۱

فصل اوّل

ترسیم‌های هندسی و استدلال

هندسه و به‌ویژه ترسیم‌های هندسی از دیرباز مورد استفاده بشر بوده‌است.

درس اوّل

ترسیم‌های هندسی

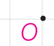
انسان از دوران باستان تاکنون همواره از هندسه و به‌ویژه از ترسیم‌های هندسی برای حل مسائل مختلف یاری گرفته است.

از تقسیم‌بندی زمین‌های کشاورزی تا طراحی انواع ابزارهای کاربردی پیشرفته کنونی، همگی نیازمندِ ترسیم‌های هندسی است.

فعالیت

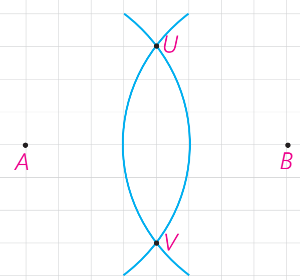
(برای مراحل زیر از خط‌کش و پرگار استفاده کنید.)

۱ــ نقطه‌ای مانند O را در صفحه درنظر بگیرید و نقاطی را مشخص کنید که فاصلهٔ یکسانی از نقطهٔ O دارند. (مثلاً همهٔ نقاطی که فاصله‌شان از نقطهٔ O برابر ۲سانتی‌متر است.)

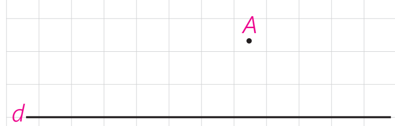


۲ــ خط d را در نظر بگیرید و تمام نقاطی که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از خط d قرار دارند را مشخص کنید.

۳ــ نقاط A و B را درنظر بگیرید. دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول پاره‌خط AB باز کنید و یک‌بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B و با همان شعاع قبلی کمان بزنید تا یکدیگر را در نقاط U و V قطع کنند. U و V چه ویژگی مشترکی دارند؟



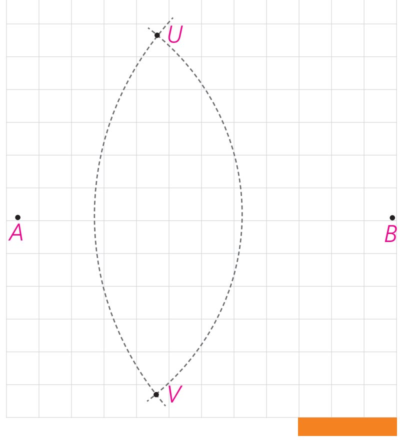
۴ــ نقطهٔ A، مانند شکل مقابل به فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از نقطهٔ A باشند.



۵ــ نقاط A و B را به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر از هم درنظر بگیرید. دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ ۳ سانتی‌متر باز کنید و از نقطهٔ A یک کمان بزنید. سپس دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ ۴ سانتی‌متر باز کنید و از نقطهٔ B یک کمان بزنید.

الف) نقاط روی کمان اول چه ویژگی مشترکی دارند؟

ب) نقاط روی کمان دوم چه ویژگی مشترکی دارند؟

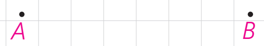


پ) نقاط تقاطع دو کمان فاصله‌شان از نقاط A و B چگونه است؟ برای اینکه چنین نقاط تقاطعی وجود داشته باشند، اندازهٔ شعاع آنها و فاصلهٔ نقاط A و B چه شرطی باید داشته باشند؟

ت) طول اضلاع مثلث AUB چقدر است؟

کاردرکلاس

۱ــ دو نقطه مانند A و B را به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از هم درنظر بگیرید. نقاطی را بیابید که فاصله‌شان از A، ۲ و از B، ۲/۵ سانتی‌متر باشد.



۲ــ توضیح دهید که چگونه می‌توان مثلثی به طول اضلاع ۴ و ۵ و ۶ واحد رسم کرد.

۳ــ نقاط A و B به فاصلهٔ ۷ سانتی‌متر از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطهٔ A برابر ________ و از نقطهٔ B برابر ________ باشد.
جاهای خالی را به‌گونه‌ای کامل کنید که مسئلهٔ زیر :

الف) دو جواب داشته باشد.

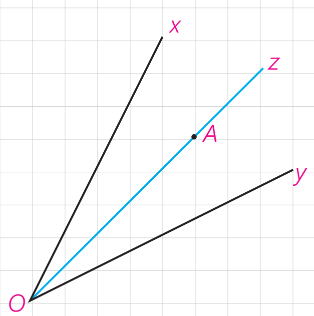
ب) یک جواب داشته باشد.

پ) جواب نداشته باشد.

برخی خواص نیمساز و ترسیم آن

فعالیت

۱ــ زاویهٔ xOy و نیم‌خط Oz را نیمساز آن درنظر بگیرید. فرض کنید نقطهٔ A نقطه‌ای دلخواه روی Oz باشد. ثابت کنید که فاصلهٔ نقطهٔ A از دو ضلع زاویهٔ xOy یکسان است. (یعنی اگر از نقطهٔ A عمودهایی بر نیم‌خط‌های Ox، Oy رسم کنیم طول آنها باهم برابر است.)



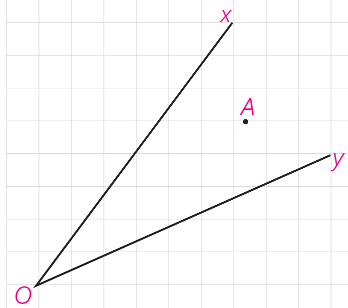
نتیجه ۱

اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد ________ .

۲ــ زاویهٔ xOy و نقطهٔ A را چنان درنظر می‌گیریم که فاصلهٔ نقطهٔ A از نیم‌خط‌های Oy و Ox باهم برابر باشد.

نشان دهید که نقطهٔ A روی نیمساز زاویهٔ xOy قرار دارد.

(راهنمایی: پاره‌خط OA، و دو عمود از نقطهٔ A بر خطوط Ox و Oy رسم کنید و نشان دهید پاره‌خط OA همان نیمساز xOy است.)



نتیجه ۲

اگر نقطه‌ای به فاصلهٔ یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد، آن نقطه ________ قرار دارد.

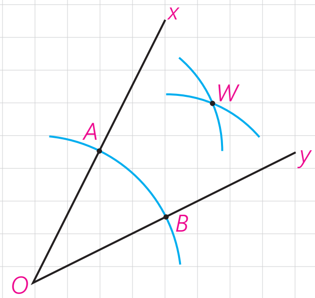
نتیجه

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی ________ یک زاویه قرار داشته باشد، ________ و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی ________ آن زاویه قرار دارد.

فعالیت

۱ــ زاویهٔ xOy را درنظر بگیرید. دهانهٔ پرگار را کمی باز کنید و به مرکز O کمانی بزنید تا نیم‌خط‌های Ox و Oy را به ترتیب در نقاط A و B قطع کند.

ــ طول پاره‌خط‌های OA و OB نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟



۲ــ دهانهٔ پرگار را کمی باز کنید (بیش از نصف طول AB) و یک بار به مرکز A و بار دیگر با همان اندازه و به مرکز B یک کمان بزنید تا دو کمان مانند شکل در نقطه‌ای مانند W همدیگر را قطع کنند.

ــ طول پاره‌خط‌های AW و BW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

ــ پاره‌خط‌های WA و WB و WO را رسم کنید. دو مثلث OAW و OBW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

ــ اندازهٔ زاویه‌های AOW و BOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

ــ پاره‌خط OW برای زاویهٔ xOy چه نوع پاره‌خطی است؟

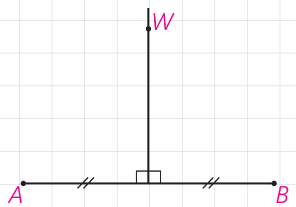
کاردرکلاس

روش رسم نیمساز یک زاویه را توضیح دهید.

برخی خواص عمودمنصف و ترسیم آن

فعالیت

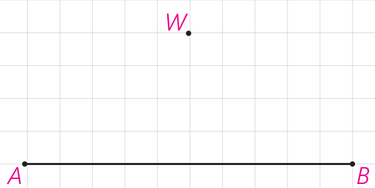
۱ــ پاره‌خط AB و عمودمنصف آن را مانند شکل مقابل درنظر بگیرید و فرض کنید W نقطه‌ای روی عمودمنصف AB باشد. نشان دهید نقطهٔ W از دوسر پاره‌خط AB به یک فاصله است.



نتیجه ۱

اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک‌پاره‌خط قرار داشته باشد، از دوسر آن پاره‌خط ______________ .

۲ــ پاره‌خط AB و نقطهٔ W را به‌گونه‌ای درنظر بگیرید که نقطهٔ W از A و B به یک فاصله باشد (یعنی WA = WB) نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.



(راهنمایی: از نقطهٔ W به A و B و به وسط پاره‌خط AB وصل کنید و نشان دهید مثلث‌های ایجاد شده باهم هم‌نهشت هستند و از این مطلب استفاده کنید و نشان دهید W روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.)

نتیجه ۲

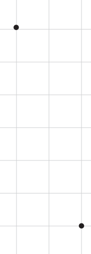
اگر نقطه‌ای از دوسر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد ______________ ______________ .

نتیجه

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد ______________ و هر نقطه‌که ______________ روی عمودمنصف ______________ .

فعالیت

۱ــ یک نقطه را در صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از نقطه موردنظر بگذرد؟

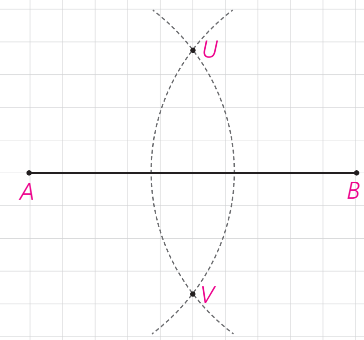


۲ــ دو نقطه را در یک صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن دو نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از هر دو نقطهٔ موردنظر بگذرد؟

۳ــ به نظر شما برای اینکه یک خط به‌طور کامل مشخص باشد، حداقل چند نقطه از آن خط را باید داشته باشیم؟

فعالیت

پاره‌خط AB را مانند شکل مقابل درنظر بگیرید.



۱ــ دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار از نقطهٔ A و بار دیگر با همان اندازه از نقطهٔ B کمان بزنید تا یکدیگر را در دو نقطه مانند U و V قطع کنند.

۲ــ طول پاره‌خط‌های AU و BU نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۳ــ طول پاره‌خط‌های AV و BV نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۴ــ آیا می‌توان گفت نقاط U و V روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند؟ چرا؟

۵ــ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

کاردرکلاس

مراحل رسم عمودمنصف یک پاره‌خط را توضیح دهید.

رسم خط عمود بر یک خط و رسم خط موازی با یک خط

فعالیت

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن

خط d و نقطهٔ M را روی آن، مانند شکل مقابل درنظر بگیرید. می‌خواهیم خطی بکشیم که از M بگذرد و بر d عمود باشد.

۱ــ به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d بیابید؛ به‌گونه‌ای که M وسط پاره‌خط AB باشد.

۲ــ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

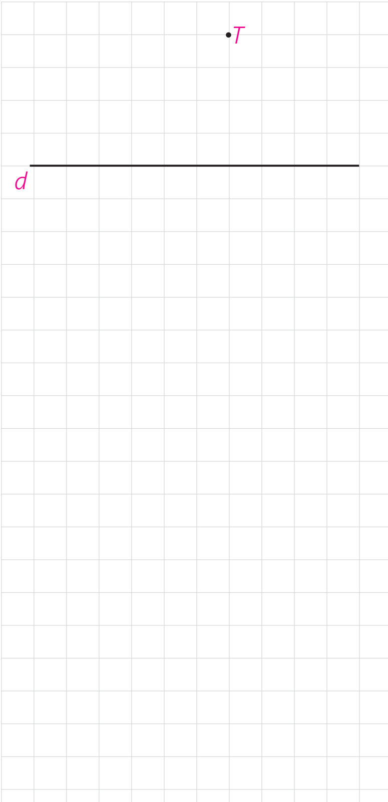
۳ــ عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d ______ و از نقطهٔ ______ .

کاردرکلاس

مراحل رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن را توضیح دهید.

فعالیت

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیر واقع بر آن



خط d و نقطهٔ T را که غیر واقع بر آن است، مانند شکل مقابل درنظر بگیرید.
می‌خواهیم خطی بکشیم که از T بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۱ــ به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d به‌گونه‌ای بیابید که از نقطهٔ T به یک فاصله باشند.

۲ــ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

۳ــ آیا عمودمنصف پاره‌خط AB از نقطهٔ T می‌گذرد؟ چرا؟

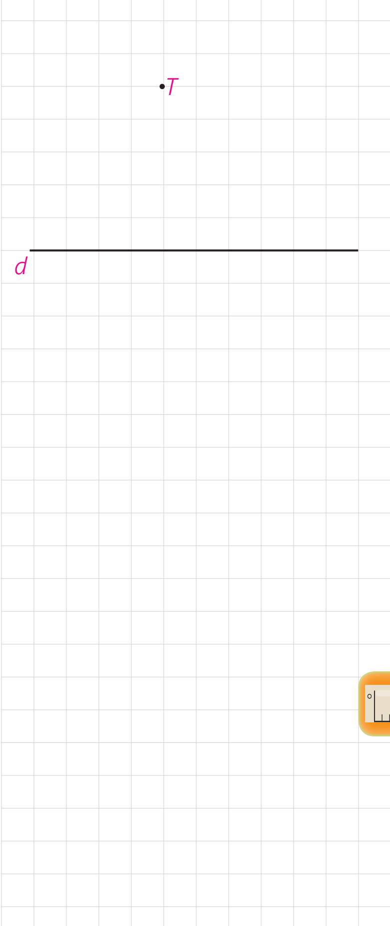
عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d ________ و از نقطهٔ ________ .

کاردرکلاس

روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای غیرواقع بر آن را توضیح دهید.

فعالیت

رسم خط موازی با خط داده شده از یک نقطهٔ غیرواقع بر آن



خط d و نقطه T مانند شکل مقابل داده شده‌اند.
می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطهٔ Tبگذرد و با خط d موازی باشد.

۱ــ خط d_1 را به‌گونه‌ای رسم کنید که از نقطهٔ T بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۲ــ خط d_2 را به‌گونه‌ای رسم کنید که از نقطهٔ T بگذرد و بر خط d_1 عمود باشد.

۳ــ خط d_2 نسبت به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d_1 را مورّب درنظر بگیرید.)

کاردرکلاس

روش رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ای غیرواقع بر آن را توضیح دهید.

تمرین

۱ــ فرض کنیم هر چهار ضلعی که قطرهایش منصف هم باشند، متوازی‌الاضلاع است. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشد. چند متوازی‌الاضلاع به طول قطرهای ۴ و ۷ می‌توان رسم کرد؟

۲ــ فرض کنیم هر چهار ضلعی که قطرهایش باهم برابر و منصف هم باشد، مستطیل است. مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۶ سانتی‌متر باشد.

۳ــ فرض کنیم که برای لوزی‌بودن یک چهارضلعی کافی است که قطرهای آن چهارضلعی عمودمنصف یکدیگر باشند. ترسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۵ باشد.

ب) یک لوزی به طول ضلع ۵ و طول قطر ۶ رسم کنید.

۴ــ دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.

الف) نقطه‌ای بیابید که فاصلهٔ آن از هر ضلع زاویهٔ موردنظر ۲ واحد باشد.

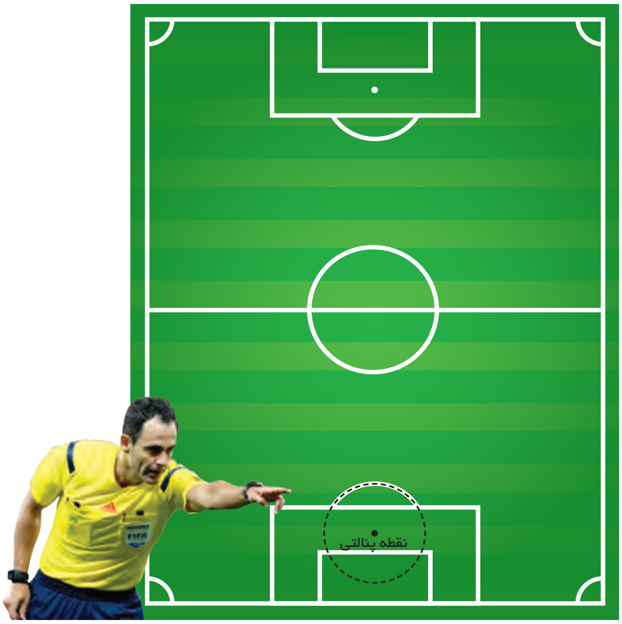
ب) با استفاده از نقطه‌ای که در قسمت (الف) یافته‌اید نیمساز زاویه را رسم کنید.

۵ــ به قسمت (الف) پاسخ دهید و از نتیجهٔ آن در قسمت (ب) استفاده کنید.

الف) وتری مانند AB از یک دایره را در نظر بگیرید. وضعیت عمودمنصف AB و مرکز دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

ب) آیا می‌دانستید که در زمین فوتبال نقطهٔ پنالتی مرکز دایره‌ای است که قسمتی از قوس آن در جلوی محوطهٔ جریمه کشیده شده است؟

یک داور فوتبال لحظه‌ای که اعلام پنالتی می‌کند، متوجه می‌شود که نقطهٔ پنالتی مشخص نیست. اگر او وسایل لازم برای کشیدن خط راست و کمان دایره را داشته باشد، چگونه می‌تواند با استفاده از قوس جلوی محوطهٔ هجده قدم، نقطهٔ پنالتی را مشخص کند.



درس دوم

استدلال

شیوهٔ درست استدلال در زندگی هر فرد و نیز در جامعهٔ انسانی اهمیت فراوانی دارد. استدلال نادرست در بسیاری مواقع، نتیجه‌گیری‌های غلط، تیره‌شدن روابط، ایجاد باورهای نادرست و پیامدهای خطرناک فردی و اجتماعی دیگری را در پی خواهد داشت و حتی ممکن است به ایجاد مشکلات شخصیتی در افراد بینجامد. ممکن است فردی با استدلال‌هایی این‌گونه، همواره راه موفقیت را بر خود بسته ببیند :

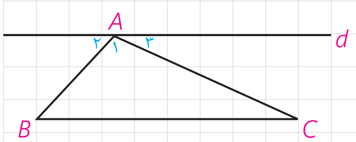
ــ من در اولین امتحانم موفق نشدم، پس در امتحان‌های بعدی نیز موفق نخواهم شد.

ــ تیم مورد علاقهٔ من از ابتدای فصل در تمام بازی‌هایش شکست خورده است، پس در بازی‌آینده نیز شکست خواهد خورد.

استقرا و استنتاج

در سال‌های قبل تاحدی با استدلال و اثبات آشنا شدید. نوعی از استدلال، که با آن روبه‌رو شدید به این صورت بود که از مشاهدات و بررسی موضوعی در چند حالت، نتیجه‌ای کلی در آن موضوع گرفته می‌شود یا به اصطلاح «از جزء به کل می‌رسیم». البته با چنین استدلالی نمی‌توان همواره به درستیِ نتیجهٔ گرفته‌شده مطمئن بود.

به‌طور مثال اگر فردی با مشاهدهٔ اینکه سه نفر از افراد یک کلاس به رنگ سبز علاقه دارند، نتیجه‌گیری کند که همهٔ افراد آن کلاس به رنگ سبز علاقه دارند، فرد مورد نظر از **استدلال استقرایی** استفاده کرده است.



$$d \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \hat{B}=\hat{A}_۲ \\ \hat{C}=\hat{A}_۳ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_۱+\hat{A}_۲+\hat{A}_۳=۱۸۰^\circ$$

نوع دیگری از استدلال که با آن آشنا شدید، براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت‌هایی است که درستی آنها را پذیرفته‌ایم و به آن **استدلال استنتاجی** گفته می‌شود.

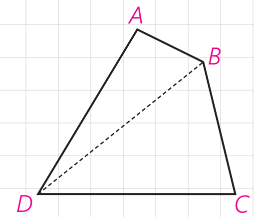
به‌طور مثال با دانستن رابطهٔ بین خطوط موازی و مورّب و زوایای بین آنها، اثبات اینکه مجموع زوایای داخلی یک مثلث ۱۸۰° است به طریق مقابل، یک استدلال استنتاجی است که با نمادهای ریاضی نوشته شده است. توجه کنید که استدلال استنتاجی را به صورت کلامی نیز می‌توان انجام داد.

فعالیت

به استدلال‌هایی که دو دانش‌آموز برای مسئلهٔ زیر ارائه داده‌اند، دقت کنید و در مورد میزان اعتبار هریک از آنها گفت‌وگو کنید.

مسئله : مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.

پژمان : در تمام چهارضلعی‌های مربع، مستطیل، لوزی و متوازی‌الاضلاع با توجه به اینکه زاویه‌های مجاور مکمل یکدیگرند به‌سادگی ثابت می‌شود که مجموع زوایای داخلی آنها 360° است. بنابراین مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.



پیمان : می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است. یک چهارضلعی دلخواه مانند ABCD در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم و دو رأس مقابل آن، مثلاً D و B را به هم وصل می‌کنیم.

مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD با مجموع زاویه‌های داخلی دو مثلث $\overset{\Delta}{ABD}$ و $\overset{\Delta}{BCD}$ برابر است؛ بنابراین مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD برابر است با 360°.

پیمان ادعا می‌کند که با این استدلال ثابت می‌شود که مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی برابر 360° است. آیا به نظر شما این ادعای او درست است؟

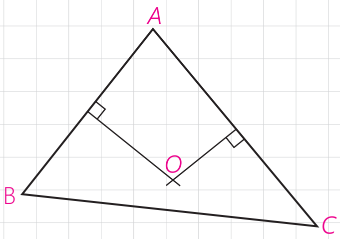
آیا همین استدلال را برای هر چهارضلعی دیگری که به شما بدهند، می‌توانید به‌کار ببرید؟ اگر جواب شما مثبت است، پس این ویژگی را که «مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD در مسئلهٔ قبل برابر 360° است»، به سایر چهارضلعی‌های محدب می‌توان تعمیم داد.

ــ نوع استدلال ارائه‌شده توسط هرکدام از دانش‌آموزان را بیان کنید.

مثال : می‌دانیم که هر نقطهٔ روی عمودمنصف یک پاره خط از دو سرِ آن پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

حال با کامل‌کردن استدلال استنتاجی بیان شده نتیجه بگیرید که **سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث همرس‌اند (در یک نقطه به هم می‌رسند).**

استدلال : مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم. چون پاره‌خط‌های AB و AC متقاطع‌اند، عمودمنصف‌های آنها نیز در نقطه‌ای مانند O متقاطع‌اند.

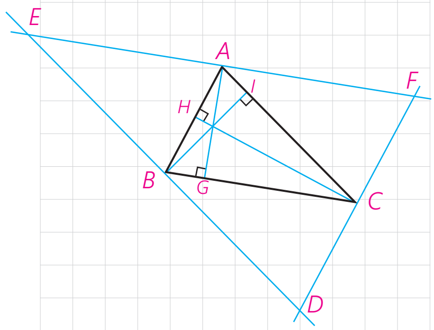


۱ــ نقطهٔ O روی عمودمنصف پاره‌خط AC است؛ بنابراین .... = ...

۲ــ نقطهٔ O روی عمودمنصف پاره‌خط AB است؛ بنابراین .... = ...

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : .... = ... بنابراین نقطهٔ O روی .... قرار دارد. درنتیجه نقطهٔ O محل برخورد ....

مثال : استدلال استنتاجی زیر را کامل کنید و نتیجه بگیرید که سه ارتفاع هر مثلث همرس‌اند.



استدلال : مثلث دلخواه ABC را در نظر بگیرید و از هر رأس آن خطی به موازات ضلع مقابل به آن رأس رسم کنید تا مطابق شکل مقابل مثلثی مانند DEF به‌وجود آید.

مثلث ABC با مثلث‌های ACF و ABE همنهشت است (چرا؟).

بنابراین AE=BC=AF و لذا نقطهٔ A .... پاره خط EF است.

از طرفی : $\left.\begin{matrix} AG\perp BC \\ BC \parallel EF \end{matrix}\right\} \Rightarrow AG \;\square\; EF$

لذا خط AG .... پاره‌خط EF است.

به‌طور مشابه می‌توان نشان داد :

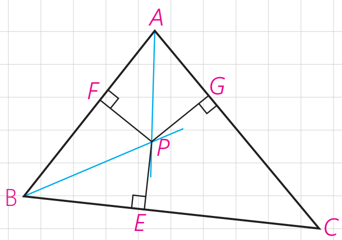
پاره‌خط BI، .... پاره‌خط DE است.

پاره‌خط CH، .... پاره‌خط DF است.

بنابراین، ارتفاع‌های مثلث ABC، روی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث .... هستند و درنتیجه همرس‌اند.

مثال : می‌دانیم که هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. حال با کامل کردن استدلال استنتاجی بیان شده نتیجه بگیرید که نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث همرس‌اند.

استدلال : مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم. نیمسازهای زوایای A و B مانند شکل یکدیگر را در نقطه‌ای مانند P قطع می‌کنند. از نقطهٔ P، مانند شکل سه عمود به اضلاع مثلث رسم می‌کنیم.



۱ــ نقطهٔ P روی نیمساز زاویهٔ A است؛ بنابراین .... = ...

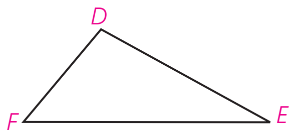
۲ــ نقطهٔ P روی نیمساز زاویهٔ B است؛ بنابراین .... = ...

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : ______ = ______ بنابراین نقطهٔ P روی ______
درنتیجه نقطهٔ P محل برخورد ______ .

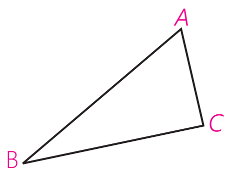
فعالیت

به مثلث‌های زیر دقت کنید. در سطر اولِ جدول، نام اضلاع مثلث را به ترتیب از بزرگ به کوچک و در سطر دوم، نام زاویه‌های مثلث را نیز به ترتیب از بزرگ به کوچک بنویسید.

اضلاع			
زاویه‌ها			



اضلاع			
زاویه‌ها			



اضلاع			
زاویه‌ها			

چه رابطه‌ای بین هر ضلع و زاویهٔ زیر آن وجود دارد؟

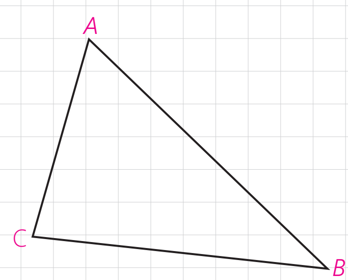
با توجه به این رابطه دربارهٔ یک مثلث دلخواه چه حدسی می‌توان زد؟

برای رسیدن به این حدس از چه نوع استدلالی استفاده کردید؟

آیا با این استدلال می‌توان مطمئن بود که حدس موردنظر درست است؟

مسئله : اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند،
زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، **بزرگ‌تر است** از زاویهٔ روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.

استدلال : برای واضح‌شدن مطلب و کمک به حل مسئله، شکل مثلث را رسم می‌کنیم.
آیا می‌توان هر نوع مثلث دلخواهی کشید؟ مانند آنچه در مسئله گفته شده است، مثلثی می‌کشیم که دو ضلع نابرابر داشته باشد و ویژگی خاص دیگری نداشته باشد.

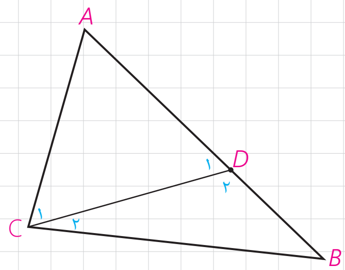


فرض: $AB>AC$
حکم: ______ > ______

یادآوری

۱ــ در مثلث متساوی‌الساقین زوایای روبه‌رو به ساق‌ها با هم برابرند.

۲ــ اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی یک مثلث برابر است با مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش. بنابراین هر زاویهٔ خارجی مثلث از هر زاویهٔ داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است.



می‌دانیم طبق فرض $AB>AC$ است؛ لذا می‌توانیم نقطهٔ D را روی AB جایی انتخاب کنیم که $AC=AD$

★ اندازهٔ زاویه‌های C و $C_۱$ نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{C}_۱ \square \hat{C}$

مثلث ADC چه نوع مثلثی است؟

★★ اندازهٔ زاویه‌های $C_۱$ و $D_۱$ نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{D}_۱ \square \hat{C}_۱$

زاویهٔ $D_۱$ چه نوع زاویه‌ای برای مثلث DBC است؟

★★★ اندازهٔ زاویه‌های $D_۱$ و B نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{B} \square \hat{D}_۱$

از ★ و ★★ و ★★★ چه نتیجه‌ای دربارهٔ اندازهٔ زاویه‌های B و C می‌توان گرفت؟

$\hat{B} \square \hat{C}$

همان‌طورکه مشاهده کردید در مثلثی مانند $\overset{\Delta}{ABC}$ فرض کردیم که ضلع $AB>AC$ است و نشان دادیم : زاویهٔ روبه‌رو به $AC >$ زاویهٔ روبه‌رو به AB است.

چرا می‌توان این موضوع را دربارهٔ تمام مثلث‌هایی که دو ضلع نابرابر دارند، پذیرفت؟

برخی نتایج مهم و پرکاربرد که مانند مسئلهٔ قبل با استدلال استنتاجی به‌دست می‌آید، **قضیه** نامیده می‌شود.

قضیهٔ ۱: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند،
زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویهٔ روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.

فرض: $AB<AC$
حکم: $\hat{C}<\hat{B}$

ــ بار دیگر به آنچه انجام شد، دقت کنید. بررسی اندازه‌های اضلاع و زوایای مثلث‌های مختلف، دقت در کشف رابطه میان این اندازه‌ها، حدس در برقراری رابطه‌ای خاص، طرح مسئله، اثبات درستی مسئله و نهایتاً نتیجه‌گیری.

بسیاری از نتایج ریاضی، طی چنین مراحلی توسط علاقه‌مندان به ریاضی به‌دست آمده است. مراحل این روند و حتی حدس‌ها و تفکراتی که درست نیست اما در این مراحل صورت می‌گیرد، می‌تواند موجب ارتقای تفکر ریاضی شود.

اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم به آنچه حاصل می‌شود «عکس قضیه» گفته می‌شود. عکس یک قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد.

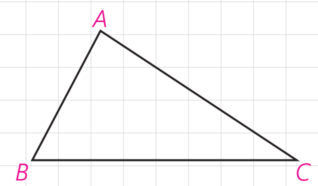
به‌طور مثال عکس قضیهٔ ۱ به‌صورت زیر است :

عکس قضیه ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر.

فرض: $\hat{C} < \hat{B}$

حکم: $AB < AC$

عکس قضیه ۱ در صفحات بعد اثبات شده‌است.



مثال :

قضیه : اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.

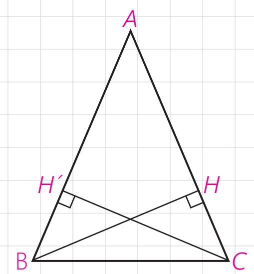
عکس قضیه : اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، آنگاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

مثال :

قضیه : اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

فرض: $AB = AC$

حکم: $BH = CH'$



عکس قضیه : اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

فرض: $BH = CH'$

حکم: $AB = AC$

درواقع معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض، که حکم از آن ناشی می‌شود با حکم جابه‌جا می‌شود؛ مثلاً در مثال قبل مثلث‌بودن ABC و ارتفاع‌بودن BH و CH' در خود قضیه و عکس آن جزء مفروضات است.

گزاره یک جملهٔ خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد، اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد. گزاره می‌تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن گزارهٔ ساده می‌گویند و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از چند گزارهٔ ساده باشد که به آن گزاره مرکب می‌گویند؛ مثلاً گزاره‌های «فردا هوا بارانی است» و «پانزده عددی اول است»، هرکدام یک گزارهٔ ساده است و «فردا هوا بارانی و پانزده یک عدد اول است» یک گزارهٔ مرکب است.

مثال :

الف) جمله‌های زیر گزاره‌اند :

ــ مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

ــ ۲>۳

ب) جمله‌های زیر گزاره نیستند :

ــ آیا فردا هوا بارانی است؟

ــ چه هوای خوبی!

ــ کتابت را مطالعه کن.

نقیض یک گزاره : همان‌طورکه گفته شد، ارزش یک گزاره یا درست است و یا نادرست. نقیض یک گزاره مانند مثال‌های زیر ساخته می‌شود و ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره است.

مثال :

الف) گزاره : «a از b بزرگ‌تر است.»

نقیض آن : «چنین نیست که a از b بزرگ‌تر باشد.» که معادل است با «a از b بزرگ‌تر نیست.» و معادل است با «a از b کوچک‌تر و یا با b برابر است.»

ب) گزاره : «مجموع زوایای داخلی هر مثلث $^\circ$۱۸۰ است.»

نقیض آن : «چنین نیست که مجموع زوایای داخلی هر مثلث $^\circ$۱۸۰ است.» که معادل است با «مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن $^\circ$۱۸۰ نیست.»

پ) گزاره : «یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی‌اش $^\circ$۳۶۰ نیست.»

نقیض : «چنین نیست که یک چهارضلعی وجود داشته باشد که مجموع زوایای داخلی‌اش $^\circ$۳۶۰ نیست.» که معادل است با «هر چهارضلعی مجموع زوایای داخلی‌اش $^\circ$۳۶۰ است.»

در برخی گزاره‌ها به‌جای اینکه دربارهٔ چیزی خبری قطعی داده شود، خبری که اعلام می‌شود با یک شرط بیان می‌شود؛ مثلاً «اگر باران ببارد، مسابقه برگزار نخواهد شد.» به چنین گزاره‌هایی، **گزاره‌های شرطی** می‌گویند.

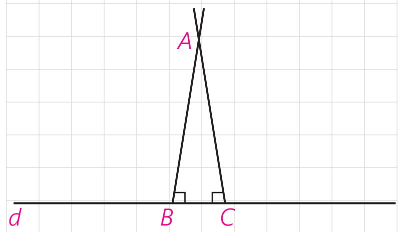
نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی کاربرد دارد، **برهان غیرمستقیم** یا **برهان خلف** است. بدین‌صورت که به‌جای اینکه به‌طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم غلط باشد (یا به عبارتی فرض می‌کنیم، نقیض حکم درست باشد) و به یک تناقض یا به یک گزاره غلط یا غیرممکن می‌رسیم. در این حالت نتیجه می‌گیریم که فرض غلط بودن حکم نادرست بوده و حکم نمی‌تواند غلط باشد.

مثال : از یک نقطه غیر واقع بر خط نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن خط رسم کرد.

فرض : نقطه‌ای مانند A غیر واقع بر خطی مانند d وجود دارد.

حکم : از نقطهٔ A نمی‌توان بیش از یک عمود بر خط d رسم کرد.

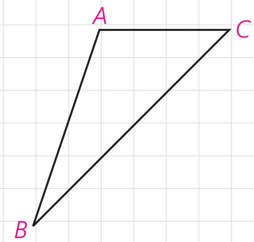
استدلال : با برهان غیرمستقیم فرض می کنیم حکم غلط باشد؛ یعنی فرض می کنیم از نقطهٔ A دو عمود بر خط d رسم کرده‌ایم که مانند شکل، خط d را در نقاط B و C قطع کرده‌اند. در این صورت مجموع زوایای داخلی مثلث ABC بزرگ‌تر از 180° خواهد شد و این غیرممکن است. پس امکان رسم دو عمود از یک نقطهٔ غیر واقع بر یک خط وجود ندارد؛ یعنی حکم نمی‌تواند غلط باشد.



حال می‌خواهیم درستی عکس قضیهٔ ۱ را با برهان غیرمستقیم ثابت کنیم.

عکس قضیهٔ ۱ : اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع مقابل به زاویهٔ بزرگ‌تر، **بزرگ‌تر است** از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر.

برای واضح شدن مسئله و کمک به حل آن، شکل مثلث را رسم می‌کنیم و با استفاده از آن فرض و حکم را می‌نویسیم.



فرض : $\hat{A} > \hat{B}$

حکم : $BC > AC$

اثبات : با برهان غیرمستقیم فرض می کنیم حکم ______ باشد. بنابراین باید ______ یا ______ .

هر دو حالت را جداگانه بررسی می کنیم و نشان می‌دهیم هر دو حالت به تناقض منجر می‌شود.

حالت اول : اگر $BC < AC$ باشد، طبق قضیهٔ ۱ باید ______ که با فرض در تناقض است.

حالت دوم : اگر $BC = AC$ باشد، $\overset{\Delta}{ABC}$ یک مثلث ______ خواهد بود و می‌دانیم در این حالت باید $\hat{A} = \hat{B}$ باشد که در تناقض با فرض است. لذا هر دو حالت $BC < AC$ و $BC = AC$ غیرممکن‌اند؛ بنابراین $BC > AC$ است و حکم درست است.

قضیه‌های دو شرطی

همان‌گونه که دیدیم، قضیهٔ ۱ و عکس آن هر دو درست است؛ بنابراین می‌توانیم بگوییم که :

> اگر در مثلثی، دو ضلع نابرابر باشند، زاویهٔ مقابل به ضلع بزرگ‌تر، **بزرگ‌تر است** از زاویهٔ مقابل به ضلع کوچک‌تر، و برعکس.

چنین قضیه‌هایی را «قضیه‌های دوشرطی» می‌نامیم.

قضیه‌های دو شرطی را می‌توان با نماد $\Leftrightarrow$ (اگر و تنها اگر) بیان کرد؛ به‌طور مثال قضیهٔ فوق و عکس آن را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد :

فرض کنیم $\overset{\Delta}{ABC}$ یک مثلث باشد

$$BC > AB \quad \Leftrightarrow \quad \hat{A} > \hat{C}$$

مثال : در یک مثلث، دو ضلع با هم برابرند؛ اگر و تنها اگر ارتفاع‌های نظیر آنها با هم برابر باشند.

مثال نقض

نوع دیگری از استدلال که با آن آشنا شده‌اید، استدلال با مثال نقض است. گاهی در برخی موضوعات (چه ریاضی و چه غیرریاضی) یک حکم به‌صورت کلی بیان می‌شود؛ بدین‌صورت که در مورد تمام اعضای یک مجموعه یک حکم بیان می‌شود. موارد زیر نمونه‌هایی از حکم‌های کلی است :

الف) «همهٔ اعداد صحیح، مثبت‌اند.» (حکمی کلی در مورد تمام اعداد صحیح)

ب) «هر چهار ضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد، مربع است.» (حکم کلی در مورد تمام چهارضلعی‌هایی که چهار ضلع برابر دارند)

پ) «مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.» (حکم کلی در مورد تمام چهارضلعی‌های محدب)

ت) «به‌ازای هر عدد طبیعی n، مقدار عبارت $n^2 + n + 41$ عددی اول است.» (حکم کلی در مورد تمام اعداد طبیعی)

حدس خود را دربارهٔ درستی یا نادرستی حکم کلی «الف» بنویسید. چگونه می‌توانید درستی حدس خود را ثابت کنید؟

می‌دانیم که (-2) یک عدد صحیح و منفی است؛ بنابراین حکم کلی «الف» با ارائهٔ

همین مثال رد می‌شود. به چنین مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی نادرست است، مثال نقض گفته می‌شود. دربارهٔ درستی یا نادرستی «ب» چه می‌توانید بگویید؟

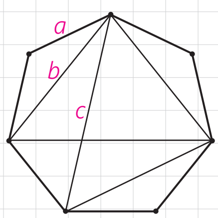
اگر برای یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض بیاوریم، دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم چه می‌توان گفت؟ آیا در موارد (پ) و (ت) می‌توانید مثال نقض پیدا کنید؟

آیا اگر در مورد یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض پیدا کنیم، باید درستیِ آن حکم کلی را نتیجه‌گیری کنیم؟ در مورد (پ) مثال نقض وجود ندارد؛ اما این برای پذیرش حکم کلی (پ) کافی نیست و باید توجه کرد که «برای نشان دادن درستی یک حکم کلی باید اثبات ارائه کنیم.» دربارهٔ گزینهٔ (ت) چه می‌توان گفت؟

اگر درستی یا نادرستی یک حکم کلی را نتوانیم اثبات کنیم و برای رد آن مثال نقض نیز نتوانیم بیابیم، نمی‌توان دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم کلی نتیجه‌ای گرفت.

کار در کلاس

۱ــ در شکل مقابل نقطه‌ها، رأس‌های یک هفت‌ضلعی منتظم به طول ضلع a می‌باشند. فاصلهٔ هر رأس از رأس بعدی برابر a و از دومین رأس بعد از آن برابر b و از سومین رأس بعد از آن برابر c است. آیا حکم کلی زیر درست است؟ «با وصل کردن هر سه رأس از این شکل یک مثلث متساوی‌الساقین، به‌دست می‌آید».



۲ــ آیا حکم‌های کلی زیر درست است؟ چرا؟

الف) برای هر دو مجموعهٔ A و B، یا $B \subseteq A$ و یا $A \subseteq B$

ب) هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، هم‌نهشت‌اند.

تمرین

۱ــ می‌دانیم که از یک نقطهٔ خارج از یک خط فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.

۲ــ با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC، $AB \neq AC$ آنگاه $\hat{B} \neq \hat{C}$.

۳ــ گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) در هر مثلث، اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر اندازهٔ کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هرکدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

۴ــ نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) هر لوزی یک مربع است.

ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.

پ) مثلثی با دو زاویهٔ قائمه وجود ندارد.

ت) همهٔ فلزات جامدند.

۵ــ عکس هر یک از قضایای زیر را بنویسید و سپس آنها را به صورت یک قضیه دوشرطی بنویسید.

الف) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه روبه‌رو به آنها نیز برابرند.

ب) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهایش عمودمنصف یکدیگرند.

پ) در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

ت) اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت‌های برابر نیز دارند.

۶ــ فرض کنیم ABC مثلثی دلخواه و AD نیمساز زاویهٔ A باشد. دلایل هر یک از نتایج زیر رابنویسید و نتیجهٔ نهایی که در پایان آمده است را کامل نمایید.

الف) $\hat{D}_2 > \hat{A}_1$ ، زیرا ....

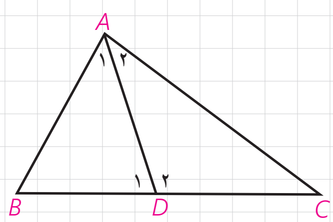
ب) $\hat{D}_2 > \hat{A}_2$ ، زیرا ....

پ) $AC > DC$، زیرا ....

ت) با روندی مشابه سه قسمت قبل نشان دهید : $AB > BD$

ث) حال نشان دهید : $AB+AC > BC$

نتیجه : در هر مثلث، مجموع اندازه‌های هر دو ضلع ازاندازهٔ .... ، .... است.



۲

فصل دوم

قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

قضیه تالس و تشابه شکل‌های هندسی، کاربردهای زیادی در محاسبه طول‌ها و فاصله‌های غیر قابل دسترس دارد.

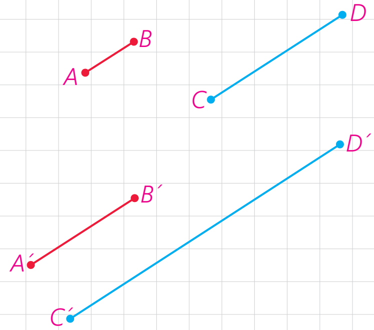
محاسبه ارتفاع بلندی‌ها به کمک سایه آنها نمونه‌ای از این کاربردهاست.

درس اول

نسبت و تناسب در هندسه

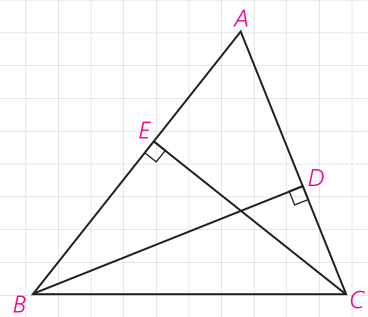
با نسبت و تناسب آشنایی دارید و ویژگی اصلی آن، یعنی برابری حاصل‌ضرب طرفین و وسطین را می‌شناسید؛ یعنی می‌دانید که اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $(b,d\neq ٠)$ آنگاه $ad=bc$ و برعکس؛ از تساوی $xy=zt$ با شرط $t,y\neq ٠$ تناسب $\frac{x}{t}=\frac{z}{y}$ نتیجه می‌شود. نسبت اندازه‌های دو پاره‌خط در هندسه هم به همین صورت تعریف می‌شود به شرطی که هر دو با یک واحد اندازه‌گیری بیان شده باشند؛ مثلاً اگر AB پاره‌خطی به طول ٢cm و CD پاره‌خطی به طول ۵cm باشد، $\frac{AB}{CD}=\frac{٢}{۵}$. حال فرض کنید $A'B'=۴cm$ و $C'D'=١٠cm$، در این صورت :

$$\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{۴}{١٠}=\frac{٢}{۵}$$



و بنابراین یک تناسب به‌صورت $\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{AB}{CD}$ درست می‌شود. بدیهی است که اگر نسبت AB به CD، $\frac{٢}{۵}$ باشد، نسبت CD به AB، $\frac{۵}{٢}$ است.

فعالیت ١



مثلث ABC و ارتفاع‌های BD و CE از آن را در نظر بگیرید. مساحت مثلث ABC را یک بار با درنظرگرفتن قاعدهٔ AC و ارتفاع BD و بار دیگر با در نظرگرفتن قاعدهٔ AB بنویسید.

مساحت ABC $=\frac{١}{٢}AC\times$ ______

مساحت ABC $=\frac{١}{٢}$ ______ $\times$ ______

ــ عبارت‌های سمت راست، هر دو مساوی یک چیزند.

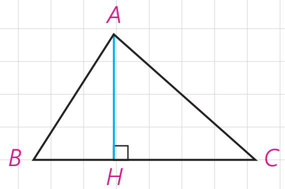
بنابراین : ______ $\times$ ______ $=$ ______ $\times AC$ آیا می‌توانید از آنجا یک تناسب بنویسید؟

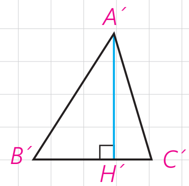
پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید. آیا همه به یک جواب رسیده‌اید؟ تفاوت پاسخ‌ها چه چیزی را نشان می‌دهد؟

با توجه به فعالیت صفحهٔ قبل، جای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید.

در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت ______ وارد بر آنها برابر است.

فعالیت ۲





در شکل مقابل ارتفاع‌های AH و A′H′ در دو مثلث ABC و A′B′C′ هم‌اندازه‌اند (AH = A′H′)

با پرکردن جاهای خالی و انجام عملیات ریاضی، نتیجهٔ زیر را به‌دست آورید.

$$S_{ABC} = ABC\ \text{مساحت} = \frac{۱}{۲} \cdots \times \cdots$$

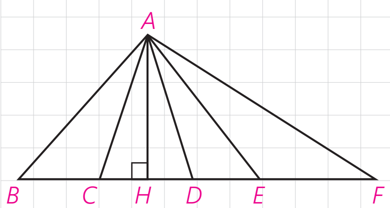
$$S_{A'B'C'} = \frac{۱}{۲} \cdots \times \cdots$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{۱}{۲} \cdots \times \cdots}{\frac{۱}{۲} \cdots \times \cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$$

نتیجه ۱

هرگاه اندازهٔ ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌هایی است که این ارتفاع‌ها بر آنها وارد شده است.

کاردرکلاس



در شکل مقابل مثلث‌های ABC، ACD، ADE و AEF را که در رأس A مشترک‌اند، در نظر بگیرید. ارتفاع متناظر با رأس A، در همهٔ این مثلث‌ها کدام پاره‌خط است؟

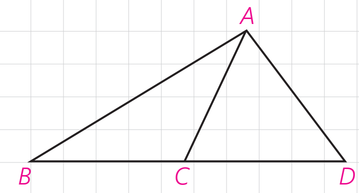
با توجه به نتیجهٔ فعالیت (۲) جاهای خالی را پر کنید:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{\cdots}{\cdots} \qquad \frac{S_{ACD}}{S_{AEF}} = \frac{\cdots}{\cdots} \qquad \frac{S_{ACE}}{S_{ABF}} = \frac{\cdots}{\cdots}$$

نتیجه ۲

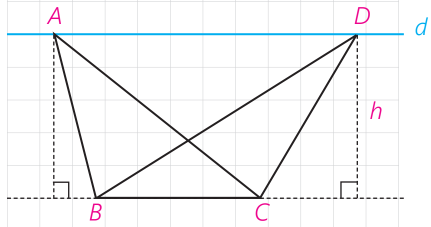
اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و قاعدهٔ مقابل به این رأس آنها روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌های آنهاست. مثلاً در شکل روبه‌رو:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}}=\frac{\text{مساحت } ABC}{\text{مساحت } ACD}=\frac{BC}{CD}$$



کاردرکلاس

در شکل روبه‌رو خط d با BC موازی است. چرا ارتفاع‌های وارد بر قاعدهٔ BC در مثلث‌های DBC و ABC با هم برابر است؟ اگر طول این ارتفاع‌ها را h بنامیم و طول BC را با a نمایش دهیم، مساحت این مثلث‌ها چقدر است؟



نتیجه ۳

اگر دو مثلث، قاعدهٔ مشترکی داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعدهٔ آنها، روی یک خط، موازی این قاعده باشند، این مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند. مثلاً در شکل بالا مثلث‌های ABC، DBC هم‌مساحت‌اند.

ویژگی‌های تناسب

به کمک اعمال و روش‌های جبری می‌توان از هر تناسب، تناسب‌ها یا تساوی‌های دیگری را نتیجه گرفت. مهم‌ترین این ویژگی‌ها به شرح زیر است (اثبات درستی این ویژگی‌ها را در مجلهٔ ریاضی انتهای فصل می‌توانید ببینید)

(طرفین وسطین کردن)	b و $d\neq ۰$	$\frac{۳}{۵}=\frac{۶}{۱۰}\Leftrightarrow ۳\times۱۰=۵\times۶$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc$	۱
(معکوس کردن طرفین تناسب)	a و b و c و $d\neq ۰$	$\frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰}\Rightarrow\frac{۵}{۲}=\frac{۱۰}{۴}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$	۲
(تعویض جای طرفین یا وسطین)	a و b و c و $d\neq ۰$	$\frac{۲}{۳}=\frac{۶}{۹}\Rightarrow\frac{۹}{۳}=\frac{۶}{۲}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ یا $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$	۳
(ترکیب نسبت در صورت یا مخرج)	b و $d\neq ۰$	$\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}\Rightarrow\frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ یا $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$	۴
(تفضیل نسبت در صورت یا مخرج)	b و $d\neq ۰$	$\frac{۳۰}{۲۱}=\frac{۲۰}{۱۴}\Rightarrow\frac{۹}{۲۱}=\frac{۶}{۱۴}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ یا $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$	۵
	b و $d\neq ۰$	$\frac{۴}{۶}=\frac{۸}{۱۲}\Rightarrow\frac{۱۲}{۱۸}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۴}{۶}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$	۶

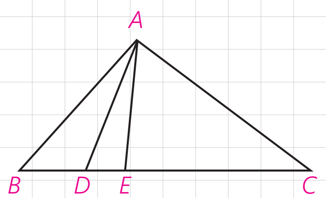
۷	(تعمیم ویژگی۶)	b_1 و b_2 و ... و $b_n \neq ۰$	$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$ $\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{۶}{۹}=\frac{۸}{۱۲} \Rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{۶}{۹}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲+۴+۶+۸}{۳+۶+۹+۱۲}=\frac{۲۰}{۳۰}$

تعریف واسطهٔ (میانگین) هندسی: اگر طرفین یا وسطین یک تناسب شامل دو عدد برابر باشد؛ یعنی $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ یا $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$ با طرفین وسطین‌کردن تناسب، نتیجه می‌شود: $b^2=ac$. در این صورت b را واسطهٔ هندسی a و c می‌نامیم.
مثلاً اگر دو پاره‌خط به طول‌های ۴ و ۹ واحد داشته باشیم، پاره‌خطی که ۶ واحد طول دارد، واسطهٔ هندسی بین آنهاست (چرا؟)

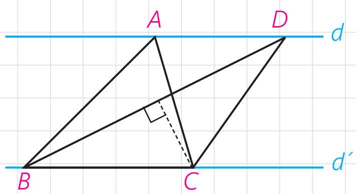
تمرین

۱ــ اگر $\frac{۳}{۵}=\frac{z}{۶}=\frac{y}{۳}=\frac{x}{۲}$ حاصل $x+y+z$ را به‌دست آورید.

۲ــ طول پاره‌خطی را به‌دست آورید که واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط به طول‌های ۸ و ۱۰ سانتی‌متر است.



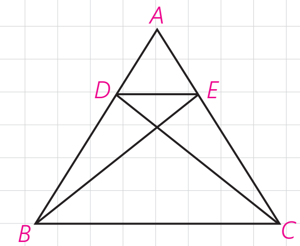
۳ــ در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{BC}{DE}$ را به‌دست آورید.



۴ــ در شکل مقابل $d \parallel d'$ و مساحت مثلث ABC، $۸cm^2$ است. اگر $BD=۶cm$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ C از BD را به‌دست آورید.

درس دوم

قضیهٔ تالس



در شکل مقابل خط DE موازی ضلع BC رسم شده است. مثلث‌های DAE و DEC در رأس D مشترک‌اند. قاعده‌های مقابل به این رأس کدام‌اند؟ با توجه به نتیجهٔ ۲ از درس اول، تناسب‌های زیر را کامل کنید :

$$\frac{S_{DAE}}{S_{DEC}} = \frac{\cdots}{\cdots} \quad , \quad \frac{S_{ADE}}{S_{DBE}} = \frac{\cdots}{\cdots}$$

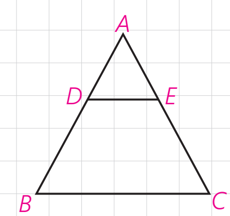
مثلث‌های DBE و DEC هم‌مساحت‌اند (چرا؟) با توجه به این موضوع از تساوی‌های بالا تناسب زیر را نتیجه‌گیری کنید :

$$\frac{AE}{\cdots} = \frac{\cdots}{DB}$$

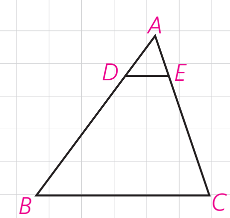
بنابراین قضیه زیر را اثبات کردیم :

قضیهٔ تالس: هرگاه در یک مثلث، خطی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط جدا می‌کند که اندازه‌های آنها تشکیل یک تناسب را می‌دهند. به طور خلاصه هرگاه مانند شکل روبه‌رو داشته باشیم $DE \parallel BC$، آنگاه:

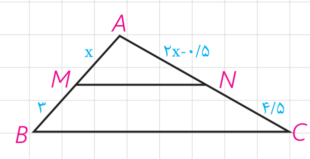
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$



کار در کلاس

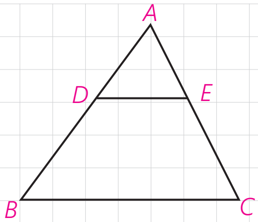


۱ــ در شکل مقابل $DE \parallel BC$ و AD=۱ و DB=۳ و AE=۰/۸. به کمک قضیهٔ تالس طول AC را به‌دست آورید.



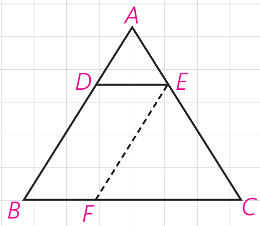
۲ــ در شکل مقابل $MN \parallel BC$؛ به کمک قضیهٔ تالس و با تشکیل یک معادله، مقدار x را به‌دست آورید.

۳ــ در شکل مقابل $DE \parallel BC$؛ تناسب قضیهٔ تالس را بنویسید و به کمک ترکیب نسبت در مخرج، رابطهٔ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ و با تفضیل نسبت در صورت از این تناسب، رابطهٔ $\frac{DB}{AB}=\frac{CE}{AC}$ را نتیجه بگیرید. این رابطه‌ها صورت‌های دیگر قضیه تالس هستند.



فعالیت ۱

در شکل مقابل $DE \parallel BC$، از نقطهٔ E، پاره‌خط EF را موازی AB رسم کرده‌ایم.
چهارضلعی DEFB چه نوع چهارضلعی است؟ چرا؟
با توجه به این موضوع داریم :



$DE=...$, $DB=...$

در مثلث ABC و با درنظرگرفتن $DE \parallel BC$، قضیهٔ تالس را بنویسید.

$$\frac{AD}{...}=\frac{...}{AC} \quad (۱)$$

در مثلث CAB با توجه به $EF \parallel AB$، قضیهٔ تالس را بنویسید.

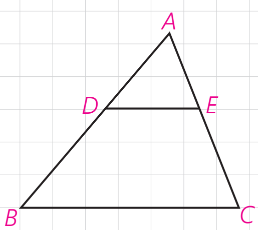
$$\frac{BF}{BC}=\frac{...}{...} \quad (۲)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) و جای‌گذاری DE به جای BF خواهیم داشت :

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

تعمیم قضیهٔ تالس: اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازهٔ ضلع‌های آن با اندازهٔ ضلع‌های مثلث اصلی متناسب‌اند؛ مثلاً در شکل روبه‌رو داریم:

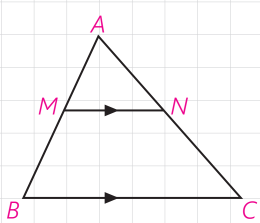
$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$



کاردرکلاس

در شکل مقابل، با فرض $MN \parallel BC$، طبق قضیهٔ تالس داریم : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ حال عکس قضیهٔ تالس را به زبان ریاضی بنویسید.

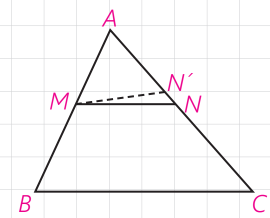
$$\_\_\_\_\_\_ \Rightarrow \_\_\_\_\_\_$$



عکس قضیهٔ تالس: اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آنها، چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناظراً متناسب جدا کند، آن‌گاه با ضلع سوم مثلث موازی است.

اثبات با برهان خلف است. در شکل می‌دانیم :

$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ ، فرض کنیم بر خلاف حکم $MN \nparallel BC$ ، پس از نقطهٔ M پاره‌خط MN' را موازی BC رسم می‌کنیم. حال با توجه به قضیهٔ تالس داریم :

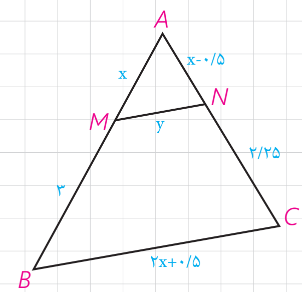


$$MN' \parallel BC \Rightarrow \frac{AN'}{AC}=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$$

از مقایسهٔ این تناسب، با فرض مسئله نتیجه می‌شود $\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$ و درنتیجه : $AN'=AN$ و بنابراین N بر N' منطبق است و MN همان MN' است که موازی BC است.

مثال : در شکل مقابل MN||BC است، مقادیر x و y را به دست آورید.

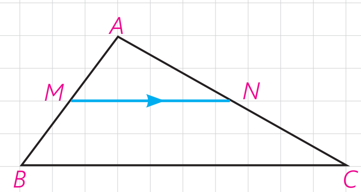
حل : با توجه به قضیه تالس و تعمیم آن داریم :



$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{x}{۳}=\frac{x-۰/۵}{۲/۲۵} \Rightarrow$$
$$۲/۲۵x=۳x-۱/۵ \Rightarrow ۰/۷۵x=۱/۵ \Rightarrow x=۲$$
$$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{y}{۴/۵} \Rightarrow y=۱/۸$$

تمرین

۱ــ در شکل مقابل پاره‌خط MN موازی با BC رسم شده است. درستی و نادرستی هر عبارت را مشخص کنید :



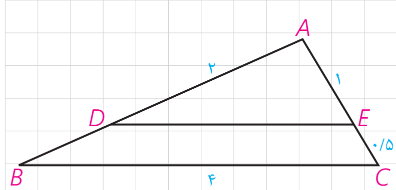
الف) $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=\frac{MN}{BC}$　　ب) $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$

پ) $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$　　ت) $\frac{AM}{BM}=\frac{MN}{BC}$

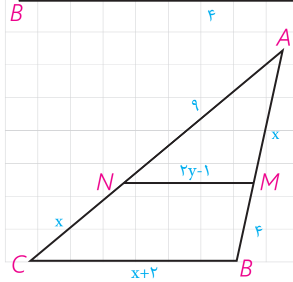
ث) $\frac{MB}{AB}=\frac{NC}{CA}=\frac{MN}{BC}$　　ج) $\frac{MB}{MA}=\frac{NC}{NA}$

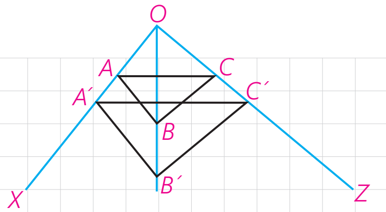
چ) $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$　　ح) $\frac{MB}{AB}=\frac{MN}{BC}$

۲ــ در شکل مقابل DE||BC؛ باتوجه به اندازه پاره‌خط‌ها، طول‌های DE و AB را به‌دست آورید.

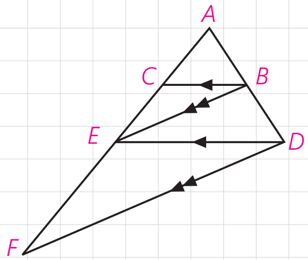


۳ــ در شکل مقابل MN||BC؛ مقادیر x و y را به‌دست آورید.

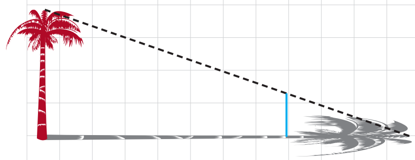




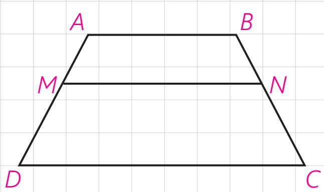
۴ــ در شکل مقابل می‌دانیم $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ با استفاده از قضیهٔ تالس و عکس آن ثابت کنید: $AC \parallel A'C'$



۵ــ در شکل مقابل می‌دانیم $BC \parallel DE$ و $BE \parallel DF$، به کمک قضیهٔ تالس در مثلث‌های ADE و ADF و مقایسهٔ تناسب‌ها با یکدیگر، ثابت کنید: $AE^2 = AC . AF$ (به عبارت دیگر AE واسطه هندسی بین AC و AF است)



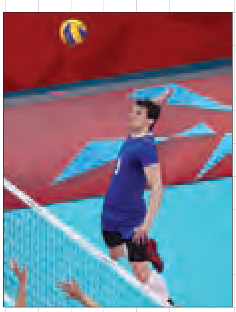
۶ــ یکی ازکاربردهای قضیهٔ تالس از زمان‌های دور تاکنون، محاسبهٔ فاصله‌های غیرقابل دسترس بوده است؛ به عنوان مثال برای تعیین یک ارتفاع بلند مانند ارتفاع یک درخت بلند در زمانی معین، طول سایهٔ درخت را روی زمین اندازه می‌گیریم؛ سپس یک قطعه چوب کوتاه را که به آن شاخص می‌گویند، طوری به صورت عمودی جابه‌جا می‌کنیم که سایهٔ آن روی امتداد سایهٔ درخت قرار گیرد و نوک سایهٔ شاخص نیز بر نوک سایهٔ درخت منطبق شود؛ به‌طور مثال اگر طول سایهٔ درخت ۶۰ متر، طول سایهٔ شاخص ۳ متر و طول شاخص ۱ متر باشد، بلندی درخت چند متر است؟



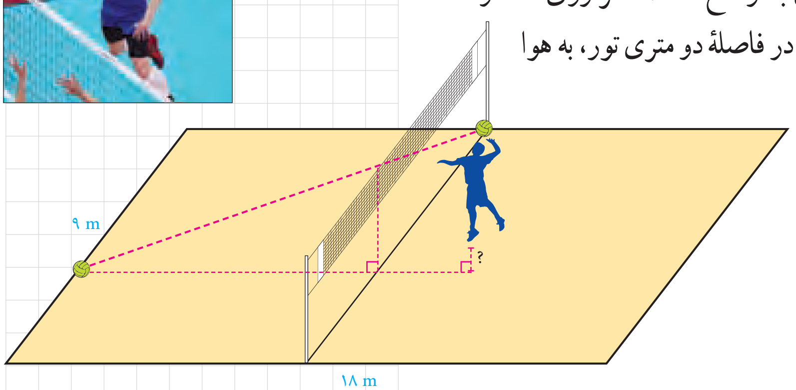
۷ــ در ذوزنقه مقابل $MN \parallel AB \parallel CD$ ، ثابت کنید:

$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$ (قضیه تالس در ذوزنقه)

(راهنمایی: یکی از قطرها را رسم کنید.)

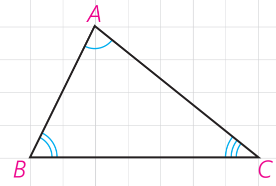


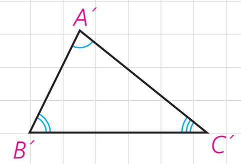
۸ــ ابعاد یک زمین استاندارد والیبال ۹ متر در ۱۸ متر است که توسط خط میانی به دو مربع ۹×۹ تفکیک می‌شود و تور والیبال مردان با ارتفاع ۲/۴۳ متر روی خط وسط نصب شده‌است. یک بازیکن با قد ۱۸۰ سانتی‌متر و در فاصلهٔ دو متری تور، به هوا می‌پرد و توپی را که در ارتفاع ۳۰ سانتی‌متری بالای سرش است با ضربه آبشار مماس بر تور وسط روانه زمین حریف می‌کند و توپ روی خط انتهای زمین حریف می‌نشیند. این بازیکن برای ضربه زدن چقدر به هوا پریده است؟



درس سوم

تشابه مثلث‌ها





در سال گذشته با مفهوم تشابه و چندضلعی‌های متشابه آشنا شدید. در اینجا می‌خواهیم دربارهٔ تشابه مثلث‌ها، بیشتر بدانیم. با توجه به تعریف تشابه چندضلعی‌ها، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند؛ اگر و فقط اگر زوایای آنها هم‌اندازه و اندازه‌های اضلاع آنها متناسب باشند :

$$\begin{array}{l}\angle A=\angle A'\\ \angle B=\angle B',\\ \angle C=\angle C'\end{array}\quad \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}\Leftrightarrow \Delta A'B'C'\sim\Delta ABC$$

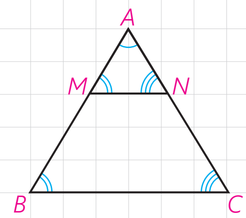
نسبت اندازه‌های اضلاع نظیر هم در دو مثلث را نسبت تشابه می‌گوییم. مثلاً اگر $\frac{A'B'}{AB}=\frac{۱}{۲}$ باشد و اندازهٔ اضلاع مثلث $A'B'C'$ نظیر به نظیر نصف اضلاع مثلث ABC باشند، گوییم مثلث $A'B'C'$ با مثلث ABC با نسبت تشابه $\frac{۱}{۲}$، متشابه است.

سؤال : مثلث ABC با چه نسبت تشابهی، با مثلث $A'B'C'$ متشابه است؟

قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی، دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آنها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است.

$$MN\parallel BC\Longrightarrow \Delta AMN\sim\Delta ABC$$



۱ــ زاویه‌های $\angle M$ و $\angle N$ به ترتیب با زاویه‌های $\angle B$ و $\angle C$ برابرند. چرا؟

۲ــ با توجه به تعمیم قضیهٔ تالس تناسب زیر را کامل کنید :

$$\frac{AM}{\cdots}=\frac{\cdots}{AC}=\frac{MN}{\cdots}$$

۳ــ از (۱) و (۲) در مورد مثلث‌های AMN و ABC چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟