

پ) $\mathbb{Q}\bigcup\mathbb{Z}=\mathbb{Q}$

ت) $\mathbb{W}\bigcap\mathbb{N}=\{۰\}$

پاسخ نهایی

آ) درست ب) نادرست

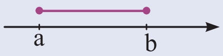
پ) درست ت) نادرست

منتخب مدارس بوشهر

۲ بازه (فاصله) — تیپ ۵

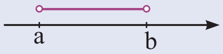
بازه (فاصله): زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ که مشخص‌کنندهٔ یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشد را «بازه» یا «فاصله» می‌نامند. اگر a و b دو عدد حقیقی و $a < b$ باشد، حالات زیر را داریم:

حالت ۱: تمام اعداد حقیقی بین دو عدد a و b به همراه خود این دو عدد (نقاط انتهایی بازه) را بازهٔ بسته از a تا b می‌گوییم و به‌صورت $[a,b]$ نمایش می‌دهیم:

نمایش مجموعه‌ای: $\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ ، نمایش هندسی


$[۱,۴] = \{x \in \mathbb{R} \mid ۱ \le x \le ۴\} \Rightarrow$ نمایش هندسی:


حالت ۲: تمام اعداد حقیقی بین دو عدد a و b را بازهٔ باز بین a و b می‌گوییم و به‌صورت (a,b) نمایش می‌دهیم:

نمایش مجموعه‌ای: $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ، نمایش هندسی


$(-۱,۲) = \{x \in \mathbb{R} \mid -۱ < x < ۲\} \Rightarrow$ نمایش هندسی:


در بازهٔ باز (a,b)، نقاط ابتدایی و انتهایی یعنی a و b حضور ندارند.

حالت ۳: بازه‌هایی مانند $[a,b)$ یا $(a,b]$ که تنها شامل یکی از نقاط انتهایی خود هستند را بازه‌های نیم‌باز می‌نامیم. این بازه‌ها شامل تمام اعداد حقیقی بین a و b به همراه تنها یکی از دو عدد a و b هستند.

نمایش مجموعه‌ای: $\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\} = [a,b)$ ، نمایش هندسی


نمایش مجموعه‌ای: $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\} = (a,b]$ ، نمایش هندسی


$(-۱,۲] = \{x \in \mathbb{R} \mid -۱ < x \le ۲\} \Rightarrow$ نمایش هندسی:


$[-۱,۲) = \{x \in \mathbb{R} \mid -۱ \le x < ۲\} \Rightarrow$ نمایش هندسی:


طول بازهٔ (a,b) برابر $b-a$ است. به‌عنوان مثال طول هرکدام از بازه‌های $[-۱,۶]$، $(-۱,۶)$، $[-۱,۶)$ و $(-۱,۶]$ برابر $۶-(-۱)=۷$ است.

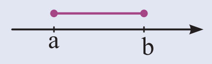
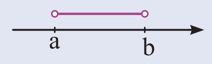
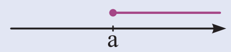
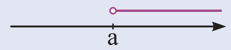
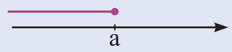
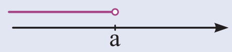
در مورد بازه‌هایی مانند $[a,b]$ یا $(a,b]$ یا ... نمی‌توان اولین عدد حقیقیِ بعد از a و واولین عدد حقیقی قبل از b را مشخص کرد.

حالت ۴: تمام اعداد حقیقی بزرگ‌تر از a را به‌صورت $x > a$ یا $(a,+\infty)$ نوشته و به آن بازهٔ باز a تا $+\infty$ (بخوانید: مثبت بی‌نهایت) می‌گوییم:

نمایش مجموعه‌ای $= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ ، نمایش هندسی

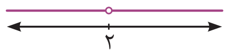

$(۲,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > ۲\} \Rightarrow$ نمایش هندسی:

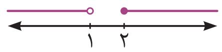

در جدول زیر تمام حالت‌های ممکن را آورده‌ایم:

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$	$[a,b]$	بسته
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	(a,b)	باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$	$(a,b]$	نیم‌باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$	$[a,b)$	نیم‌باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$	$[a,+\infty)$	نیم‌باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	$(a,+\infty)$	باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$	$(-\infty,a]$	نیم‌باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	$(-\infty,a)$	باز
	$\mathbb{R}$	$(-\infty,+\infty)$	باز

$+\infty$ و $-\infty$ اعداد حقیقی نیستند و در نمایش بازه‌ها، کنار آن‌ها همیشه پرانتز می‌آید.

گاهی می‌توان اجتماع دو یا چند بازه را به‌صورت تفاضلی نشان داد. مثلاً داریم:

$(-\infty,۲)\cup(۲,+\infty)=$  $=\{x \mid x<۲ \text{ یا } x>۲\}=\mathbb{R}-\{۲\}$

$(-\infty,۱)\cup[۲,+\infty)=$  $=\{x \mid x<۱ \text{ یا } x\ge ۲\}=\mathbb{R}-[۱,۲)$

آقا اجازه! این آخری رو می‌شه بیشتر توضیح بدین که چطور نوشتین؟

سؤال دانش‌پژوه | لاله پژوهان

پاسخ ببین! برای نوشتن مجموعهٔ $(-\infty,۱)\cup[۲,+\infty)$ به اون یکی صورت، کافیه مجموعه‌ای رو پیدا کنید که اجتماع اون با $(-\infty,۱)\cup[۲,+\infty)$، برابر مجموعهٔ $\mathbb{R}$ بشه و با این مجموعه اشتراکی نداشته باشه. بعد اون مجموعه رو از $\mathbb{R}$ کم کنید. در این‌جا داریم:

$$(-\infty,۱)\cup[۲,+\infty)\cup\underbrace{[۱,۲)}_{\text{بازهٔ مورد نظر}}=\mathbb{R}\Rightarrow(-\infty,۱)\cup[۲,+\infty)=\mathbb{R}-[۱,۲)$$

در ادامه انواع تیپ‌های مهمی که از این درس می‌تواند در امتحان مطرح شود را باهم بررسی می‌کنیم:

تیپ ۱: متعلق بودن یک عدد به یک بازه

فرض کنید اعدادی مانند $-\frac{3}{4}$ ، -1 ، -4 می‌دهند و از ما می‌پرسند آیا این اعداد متعلق به بازهٔ $(-4,-1]$ هستند یا خیر؟

برای پاسخگویی به این سؤال، کافی است چک کنیم اعداد داده شده در آن بازه قرار دارند یا خیر. برای این کار آن اعداد را با اعداد دو انتهای بازه یعنی با -1 و -4 مقایسه می‌کنیم. خب دراین مثال -1 عضو بازه است زیرا بازه از طرف -1 بسته بوده و علامتِ «]» کنار -1 وجود دارد. ولی -4 عضو بازه نیست زیرا بازه از طرف -4 باز بوده و علامت پرانتز کنار -4 وجود دارد. در نهایت $-\frac{3}{4}$ عضو بازه نیست زیرا $-\frac{3}{4}$ از -1 بزرگ‌تر بوده، لذا بین دو عدد -1 و -4 قرار ندارد!

کدام‌یک از اعداد $-\frac{5}{6}$ ، -3 ، $-\sqrt{5}$ و $-\pi$ عضو بازهٔ $[-3,-\frac{5}{6})$ هستند؟

منتخب مدارس اهواز

پاسخ نهایی -3 ، $-\sqrt{5}$

....

....

تیپ ۲: بررسی وضعیت دو بازه نسبت به هم

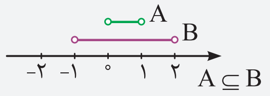
فرض کنید دو مجموعهٔ A و B را به ما داده‌اند و از ما می‌پرسند:

آ) آیا $A=B$ ؟ ب) آیا $A\subseteq B$ ؟

آ) کافی است بررسی کنیم که آیا تمام اعداد موجود در بازه‌های A و B یکسان‌اند؟ به عبارت دیگر آیا عددی متعلق به یکی از مجموعه‌های A یا B وجود دارد که در دیگری نباشد! اگر چنین عددی را یافتیم آن‌گاه A و B مساوی نیستند! مثلاً: دو مجموعهٔ $A=(1,2)$ و $B=[1,2)$ مساوی نیستند، زیرا عدد ۱ در B هست ولی در A نیست.

ب) ابتدا بازه‌های A و B را روی محور (نمایش هندسی) رسم کنیم. در این صورت اگر تمام عضوهای بازهٔ A در B نیز وجود داشت آن‌گاه می‌گوییم $A\subseteq B$ است. در غیر این صورت حتی اگر یک عضو پیدا کردیم که در A بوده ولی در B نبود می‌گوییم: $A \not\subseteq B$

مجموعهٔ $A=(0,1)$ زیرمجموعهٔ $B=(-1,2)$ است زیرا:



مجموعهٔ $A=(0,2]$ زیر مجموعهٔ $B=(-2,1]$ نیست. زیرا اعدادی مانند ۱/۵ یا ۲ یا ... در A هست ولی در B نیست!

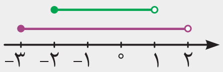
درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

آ) $(-1,4]=[-1,4)$

ب) $[-2,1)\subseteq[-3,2)$

پاسخ **آ)** نادرست است، زیرا مثلاً عدد ۴ در بازهٔ $(-1,4]$ هست ولی در بازهٔ $[-1,4)$ نیست! به‌طور مشابه -1 در $[-1,4)$ هست ولی در $(-1,4]$ نیست. پس این دو بازه برابر نمی‌باشند.

ب) درست است. زیرا با توجه به شکل زیر تمام اعضای $[-2,1)$ در بازهٔ $[-3,2)$ هم هستند.



منتخب مدارس آمل — منتخب مدارس رشت

● **درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.**

آ) $[-5,1)\subseteq(-\infty,1]$

ب) $[-8,1]\subseteq(-8,1)$

پاسخ نهایی

آ) درست ب) نادرست

....

....

....

....

تیپ ۳

محاسبهٔ مجموعه‌هایی مانند $A\cap B$ ، $A\cup B$ و... از روی A و B

فرض کنید دو یا چند مجموعه مانند A و B داده شده و از ما می‌خواهند مجموعه‌های $A\cap B$ ، $A\cup B$ ، $A-B$ و $B-A$ یا هر مجموعهٔ دیگری را به‌صورت بازه یا اجتماعی از بازه‌ها بنویسیم. برای حل این سؤالات ابتدا مجموعه‌های داده شده را روی محور رسم می‌کنیم. سپس خواسته مسئله را از روی محور می‌یابیم.

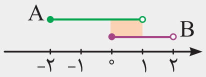
اگر $A=[-۲,۱)$ و $B=[۰,۲)$ باشند، حاصل عبارات زیر را به کمک رسم بازه‌ها روی محور پیدا کنید.

آ) $A\cap B$ ب) $A\cup B$ پ) $A-B$

ت) $B-A$ ث) $A-[-۱,۰)$

پاسخ برای هر قسمت مجموعه‌های A و B را روی محور رسم کرده و خواستهٔ مسئله را با توجه به آن‌ها می‌یابیم:

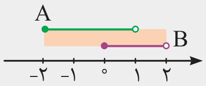
آ) $A\cap B$: قسمت‌های مشترک دو بازه را انتخاب می‌کنیم که بازهٔ $[۰,۱)$ می‌شود.



$\Rightarrow A\cap B=[۰,۱)$

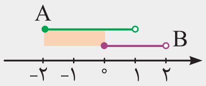
عدد ۱ در مجموعهٔ B هست ولی در A نیست، لذا در مجموعهٔ $A\cap B$ هم حضور ندارد.

ب) $A\cup B$: تمام قسمت‌های A و B را انتخاب می‌کنیم که بازهٔ $[-۲,۲)$ می‌شود.



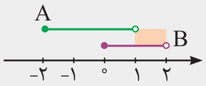
$\Rightarrow A\cup B=[-۲,۲)$

پ) $A-B$: قسمت مشترک B و A را از A حذف می‌کنیم:



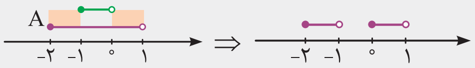
$A-B=A-(A\cap B)=[-۲,۱)-[۰,۱)=[-۲,۰)$

ت) $B-A$: قسمت مشترک B و A را از B حذف می‌کنیم:



$B-A=B-(A\cap B)=[۰,۲)-[۰,۱)=[۱,۲)$

ث) برای محاسبهٔ $A-[-۱,۰)$ باید اشتراک A و $[-۱,۰)$ که همان $[-۱,۰)$ است را از مجموعه A حذف کنیم:



$A-[-۱,۰)=[-۲,۱)-[-۱,۰)=[-۲,-۱)\cup[۰,۱)$

عدد -۱ چون در $[-۱,۰)$ وجود دارد پس در جواب نهایی نباید وجود داشته باشد پس کنار آن پرانتز قرار دادیم و عدد صفر چون در $[-۱,۰)$ وجود نداشت پس در جواب نهایی، وجود دارد لذا کنار آن «[» آوردیم.

● اگر $A=(۱,۴]$ و $B=[-۱,۲)$ باشد، حاصل $A\cap B$ ، $A\cup B$ ، $A-B$ و $B-A$ را بیابید.

منتخب مدارس شیراز

پاسخ نهایی

$A\cup B=[-۱,۴]$ ، $A\cap B=(۱,۲)$

$B-A=[-۱,۱]$ ، $A-B=[۲,۴]$

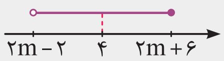
تیپ ۴

اگر بگویند α متعلق به بازهٔ $(a,b]$ است، باید چیکار کنیم؟

در این مسائل چون α متعلق به بازهٔ $(a,b]$ است، می‌توان نوشت $a<\alpha\le b$ سپس نامعادله‌های $a<\alpha$ و $\alpha\le b$ را جداگانه حل می‌کنیم و بین جواب‌های حاصل اشتراک می‌گیریم.

اگر عدد ۴ متعلق به بازهٔ $(۲m-۲,۲m+۶]$ باشد، محدودهٔ m را بیابید.

پاسخ با توجه به شکل باید داشته باشیم:



$$۲m-۲<۴\le ۲m+۶\Rightarrow\begin{cases}۲m-۲<۴\Rightarrow ۲m<۶\Rightarrow m<۳\\ \text{و}\\ ۴\le ۲m+۶\Rightarrow -۲\le ۲m\Rightarrow -۱\le m\end{cases}\xRightarrow{\text{اشتراک}} -۱\le m<۳$$

منتخب مدارس یزد

● اگر عدد $۲a+۱$ عضو بازه $(۳,۵)$ باشد، محدودهٔ a را بیابید.

پاسخ نهایی $۱<a<۲$

منتخب مدارس تهران

صحبت از طول بازهٔ (a, b) می‌شود.

تیپ ۵

می‌دانیم طول بازه‌های (a,b) ، $(a,b]$ ، $[a,b)$ و $[a,b]$ از فرمول $b-a$ به‌دست می‌آید. پس با توجه به این فرمول، طول بازهٔ داده شده را حساب می‌کنیم. از طرفی حواستان باید به این نکته باشد که $a<b$ است! (انتهای بازه بزرگ‌تر از ابتدای بازه است.) از همین نکته هم می‌تواند سؤال مطرح شود.

اگر طول بازهٔ $[۲m-۱, ۴m+۱]$ برابر ۴ باشد. مقدار m را بیابید.

پاسخ طول بازه $=$ انتها $-$ ابتدا $= (۴m+۱)-(۲m-۱) = ۲m+۲ \xlongequal{\text{طبق فرض}} ۴$

$\Rightarrow ۲m = ۲ \Rightarrow m = ۱$

به ازای $m=۱$ بازه به صورت $[۱, ۵]$ در می‌آید که چون $۵>۱$ است، پس m قابل قبول است.

منتخب مدارس یاسوج

● طول بازه $(۲+a, ۶+a)$ چقدر است؟

پاسخ نهایی ۴

منتخب مدارس یاسوج

در بازهٔ $(m+۲, ۴)$ ، محدودهٔ m را بیابید.

پاسخ می‌دانیم ابتدای بازه باید کوچک‌تر از انتهای بازه باشد. پس داریم: $m+۲<۴ \Rightarrow m<۲$

منتخب مدارس زابل

● در بازهٔ $(m, ۲m+۱)$، محدودهٔ m را بیابید.

پاسخ نهایی $m>-۱$

منتخب مدارس تهران

تیپ ۳ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ای را که تعداد اعضای آن برابر با یک عدد حسابی باشد، «مجموعهٔ متناهی» می‌نامند. **مثلاً:** مجموعهٔ $\{۱,۲,۴,۶\}$ ، متناهی است، زیرا چهار عضو دارد. هم‌چنین مجموعه‌ای را که متناهی نباشد، «مجموعهٔ نامتناهی» می‌گویند.

تعداد اعضای مجموعه‌های نامتناهی از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ‌تر است.

مجموعهٔ اعداد طبیعی $(\mathbb{N})$ ، مجموعهٔ اعداد صحیح $(\mathbb{Z})$ و تعداد اعداد گویا یا گنگ در یک بازه، مجموعه‌های نامتناهی و مجموعهٔ مولکول‌های موجود در جهان هستی، مجموعه‌ای متناهی است. هم‌چنین مجموعهٔ تهی نیز مجموعه‌ای است که صفر عضو دارد و لذا مجموعه‌ای متناهی می‌باشد.

آقا اجازه! آخه مولکول‌های جهان هستی که خیلی زیادن! چطوری میگن متناهیه پس؟

سؤال دانش‌پژوه | قلی اکبرزاده

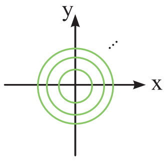
پاسخ قلی‌جان، مگه به تو گفتن برو بشمر! درسته که خیلی زیادن، اما با داشتن امکانات لازم و صرف وقت بسیار، ممکنه که بشه تعداد اون‌ها رو به‌دست آورد. پس یادت باشه تعداد اعضای بعضی از مجموعه‌های متناهی ممکنه خیلی زیاد باشه، ولی نباید به خاطر این، اونا رو مجموعهٔ نامتناهی بگیریم!

در جدول زیر مثال‌های مهم کتاب درسی که در امتحانات بارها سؤال داده‌اند را یکجا آورده‌ایم.

مجموعه	توضیح	نوع مجموعه
اعداد اول یک رقمی	$\{۲,۳,۵,۷\}$	متناهی
اعداد طبیعی فرد	$\{۱,۳,۵,\dots\}$	نامتناهی
اعداد طبیعی ۲ رقمی	$\{۱۰,\dots,۹۹\}$	متناهی
مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰	$\{۱۰,۲۰,\dots\}$	نامتناهی
شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۰	$\{۱,۲,۵,۱۰\}$	متناهی
بازه $(۰,۱)$	بی‌شمار عدد حقیقی در بازه وجود دارد.	نامتناهی
$A=\{x\in\mathbb{N} \mid ۱<x<۲\}$	$A=\varnothing$ پس متناهی است.	متناهی

مجموعه	نوع مجموعه
انسان‌های روی زمین	متناهی
سلول‌های عصبی مغز یک انسان	متناهی
تمام دایره‌های به مرکز مبدأ	نامتناهی
دانش‌آموزان مدرسه شما	متناهی
درخت‌های جنگل آمازون	متناهی
کسرهای مثبت با صورت یک	نامتناهی
مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب	متناهی

توضیح جدول:



۱ مطابق شکل مقابل، بی‌شمار دایره به مرکز مبدأ و با شعاع‌های مختلف r (r : عددی حقیقی غیرصفر) می‌توان رسم کرد.

۲ کسرهای مثبت با صورت یک را به‌صورت $\frac{1}{x}$ در نظر می‌گیریم که x می‌تواند هر عدد حقیقی مثبتی باشد. پس بی‌شمار کسر می‌توان نوشت.

۳ تعداد مولکول‌های موجود در یک مول آب، $6/022 \times 10^{23}$ عدد است که با این که عدد بزرگی می‌باشد ولی قابل شمارش است پس این مجموعه متناهی است.

! از این قسمت می‌توان به‌صورت جای خالی یا صحیح غلط، سوال مطرح کرد.

کتاب درسی زیر ذره‌بین

صفحه ۷

در فعالیت صفحهٔ ۷ کتاب درسی خواسته شده در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازهٔ (۰,۱) اظهار نظر کنید و سپس در مورد متناهی یا نا متناهی بودن $\mathbb{Q}$ سؤال کرده است تا به نتیجهٔ بسیار مهم زیر برسد:

اگر A دارای یک زیر مجموعهٔ نامتناهی باشد، آن‌گاه A حتماً یک مجموعهٔ نامتناهی است.

با این نتیجه، مثلاً $\mathbb{Z}$ نامتناهی است، زیرا $\mathbb{N}$ که زیر مجموعهٔ آن است، نامتناهی است.

با آوردن سه زیرمجموعهٔ نامتناهی برای $\mathbb{Z}$، نشان دهید که $\mathbb{Z}$ نامتناهی است. تألیفی

پاسخ $\mathbb{N}$ و $\mathbb{W}$ و اعداد صحیح منفی

در ادامه انواع تیپ‌های مهمی که از این درس می‌تواند در امتحان مطرح شود را با هم بررسی می‌کنیم:

تیپ ۱

بررسی متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های مختلفِ $A\cup B$، $A\cap B$ یا ...

فرض کنید دو یا چند مجموعه متناهی یا نامتناهی مانند A و B را به ما داده و در مورد متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های مختلفی مانند $A\cap B$، $A\cup B$، $A-B$ و $B-A$ یا هر مجموعهٔ دیگری سؤال می‌کنند.

برای پاسخگویی به این سؤالات جدول زیر کمک خیلی بزرگی به شما خواهد کرد.

جدول زیر به شما نشان می‌دهد که اگر A و B متناهی یا نامتناهی باشد، اوضاع از چه قرار است. خوب دقت کنید و به دلایل متناهی یا نامتناهی بودن آن‌ها فکر کنید:

مجموعه‌ها	$A\cap B$	$A\cup B$	$A-B$	$B-A$
A و B هردو متناهی	متناهی	متناهی	متناهی	متناهی
A متناهی و B نامتناهی	متناهی	نامتناهی	متناهی	نامتناهی
A و B هردو نامتناهی	می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.	نامتناهی	می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.	می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

برای حالتی که هردو A و B نامتناهی باشند، به مثال‌های زیر توجه کنید:

A	B	$A\cap B$	$A\cup B$	$A-B$	$B-A$
$\mathbb{N}$	$\mathbb{W}$	نامتناهی: $\mathbb{N}$	نامتناهی: $\mathbb{W}$	متناهی: $\varnothing$	متناهی: $\{0\}$
اعداد صحیح منفی	$\mathbb{N}$	متناهی: $\varnothing$	نامتناهی: $\mathbb{Z}-\{0\}$	نامتناهی: اعداد صحیح منفی	نامتناهی: $\mathbb{N}$

! از این قسمت هم می‌توان سؤال به‌صورت صحیح و غلط یا جای خالی در امتحان مطرح نمود.

منتخب مدارس کاشان

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

آ) اگر A مجموعه اعداد طبیعی کم‌تر از ۴ و B مجموعهٔ اعداد صحیح کمتر از ۴ باشد، آن‌گاه $A \cup B$ نامتناهی است.

ب) اگر A و B هر دو نامتناهی باشند، مجموعهٔ $A - B$ حتماً متناهی است.

پ) اگر $A - B$ متناهی باشد، آن‌گاه B می‌تواند نامتناهی باشد.

پاسخ آ) درست است. زیرا $A = \{۱,۲,۳\}$ متناهی و $B = \{۳,۲,...\}$ نامتناهی است، بنابراین طبق جدول، $A \cup B$ نامتناهی است.

ب) نادرست است. مثلاً اگر $A = \mathbb{N}$ و B اعداد زوج طبیعی، آن‌گاه $A - B$، مجموعه اعداد فرد طبیعی $\{۱,۳,۵,...\}$ است که نامتناهی است.

پ) درست است. مثلاً اگر B، مجموعهٔ نامتناهی $\mathbb{W}$ و A، اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ باشد. در این صورت $B - A = \mathbb{W} - \mathbb{N} = \{۰\}$ متناهی است ولی B نامتناهی شده است.

منتخب مدارس گرگان

اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد و B مجموعهٔ اعداد اول باشد، کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی و غیر تهی است؟

آ) $B - A$　　**ب) $A - B$**

پ) $A \cap B$　　**ت) $A - (A \cup B)$**

پاسخ ابتدا اعضای مجموعه‌های A و B را مشخص می‌کنیم:

$$A = \{۱,۳,۵,۷,۹,...\} \quad , \quad B = \{۲,۳,۵,۷,۱۱,...\}$$

سپس متناهی یا نامتناهی بودن قسمت‌های داده شده را بررسی می‌کنیم:

آ) $B - A = \{۲\} \Rightarrow$ متناهی و غیرتهی

ب) $A - B =$ اعداد فرد غیر اول $= \{۱,۹,۱۵,...\} \Rightarrow$ نامتناهی

پ) $A \cap B = \{۳,۵,۷,۱۱,...\} =$ اعداد اول غیر از دو $\Rightarrow$ نامتناهی

ت) $A - (A \cup B) = \{۱,۳,۵,۷,...\} - \{۱,۲,۳,۵,۷,...\} = \varnothing \Rightarrow$ متناهی

البته می‌توان گفت $A \subseteq A \cup B$ است، پس $A - (A \cup B) = \varnothing$ و نیازی به محاسبه $A \cup B$ نیست!

منتخب مدارس کرمان

اگر $A = [-۲,۱۰۰]$، $B = (-\infty,-۲]$ و C مجموعهٔ اعداد دو رقمی طبیعی مضرب ۳ باشد، متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را بررسی کنید.

آ) $C \cup B$　　**ب) $A \cap B$**

پ) $(A \cup B) \cap C$　　**ت) $C - (A - B)$**

پاسخ مجموعه‌های A و B نامتناهی و $C = \{۱۲,۱۵,...,۹۹\}$ متناهی است.

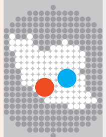
آ) قطعاً نامتناهی: $\underbrace{C}_{\text{متناهی}} \cup \overbrace{B}^{\text{نامتناهی}}$

ب) متناهی: $A \cap B = [-۲,۱۰۰] \cap (-\infty,-۲] = \{-۲\}$

پ) قطعاً متناهی: $\underbrace{(\overbrace{A}^{\text{نامتناهی}} \cup \overbrace{B}^{\text{نامتناهی}})}_{\text{نامتناهی}} \cap \underbrace{C}_{\text{متناهی}}$

ت) متناهی: $C - (A - B) = C - (\overbrace{[-۲,۱۰۰] - (-\infty,-۲]}^{\text{اشتراک A و B که \{-۲\} است را از A حذف می‌کنیم.}}) = \overbrace{C}^{\text{متناهی}} - \overbrace{(-۲,۱۰۰]}^{\text{نامتناهی}}$

منتخب مدارس بوشهر



● در مثال سمت راست، متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های $C \cap B$ و $C \cup A$ را بررسی کنید.

پاسخ نهایی

$C \cap B$: متناهی و $C \cup A$: نامتناهی

بررسی وضعیت متناهی یا نامتناهی بودن A و B وقتی یکی زیر مجموعهٔ دیگری است.

تیپ ۲

فرض کنید $A \subseteq B$ باشد، در این صورت به جملات زیر خوب توجه کرده و آن‌ها را به خاطر بسپارید.

۱ اگر B متناهی باشد، A نیز متناهی است.

۲ اگر B نامتناهی باشد، در مورد متناهی بودن یا نامتناهی بودن A نمی‌توان اظهار نظر کرد.

۳ اگر A نامتناهی باشد، B نیز نامتناهی است.

۴ اگر A متناهی باشد، در مورد متناهی بودن یا نامتناهی بودن B نمی‌توان اظهار نظر کرد.

درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

آ) اگر $A-B$ نامتناهی باشد، آن‌گاه $A \cup B$ نامتناهی است.

ب) اگر $A \cap B$ نامتناهی باشد، آن‌گاه A می‌تواند متناهی باشد.

پ) اگر $A \subseteq B$ و $B=[1,+\infty)$ باشد، آن‌گاه A حتماً نامتناهی است.

پاسخ آ) درست است. می‌دانیم $(A-B) \subseteq A \cup B$ است. پس چون $A-B$ نامتناهی است، لذا طبق درسنامه مجموعهٔ $A \cup B$ نیز نامتناهی خواهد بود.

ب) نادرست است. زیرا $A \cap B \subseteq A$، پس وقتی $A \cap B$ نامتناهی است، پس A نیز نامتناهی بوده و نمی‌تواند متناهی باشد.

پ) نادرست است. مجموعهٔ $B=[1,+\infty)$ نامتناهی است و چون $A \subseteq B$ است، در مورد متناهی یا نامتناهی بودن A نمی‌توان اظهارنظر کرد. **مثلاً:** A را می‌توان مجموعهٔ متناهی $A=\{1\}$ یا مجموعهٔ نامتناهی $A=[2,+\infty)$ در نظر گرفت.

منتخب مدارس اراک

منتخب مدارس همدان

● اگر $A \subseteq B$ و $A=(-\infty,4]$، متناهی یا نامتناهی بودن مجموعهٔ B را بررسی کنید و برای آن مثال بزنید.

پاسخ نهایی B می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. مثلاً: $B=\{3\}$ یا $B=(-\infty,0]$

پرسش‌های تشریحی

جاهای خالی را با عبارت مناسب پرکنید. منتخب مدارس کشور

۱ اگر $A=[-۱,۲)$ و $B=[-۲,۳]$ باشد، آن‌گاه .... $B-A=$ است.

۲ .... $W-(\mathbb{N}\cap\mathbb{Z})=$ و .... $(\mathbb{Q}-\mathbb{Q}')\cap\mathbb{Z}=$

۳ طول بازهٔ $[-۴,\frac{۳}{۲})$ برابر .... است.

۴ اگر عدد $۲m+۱$ متعلق به بازهٔ $[۳,۵)$ باشد، محدودهٔ m برابر .... است.

۵ اگر $A-B$ نامتناهی باشد، آنگاه مجموعه B قطعاً .... است. (متناهی - نامتناهی)

۶ اگر $W-B$ متناهی باشد، آن‌گاه مجموعه B قطعاً .... است. (متناهی - نامتناهی)

۷ اگر $A=\{\frac{۱}{x}\mid x\in\mathbb{N}\}$ و $B=\{\frac{x}{۸}\mid x\in\mathbb{N}\}$ باشد، آنگاه مجموعهٔ $A\cap B$ قطعاً .... است. (متناهی - نامتناهی)

۸ اگر A مجموعهٔ اعداد حسابی و B مجموعهٔ اعداد فرد طبیعی کم‌تر از ۱۰۰ باشد، آن‌گاه $A-B$ .... و $B-A$ .... است. (متناهی - نامتناهی)

۹ اگر B دارای یک زیرمجموعهٔ نامتناهی باشد، آن‌گاه مجموعه B یک مجموعه .... خواهد بود. (متناهی - نامتناهی)

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. منتخب مدارس کشور

۱۰ $\sqrt{۳۶}\in\mathbb{Q}'$

۱۱ $-\frac{۵}{۶}\notin\mathbb{Z}$

۱۲ $-\frac{\sqrt{۷}}{۸}\in\mathbb{Q}$

۱۳ $W\cap\mathbb{N}=\mathbb{N}$

۱۴ $W-\mathbb{Z}=\varnothing$

۱۵ $\mathbb{Q}'\cap\mathbb{N}=\mathbb{N}$

۱۶ $\mathbb{Q}'-\mathbb{R}=\mathbb{Q}$

۱۷ $\mathbb{N}\cup((\mathbb{Z}-\mathbb{N})\cap W)=W$

۱۸ $۲\in[\frac{\sqrt{۱۵}}{۲},\frac{\sqrt{۱۷}}{۲})$

۱۹ $\varnothing\subseteq(-۱,۲]$

۲۰ $۳\in(۱,۳)$

۲۱ $a\in\{a,b\}$

۲۲ $۲\in\{۱,۳\}$

۲۳ $[۲,۵)=(۲,۵]$

۲۴ $(۱,۲)\subseteq[۱,۲)\subseteq[۱,۲]$

۲۵ $(-۱,۴]\subseteq[-۱,۴)$

۲۶ $[a,b]\subseteq(a,b)$

۲۷ $\{۱,۲\}\subseteq(\sqrt{۲}-۱,\sqrt{۶})$

۲۸ $(۳,۶)\subseteq\{۳,۶\}$

۲۹ $\pi\in(۱,۵)\cap(۰,۴)$

۳۰ $(۱,۴)\cap(۵,۷)\subseteq\{۵\}$

با توجه به مبحث مجموعه‌های متناهی و نامتناهی، درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. منتخب مدارس کشور

۳۱ مجموعهٔ نامتناهی، مجموعه‌ای است که تعداد اعضای آن از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ‌تر است.

۳۲ اگر A و B متناهی باشند، $A\cup B$ و $A\cap B$ متناهی هستند.

۳۳ اگر A متناهی و B نامتناهی باشد، $A\cup B$ نامتناهی و $A\cap B$ متناهی است.

۳۴ اگر A و B نامتناهی باشند، $A\cup B$ و $A\cap B$ نامتناهی هستند.

۳۵ اگر $A\cap B$ متناهی باشد، A و B و $A\cup B$ متناهی هستند.

۳۶ اگر $A\cap B$ نامتناهی باشد، A و B و $A\cup B$ نامتناهی هستند.

۳۷ اگر $A\cup B$ متناهی باشد، A و B متناهی و $A\cap B$ نامتناهی است.

۳۸ اگر $A\cup B$ نامتناهی باشد، A و B نامتناهی و $A\cap B$ می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

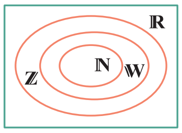
۳۹ اگر $A-B$ متناهی باشد، A متناهی است.

۴۰ اگر $A-B$ نامتناهی باشد، A حتماً نامتناهی است ولی B و $B-A$ می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

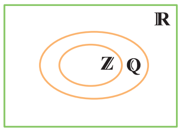
به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۴۱ مجموعه‌های داده شده را روی نمودار وِن با رنگ کردن مشخص کنید. کتاب درسی

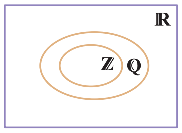
آ) مجموعهٔ اعداد صحیح منفی (غیرحسابی)



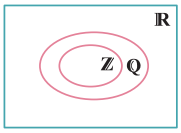
ب) مجموعهٔ $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$



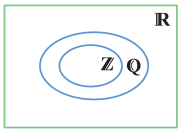
پ) مجموعهٔ $\mathbb{Q}\cap(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$



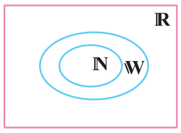
ت) مجموعهٔ $\mathbb{Q}\cup(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$



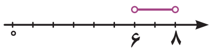
ث) مجموعهٔ اعداد گویای غیرصحیح



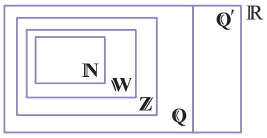
ج) مجموعهٔ اعداد حسابی غیرطبیعی



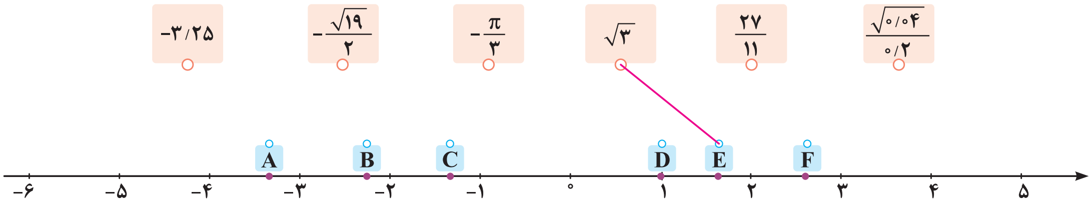
۴۲ جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید. منتخب مدارس کشور

شماره سطر	بازه	نوع بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
۱	$(۶,۸)$	باز	$\{x\in\mathbb{R}\mid ۶<x<۸\}$	
۲	....	نیم‌باز	$\{x\in\mathbb{R}\mid -۴<x\le ۱\}$	....
۳	$[-۱,۱]$	....	....	....
۴	$(-۲,۳)\cup\{۳,\sqrt{۲}\}$	....	....	....
۵	$(-\infty,۱]-\{۱\}$	....	....	....

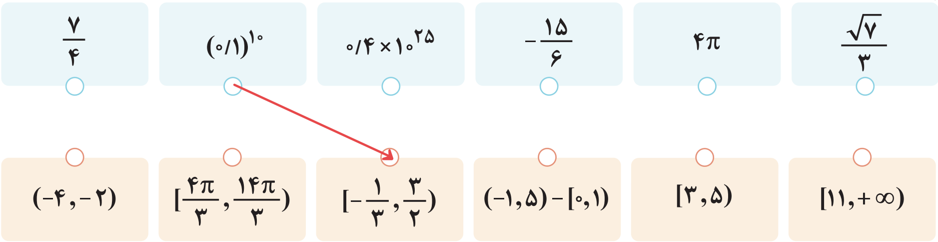
۴۳ اعداد $\frac{\sqrt{۸۱}}{۳}$ ، $-\sqrt{۴۹}$ ، $-\frac{\pi}{۵}$ ، $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$ ، $\sqrt{۰/۰۹}$ ، $-\frac{۴}{۹}$ ، $۱\frac{۳}{۵}$ و ۰ را روی شکل و در محل مناسب بنویسید. کتاب درسی



۴۴ با توجه به نقاط مشخص شده روی محور، جای هرکدام از اعداد زیر را مانند نمونه به کمک فلش مشخص کنید. کدام‌یک از این اعداد گنگ هستند؟ دور آن‌ها خط بکشید. کتاب درسی



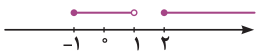
۴۵ هر یک از اعداد واقع درسطر اول، عضو یک یا چند تا از بازه‌های واقع در سطر دوم هستند. هر عدد را به بازه یا بازه‌های نظیر آن وصل کنید. (مانند نمونه) کتاب درسی

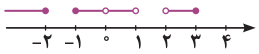


۴۶ مجموعه‌های زیر را روی محور نشان داده و سپس آن‌ها را در صورت امکان به‌صورت اجتماع بازه‌ها بنویسید. منتخب مدارس اهواز

آ) $\mathbb{R}-\{-۲,۱\}$ ب) $\mathbb{R}-[-۲,۱)$ پ) $\{-۲,۲\}-\mathbb{Z}$ ت) $[-۲,۲)-\mathbb{Z}$

۴۷ در شکل‌های زیر، مجموعه‌هایی که نمایش هندسی آن‌ها روی محور رسم شده است را به‌صورت اجتماعی از بازه‌ها بنویسید. منتخب مدارس یزد

آ 

ب 

۴۸ حاصل هریک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آن‌ها روی یک محور به‌دست آورید. منتخب مدارس کشور

آ $(-۳,۲)\cup[-۴,۳]$ ب $(-۱,۲]\cap[۱,+\infty)$ پ $(-\infty,۴)\cap(۰,۲]$ ت $(-\infty,a]\cap(a-۱,+\infty)$

ث $(\mathbb{R}-[۰,۲))\cap(-۱,۳]$ ج $(۰,۳]-[۱,+\infty)$ چ $(-\infty,۳)-(-۱,۱]$

۴۹ اگر $A=[-۱,۲)$ و $B=(۱,۳]$ و $C=[-۲,۲]$ باشد، مجموعه‌های خواسته شده زیر را به کمک رسم آن‌ها روی محور بیابید. نوع بازه‌ها را در قسمت‌های (آ) تا (ت) مشخص کنید. منتخب مدارس کشور

آ $A\cap B$ ب $A\cup B$ پ $A-B$ ت $B-A$

ث $C-A$ ج $(C\cup B)-A$ چ $(C-A)\cup(A-B)$

۵۰ اگر $۳\in(۶x-۱۵,۵x-۷)$ باشد، محدوده x را به‌دست آورید. منتخب مدارس رشت

۵۱ اگر $A=(-\infty,-۱)\cup(۴,+\infty)$ و $B=(-\infty,۵)\cap[-۴,+\infty)$ باشد، مجموعهٔ $A\cap B$ را بیابید. منتخب مدارس یاسوج

۵۲ اگر $[-۱,b]\cup[a,۷]=[-۲,۹]$ باشد، آن‌گاه a و b را بیابید. منتخب مدارس ابهر

۵۳ اگر $(-\infty,\frac{۱-m}{۴}]\cap[\frac{-۲m-۱}{۵},+\infty)=\{a\}$ باشد، مقدار m و a را بیابید. منتخب مدارس ری

۵۴ اگر $(-\infty,\frac{۳m+۵}{۷}]\cup(\frac{m-۱}{۲},+\infty)=\mathbb{R}$ باشد، محدودهٔ m را پیدا کنید. منتخب مدارس کاشان

۵۵ اگر $[۷,۱۶)=(a-۲b,۹)\cup[۷,۳a+۱)$ شود، مقادیر a و b را بیابید. $(b\in\mathbb{Z})$ منتخب مدارس ساری

۵۶ مقدار a را به‌گونه‌ای بیابید که مجموعهٔ $(a-۲,۲a+۱)\cup\{۳a\}$، بازه‌ای نیم‌باز باشد. منتخب مدارس ساری

۵۷ فرض کنید A مجموعهٔ تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰ باشد. کتاب درسی

آ یک زیرمجموعهٔ متناهی و یک زیرمجموعهٔ نامتناهی از A بنویسید.

ب مجموعه‌ای بنویسید که A زیرمجموعهٔ آن باشد.

پ دو زیرمجموعهٔ نامتناهی مانند C و D از A بنویسید به‌طوری‌که $D\subseteq C$ باشد.

۵۸ فرض کنید $A\subseteq B$ باشد، آن‌گاه عبارات درست و نادرست را مشخص کنید. کتاب درسی

آ اگر A متناهی باشد، لزوماً B نیز متناهی است.

ب اگر A نامتناهی باشد، لزوماً B نیز نامتناهی است.

پ اگر B نامتناهی باشد، لزوماً A نیز نامتناهی است.

ت اگر B متناهی باشد، مجموعهٔ A می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

۵۹ بازهٔ $(-۲,۳)$ را در نظر بگیرید. کتاب درسی

آ دو عدد گنگ و دو عدد گویا در این بازه نام ببرید.

ب در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویا و گنگ موجود در این بازه چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

پ در مورد متناهی یا نامتناهی بودن Q و Q' چه می‌توان گفت؟

۶۰ برای هرکدام از قسمت‌های زیر، دو مجموعهٔ نامتناهی A و B (در صورت وجود) مثال بزنید. کتاب درسی

آ $A\cap B$ متناهی باشد.

ب $A\cap B$ نامتناهی باشد.

پ مجموعهٔ $A\cap B$ عضوی نداشته باشد.

ت $A\cup B$ متناهی باشد.

ث $A\cup B$ نامتناهی باشد.

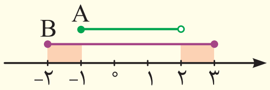
ج $A\subseteq B$ بوده و $A-B$ دو عضوی باشد.

۶۱ اگر A یک مجموعهٔ متناهی و B یک مجموعهٔ نامتناهی باشد، متناهی یا نامتناهی بودن هریک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید. منتخب مدارس تبریز

آ $B-A$ ب $A-B$ پ $A-(A\cup B)$ ت $B-(A\cap B)$

پاسخنامه
تشریحی

فصل ۱

۱


$\Rightarrow B-A=[-۲,۳]-[-۱,۲)$
$=[-۲,-۱)\cup[۲,۳]$

۲
$W-(N\cap Z)\xlongequal{N\subseteq Z\Rightarrow N\cap Z=N} W-N$
$=\{۰,۱,۲,۳,...\}-\{۱,۲,۳,...\}=\{۰\}$

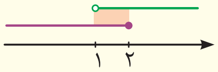
$(Q-Q')\cap Z=(Q-\overbrace{(Q\cap Q')}^{\varnothing})\cap Z=Q\cap Z\xlongequal{Z\subseteq Q}Z$

۳
$[-۴,\frac{۳}{۲})\Rightarrow$ طول بازه $=\frac{۳}{۲}-(-۴)=\frac{۳}{۲}+۴=\frac{۳+۸}{۲}=\frac{۱۱}{۲}=۵/۵$

۴
$۲m+۱\in(۳,۵]\Rightarrow ۳<۲m+۱\leq ۵$

$$\Rightarrow\begin{cases}۳<۲m+۱\Rightarrow ۲<۲m\Rightarrow ۱<m\\ \text{و}\\ ۲m+۱\leq ۵\Rightarrow ۲m\leq ۴\Rightarrow m\leq ۲\end{cases}$$

بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم که جواب برابر $۱<m\leq ۲$ می‌شود.



۵ چون $B-A\subseteq B$ است و $B-A$، نامتناهی است، پس B نیز نامتناهی خواهد بود.

۶ اگر $W-B$ متناهی باشد، پس حتماً B نامتناهی بوده است، زیرا اگر B متناهی باشد، $W-B$ نامتناهی می‌شود که خلاف فرض است.

۷
$A=\{\frac{۱}{x}\mid x\in N\}\xRightarrow{x=۱,۲,۳,...}A=\{\frac{۱}{۱},\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},...,\frac{۱}{n},...\}$

$B=\{\frac{x}{۸}\mid x\in N\}$

$\xRightarrow{x=۱,۲,۳,...}B=\{\frac{۱}{۸},\underbrace{\frac{۲}{۸}}_{\frac{۱}{۴}},\frac{۳}{۸},\underbrace{\frac{۴}{۸}}_{\frac{۱}{۲}},\frac{۵}{۸},\frac{۶}{۸},\frac{۷}{۸},\underbrace{\frac{۸}{۸}}_{۱},\frac{۹}{۸},...\}$

$\Rightarrow A\cap B=\{\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲},۱\}\Rightarrow$ $A\cap B$ متناهی است.

۸ $A=W$ نامتناهی و B متناهی است. پس $A-B$ نامتناهی و $B-A$ متناهی است.

۹ طبق درسنامه اگر $A\subseteq B$ و A نامتناهی باشد، B نیز نامتناهی خواهد بود.

۱۰ نادرست است. زیرا $\sqrt{۳۶}=۶$ عددی گویا بوده و عضو Q' نیست.

۱۱ درست است. زیرا $-\frac{۵}{۶}$ عدد صحیح نیست.

۱۲ نادرست است. زیرا $\sqrt{۷}$ عددی گنگ است، پس $-\frac{\sqrt{۷}}{۸}$ که حاصل تقسیم عددی گنگ بر عددی گویا است، هم عددی گنگ و عضو Q' است نه Q.

۱۳ درست است. زیرا $N\subseteq W\Rightarrow N\cap W=N$

۱۴ درست است. زیرا $W\subseteq Z\Rightarrow W-Z=\varnothing$

۱۵ نادرست است. زیرا Q' اعداد گنگ و N اعداد طبیعی هیچ اشتراکی با هم ندارند. پس $Q'\cap N=\varnothing$.

۱۶ نادرست است. زیرا $Q'\subseteq R\Rightarrow Q'-R=\varnothing$

۱۷ درست است. زیرا:

$N\cup((Z-N)\cap W)=N\cup(\{۰,-۱,-۲,...\}\cap\{۰,۱,۲,...\})$
$=N\cup\{۰\}=W$

۱۸ درست است زیرا:

$۹<۱۵<۱۶\xRightarrow{\sqrt{\ }}۳<\sqrt{۱۵}<۴\xRightarrow{\div ۲}\frac{۳}{۲}<\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}<۲$

یعنی ۲ از $\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}$ بزرگ‌تر است.

$۱۶<۱۷<۲۵\xRightarrow{\sqrt{\ }}۴<\sqrt{۱۷}<۵\xRightarrow{\div ۲}۲<\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}<\frac{۵}{۲}$

یعنی ۲ از $\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$ کوچک‌تر است.

پس ۲ متعلق به بازهٔ $[\frac{\sqrt{۱۵}}{۲},\frac{\sqrt{۱۷}}{۲})$ است.

۱۹ درست است. تهی زیر مجموعهٔ هر مجموعه‌ای است.

۲۰ نادرست است. زیرا $(۱,۳)$ بازه‌ای باز است و شامل ۱ و ۳ نیست.

۲۱ درست است. زیرا a عضو مجموعهٔ دو عضوی $\{a,b\}$ است.

۲۲ نادرست است. زیرا مجموعهٔ $\{۱,۳\}$ دو عضو ۱ و ۳ را دارد و ۲ عضو آن نیست.

۲۳ نادرست است. زیرا مثلاً عدد ۵ عضو مجموعهٔ $[۲,۵)$ نیست ولی عضو مجموعهٔ $[۲,۵]$ است!

۲۴ درست است.

۲۵ نادرست است. زیرا عدد ۴ عضو مجموعهٔ $(-۱,۴]$ است. پس اگر این مجموعه بخواهد زیرمجموعهٔ $[-۱,۴)$ باشد، مجموعهٔ $[-۱,۴)$ هم باید ۴ را داشته باشد در حالی‌که این‌طور نیست!

۲۶ نادرست است. زیرا اعداد b و a در مجموعهٔ $[a,b]$ هستند ولی در مجموعهٔ (a,b) حضور ندارند.

۲۷ درست است. زیرا $\sqrt{۶}$ از ۲ بزرگتر و $\sqrt{۲}-۱ \simeq ۱/۴-۱=۰/۴$. پس بازه $(\sqrt{۲}-۱,\sqrt{۶})$ شامل اعداد ۱ و ۲ است، پس مجموعهٔ دو عضوی $\{۱,۲\}$ زیرمجموعهٔ $(\sqrt{۲}-۱,\sqrt{۶})$ است.

۲۸ نادرست است. زیرا مجموعهٔ $\{۳,۶\}$ تنها دو عضو ۳ و ۶ را دارد، در حالی‌که مجموعهٔ $(۳,۶)$ شامل تمام اعداد حقیقی بین ۳ و ۶ است. پس مجموعهٔ $(۳,۶)$ نمی‌تواند زیرمجموعهٔ مجموعهٔ دو عضوی $\{۳,۶\}$ باشد.

۲۹ درست است. مجموعهٔ $(۱,۵)\bigcap(۰,۴)=(۱,۴)$ و چون $\pi \simeq ۳/۱۴$ پس π عضو این مجموعه است.

۳۰ درست است. مجموعهٔ $(۱,۴)\bigcap(۵,۷)=\varnothing$ بوده و $\varnothing$ زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است.

۳۱ درست است.

۳۲ درست است.

۳۳ درست است. زیرا $B \subseteq A \bigcup B$ و چون B نامتناهی است، پس $A \bigcup B$ هم نامتناهی می‌شود و چون $A \bigcap B \subseteq A$ است و A متناهی است پس $A \bigcap B$ نیز متناهی خواهد بود.

۳۴ نادرست است. زیرا $A \bigcap B$ می‌تواند نامتناهی یا متناهی باشد. (به مثال درسنامه رجوع کنید.) البته $A \bigcup B$ نامتناهی است.

۳۵ نادرست است. زیرا مثلاً اگر A مجموعه اعداد صحیح نامثبت و B مجموعه اعداد حسابی باشد آن‌گاه $A \bigcap B=\{۰\}$ متناهی است ولی A و B و $A \bigcup B$ نامتناهی هستند.

۳۶ درست است. زیرا $A \bigcap B$ زیر مجموعهٔ هم A و هم B است. پس اگر $A \bigcap B$ نامتناهی باشد، دو مجموعهٔ A و B نیز نامتناهی و در نتیجه $A \bigcup B$ نیز نامتناهی است.

۳۷ نادرست است. اگر $A \bigcup B$ متناهی باشد چون $A,B \subseteq A \bigcup B$، نتیجه می‌گیریم که A و B نیز متناهی و در نتیجه $A \bigcap B$ نیز متناهی است نه نامتناهی!

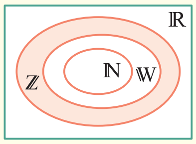
۳۸ نادرست است. مثلاً اگر $A=\{۱\}$ و $B=\mathbb{N}$ آن‌گاه $A \bigcup B=\mathbb{N}$ شده که نامتناهی است (شرط مسئله برقرار است.) درحالی‌که A متناهی بود! پس نتیجهٔ مهم این است که اگر $A \bigcup B$ نامتناهی باشد، آن‌گاه حداقل یکی از دو مجموعهٔ A یا B باید نامتناهی باشد و لزومی ندارد که هر دوی A و B نامتناهی باشد. البته $A \bigcap B$ می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. مثلاً با توجه به شرط $A \bigcup B$ نامتناهی، اگر $A=\mathbb{N}$ و $B=\mathbb{W}$ باشد. آن‌گاه $A \bigcap B=\mathbb{N}$ شده که نامتناهی است و اگر $A=\{۱\}$ و $B=\mathbb{N}$ باشد، $A \bigcap B$ برابر $\{۱\}$ شده که متناهی است.

۳۹ نادرست است. مثلاً اگر $A=\mathbb{W}$ و $B=\mathbb{N}$ باشد، در این صورت $A-B=\{۰\}$ متناهی است ولی A نامتناهی بود.

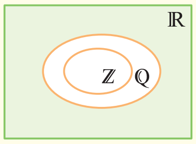
۴۰ درست است. زیرا $A-B \subseteq A$ بوده و اگر $A-B$ نامتناهی باشد، با توجه به درسنامه، A نیز نامتناهی خواهد بود. برای بررسی وضعیت B، فرض کنید، $A=\mathbb{Z}$، آن‌گاه B می‌تواند مثلاً مجموعه متناهی $\{۱\}$ باشد یا مجموعهٔ نامتناهی $\mathbb{N}$. در هر دو حالت $A-B$ نامتناهی است. هم‌چنین در حالتی که B متناهی باشد، آن‌گاه $B-A$ هم متناهی خواهد بود. چون زیرمجموعهٔ آن است و در حالتی که B نامتناهی باشد، چون A هم نامتناهی است $B-A$ می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

۴۱

آ) مجموعه اعداد صحیح منفی $=\{\dots,-۲,-۱\}$



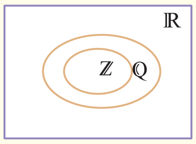
ب) $\mathbb{R}-\mathbb{Q}=$ اعداد گنگ



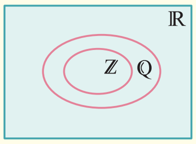
پ) $\mathbb{Q}\bigcap(\mathbb{R}-\mathbb{Q})=$ اعداد گنگ با اعداد گویا اشتراکی ندارد $=\varnothing$

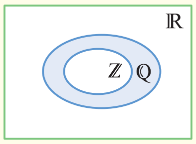
پس جایی را نمی‌توان رنگ کرد.

عضوی ندارد.



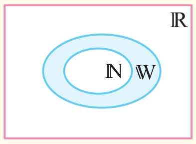
ت) $\mathbb{Q}\bigcup(\mathbb{R}-\mathbb{Q})=$ (اعداد گویا) $\bigcup$ (اعداد گنگ) $=$ کل اعداد حقیقی





ث) مجموعه اعداد گویای غیرصحیح $=\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$

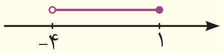
ج) مجموعه اعداد حسابی غیرطبیعی $=\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{۰\}$



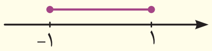
! این مجموعه (ناحیهٔ آبی) تنها شامل عدد صفر می‌باشد.

۴۲

سطر (۲) : $(-۴,۱]$,

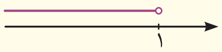


سطر (۳) : بازهٔ بسته، $\{x\in\mathbb{R}\,|-۱\le x\le ۱\}$,



سطر (۴) : $(-۲,۳)\cup\{۳,\sqrt{۲}\}=(-۲,۳]$، نیم‌باز، $\{x\in\mathbb{R}\,|-۲<x\le ۳\}$,

سطر (۵) : $(-\infty,۱]-\{۱\}=(-\infty,۱)$، باز، $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<۱\}$,



۴۳

$\frac{\sqrt{۸۱}}{۳}=\frac{۹}{۳}=۳\in\mathbb{N}$ و $-\sqrt{۴۹}=-۷\in\mathbb{Z}$

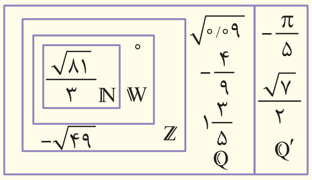
$-\frac{\pi}{۵}\in\mathbb{Q}'$ و $\frac{\sqrt{۷}}{۲}\in\mathbb{Q}'$

$\sqrt{۰/۰۹}=\sqrt{(۰/۳)^{۲}}=۰/۳=\frac{۳}{۱۰}\in\mathbb{Q}$

$\frac{-۴}{۹}\in\mathbb{Q}$ و $۱\frac{۳}{۵}=\frac{۸}{۵}\in\mathbb{Q}$ و $۰\in\mathbb{W}$

! می‌دانیم وقتی مثلاً می‌نویسیم $۳\in\mathbb{N}$، عدد سه، عضو $\mathbb{W}$ ، $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ هم هست.

حال این اعداد را در محل مناسب در شکل می‌نویسیم:



۴۴ عدد $-۳/۲۵$ را به نقطهٔ A، عدد $-۲/...=-\frac{۴/...}{۲}=-\frac{\sqrt{۱۹}}{۲}$ را به نقطهٔ B، عدد $-۱/...=-\frac{۳/۱۴}{۳}\simeq\frac{-\pi}{۳}$ را به نقطهٔ C، عدد $۲/...=\frac{۲۷}{۱۱}$ را به نقطهٔ F و عدد $۱=\frac{۰/۲}{۰/۲}=\frac{\sqrt{(۰/۲)^{۲}}}{۰/۲}=\frac{\sqrt{۰/۰۴}}{۰/۲}$ را به نقطهٔ D باید وصل کنیم. (دقت کنید اعداد $\sqrt{۳}$ ، $\frac{-\pi}{۳}$ و $-\frac{\sqrt{۱۹}}{۲}$ اعداد گنگ هستند.)

۴۵ ● عدد $\frac{۷}{۴}\simeq ۱/۷۵$ عضو مجموعهٔ زیر است:

$(-۱,۵)-[۰,۱)=(-۱,۰)\cup[۱,۵)$

● عدد $(۰/۱)^{۱۰}$، عددی بین صفر و یک است. پس عضو مجموعهٔ $[-\frac{۱}{۳},\frac{۳}{۲})$ است.

● عدد $۰/۴\times ۱۰^{۲۵}$ عددی خیلی بزرگ است و لذا عضو مجموعهٔ $[۱۱,+\infty)$ است.

● عدد $-۲/۵=\frac{-۱۵}{۶}$ عضو بازهٔ $(-۴,-۲)$ است.

● عدد $۴\pi\simeq ۴(۳/۱۴)=۱۲/۵۶$ بوده که عضو بازه‌های $[۱۱,+\infty)$ و $[\frac{۴\pi}{۳},\frac{۱۴\pi}{۳})$ است.

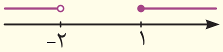
دقت کنید ۴π بزرگتر از $\frac{۴\pi}{۳}$ است و از $\frac{۱۴\pi}{۳}$ کوچکتر است زیرا $\frac{۱۲\pi}{۳}=۴\pi<\frac{۱۴\pi}{۳}$، پس ۴π در داخل بازهٔ $[\frac{۴\pi}{۳},\frac{۱۴\pi}{۳})$ قرار دارد.

● عدد $\frac{۲/...}{۳}\simeq\frac{\sqrt{۷}}{۳}$ حدود $\frac{۲}{۳}$ است. لذاعضوبازهٔ $[-\frac{۱}{۳},\frac{۳}{۲})$ می‌باشد.

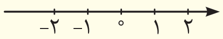
۴۶

آ) $\mathbb{R}-\{-۲,۱\}=(-\infty,-۲)\cup(-۲,۱)\cup(۱,+\infty)$

ب) $\mathbb{R}-[-۲,۱)=(-\infty,-۲)\cup[۱,+\infty)$

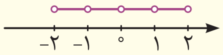


پ) $\{-۲,۲\}-\mathbb{Z}=\varnothing$



این قسمت را نمی‌توان به عنوان اجتماع بازه‌ها نوشت.

ت) $[-۲,۲)-\mathbb{Z}=(-۲,-۱)\cup(-۱,۰)\cup(۰,۱)\cup(۱,۲)$



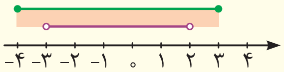
۴۷

آ) $[-۱,۱)\cup[۲,+\infty)$

ب) $(-\infty,-۲]\cup[-۱,۰)\cup(۰,۱)\cup(۲,۳]$

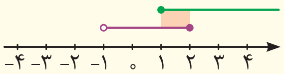
۴۸

آ)



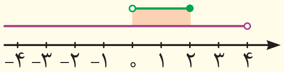
$(-۳,۲)\cup[-۴,۳]=[-۴,۳]$

ب)



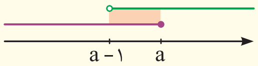
$(-۱,۲]\cap[۱,+\infty)=[۱,۲]$

پ)



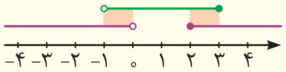
$(-\infty,۴)\cap(۰,۲]=(۰,۲]$

ت)

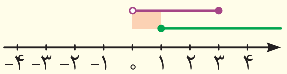


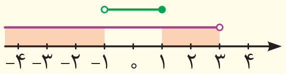
$(-\infty,a]\cap(a-۱,+\infty)=(a-۱,a]$

ث)



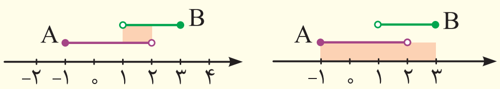
$(\mathbb{R}-[۰,۲))\cap(-۱,۳]=(-۱,۰)\cup[۲,۳]$

ج)  $(۰,۳]-[۱,+\infty)=(۰,۱)$

چ) 

$(-\infty,۳)-(-۱,۱]=(-\infty,-۱]\cup(۱,۳)$

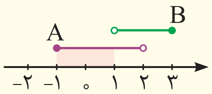
۴۹



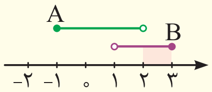
آ) بازهٔ باز: $A\cap B=(۱,۲)$

ب) بازهٔ بسته: $A\cup B=[-۱,۳]$

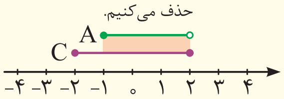
پ) بازهٔ بسته: $A-B=A-(A\cap B)=[-۱,۲)-(۱,۲)=[-۱,۱]$

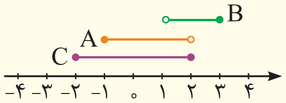


ت) بازهٔ بسته: $B-A=B-(A\cap B)=(۱,۳]-(۱,۲)=[۲,۳]$



اشتراک را از C حذف می‌کنیم.

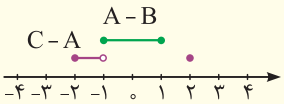
ث)  $\Rightarrow C-A=[-۲,-۱)\cup\{۲\}$

ج) 

$(C\cup B)-A=[-۲,۳]-[-۱,۲)=[-۲,-۱)\cup[۲,۳]$

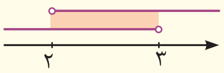
چ) $(C-A)\cup(A-B)$

$$=\underbrace{[-۲,-۱)\cup\{۲\}}_{\text{با توجه به قسمت (ث)}}\cup\underbrace{[-۱,۱]}_{\text{با توجه به قسمت (پ)}}=[-۲,۱]\cup\{۲\}$$

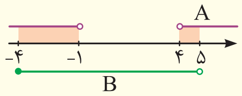


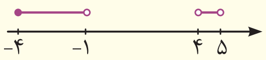
۵۰ چون عدد ۳ در بازهٔ $(۶x-۱۵\ ,\ ۵x-۷)$ حضور دارد پس داریم:

$$\begin{cases} ۶x-۱۵<۳\Rightarrow ۶x<۱۸\xrightarrow{\div ۶}x<۳ \\ \text{و} \\ ۳<۵x-۷\Rightarrow ۱۰<۵x\xrightarrow{\div ۵}۲<x \end{cases}$$

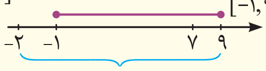
$\xrightarrow{\text{اشتراک}}$  $\Rightarrow x\in(۲,۳)$

۵۱ ابتدا مجموعه‌های $A=(-\infty,-۱)\cup(۴,+\infty)$ و $B=(-\infty,۵)\cap[-۴,+\infty)=[-۴,۵)$ را روی محور رسم می‌کنیم و سپس به‌کمک نمودار، اشتراک A و B را می‌یابیم.



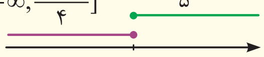
 $\Rightarrow A\cap B=[-۴,-۱)\cup(۴,۵)$

۵۲ طبق فرض $[-۱,b]\cup[a,۷]=[-۲,۹]$ شده است. پس b باید برابر ۹ و a باید برابر ۲- باشد، علت آن را روی محور بیان می‌کنیم:



۵۳ برای آن که اشتراک دو بازهٔ $(-\infty,\frac{۱-m}{۴}]$ و $[\frac{-۲m-۱}{۵},+\infty)$ تنها یک عدد (a) شود. به ناچار باید وضعیت دو بازه به‌صورت زیر باشد:

$(-\infty,\frac{۱-m}{۴}]$ $[\frac{-۲m-۱}{۵},+\infty)$



$\frac{۱-m}{۴}=\frac{-۲m-۱}{۵}=a$

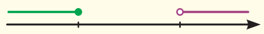
حال معادلهٔ زیر را حل می‌کنیم تا m به‌دست آید:

$$\frac{۱-m}{۴}=\frac{-۲m-۱}{۵}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}۵-۵m=-۸m-۴$$

$$\Rightarrow ۳m=-۹\Rightarrow m=-۳$$

به ازای $m=-۳$ دو بازه به‌صورت $(-\infty,۱]$ و $[۱,+\infty)$ درمی‌آیند که اشتراک آن‌ها ۱ می‌شود. پس $a=۱$.

۵۴ ابتدا دو مجموعهٔ $(\frac{m-۱}{۲},+\infty)$ و $(-\infty,\frac{۳m+۵}{۷}]$ را روی محور رسم می‌کنیم:



$\frac{۳m+۵}{۷}$ $\frac{m-۱}{۲}$

باتوجه به شکل، اگرقرار باشد اجتماع این دو مجموعه، $\mathbb{R}$ (مجموعهٔ اعداد حقیقی) شود، باید داشته باشیم:

$$\frac{۳m+۵}{۷}\ge\frac{m-۱}{۲}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}۲(۳m+۵)\ge۷(m-۱)$$

$$\Rightarrow ۶m+۱۰\ge۷m-۷\Rightarrow ۱۷\ge m$$

۵۵ اجتماع دو بازهٔ $(a-۲b,۹)$ و $[۷,۳a+۱)$ برابر $[۷,۱۶)$ شده است. پس حتماً $۳a+۱$ برابر ۱۶ بوده و داریم:

$$۳a+۱=۱۶\Rightarrow ۳a=۱۵\Rightarrow a=۵$$

از طرفی چون ابتدای بازهٔ اجتماع عدد ۷ بوده، نتیجه می‌گیریم $۷\le a-۲b$ می‌باشد. هم‌چنین انتهای بازه همیشه بزرگ‌تر از ابتدای بازه است، پس در بازهٔ $(a-۲b,۹)$ داریم: $a-۲b<۹$. بنابراین:

$$۷\le a-۲b<۹\xrightarrow{a=۵}۷\le ۵-۲b<۹\xrightarrow{-۵}۲\le -۲b<۴$$

$$\xrightarrow{\div(-۲)}-۱\ge b>-۲\xrightarrow{b\in\mathbb{Z}}b=-۱$$


گاج
فرمول بیست
پیشرفته
امتحان یار
ریاضی دهم

فهرست

آزمون ۱ **فصل اول** زمان پاسخگویی: **۱۲۰ دقیقه**

۱	**جاهای خالی را با عبارات مناسب پُر کنید.** آ) حاصل $(\mathbb{R}\cap\mathbb{Z})-(\mathbb{Q}\cup\mathbb{W})$ برابر با مجموعهٔ .... است. ب) اگر $A=[-۱,۲)\cup[۴,+\infty)$ و مجموعهٔ مرجع، مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، آن‌گاه .... $=A'$. پ) جملهٔ $(۳n-۲)$اُم یک دنباله به‌صورت $\dfrac{۲\sqrt{n+۵}}{n^۲+۳}$ است. جملهٔ هفتم این دنباله برابر ....است. ت) در دنبالهٔ هندسی با جملهٔ عمومی $t_n=\dfrac{۲}{۳\times ۲^n}$، قدرنسبت برابر .... است.	۲
۲	**درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.** آ) $((-۲,۳]\cap(-\infty,۲))\subseteq[-۲,۲]$. ✓ ⊗ ب) اگر $A\subseteq B$ و B' نامتناهی باشد، آن‌گاه A' نیز نامتناهی است. ✓ ⊗ پ) اگر A و B دو مجموعهٔ جدا از هم باشند، آن‌گاه $n(A-B')=۰$ است. ✓ ⊗ ت) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی و هم هندسی باشد. ✓ ⊗	۲
۳	**اگر $A=\{x\mid x\in\mathbb{R},-۳<x\leq ۲\}$ و $B=\{x\mid x\in\mathbb{R},-۱<x\leq ۴\}$ باشد، حاصل مجموعه‌های زیر را به‌دست آورید.** آ) $A\cap B$ ب) $A'-B$	۱/۵
۴	**اگر $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ مجموعهٔ مرجع باشد و $A'=\{۱,۲,۶\}$ و $B=\{۵,۶,۷\}$، آن‌گاه حاصل $A\cap(A'-B')$ را بیابید.**	۱
۵	**اگر $n(U)=۱۰۰$، $n(A')=۷۰$، $n(B)=۲۵$ و $n(B-A)=۱۹$ باشد، آن‌گاه مطلوب است؛ محاسبهٔ:** آ) $n(A\cup B)$ ب) $n(A'\cup B')$	۱/۵

۶ متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید. ۰/۷۵

آ اعداد طبیعی ۲ رقمی

ب تمام دایره‌های به مرکز مبدأ

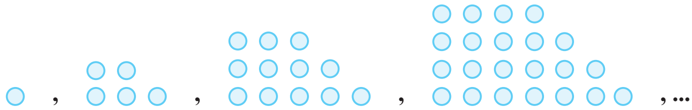
پ کسرهای مثبت با صورت یک

۷ در بررسی ۵۰۰ کشاورز، ۳۷۰ نفر دارای مزرعهٔ چای و ۲۰۰ نفر دارای شالیزار هستند. تعداد آن‌هایی که نه مزرعهٔ چای و نه شالیزار دارند، برابر تعداد کشاورزانی است که فقط شالیزار دارند. چند کشاورز فقط مزرعهٔ چای دارند؟ ۱/۵

۸ در یک الگوی خطی جملهٔ پنجم برابر ۳۲ و جملهٔ دوازدهم برابر ۶۷ است. جملهٔ چندم این الگو ۲۹۲ است؟ ۱/۵

۹ جملهٔ عمومی الگوی مقابل را نوشته و سپس جملهٔ سی‌ام آن را بیابید. ۶ , ۱۶ , ۳۰ , ۴۸ , ... ۱/۵

۱۰ در الگوی زیر، تعداد دایره‌ها در شکل نهم را به‌دست آورید. ۱



۱۱ در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع سه جملهٔ اول ۳ و مجموع سه جملهٔ دوم ۳۹ است. مجموع جملات نهم و دهم را بیابید. ۱/۲۵

۱۲ بین ۲۰ و ۸۰ به تعداد مشخص‌شده در شکل، واسطهٔ حسابی درج کنید. ۱

۱۳ جملهٔ سوم یک دنبالهٔ هندسی ۱۲ و جملهٔ ششم آن ۹۶ است. در این صورت: ۱/۵

آ جملهٔ عمومی دنباله را بیابید.

ب جملهٔ چندم دنباله ۳۰۷۲ است؟

۱۴ بین دو عدد $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳۲}$ سه واسطهٔ هندسی مثبت درج کنید. ($\frac{۱}{۲}$:جملهٔ اول) ۱

۱۵ قیمت دوچرخه‌ای ۱۰ میلیون تومان است. اگر دوچرخهٔ دست دوم در هر سال ٪۵ نسبت به سال قبل، کاهش قیمت داشته باشد؛ آن‌گاه بعد از ۳ سال، به چه قیمتی می‌توان دوچرخه را فروخت؟ ۱