فصل ۱

مکانیک

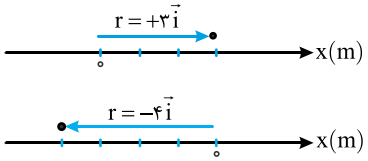
مکانیک در این کتاب شامل دو قسمت است:

الف) سینماتیک (حرکت بر روی خط راست و حرکت پرتابی)

ب) دینامیک و حرکت دایره‌ای

حرکت بر روی خط راست

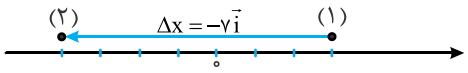
بردار مکان: برداری است که از مبدأ حرکت به مکان ذره روی محور x کشیده می‌شود.



نکته: اگر در حرکت جسم روی محور x ها علامت بردار مکان تغییر کند یعنی جسم از مبدأ گذشته است.

بردار جابه‌جایی

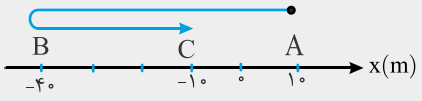
برداری است که از مکان اولیه جسم به مکان ثانویه جسم کشیده می‌شود.



نکته: اگر علامت بردار جابه‌جایی منفی باشد حرکت جسم در خلاف محور x ها انجام شده است و در غیر این صورت در جهت محور x ها حرکت انجام داده است.

نکته: اگر جسم در حرکت بر روی محور x ها تغییر جهت ندهد همواره جابه‌جایی جسم و مسافت طی شده برابر است.

مثال: متحرکی روی محور x ها از $A: +۱۰m$ به $B: -۴۰m$ رفته و به $C: -۱۰m$ برمی‌گردد. جابه‌جایی کل و مسافت طی شده کل را حساب کنید



پاسخ: چون جهت حرکت جسم تغییر کرده است لذا مسافت طی شده جابه‌جایی برابر نیست.

$$\Delta x = x_C - x_A = -۱۰ - ۱۰ = -۲۰m$$

$$L = L_۱ + L_۲ = ۵۰ + ۳۰ = ۸۰m$$

سرعت متوسط

نسبت جابه‌جایی به زمان جابه‌جایی سرعت متوسط نام دارد و از رابطه زیر حساب می‌شود:

$$V_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ یا } \frac{d}{\Delta t}$$

سرعت متوسط کمیتی برداری است و علامت آن جهت حرکت جسم را مشخص می‌کند.

تندی متوسط

نسبت مسافت طی شده به مدت زمان حرکت را تندی متوسط می‌نامند و از رابطه زیر حساب می‌شود:

$$S_{av} = \frac{L}{\Delta t}$$

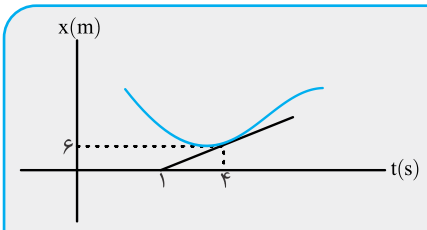
تندی متوسط کمیتی نرده‌ای است.

نکته: در نمودار مکان زمان شیب پاره‌خط واصل بین دو نقطه از نمودار همان سرعت متوسط می‌باشد.

نکته: در نمودار مکان زمان شیب خط مماس بر نمودار سرعت لحظه‌ای را نشان می‌دهد.

مثال: سرعت متحرک در لحظه $t = ۴s$ را بیابید.

«در لحظه $t = ۴s$ خط مماس رسم شده است.»



پاسخ: شیب خط مماس بیانگر سرعت متحرک در آن لحظه است.

$$m = \tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{۶}{۴-۱} = \frac{۶}{۳} = ۲\frac{m}{s}$$

شتاب متوسط

نسبت تغییرات سرعت به زمان تغییرات سرعت را شتاب متوسط می‌نامند و از رابطه زیر حساب می‌شود.

$$a_{av} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

نکته: در نمودار سرعت زمان شیب پاره‌خط واصل شتاب متوسط را نشان می‌دهد.

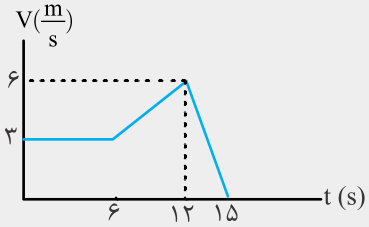
نکته: در نمودار سرعت زمان شیب خط مماس بر نمودار شتاب لحظه‌ای را نشان می‌دهد.

نکته: مساحت زیر نمودار سرعت زمان بیانگر جابه‌جایی جسم در آن مدت است.

مثال: نمودار سرعت زمان خودرویی که روی محور x حرکت می‌کند مطابق شکل است.

الف) شتاب متوسط کل حرکت

ب) جابه‌جایی کل



پاسخ:

الف) $a_{av} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{۰-۳}{۱۵-۰} = \frac{-۳}{۱۵} = -\frac{۱}{۳}\frac{m}{s^۲}$

ب) $\Delta x = S$ مساحت زیر نمودار $\Rightarrow \Delta x = ۳\times۶ + \frac{(۳+۶)}{۲}\times۶ + \frac{۱}{۲}(۳\times۶)$

$$\Delta x = ۱۸ + ۲۷ + ۹ = ۵۴m$$

حرکت با سرعت ثابت

سرعت حرکت جسم همواره ثابت است و معادله مکان زمان در حرکت با سرعت ثابت:

$$x = Vt + x_۰$$

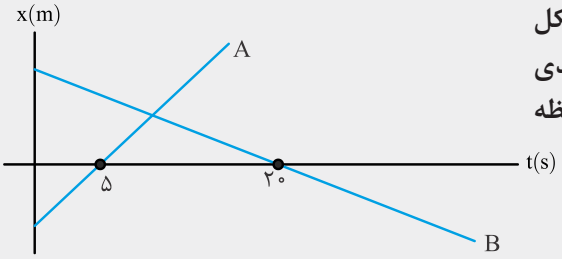
در حرکت با سرعت ثابت $V_{av} = V_{\text{لحظه‌ای}}$ است و معادله مکان زمان به صورت خط راست است.

در این رابطه $x_۰$ مکان اولیه جسم است.

نکته: جابه‌جایی در حرکت با سرعت ثابت از رابطه زیر حساب می‌شود.

$$\Delta x = Vt$$

مثال: نمودار مکان زمان متحرک‌های **B** و **A** مطابق شکل زیر است. در لحظه $t=0$ فاصله دو متحرک ۳۰۰متر است. اگر تندی متحرک **A**، ۲ برابر تندی متحرک **B** باشد فاصله آن‌ها در لحظه $t=20s$ از هم چند متر است:



پاسخ:

$$S_A = 2S_B \Rightarrow V_A = -2V_B \quad , \quad x_{0B} - x_{0A} = 300$$

زیرا از نمودار معلوم است که شیب نمودار A علامت مثبت و شیب نمودار B علامت منفی دارد.

$$x_A = V_A t + x_{0A} \xrightarrow{t=5s} 0 = V_A(5) + x_{0A}$$

$$x_B = V_B t + x_{0B} \xrightarrow{t=20s} 0 = V_B(20) + x_{0B}$$

از تفریق دو معادله فوق:

$$5V_A + x_{0A} - (20V_B + x_B) = 0$$

$$-10V_B + x_{0A} - 20V_B - x_{0B} = 0$$

$$-30V_B = x_{0B} - x_{0A} \Rightarrow -30V_B = 300$$

$$V_A = 20\frac{m}{s} \Rightarrow x_{0A} = -100m \qquad V_B = -10\frac{m}{s}$$

$$t = 20 \Rightarrow x_B = 0 \quad , \quad x_A = 20(20) - 100 = 300m$$

حرکت با شتاب ثابت

در حرکت مستقیم الخط با شتاب ثابت، شتاب متحرک در لحظه‌های مختلف ثابت است و تغییر نمی‌کند.

معادله سرعت: $a_{av} = a_{\text{لحظه‌ای}} \Rightarrow V = at + V_0$

معادله مکان زمان: $x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0$

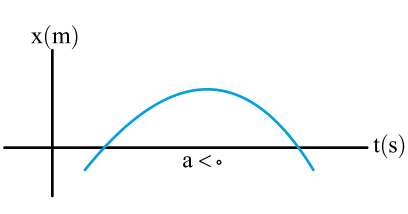
مثال: متحرکی با شتاب ثابت روی محور **x**ها حرکت می‌کند. و معادله سرعت آن $V = -2t + 10$ است اگر مکان متحرک در شروع حرکت $x_0 = 5m$ باشد معادله مکان زمان را بنویسید:

پاسخ:

$$V = at + V_0 \Rightarrow a = -2\frac{m}{s^2} \ , \ V_0 = 10\frac{m}{s}$$

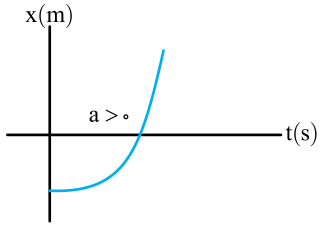
$$x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0 \Rightarrow x = -t^2 + 10t + 5$$

نکته: نمودار مکان زمان متحرک با شتاب ثابت درجه دو و سهمی است.



الف

$a < 0 \Rightarrow$ دهانه سهمی رو به پایین



ب

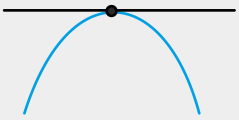
$a > 0 \Rightarrow$ دهانه سهمی رو به بالا

مثال: متحرکی روی محور x ها با شتاب ثابت حرکت می‌کند و معادله مکان زمان آن $x = -۴t^۲ + ۱۲t - ۵$ است. در چه لحظه‌ای سرعت آن صفر می‌شود؟

پاسخ: روش اول: سرعت وقتی صفر است که مماس بر نمودار مکان زمان موازی محور زمان می‌باشد.

رأس سهمی از رابطه ریاضی $\frac{-b}{۲a}$ حساب می‌شود. روی رأس (ماکزیمم یا مینمم) مماس موازی محور زمان است

$a < ۰ \Rightarrow$



$$\frac{-(۱۲)}{۲(-۴)} = \frac{-۱۲}{-۸} = ۱/۵s$$

روش دوم:

$$\begin{cases} V = at + V_۰ \\ a = ? \rightarrow \frac{۱}{۲}a = -۴ \Rightarrow a = -۸ \end{cases}$$

معادله سرعت زمان $V = -۸t + ۱۲$

$V = ۰ \Rightarrow -۸t + ۱۲ = ۰$

$t = ۱/۵s$

روابط دیگر در حرکت با شتاب ثابت

رابطهٔ مستقل از شتاب: $\Delta x = \frac{V + V_۰}{۲}\Delta t$

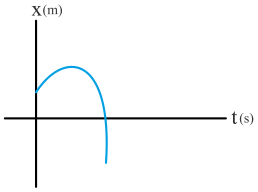
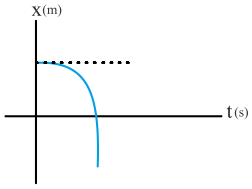
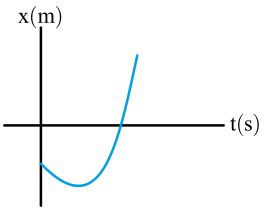
رابطهٔ مستقل از شتاب: $V^۲ - V_۰^۲ = ۲a\Delta x$

$V_{av} = \frac{V + V_۰}{۲}$

رابطهٔ مستقل از سرعت اولیه: $\Delta x = -\frac{۱}{۲}at^۲ + Vt$

نکته: در حرکت با شتاب ثابت نمودار شتاب زمان به صورت خط موازی محور زمان است.

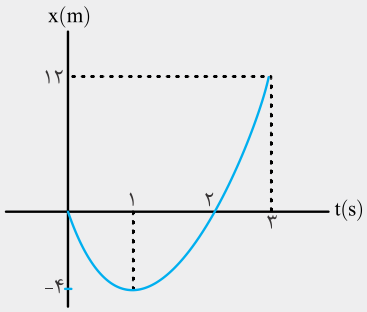
رسم نمودار مکان زمان در حالت‌های مختلف:

		
$x_۰ > ۰$ $a < ۰$ $V_۰ > ۰$	$x_۰ > ۰$ $a < ۰$ $V_۰ = ۰$	$x_۰ < ۰$ $a > ۰$ $V_۰ < ۰$

مثال: نمودار مکان زمان متحرکی روی محور x ها به صورت زیر است:

الف) معادله مکان زمان را بنویسید.

ب) سرعت متحرک در $t = ۳s$ را بیابید.



پاسخ: دربازهٔ زمانی $t=۰$ تا $t=۱s$: $\Delta x=-\frac{۱}{۲}at^۲+Vt \Rightarrow -۴=-\frac{۱}{۲}a(۱)^۲$

$a=۸\frac{m}{s^۲}$

در بازه زمانی $t=۰$ تا $t=۱s$ سرعت متحرک صفر می‌شود.

$\Delta x=-۴m\ ,V=۰\ ,\Delta t=۱$

$\Delta x=\frac{V+V_۰}{۲}\times\Delta t \Rightarrow -۴=\frac{۰+V_۰}{۲}\times۱ \Rightarrow V_۰=-۸\frac{m}{s}$

$x=\frac{۱}{۲}at^۲+V_۰t+x_۰ \Rightarrow x=۴t^۲-۸t+۰$

سرعت متحرک در $t=۳s$ را بیابید:

$\Delta x=-\frac{۱}{۲}at^۲+Vt$

$\Delta t=۳ \Rightarrow ۱۲=-\frac{۱}{۲}\times۸(۳)^۲+۳V$

$۱۲=-۳۶+۳V \Rightarrow ۳V=۴۸ \Rightarrow V=۱۶\frac{m}{s}$

نکته: روی محور x ها وقتی دو متحرک به هم می‌رسند مکان آن‌ها برابر می‌شود پس کافی است x آن‌ها را برابر قرار دهیم.

مثال: **اتومبیلی با شتاب $۲\frac{m}{s^۲}$ شروع به حرکت می‌کند در همین لحظه کامیونی با سرعت ثابت $۱۸\frac{km}{h}$ از آن سبقت می‌گیرد در چه لحظه و در چه مکانی به هم می‌رسند؟**

پاسخ: شتابدار:

اتومبیل : $x=\frac{۱}{۲}at^۲+V_۰t+x_۰$

مکان شروع به حرکت اتومبیل مبدأ فرض می‌شود.

$x=t^۲+۰$

کامیون : $x=Vt+x_۰$, $V=۱۸\times\frac{۱۰}{۳۶}=۵\frac{m}{s}$

$x=۵t$

به هم می‌رسند $\Rightarrow t^۲=۵t \Rightarrow t^۲-۵t=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۰ \\ t=۵s \end{cases}$

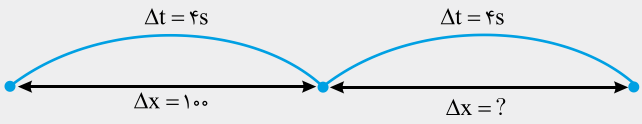
$t=۵s \Rightarrow x=۲۵m$

در مکان $۲۵m$ از مبدأ و در لحظه $t=۵$ به هم می‌رسند.

نکته: در حرکت با شتاب ثابت روی محور x ها متحرک در هر t ثانیه مسافتی را طی می‌کند مسافت‌ها به صورت دنبالهٔ حسابی در می‌آیند که قدرنسبت آن‌ها $at^۲$ است.

مثال: **یک خودرو با شتاب ثابت $۵\frac{m}{s^۲}$ روی محور x حرکت می‌کند و فاصله ۱۰۰ متری بین دو نقطه را در مدت ۴ ثانیه بدون تغییر جهت و تندشونده طی می‌کند در ۴ ثانیه بعدی جابه‌جایی خودرو چند متر است؟**

پاسخ:



جابه‌جایی‌ها دنباله حسابی ایجاد می‌کنند.

$۱۰۰\ ,۱۰۰+d$

قدرنسبت $d=at^۲ \Rightarrow d=۵(۴)^۲=۸۰m$

پس در ۴ ثانیه دوم جابه‌جایی همان ۱۸۰ متر است.

سقوط آزاد

حرکت جسم در اثر وزن آن حرکت سقوط آزاد نام دارد. سقوط آزاد در مسیر قائم بررسی می‌شود. شتاب حرکت همان شتاب گرانش است و از مقاومت هوا چشم پوشی می‌شود.

نکته: در حرکت سقوط آزاد محور yها جایگزین محور xها می‌شود و طبق قرارداد جهت حرکت رو به پایین خلاف جهت محور yها و با علامت منفی لحاظ می‌شود.

$$V = -gt + V_0 \quad , \quad V^2 - V_0^2 = -2g\Delta y$$

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t \quad , \quad \Delta y = \frac{V + V_0}{2}\Delta t$$

نکته: در حرکت سقوط آزاد در هر ثانیه به سرعت جسم $10\frac{m}{s}$ اضافه می‌شود. و با توجه به رابطه $\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2$ اگر جسم رها شود در زمان‌های مختلف سقوط‌های زیر حساب می‌شود.

$t = 1 \Rightarrow \Delta y = -5m$

$t = 2 \Rightarrow \Delta y = -20m$ سقوط در ثانیه دوم $15m$

$t = 3 \Rightarrow \Delta y = -45m$ سقوط در ثانیه سوم $25m$

$t = 4 \Rightarrow \Delta y = -80m$ سقوط در ثانیه چهارم $35m$

$t = 5 \Rightarrow \Delta y = -125m$ سقوط در ثانیه پنجم $45m$

دقت شود که مسافت‌های طی شده در ثانیه‌های متوالی دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت g و جمله اول $-\frac{1}{2}g$ می‌سازد.

مثال: سنگی از صخره‌ای به ارتفاع ۱۲۵ رها می‌شود پس از چه مدت به زمین می‌رسد و سرعت برخورد آن با زمین را حساب کنید. $(g = 10\frac{m}{s^2})$

پاسخ:

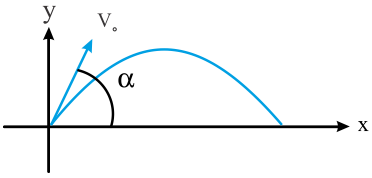
$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t \xrightarrow[V_0 = 0]{\text{رها می‌شود}} \Delta y = -\frac{1}{2}gt^2$$

$$\xrightarrow[\Delta y < 0]{\text{حرکت به سمت پایین}} -125 = -5t^2$$

$$t^2 = 25 \rightarrow t = \pm 5 \Rightarrow t = 5s$$

$$V = -gt + V_0 \Rightarrow V = -10 \times 5 = -50\frac{m}{s}$$

حرکت پرتابی



اگر جسم فقط در اثر وزن خود حرکت کند و مسیرش فقط به خاطر نیروی گرانش تعیین شود حرکت را پرتابی می‌گویند و جسم را پرتابه می‌نامند.

در حرکت پرتابی سرعت دارای دو مؤلفه افقی و قائم است.

α در حرکت پرتابی زاویه پرتاب است.

نکته: سرعت در مؤلفه افقی به صورت ثابت و نوع حرکت یکنواخت است و در مؤلفه قائم سرعت متغیر و نوع حرکت شتابدار و شتاب g است.

$$\vec{V}_0 = V_{0x}\vec{i} + V_{0y}\vec{j} \Rightarrow |V_0| = \sqrt{V_{0x}^2 + V_{0y}^2}$$

$$V_{0x} = V_0 . \cos\alpha \ , \ V_{0y} = V_0 . \sin\alpha$$