فهرست

فصل اول: جبر و معادله

فصل دوم: تابع

فصل پنجم: حد و پیوستگی

فصل ششم: راه‌حل تمرین‌ها

فصل هفتم: پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل اول

جبر و معادله

درس اول: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

الف) دنباله‌های حسابی

دنبالهٔ حسابی دنباله‌ای است که در آن هر جمله به جز جملهٔ نخست، با جمع کردن عددی ثابت به نام **قدرنسبت** با جملهٔ قبل از آن به‌دست می‌آید. به این ترتیب، اگر جملهٔ نخست دنباله‌ای حسابی $a_۱$ و قدرنسبت آن d باشد، این دنباله به صورت زیر است:

$$a_۱ , a_۱+d , a_۱+۲d , a_۱+۳d , \dots$$

معلوم است که **جملهٔ عمومی** این دنباله به صورت $a_n = a_۱+(n-۱)d$ است.

در این درس، دستوری برای پیدا کردن مجموع n جملهٔ نخست دنباله‌های حسابی پیدا می‌کنیم. اساس این کار روشی منتسب به کارل گاوس، یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان همهٔ اعصار است که در کودکی معلمش را با پیدا کردن مجموع عددهای ۱، ۲، ... و ۱۰۰ شگفت‌زده کرده بود. روش او را در مثال بعد توضیح می‌دهیم.

مثال: برای پیدا کردن مجموع عددهای ۱، ۲، ... و ۱۰۰ می‌توان آن‌ها را به دسته‌های دوتایی طوری تقسیم کرد که مجموع عددهای هر دسته برابر باشد:

$$۱+۲+\cdots+۹۹+۱۰۰=(۱+۱۰۰)+(۲+۹۹)+\cdots+(۵۰+۵۱)=\underbrace{۱۰۱+۱۰۱+\cdots+۱۰۱}_{\text{۵۰ تا}}=۵۰\times۱۰۱=۵۰۵۰$$

اگر تعداد عددهایی که می‌خواهیم جمع کنیم فرد باشد، مثلاً بخواهیم عددهای ۱، ۲، ... و ۱۰۱ را با هم جمع کنیم، چه کار کنیم. در مثال بعد، از روشی استفاده می‌کنیم که به زوج یا فرد بودن تعداد عددها بستگی ندارد.

مثال: می‌خواهیم مجموع عددهای ۱، ۲، ... و n را پیدا کنیم. این مجموع را S می‌نامیم. توجه کنید که

$$\begin{array}{ccccccccccc} S &=& ۱ &+& ۲ &+& ۳ &+& \cdots &+& n \\ & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & & & \updownarrow \\ S &=& n &+& (n-۱) &+& (n-۲) &+& \cdots &+& ۱ \end{array}$$

اگر این تساوی‌ها را با هم جمع کنیم معلوم می‌شود که

$$۲S=\underbrace{(n+۱)+(n+۱)+(n+۱)+\cdots+(n+۱)}_{\text{n تا}}=n(n+۱)$$

بنابراین $S=\dfrac{n(n+۱)}{۲}$.

توجه کنید که عددهای ۱، ۲، ... و n دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند. بنابراین ممکن است بتوانیم از روش پیدا کردن مجموع آن‌ها برای محاسبهٔ مجموع جمله‌های نخست دنباله‌های حسابی استفاده کنیم. در حقیقت، این کار شدنی است. پیش از هر چیز، توجه کنید که اگر $a_۱$، $a_۲$ و ... دنباله‌ای حسابی باشد، آن‌گاه

$$k+l=s+t \Rightarrow a_k+a_l=a_s+a_t$$

در حقیقت،

$$a_k=a_۱+(k-۱)d\ ,\quad a_l=a_۱+(l-۱)d\ ,\quad a_s=a_۱+(s-۱)d\ ,\quad a_t=a_۱+(t-۱)d$$

در نتیجه

$$a_k+a_l=۲a_۱+(k+l-۲)d\ ,\quad a_s+a_t=۲a_۱+(s+t-۲)d$$

چون $k+l=s+t$، پس سمت راست این دو تساوی با هم برابر است، پس سمت چپ آن‌ها نیز برابر است، یعنی $a_k+a_l=a_s+a_t$.

اکنون فرض کنید S_n مجموع n جملهٔ نخست دنبالهٔ حسابی موردنظر باشد:

$$\begin{array}{l} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ \quad\ \ \updownarrow \quad\ \ \updownarrow \quad\ \ \updownarrow \qquad\qquad \updownarrow \\ S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 \end{array}$$

اگر این تساوی‌ها را با هم جمع کنیم معلوم می‌شود که

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_n + a_1)$$

اکنون توجه کنید که بنابر آنچه گفتیم،

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n\ , \quad a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n\ , \quad \ldots$$

در نتیجه

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) = n(a_1 + a_n)$$

بنابراین $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

نتیجه اگر a_1، a_2، ... و a_n، n جملهٔ نخست دنباله‌ای حسابی باشند و S_n مجموع این جمله‌ها باشد، آن‌گاه $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

توجه کنید که $a_n = a_1 + (n-1)d$، بنابراین

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

نتیجه اگر a_1، a_2، ... و a_n، n جملهٔ نخست دنباله‌ای حسابی باشند و S_n مجموع این جمله‌ها باشد، آن‌گاه $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$.

نتیجهٔ بالا را به روش دیگری هم می‌توانیم به‌دست بیاوریم. توجه کنید که

$$a_1 = a_1\ , \quad a_2 = a_1 + d\ , \quad a_3 = a_1 + 2d\ , \quad \ldots\ , \quad a_n = a_1 + (n-1)d$$

اگر این تساوی‌ها را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید

$$S_n = na_1 + (1 + 2 + \cdots + (n-1))d = na_1 + \frac{(n-1)n}{2}d = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

توجه کنید که در این روش فقط از دستور مجموع عددهای ۱، ۲، ... و $n-1$ استفاده کردیم که در ابتدای کار آن را به طور مستقل پیدا کرده بودیم. بنابراین، اگر توجه کنیم که $a_1 + (n-1)d = a_n$، به همان دستوری که اول به‌دست آوردیم می‌رسیم: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

مسئله ۱ در دنباله‌ای حسابی $a_1 = -17$ و $d = 2$. مجموع بیست جملهٔ نخست این دنباله چقدر است؟

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $S_{20} = \frac{20}{2}(a_1 + a_{20})$. بنابراین کافی است a_{20} را حساب کنیم. از طرف دیگر، $a_n = a_1 + (n-1)d$، بنابراین $a_{20} = -17 + (20-1)2 = 21$، در نتیجه $S_{20} = 10(-17 + 21) = 40$.

مسئله ۲ مجموع نوزده جملهٔ نخست دنبالهٔ حسابی $\ldots, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ چقدر است؟

راه‌حل در این دنباله جملهٔ اول برابر ۱ و قدرنسبت برابر $-\frac{1}{3}$ است. بنابراین $S_{19} = \frac{19}{2}(2a_1 + 18d) = \frac{19}{2}(2\times1 - 18\times\frac{1}{3}) = -38$.

مسئله ۳ مجموع n جملهٔ نخست دنبالهٔ حسابی $\ldots, 2 + \frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}, \frac{1}{k}$ چقدر است؟

راه‌حل قدرنسبت این دنبالهٔ حسابی برابر است با $1 = 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k}$. بنابراین

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2\times\frac{1}{k} + (n-1)(1)) = \frac{n}{2}(\frac{2}{k} + n - 1) = \frac{n}{k} + \frac{n(n-1)}{2}$$

مسئله ۴ **مجموع‌های زیر را حساب کنید:**

الف) $۲+۴+\cdots+۲n$ **ب)** $۱+۳+۵+\cdots+۲n-۱$ **پ)** $۱^۲-۲^۲+۳^۲-۴^۲+\cdots+۹۹^۲-۱۰۰^۲$

راه‌حل الف) می‌توان نوشت $۲+۴+\cdots+۲n=۲(۱+۲+\cdots+n)=۲(\frac{n(n+۱)}{۲})=n(n+۱)$.

ب) مجموع موردنظر، مجموع n جملهٔ نخست دنباله‌ای حسابی با جملهٔ نخست ۱ و جملهٔ آخر $۲n-۱$ است، بنابراین

$$۱+۳+\cdots+۲n-۱=\frac{n}{۲}(۱+۲n-۱)=n^۲$$

پ) اگر از اتحاد مزدوج استفاده کنیم، معلوم می‌شود که

$$۱^۲-۲^۲+۳^۲-۴^۲+\cdots+۹۹^۲-۱۰۰^۲=(۱-۲)(۱+۲)+(۳-۴)(۳+۴)+\cdots+(۹۹-۱۰۰)(۹۹+۱۰۰)$$

$$=-(۱+۲)-(۳+۴)-\cdots-(۹۹+۱۰۰)=-(۱+۲+۳+۴+\cdots+۹۹+۱۰۰)=-\frac{۱۰۰(۱۰۱)}{۲}=-۵۰۵۰$$

مسئله ۵ **در دنباله‌ای حسابی $a_۱=۲۴$ و $a_۷=-۱۸$. مجموع هفده جملهٔ نخست این دنبالهٔ حسابی چقدر است؟**

راه‌حل توجه کنید که $S_{۱۷}=\frac{۱۷}{۲}(a_۱+a_{۱۷})$. بنابراین باید $a_{۱۷}$ را حساب کنیم. برای این کار بهتر است قدرنسبت را با استفاده از $a_۷$ حساب کنیم:

$$a_۷=a_۱+۶d\Rightarrow -۱۸=۲۴+۶d\Rightarrow ۶d=-۴۲\Rightarrow d=-۷$$

بنابراین $a_{۱۷}=a_۱+۱۶d=۲۴+۱۶(-۷)=-۸۸$، به این ترتیب

$$S_{۱۷}=\frac{۱۷}{۲}(۲۴+(-۸۸))=\frac{۱۷}{۲}(-۶۴)=-۵۴۴$$

تست ۱ **مجموع پانزده جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی برابر ۳۰۰ است. جملهٔ هشتم دنباله کدام است؟**

۱) ۲۰ **۲)** ۳۰ **۳)** ۱۵ **۴)** ۴۵

راه‌حل بنابر فرض مسئله،

$$S_{۱۵}=\frac{۱۵}{۲}(۲a_۱+۱۴d)=۳۰۰\Rightarrow a_۱+۷d=۲۰$$

بنابراین $a_۸=a_۱+۷d=۲۰$.

مسئله ۶ **جملهٔ عمومی دنباله‌ای حسابی به صورت $a_n=۲n-۷$ است. مجموع بیست‌وپنج جملهٔ نخست این دنبالهٔ حسابی چقدر است؟**

راه‌حل چون $a_n=۲n-۷$، پس $a_۱=۲\times۱-۷=-۵$ و $a_{۲۵}=۲\times۲۵-۷=۴۳$. از طرف دیگر $S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$، بنابراین

$$S_{۲۵}=\frac{۲۵}{۲}(-۵+۴۳)=۴۷۵$$

تست ۲ **مجموع جمله‌های دنباله‌ای حسابی که جملهٔ اولش ۳ و جملهٔ آخرش ۳۹ است، برابر ۵۲۵ است. قدرنسبت این دنباله چقدر است؟**

۱) $\frac{۱}{۲}$ **۲)** ۱ **۳)** $\frac{۳}{۲}$ **۴)** ۲

راه‌حل ابتدا توجه کنید که

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)\Rightarrow ۵۲۵=\frac{n}{۲}(۳+۳۹)\Rightarrow n=۲۵$$

بنابراین دنباله ۲۵ جمله دارد و در نتیجه

$$a_{۲۵}=a_۱+۲۴d\Rightarrow ۳۹=۳+۲۴d\Rightarrow d=\frac{۳}{۲}$$

مسئله ۷ **مجموع مضرب‌های ۳ در بازهٔ $[18, 300]$ چقدر است؟**

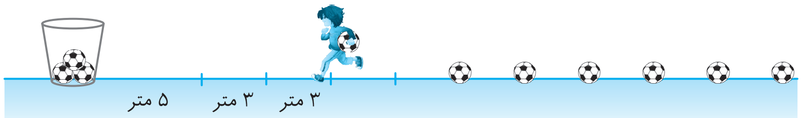
راه‌حل: توجه کنید که مضرب‌های ۳ در بازهٔ $[18, 300]$ دنباله‌ای حسابی با جملهٔ نخست ۱۸ و جملهٔ آخر ۳۰۰ و قدرنسبت ۳ تشکیل می‌دهند.

اگر تعداد این مضرب‌ها n تا باشد، آن‌گاه

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 300 = 18 + (n-1)3 \Rightarrow n = 95$$

بنابراین $S_{95} = \frac{95}{2}(18+300) = 15105$.

مسئله ۸ **در مسابقهٔ توپ جمع‌کنی، سبدی در نقطهٔ شروع قرار داده شده است که فاصله‌اش از نخستین توپ ۵ متر است و بقیهٔ توپ‌ها در فاصله‌های ۳ متری از توپ‌های کناری‌شان روی یک خط راست قرار داده شده‌اند. ده توپ روی یک خط راست قرار دارند. هر بازیکن باید از کنار سبد شروع به حرکت کند، نزدیک‌ترین توپ را بردارد، برود و آن را در سبد بیندازد و این کار را تکرار کند تا همهٔ توپ‌ها را در سبد بیندازد. هر بازیکن در کل چه مسافتی را طی می‌کند؟**



راه‌حل: برای این‌که بازیکنی توپ اول را بردارد و در سبد بیندازد، باید 2×5 متر را طی کند. برای توپ دوم باید $2(5+3)$ متر را طی کند، برای توپ سوم باید $2(5+2\times3)$ متر را طی کند، … و برای توپ دهم باید $2(5+9\times3)$ متر را طی کند. این عددها دنباله‌ای حسابی با جملهٔ نخست 2×5 و جملهٔ آخر $2(5+9\times3)$ تشکیل می‌دهند و تعداد آن‌ها ده‌تاست. بنابراین مجموع آن‌ها برابر است با

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2\times5 + 2(5+9\times3)) = 370$$

یعنی هر بازیکن باید ۳۷۰ متر را طی کند تا همهٔ توپ‌ها را در سبد بیندازد.

تست ۳ **چندتا از جمله‌های دنبالهٔ حسابی $9, 17, 25, \dots$ را از ابتدا جمع کنیم تا حاصل ۶۳۶ شود؟**

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

راه‌حل: جملهٔ اول دنباله برابر ۹ و قدرنسبت آن ۸ است. بنابراین مجموع n جملهٔ نخست دنباله برابر است با

$$\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d) = \frac{n}{2}(2\times9+8(n-1)) = \frac{n}{2}(18+8n-8) = 4n^2+5n$$

در نتیجه

$$4n^2+5n = 636 \Rightarrow 4n^2+5n-636 = 0 \Rightarrow (4n+53)(n-12) = 0 \Rightarrow n = -\frac{53}{4} \ (\text{غ.ق.ق}), \quad n = 12$$

بنابراین باید دوازده جملهٔ نخست دنباله را جمع کنیم.

مسئله ۹ **چند جملهٔ نخست دنبالهٔ حسابی $24, 21, 18, \dots$ را باید جمع کنیم تا حاصل برابر ۷۸ شود؟**

راه‌حل: توجه کنید که در این دنبالهٔ حسابی $a_1 = 24$ و $d = 21-24 = -3$. اکنون توجه کنید که $S_n = \frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$. بنابراین اگر $S_n = 78$، آن‌گاه $78 = \frac{n}{2}(2\times24+(n-1)(-3)) = \frac{n}{2}(51-3n)$. به این ترتیب

$$3n^2-51n+156 = 0 \Rightarrow n^2-17n+52 = 0 \Rightarrow (n-4)(n-13) = 0$$

بنابراین $n=4$ یا $n=13$، یعنی باید چهار یا سیزده جملهٔ نخست دنبالهٔ حسابی موردنظر را جمع کنیم تا حاصل برابر ۷۸ شود (هر دوی این جواب‌ها قابل قبول هستند، زیرا قدرنسبت دنبالهٔ موردنظر منفی است و برخی جمله‌ها مثبت و برخی دیگر منفی هستند، در نتیجه، ممکن است مجموع تعدادی از جمله‌ها صفر شود).

مسئله ۱۰ **دست‌کم چندتا از جمله‌های دنبالهٔ حسابی** $\dots, ۲۵\frac{۱}{۳}, ۲۲\frac{۲}{۳}, ۲۰$ **را از ابتدا با هم جمع کنیم تا مجموع آن‌ها از ۱۵۶۸ بیشتر شود؟**

راه‌حل جملهٔ نخست این دنباله ۲۰ و قدرنسبت آن برابر است با $d = ۲۲\frac{۲}{۳} - ۲۰ = \frac{۸}{۳}$. بنابراین

$$S_n > ۱۵۶۸ \Rightarrow \frac{n}{۲}\left(۲\times۲۰ + (n-۱)\frac{۸}{۳}\right) > ۱۵۶۸ \Rightarrow n\left(۵ + (n-۱)\frac{۱}{۳}\right) > ۳۹۲$$

$$n\left(\frac{۱۴+n}{۳}\right) > ۳۹۲ \Rightarrow n^۲ + ۱۴n - ۱۱۷۶ > ۰ \Rightarrow (n-۲۸)(n+۴۲) > ۰$$

چون $n+۴۲>۰$، پس $n>۲۸$. بنابراین دست‌کم باید ۲۹ جمله از ابتدای دنبالهٔ موردنظر را جمع کنیم تا مجموع آن‌ها از ۱۵۶۸ بیشتر شود.

مسئله ۱۱ **در دنباله‌ای حسابی** $a_۵ = ۲۲$ **و** $a_۷ + a_۹ = ۳۲$**. مقدار** $S_{۲۳}$ **چقدر است؟**

راه‌حل توجه کنید که $a_n = a_۱ + (n-۱)d$، بنابراین

$$a_۵ = ۲۲ \Rightarrow a_۱ + ۴d = ۲۲ \quad (۱), \quad a_۷ + a_۹ = ۳۲ \Rightarrow (a_۱ + ۶d) + (a_۱ + ۸d) = ۳۲ \Rightarrow ۲a_۱ + ۱۴d = ۳۲ \quad (۲)$$

اگر دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) را حل کنیم، به‌دست می‌آید $a_۱ = ۳۰$ و $d = -۲$. از طرف دیگر، $S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$. بنابراین

$$S_{۲۳} = \frac{۲۳}{۲}(۲\times۳۰ + (۲۳-۱)(-۲)) = ۱۸۴$$

مسئله ۱۲ **در دنباله‌ای حسابی مجموع چهار جملهٔ نخست برابر** -۲۸ **و مجموع شش جملهٔ نخست برابر ۵۸ است. مجموع شانزده جملهٔ نخست این دنباله چقدر است؟**

راه‌حل چون $S_۴ = -۲۸$ و $S_۶ = ۵۸$، پس

$$\frac{۴}{۲}(۲a_۱ + ۳d) = -۲۸ \Rightarrow ۲a_۱ + ۳d = -۱۴, \qquad \frac{۶}{۲}(۲a_۱ + ۵d) = ۵۸ \Rightarrow ۶a_۱ + ۱۵d = ۵۸$$

از حل دستگاه معادله‌های فوق نتیجه می‌شود $a_۱ = -۳۲$ و $d = \frac{۵۰}{۳}$. بنابراین $S_{۱۶} = \frac{۱۶}{۲}(۲a_۱ + ۱۵d) = ۸\left(۲(-۳۲) + ۱۵\left(\frac{۵۰}{۳}\right)\right) = ۱۴۸۸$.

مسئله ۱۳ **در دنباله‌ای حسابی مجموع جمله‌های ششم، نهم، دوازدهم و پانزدهم برابر با ۲۰ شده است. مجموع بیست جملهٔ نخست این دنباله چقدر است؟**

راه‌حل **راه‌حل اول** بنابر فرض،

$$a_۶ + a_۹ + a_{۱۲} + a_{۱۵} = ۲۰ \qquad (۱)$$

از طرف دیگر، در دنباله‌های حسابی، اگر $k+l = s+t$، آن‌گاه $a_k + a_l = a_s + a_t$. بنابراین $a_۶ + a_{۱۵} = a_۹ + a_{۱۲} = a_۱ + a_{۲۰}$.

بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$(a_۶ + a_{۱۵}) + (a_۹ + a_{۱۲}) = ۲۰ \Rightarrow (a_۱ + a_{۲۰}) + (a_۱ + a_{۲۰}) = ۲۰ \Rightarrow a_۱ + a_{۲۰} = ۱۰$$

اکنون توجه کنید که $S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n)$، بنابراین $S_{۲۰} = \frac{۲۰}{۲}(a_۱ + a_{۲۰}) = \frac{۲۰}{۲}(۱۰) = ۱۰۰$.

راه‌حل دوم چون $a_n = a_۱ + (n-۱)d$، پس

$$a_۶ + a_۹ + a_{۱۲} + a_{۱۵} = ۲۰ \Rightarrow (a_۱ + ۵d) + (a_۱ + ۸d) + (a_۱ + ۱۱d) + (a_۱ + ۱۴d) = ۲۰$$

$$۴a_۱ + ۳۸d = ۲۰ \Rightarrow ۲a_۱ + ۱۹d = ۱۰$$

اکنون توجه کنید که $S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$، بنابراین $S_{۲۰} = \frac{۲۰}{۲}(۲a_۱ + ۱۹d) = \frac{۲۰}{۲}(۱۰) = ۱۰۰$.

تست ۴

اگر عددهای سمت چپ معادلهٔ $1+7+13+\cdots+x=280$ جمله‌های دنباله‌ای حسابی باشند، مجموع رقم‌های x چقدر است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

راه‌حل

سمت چپ معادله، مجموع جمله‌های یک دنبالهٔ حسابی است که جملهٔ اول آن ۱ و قدرنسبت آن ۶ است. بنابراین

$$1+7+13+\cdots+x=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=\frac{n}{2}(2+6(n-1))=\frac{n}{2}(6n-4)=3n^2-2n$$

در نتیجه

$$3n^2-2n=280\Rightarrow 3n^2-2n-280=0\Rightarrow(3n+28)(n-10)=0\Rightarrow n=-\frac{28}{3}\ (\text{غ.ق.ق}),\ n=10$$

به این ترتیب $x=a_{10}=a_1+(10-1)d=1+9\times6=55$. پس مجموع رقم‌های x برابر ۱۰ است.

مسئله ۱۴

جمله‌های دنباله‌ای حسابی عددهای طبیعی‌اند و مجموع چهار جملهٔ نخست آن برابر ۵۶ است. اگر جملهٔ دوازدهم این دنباله بین ۶۷ و ۷۴ باشد، جملهٔ بیستم آن چقدر است؟

راه‌حل

توجه کنید که

$$S_4=56\Rightarrow\frac{4}{2}(2a_1+3d)=56\Rightarrow 2a_1+3d=28\qquad(1)$$

از طرف دیگر، $67<a_{12}<74$، پس

$$67<a_1+11d<74\qquad(2)$$

از تساوی (۱) به‌دست می‌آید $a_1=\frac{28-3d}{2}$ و در نتیجه نابرابری‌های (۲) را می‌توان این‌طور نوشت

$$67<\frac{28-3d}{2}+11d<74\Rightarrow\frac{106}{19}<d<\frac{120}{19}$$

چون d عددی صحیح است ($d=a_2-a_1$)، پس $d=6$ و در نتیجه، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود $a_1=5$. به این ترتیب،

$$a_{20}=a_1+19d=119$$

مسئله ۱۵

در دنباله‌ای حسابی همواره $4S_n=S_{2n}$ و جملهٔ پنجم برابر با ۱۸ است. جملهٔ نخست و قدرنسبت این دنباله را پیدا کنید.

راه‌حل

در تساوی $S_{2n}=4S_n$ قرار می‌دهیم $n=1$:

$$S_2=4S_1\Rightarrow a_2+a_1=4a_1\Rightarrow a_2=3a_1\Rightarrow a_1+d=3a_1\Rightarrow d=2a_1$$

چون $a_5=18$، پس

$$a_5=a_1+4d=18\Rightarrow a_1+4(2a_1)=18$$

بنابراین $a_1=2$ و $d=4$.

مسئله ۱۶

در دنباله‌ای حسابی $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$ ($m\neq n$). ثابت کنید $\frac{a_m}{a_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$.

راه‌حل

از تساوی $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$ نتیجه می‌شود $n^2S_m=m^2S_n$. بنابراین

$$n^2\times\frac{m}{2}(2a_1+(m-1)d)=m^2\times\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)\Rightarrow n(2a_1+(m-1)d)=m(2a_1+(n-1)d)$$

$$2a_1n+mnd-nd=2a_1m+mnd-md\Rightarrow 2a_1(n-m)=d(n-m)\Rightarrow d=2a_1$$

اکنون توجه کنید که $\frac{2m-1}{2n-1}=\frac{a_1(2m-1)}{a_1(2n-1)}=\frac{a_1+(m-1)(2a_1)}{a_1+(n-1)(2a_1)}=\frac{a_1+(m-1)d}{a_1+(n-1)d}=\frac{a_m}{a_n}$.

مسئله ۱۷ در دنباله‌ای حسابی مجموع k جملهٔ نخست برابر با صفر است. ثابت کنید مجموع m جملهٔ بعدی برابر است با $\frac{-a_1(k+m)m}{k-1}$.

راه‌حل چون مجموع k جملهٔ نخست صفر است، پس

$$S_k=\frac{k}{2}(2a_1+(k-1)d)=0\Rightarrow 2a_1+(k-1)d=0\Rightarrow d=-\frac{2a_1}{k-1}$$

چون مجموع m جملهٔ بعدی همان مجموع $k+m$ جملهٔ نخست است، پس

$$S_{m+k}=(\frac{m+k}{2})(2a_1+(m+k-1)d)=(\frac{m+k}{2})(2a_1+(m+k-1)(-\frac{2a_1}{k-1}))$$

$$=a_1(m+k)(1-\frac{m+k-1}{k-1})=a_1(m+k)(\frac{k-1-m-k+1}{k-1})=\frac{-a_1(m+k)m}{k-1}$$

مسئله ۱۸ در دنباله‌ای حسابی، مجموع m جملهٔ نخست برابر با مجموع n جملهٔ نخست شده است $(m\neq n)$. ثابت کنید مجموع $m+n$ جملهٔ نخست برابر صفر است.

راه‌حل می‌توان نوشت

$$S_m=S_n\Rightarrow\frac{m}{2}(2a_1+(m-1)d)=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)\Rightarrow 2ma_1+(m^2-m)d=2na_1+(n^2-n)d$$

$$2(m-n)a_1+(m^2-m-n^2+n)d=0\Rightarrow 2(m-n)a_1+((m-n)(m+n)-(m-n))d=0$$

$$2(m-n)a_1+(m-n)(m+n-1)d=0\Rightarrow 2a_1+(m+n-1)d=0$$

بنابراین $S_{m+n}=\frac{m+n}{2}(2a_1+(m+n-1)d)=\frac{m+n}{2}\times 0=0$.

مسئله ۱۹ در دنباله‌ای حسابی $a_k=\frac{1}{m}$ و $a_m=\frac{1}{k}$ $(k\neq m)$. ثابت کنید مجموع km جملهٔ نخست این دنباله برابر $\frac{1}{2}(km+1)$ است.

راه‌حل توجه کنید که

$$a_k=\frac{1}{m}\Rightarrow a_1+(k-1)d=\frac{1}{m}\quad(1),\qquad a_m=\frac{1}{k}\Rightarrow a_1+(m-1)d=\frac{1}{k}\quad(2)$$

اگر تساوی (۲) را از تساوی (۱) کم کنیم، به‌دست می‌آید

$$(k-m)d=\frac{1}{m}-\frac{1}{k}=\frac{k-m}{km}\Rightarrow d=\frac{1}{km}\qquad(k-m\neq 0)$$

بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود $a_1=\frac{1}{m}-(k-1)d=\frac{1}{m}-(k-1)\frac{1}{km}=\frac{1}{km}$ به این ترتیب

$$S_{km}=\frac{km}{2}(2a_1+(km-1)d)=\frac{km}{2}(\frac{2}{km}+(km-1)\frac{1}{km})=\frac{km}{2}(\frac{2}{km}+1-\frac{1}{km})=\frac{km}{2}(\frac{1}{km}+1)=\frac{1}{2}(km+1)$$

اگر S_k مجموع k جملهٔ نخست دنباله‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه

$$S_k-S_{k-1}=a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+a_k-(a_1+a_2+\cdots+a_{k-1})=a_k$$

بنابراین نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید.

نتیجه در هر دنباله $a_1=S_1$ و $a_n=S_n-S_{n-1}$.

تست ۵ اگر مجموع n جملهٔ نخست دنباله‌ای حسابی به صورت $S_n=2n^2-3n$ باشد، حاصل‌ضرب جملهٔ نخست و قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

۱) -4 ۲) -6 ۳) -8 ۴) -9

راه‌حل توجه کنید که

$$S_1=2\times1^2-3\times1=-1\Rightarrow a_1=-1,\quad S_2=2\times2^2-3\times2=2\Rightarrow a_1+a_2=2\Rightarrow -1+a_2=2\Rightarrow a_2=3$$

بنابراین قدرنسبت دنباله برابر است با $d=a_2-a_1=4$. در نتیجه $a_1d=-4$.

مسئله ۲۰ **ثابت کنید در هر دنبالهٔ حسابی قدرنسبت برابر است با** $S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2}$.

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $a_n = S_n - S_{n-1}$. بنابراین

$$S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2} = (S_n - S_{n-1}) - (S_{n-1} - S_{n-2}) = a_n - a_{n-1} = d$$

توجه کنید که

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = na_1 + \frac{n^2 d}{2} - \frac{nd}{2} = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$$

یعنی عددهایی مانند A و B وجود دارند که $S_n = An^2 + Bn$.

نتیجه **اگر S_n مجموع n جملهٔ نخست دنباله‌ای حسابی باشد، عددهایی مانند A و B وجود دارند که** $S_n = An^2 + Bn$.

تست ۶ **اگر $S_n = -2n^2 + (5+k)n - k + 2$ مجموع n جملهٔ نخست دنباله‌ای حسابی باشد، جملهٔ دوم این دنباله چقدر است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل چون S_n باید به شکل $An^2 + Bn$ باشد، پس $-k+2=0$، در نتیجه $k=2$. به این ترتیب $S_n = -2n^2 + 7n$. در نتیجه

$$S_1 = -2 \times 1^2 + 7 \times 1 = 5 \Rightarrow a_1 = 5$$

$$S_2 = -2 \times 2^2 + 7 \times 2 = 6 \Rightarrow a_1 + a_2 = 6 \Rightarrow 5 + a_2 = 6 \Rightarrow a_2 = 1$$

ب) دنباله‌های هندسی

دنبالهٔ هندسی دنباله‌ای است که در آن هر جمله به‌جز جملهٔ نخست، با ضرب کردن عددی ثابت و غیرصفر به نام **قدرنسبت** در جملهٔ قبل از آن به‌دست می‌آید. به این ترتیب، اگر جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی a_1 و قدرنسبت آن q باشد، این دنباله به صورت زیر است:

$$a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \dots$$

معلوم است که جملهٔ عمومی این دنباله به صورت $a_n = a_1q^{n-1}$ است. در این کتاب فرض می‌کنیم $a_1 \neq 0$.

در این‌جا دستوری برای پیدا کردن مجموع n جملهٔ نخست دنباله‌های هندسی پیدا می‌کنیم.

فرض کنید a_1، a_2، … دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت q باشد در این صورت $a_n = a_1q^{n-1}$. فرض کنید $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

معلوم است که اگر $q=1$، آن‌گاه همهٔ جمله‌ها برابر a_1 هستند، در نتیجه $S_n = na_1$. فرض کنید $q \neq 1$. توجه کنید که

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} \quad (1)$$

و اگر دو طرف این تساوی را در q ضرب کنیم، به‌دست می‌آید

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^n \quad (2)$$

اگر تساوی (۱) را از تساوی (۲) کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$qS_n - S_n = a_1q^n - a_1 \Rightarrow (q-1)S_n = a_1(q^n - 1)$$

بنابراین

$$S_n = a_1\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

نتیجه **اگر a_1، a_2، … و a_n، n جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت q باشند، $q \neq 1$ و S_n مجموع این جمله‌ها باشد، آن‌گاه**

$$S_n = a_1\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

تست ۷ مجموع پنج جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت ۵ برابر $\frac{781}{75}$ شده است. جملهٔ نخست این دنباله چقدر است؟

۱) $\frac{1}{85}$ ۲) $\frac{1}{75}$ ۳) $\frac{1}{65}$ ۴) $\frac{1}{55}$

راه‌حل چون $q=5$ و $S_5=\frac{781}{75}$، پس $S_5=a_1\frac{q^5-1}{q-1}=a_1\frac{5^5-1}{5-1}=\frac{781}{75}$. بنابراین $a_1=\frac{1}{75}$.

مسئله ۲۱ در دنباله‌ای هندسی $a_1=135$ و $S_3=195$. قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

راه‌حل بنابر فرض مسئله،

$$S_3=a_1\frac{q^3-1}{q-1}=195\Rightarrow 135(q^3-1)=195(q-1)\Rightarrow 135(q-1)(q^2+q+1)=195(q-1)\Rightarrow 9q^2+9q+9=13$$

$$9q^2+9q-4=0\Rightarrow(3q-1)(3q+4)=0\Rightarrow q=\frac{1}{3},\ q=-\frac{4}{3}$$

مسئله ۲۲ در دنباله‌ای هندسی $a_1=\sqrt[3]{2}-1$ و $a_3=(\sqrt[3]{2}-1)\sqrt[3]{4}$. مجموع دوازده جملهٔ نخست این دنباله چقدر است؟

راه‌حل قدرنسبت دنباله را به‌دست می‌آوریم:

$$a_3=a_1q^2\Rightarrow(\sqrt[3]{2}-1)\sqrt[3]{4}=(\sqrt[3]{2}-1)q^2\Rightarrow q^2=\sqrt[3]{4}\Rightarrow q=\pm\sqrt[3]{2}$$

اگر $q=\sqrt[3]{2}$، آن‌گاه $S_{12}=(\sqrt[3]{2}-1)\frac{(\sqrt[3]{2})^{12}-1}{\sqrt[3]{2}-1}=16-1=15$. اگر $q=-\sqrt[3]{2}$، آن‌گاه

$$S_{12}=(\sqrt[3]{2}-1)\frac{(-\sqrt[3]{2})^{12}-1}{-\sqrt[3]{2}-1}=(\sqrt[3]{2}-1)\frac{16-1}{-\sqrt[3]{2}-1}=-15\left(\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}+1}\right)$$

مسئله ۲۳ مقدار $\frac{1+2+2^2+\cdots+2^{13}}{1+2+2^2+\cdots+2^6}$ را حساب کنید.

راه‌حل در دنبالهٔ هندسی با جملهٔ نخست a_1 و قدرنسبت q، مجموع n جملهٔ نخست برابر است با $a_1\frac{q^n-1}{q-1}$. در نتیجه

$$\frac{1+2+2^2+\cdots+2^{13}}{1+2+2^2+\cdots+2^6}=\frac{1\times\frac{2^{14}-1}{2-1}}{1\times\frac{2^7-1}{2-1}}=\frac{2^{14}-1}{2^7-1}=\frac{(2^7-1)(2^7+1)}{2^7-1}=2^7+1=129$$

تست ۸ اگر $\frac{(a^8+a^4+1)(a^3+a^2+a+1)}{a^9+a^6+a^3+1}=31$، مقدار a چقدر است؟

۱) -5 ۲) $-5\,,5$ ۳) $-6\,,5$ ۴) -7

راه‌حل توجه کنید که (چون $a\neq 1$)،

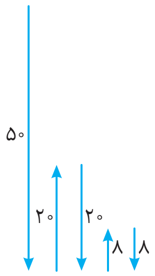
$$a^8+a^4+1=\frac{a^{12}-1}{a^4-1},\qquad a^3+a^2+a+1=\frac{a^4-1}{a-1}$$

اگر این تساوی‌ها را در هم ضرب کنیم، معلوم می‌شود که صورت کسر داده شده برابر است با $\frac{a^{12}-1}{a-1}$. همچنین مخرج کسر برابر است با $\frac{a^{12}-1}{a^3-1}$.

در نتیجه

$$\frac{\frac{a^{12}-1}{a-1}}{\frac{a^{12}-1}{a^3-1}}=\frac{a^3-1}{a-1}=a^2+a+1=31\Rightarrow a^2+a-30=0\Rightarrow a=-6\,,\ a=5$$

مسئله ۲۴ **توپی را از هر ارتفاعی که رها می‌کنیم، پس از برخورد با زمین به اندازهٔ دو پنجم ارتفاع اولیهٔ خود بالا می‌رود. اگر این توپ را از ارتفاع ۵۰ متری رها کنیم، مسافتی که تا برخورد دهم با زمین طی می‌کند، چند متر است؟**



راه‌حل طول مسیری که توپ بعد از اولین برخورد تا دهمین برخورد با زمین طی می‌کند برابر است با

$$۲(۲۰+۸+\cdots+۲۰\times(\frac{۲}{۵})^{۸})=۲\times۲۰\times\frac{(\frac{۲}{۵})^{۹}-۱}{\frac{۲}{۵}-۱}=\frac{۲۰۰}{۳}-\frac{۲۰۰}{۳}(\frac{۲}{۵})^{۹}$$

توپ قبل از اولین برخورد با زمین هم ۵۰ متر طی کرده است. پس طول کل مسیر برابر است با

$$۵۰+\frac{۲۰۰}{۳}-\frac{۲۰۰}{۳}(\frac{۲}{۵})^{۹}=\frac{۳۵۰}{۳}-\frac{۲۰۰}{۳}(\frac{۲}{۵})^{۹}$$

مسئله ۲۵ **چند تا از جمله‌های دنبالهٔ هندسی $\frac{۲}{۹},-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲},\dots$ را از ابتدا جمع کنیم تا حاصل برابر $\frac{۵۵}{۷۲}$ شود؟**

راه‌حل توجه کنید که $S_n=a_۱\frac{q^n-۱}{q-۱}$. در این دنباله $a_۱=\frac{۲}{۹}$ و $q=\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{-\frac{۱}{۳}}{\frac{۲}{۹}}=-\frac{۳}{۲}$. بنابراین

$$S_n=\frac{۵۵}{۷۲}\Rightarrow\frac{۵۵}{۷۲}=\frac{۲}{۹}\times\frac{(-\frac{۳}{۲})^n-۱}{-\frac{۳}{۲}-۱}\Rightarrow(-\frac{۳}{۲})^n=-\frac{۲۴۳}{۳۲}=(-\frac{۳}{۲})^{۵}$$

بنابراین $n=۵$. یعنی باید پنج جملهٔ نخست دنبالهٔ موردنظر را با هم جمع کنیم تا حاصل برابر $\frac{۵۵}{۷۲}$ شود.

تست ۹ **در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع n جملهٔ اول از رابطهٔ $S_n=\frac{۳^n-۲^n}{۴\times۳^{n-۲}}$ به‌دست می‌آید. قدرنسبت دنباله کدام است؟**

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

راه‌حل ابتدا جمله‌های اول و دوم دنباله را پیدا می‌کنیم:

$$a_۱=S_۱=\frac{۳-۲}{۴\times۳^{-۱}}=\frac{۳}{۴}\quad,\quad a_۱+a_۲=S_۲=\frac{۹-۴}{۴\times۱}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow\frac{۳}{۴}+a_۲=\frac{۵}{۴}\Rightarrow a_۲=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $q=\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۲}{۳}$.

مسئله ۲۶ **تعداد جمله‌های دنباله‌ای هندسی عددی زوج است و مجموع همهٔ این جمله‌ها، ده برابر مجموع جمله‌های با ردیف فرد است. قدرنسبت این دنبالهٔ هندسی چقدر است؟**

راه‌حل فرض کنید تعداد جمله‌های دنبالهٔ موردنظر ۲n باشد. بنابر فرض $S_{۲n}=۱۰(a_۱+a_۳+\cdots+a_{۲n-۱})$، در نتیجه

$$a_۱\frac{q^{۲n}-۱}{q-۱}=۱۰(a_۱+a_۱q^{۲}+\cdots+a_۱q^{۲n-۲})=۱۰(a_۱+a_۱q^{۲}+\cdots+a_۱(q^{۲})^{n-۱})$$

$$=۱۰a_۱\frac{(q^{۲})^n-۱}{q^{۲}-۱}=۱۰a_۱\frac{q^{۲n}-۱}{(q-۱)(q+۱)}$$

بنابراین $q+۱=۱۰$، در نتیجه $q=۹$.

مسئله ۲۷ **در دنباله‌ای هندسی مجموع پنج جملهٔ نخست پنج برابر جملهٔ نخست است و مجموع پانزده جملهٔ نخست برابر ۱۰۰ است. مجموع جمله‌های نخست، ششم و یازدهم این دنباله چقدر است؟**

راه‌حل بنابر فرض مسئله،

$$S_5 = 5a_1 \Rightarrow a_1\frac{q^5-1}{q-1} = 5a_1 \Rightarrow q^5-1 = 5(q-1) \qquad (1)$$

$$S_{15} = 100 \Rightarrow a_1\frac{q^{15}-1}{q-1} = 100 \Rightarrow a_1(q^{15}-1) = 100(q-1) \qquad (2)$$

دو طرف تساوی (۲) را بر دو طرف تساوی (۱) تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a_1(q^{15}-1)}{q^5-1} = \frac{100(q-1)}{5(q-1)} \Rightarrow \frac{a_1(q^5-1)(q^{10}+q^5+1)}{q^5-1} = 20 \Rightarrow a_1q^{10}+a_1q^5+a_1 = 20$$

بنابراین $a_1+a_6+a_{11}=20$.

مسئله ۲۸ **اگر S_n مجموع n جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت q باشد، ثابت کنید $\frac{S_{2n}}{S_n} = 1+q^n$.**

راه‌حل توجه کنید که $S_n = a_1\frac{q^n-1}{q-1}$ و $S_{2n} = a_1\frac{q^{2n}-1}{q-1}$. بنابراین

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = \frac{a_1\frac{q^{2n}-1}{q-1}}{a_1\frac{q^n-1}{q-1}} = \frac{q^{2n}-1}{q^n-1} = \frac{(q^n-1)(q^n+1)}{q^n-1} = q^n+1$$

مسئله ۲۹ **فرض کنید $a_1, a_2, \ldots$ دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت q باشد. ثابت کنید اگر $n \geq 2$، آن‌گاه**

$$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n} = \frac{q}{1+q}S_{2n}$$

راه‌حل توجه کنید که $S_{2n} = a_1\frac{q^{2n}-1}{q-1}$. بنابراین

$$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n} = a_1q+a_1q^3+a_1q^5+\cdots+a_1q^{2n-1} = a_1(q+q^3+q^5+\cdots+q^{2n-1})$$

$$= a_1 \times \frac{q((q^2)^n-1)}{q^2-1} = \frac{a_1q(q^{2n}-1)}{(q+1)(q-1)} = \frac{q}{q+1}\times a_1\frac{q^{2n}-1}{q-1} = \frac{q}{q+1}S_{2n}$$

توجه برای محاسبهٔ مجموع $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}$ می‌توانیم به این نکته توجه کنیم که جمله‌های این مجموع، جمله‌های دنباله‌ای هندسی با جملهٔ نخست a_2 و قدرنسبت q^2 هستند، پس مجموع آن‌ها برابر است با $a_2\frac{(q^2)^n-1}{q^2-1} = a_1q\frac{q^{2n}-1}{q^2-1}$.

مسئله ۳۰ **فرض کنید در دنباله‌ای هندسی که $3n$ جمله دارد، S_1 مجموع n جملهٔ نخست، S_2 مجموع n جملهٔ بعدی و S_3 مجموع n جملهٔ آخر باشد. ثابت کنید S_1, S_2, S_3 دنباله‌ای هندسی است.**

راه‌حل توجه کنید که

$$S_1 = a_1+a_1q+\cdots+a_1q^{n-1} = a_1\frac{q^n-1}{q-1}$$

$$S_2 = a_1q^n+a_1q^{n+1}+\cdots+a_1q^{2n-1} = a_1q^n(1+q+\cdots+q^{n-1}) = a_1q^n\frac{q^n-1}{q-1}$$

$$S_3 = a_1q^{2n}+a_1q^{2n+1}+\cdots+a_1q^{3n-1} = a_1q^{2n}(1+q+\cdots+q^{n-1}) = a_1q^{2n}\frac{q^n-1}{q-1}$$

به این ترتیب $S_2 = S_1q^n$ و $S_3 = S_2q^n$. بنابراین S_1, S_2, S_3 دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت q^n است.

مسئله ۳۱ **مجموع** $\underbrace{999\ldots9}_{100\text{تا}}+\cdots+999+99+9$ **را حساب کنید.**

راه‌حل ابتدا توجه کنید که

$$9=10-1,\quad 99=10^2-1,\quad 999=10^3-1,\ \ldots,\quad \underbrace{999\ldots9}_{100\text{تا}}=10^{100}-1$$

بنابراین

$$9+99+999+\cdots+\underbrace{999\ldots9}_{100\text{تا}}=(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots+(10^{100}-1)=10+10^2+10^3+\cdots+10^{100}-100$$

$$=10\times\frac{10^{100}-1}{10-1}-100=\frac{10^{101}-10}{9}-100=\frac{10^{101}-910}{9}$$

مسئله ۳۲ **مجموع** $\frac{4}{5^{100}}+\frac{3}{5^{99}}+\cdots+\frac{4}{5^4}+\frac{3}{5^3}+\frac{4}{5^2}+\frac{3}{5}$ **را حساب کنید.**

راه‌حل اگر دسته‌بندی مجموع موردنظر را عوض کنیم، برابر می‌شود با

$$\left(\frac{3}{5}+\frac{3}{5^3}+\cdots+\frac{3}{5^{99}}\right)+\left(\frac{4}{5^2}+\frac{4}{5^4}+\cdots+\frac{4}{5^{100}}\right)=\frac{3}{5}\times\frac{\left(\frac{1}{5^2}\right)^{50}-1}{\frac{1}{5^2}-1}+\frac{4}{5^2}\times\frac{\left(\frac{1}{5^2}\right)^{50}-1}{\frac{1}{5^2}-1}$$

$$=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{25}{24}\right)\left(\frac{1}{5^{100}}-1\right)+\frac{4}{25}\times\left(-\frac{25}{24}\right)\left(\frac{1}{5^{100}}-1\right)=\frac{19}{24}\left(1-\frac{1}{5^{100}}\right)$$

توجه کنید که بنابر دستور مجموع n جملهٔ نخست دنباله‌های هندسی،

$$a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$$

در نتیجه، اگر فرض کنیم $a_1=1$، به اتحاد $1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1}$ می‌رسیم. به این ترتیب اتحاد زیر به‌دست می‌آید.

نتیجه **اگر a عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه** $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a^2+a+1)$.

اگر در این اتحاد به جای a قرار دهیم $\frac{a}{b}$، به‌دست می‌آید

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n-1=\left(\frac{a}{b}-1\right)\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}+\left(\frac{a}{b}\right)^{n-2}+\cdots+\frac{a}{b}+1\right)$$

اگر دو طرف این اتحاد را در b^n ضرب کنیم، به‌دست می‌آید

$$a^n-b^n=b\left(\frac{a}{b}-1\right)b^{n-1}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}+\left(\frac{a}{b}\right)^{n-2}+\cdots+\frac{a}{b}+1\right)=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

اگر n عددی فرد باشد و در این اتحاد به جای b قرار دهیم، $-b$ به‌دست می‌آید

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$$

دو اتحاد مهم

اگر a و b عددهایی حقیقی باشند و n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

و اگر n عددی طبیعی و فرد باشد، آن‌گاه

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$$

مسئله ۳۳ عبارت $\frac{x^8+x^6+x^4+x^2+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}$ را ساده کنید.

راه‌حل توجه کنید که

$$x^8+x^6+x^4+x^2+1=(x^2)^4+(x^2)^3+(x^2)^2+x^2+1=\frac{(x^2)^5-1}{x^2-1}=\frac{(x^5)^2-1}{x^2-1}$$

$$=\frac{x^5-1}{x-1}\times\frac{x^5+1}{x+1}=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$$

بنابراین

$$\frac{x^8+x^6+x^4+x^2+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}=x^4-x^3+x^2-x+1$$

تمرین

۱- مجموع نوزده جملهٔ نخست دنبالهٔ حسابی $9,5,1,-3,\dots$ را پیدا کنید.

۲- الف) مجموع صد جملهٔ نخست دنبالهٔ حسابی $0/3, 1/5, 2/7, \dots$ چقدر است؟

ب) مجموع یازده جملهٔ نخست دنبالهٔ حسابی $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, \dots$ چقدر است؟

۳- مجموع $3+8+13+\dots+(5n+3)$ را حساب کنید.

۴- جملهٔ عمومی دنباله‌ای حسابی به صورت $a_n=\frac{3n-1}{4}$ است. مجموع بیست جملهٔ نخست این دنبالهٔ حسابی چقدر است؟

۵- مجموع جمله‌های دنباله‌ای حسابی برابر با -504 است. اگر جملهٔ نخست این دنبالهٔ حسابی ۶ و جملهٔ آخر آن -62 باشد، این دنبالهٔ حسابی چند جمله دارد؟

۶- در دنباله‌ای حسابی $a_1+a_5+a_{10}+a_{15}+a_{20}+a_{24}=225$. مجموع بیست‌وچهار جملهٔ نخست این دنباله چقدر است؟

۷- در دنباله‌ای حسابی $a_1=-9$ و مجموع هفده جملهٔ نخست این دنباله برابر ۱۵ شده است. قدرنسبت این دنبالهٔ حسابی چقدر است؟

۸- چند تا از جمله‌های دنبالهٔ حسابی $-6, -\frac{11}{2}, -5, \dots$ را از ابتدا جمع کنیم تا مجموع آن‌ها برابر -25 شود؟

۹- در دنباله‌ای حسابی $a_5=9$ و $a_2+a_9=20$. مجموع بیست جملهٔ نخست این دنباله چقدر است؟

۱۰- در دنباله‌ای حسابی $a_1+a_8=25$ و $a_3+a_5=19$. مجموع دوازده جملهٔ نخست این دنباله چقدر است؟

۱۱- جملهٔ نخست دنباله‌ای حسابی برابر ۸ و مجموع پانزده جملهٔ نخست آن برابر ۱۱۷۰ است. مجموع ده جملهٔ نخست این دنباله چقدر است؟

۱۲- در دنباله‌ای حسابی، سه برابر جملهٔ دهم ۲۴ واحد از جملهٔ دوم کمتر است. مجموع بیست‌وهفت جملهٔ نخست این دنباله چقدر است؟

۱۳- در دنباله‌ای حسابی مجموع چهارده جملهٔ نخست ۷۷ واحد بیشتر از مجموع سه جملهٔ نخست است. جملهٔ چندم این دنباله برابر ۷ است؟

۱۴- مجموع جمله‌های دنباله‌ای حسابی که جملهٔ نخست آن ۱۷ و قدرنسبت آن -2 است برابر ۷۲ است. این دنباله چند جمله دارد؟

۱۵- جملهٔ نخست دنباله‌ای حسابی برابر ۲ است و مجموع پنج جملهٔ نخست این دنباله برابر با یک چهارم مجموع پنج جملهٔ بعدی آن است. مجموع سی جملهٔ نخست این دنباله چقدر است؟

۱۶- در دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت منفی، $a_1=-3$ و $a_3a_7=24$. مجموع دوازده جملهٔ نخست این دنباله چقدر است؟

۱۷- دربارهٔ دنبالهٔ حسابی $a_1, a_2, \dots, a_{21}$ می‌دانیم که مجموع جمله‌های با ردیف فرد پانزده واحد از مجموع جمله‌های با ردیف زوج بیشتر است. مجموع جمله‌های این دنبالهٔ حسابی چقدر است؟

۱۸- مجموع جمله‌های دنباله‌ای حسابی برابر ۷۱۵ است. اگر به اولین جمله ۱ واحد، به دومین جمله ۳ واحد، به سومین جمله ۵ واحد و ... اضافه کنیم، حاصل‌جمع جمله‌های دنبالهٔ جدید برابر با ۸۳۶ می‌شود. مجموع اولین جمله، آخرین جمله و جملهٔ وسط دنبالهٔ حسابی اولیه چقدر است؟

۱۹- مجموع n جملهٔ نخست دنباله‌های حسابی $۱,۴,۷,...$ و $۲۳,۲۵,۲۷,...$ برابر است. مقدار n چقدر است؟

۲۰- معادلهٔ زیر را حل کنید که در سمت چپ آن جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی با هم جمع شده‌اند:

$$(۳+x)+(۹+x)+(۱۵+x)+\cdots+(۹۳+x)=۸۳۲$$

۲۱- در دنباله‌ای حسابی $a_۳=-۱۳$ و $a_۷=۳$. در میان عددهای $S_۱$، $S_۲$، $S_۳$ و ... کمترین مقدار چقدر است؟

۲۲- در دنباله‌ای حسابی $a_۱>۰$ و $۳a_۸=۵a_{۱۳}$. در میان عددهای $S_{۱۰}$، $S_{۱۱}$، $S_{۲۰}$ و $S_{۲۱}$ بیشترین مقدار چقدر است؟

۲۳- در دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت ۲، مقدار $\frac{S_{۳n}}{S_n}$ به مقدار n بستگی ندارد. مجموع پانزده جملهٔ نخست این دنباله چقدر است؟

۲۴- مجموع n جملهٔ نخست دنباله‌ای حسابی (به ازای هر n) برابر با $۴n^۲-۳n$ است. قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

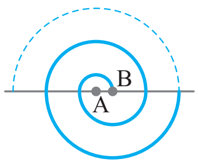
۲۵- جمله‌های دنباله‌ای حسابی عددهایی طبیعی‌اند. جملهٔ هشتم این دنباله مضربی از ۴ است و مجموع پانزده جملهٔ نخست این دنباله عددی در بازهٔ $(۳۳۷,۳۹۳)$ است. جملهٔ هشتم این دنباله چقدر است؟

۲۶- مجموع مضرب‌های دو رقمی ۷ چقدر است؟

۲۷- مجموع عددهای فرد در بازهٔ $[۱۳,۹۷]$ چقدر است؟

۲۸- مجموع عددهای سه رقمی که بر ۱۷ بخش‌پذیر نیستند چقدر است؟

۲۹- فنری از سیزده نیم‌دایرهٔ پشت سر هم که مرکزهای آن‌ها یکی در میان در نقطه‌های A و B است درست شده است. نیم‌دایرهٔ اول به مرکز A و شعاع ۰/۵ است، نیم‌دایرهٔ دوم به مرکز B و شعاع ۱ است، نیم‌دایرهٔ بعدی به مرکز A و شعاع ۱/۵ است و همین‌طور تا نیم‌دایرهٔ سیزدهم. طول این فنر چقدر است؟



۳۰- خانه‌های یک خیابان پشت‌سرهم از ۱ تا ۴۹ شماره‌گذاری شده‌اند. ثابت کنید خانه‌ای وجود دارد که مجموع شماره‌های خانه‌های پیش از آن با مجموع شماره‌های خانه‌های پس از آن برابر است. شمارهٔ این خانه چیست؟

۳۱- در یک دورهٔ ۱۵ روزه، روی یک درخت گیلاس هر روز ۱۲ شکوفه بیشتر از روز قبل روییده است. اگر تعداد شکوفه‌های روییده شده روی این درخت در ۹ روز نخست برابر با تعداد شکوفه‌های روییده شده در ۶ روز آخر باشد، در این ۱۵ روز چند شکوفه روی این درخت روییده است؟

۳۲- در دنباله‌ای حسابی $S_۱=۶$ و $S_۷=۱۰۵$. ثابت کنید $\frac{S_n}{S_{n-۳}}=\frac{n+۳}{n-۳}$.

۳۳- در یک دنبالهٔ حسابی قدرنسبت دو برابر جملهٔ اول است. ثابت کنید $\frac{S_n}{S_m}=\frac{n^۲}{m^۲}$.

۳۴- اگر S_n مجموع n جملهٔ نخست یک دنبالهٔ حسابی باشد، ثابت کنید $S_{۳n}-۲S_n=n^۲d$.

۳۵- ثابت کنید در دنباله‌های حسابی، $\frac{S_m-S_n}{S_{m+n}}=\frac{m-n}{m+n}$.

۳۶- دنباله‌ای حسابی $۲n+۱$ جمله دارد. ثابت کنید نسبت مجموع جمله‌های با ردیف فرد در این دنباله به مجموع جمله‌های با ردیف زوج در این دنباله برابر است با $\frac{n+۱}{n}$.

۳۷- در دنباله‌ای حسابی، به ازای هر n طبیعی $S_{۲n}=۴S_n$. ثابت کنید به ازای هر دو عدد طبیعی مانند m و k، $\frac{S_m}{S_k}=(\frac{m}{k})^۲$.

۳۸- در دنباله‌ای حسابی $S_k=m$ و $S_m=k$ $(m\neq k)$. ثابت کنید $S_{m+k}=-(m+k)$.

۳۹- فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، ... دنباله‌ای حسابی باشد و عددهایی طبیعی مانند m، n و k وجود داشته باشند که $S_m=m^۲k$ و $S_n=n^۲k$ $(m\neq n)$. ثابت کنید $S_k=k^۳$.

۴۰- اگر S_k مجموع k جملهٔ نخست دنبالهٔ حسابی a_1 ، a_2، ... باشد، ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی مانند n ،

$$S_{n+3}-3S_{n+2}+3S_{n+1}-S_n=0$$

۴۱- در دنباله‌ای حسابی، $\frac{S_{m^2}}{S_{n^2}}=\frac{m^3}{n^3}$. ثابت کنید $\frac{(m+1)S_m}{(n+1)S_n}=\frac{m^2}{n^2}$.

۴۲- در دنباله‌ای هندسی همواره $S_n=3^n-1$. جملهٔ نخست و قدرنسبت این دنباله را پیدا کنید.

۴۳- مقدار $\frac{2^{14}+2^{13}+\cdots+2+1}{2^4+2^3+2^2+2+1}$ چقدر است؟

۴۴- جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی برابر ۵ و قدرنسبت آن برابر ۳ است. مجموع چند جملهٔ نخست این دنباله برابر ۲۰۰ است؟

۴۵- در دنباله‌ای هندسی $a_2=8$ و $a_3=4$. مجموع ده جملهٔ نخست این دنباله چقدر است؟

۴۶- کوچک‌ترین عدد طبیعی مانند n که $1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}>1000$ چقدر است؟

۴۷- دربارهٔ دنبالهٔ a_n می‌دانیم عددهای $a_1, a_2-a_1, a_3-a_2, \ldots, a_n-a_{n-1}, \ldots$ دنباله‌ای هندســی با جملهٔ نخست ۱ و قدرنسبت $\frac{1}{3}$ تشکیل می‌دهند. دستوری برای جملهٔ عمومی a_n پیدا کنید.

۴۸- در دنباله‌ای هندسی $a_1=-2$ و $a_6=-486$. مجموع شش جملهٔ نخست این دنباله چقدر است؟

۴۹- جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی برابر ۵ و مجموع سه جملهٔ نخست آن برابر $\frac{31}{5}$ است. قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

۵۰- قدرنسبت دنباله‌ای هندسی برابر $\frac{1}{2}$ و جملهٔ آخر آن برابر ۲ است. اگر مجموع جمله‌های این دنبالهٔ هندسی برابر ۲۵۴ باشد، جملهٔ نخست آن چقدر است؟

۵۱- در دنباله‌ای هندسی $a_3=18$، $S_3=26$ و $q>0$. مجموع ده جملهٔ نخست این دنباله چقدر است؟

۵۲- جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی برابر ۳، جملهٔ آخر آن برابر ۹۶ و مجموع جمله‌های آن برابر ۱۸۹ است. تعداد جمله‌های این دنباله چندتاست؟

۵۳- در دنباله‌ای هندســی مجموع چهار جملهٔ نخســت برابر با ۳۰ و مجموع چهار جملهٔ بعدی برابر با ۴۸۰ شده است. جملهٔ نخست این دنباله چه عددهایی می‌تواند باشد؟

۵۴- در دنباله‌ای هندسی مجموع دو جملهٔ نخست برابر ۴ و مجموع سه جملهٔ نخست برابر ۱۳ است. مجموع پنج جملهٔ نخست این دنباله چقدر است؟

۵۵- مجموع پنجاه جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت مثبت برابر ۱ و مجموع پنجاه جملهٔ بعدی آن برابر 5^{100} است. جملهٔ نخست و قدرنسبت این دنباله را پیدا کنید.

۵۶- معادلهٔ $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{1396}=0$ را حل کنید.

عبارت‌های داده شده را ساده کنید. (۵۸-۵۷)

۵۷- $A=\frac{x^{35}+x^{34}+\cdots+x+1}{x^{11}+x^{10}+\cdots+x+1}$

۵۸- $B=\frac{x^{29}+x^{28}+\cdots+x+1}{x^9+x^8+\cdots+x+1}$

۵۹- در دنبالــه‌ای هندســی که تعــداد جمله‌هایش عددی زوج اســت، مجموع همهٔ جمله‌ها پنــج برابر مجموع جمله‌های با ردیف فرد اســت. قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

۶۰- ثابت کنید $5+55+555+\cdots+\underbrace{55\ldots5}_{\text{۱۰۰ تا}}=\frac{5}{81}(10^{101}-910)$.

۶۱- ثابت کنید $1+2\times2+3\times2^2+\cdots+100\times2^{99}=1+99\times2^{100}$.

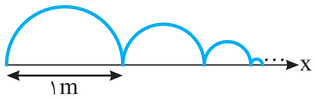
۶۲- ثابت کنید در حاصل عبارت زیر نمای همهٔ توان‌های x زوج است:

$$A=(1-x+x^2-x^3+\cdots-x^9+x^{10})(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^9+x^{10})$$

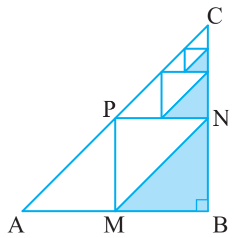
۶۳- a عددی حقیقی و n عددی طبیعی است. ثابت کنید

$$(۱+a+a^{۲}+\cdots+a^{n})^{۲}-a^{n}=(۱+a+a^{۲}+\cdots+a^{n-۱})(۱+a+a^{۲}+\cdots+a^{n+۱})$$

۶۴- **قدرنسبت دنباله‌ای هندسی عددی صحیح است و اگر جملهٔ نخست آن را که عددی مثبت است از جملهٔ آخرش کم کنیم، حاصل عددی مثبت است که از ۱۷ بزرگ‌تر نیست. اگر مجموع جمله‌های این دنباله به‌جز جملهٔ نخست آن از ۲۶ کمتر نباشد، قدرنسبت این دنباله چقدر است؟**



۶۵- **موجی به صورت نیم‌دایره‌هایی بالای محور x، با قطر اولیهٔ $۱\,m$ در حرکت است و هر بار که به محور x برخورد می‌کند ٪۳۰ از طول قطر آن کاسته می‌شود. مجموع محیط این نیم‌دایره‌ها پس از ۱۰ مرتبه برخورد با محور x چقدر است؟**



۶۶- **مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC با ضلع‌های قائم $AB=BC=۶$ مفروض است. وسط‌های سه ضلع را به هم وصل می‌کنیم (مثلث MNP) و یکی از مثلث‌های گوشه را رنگ می‌کنیم. سپس وسط‌های سه ضلع مثلث PNC را به هم وصل می‌کنیم و یکی از مثلث‌های گوشه را رنگ می‌کنیم. اگر این کار را ۲۰ مرتبه انجام دهیم، مجموع مساحت قسمت‌های رنگ شده چقدر است؟**

۶۷- **دربارهٔ دنبالهٔ $a_۱$، $a_۲$، ... می‌دانیم $a_۱=۱$ و همواره $a_n a_{n+۱}=۴^n$. مجموع $a_۱+\cdots+a_{۱۹}$ را پیدا کنید.**

۶۸- **مجموع $۲n$ جملهٔ نخست دو دنبالهٔ هندسی $a\,,-aq\,,aq^{۲},\ldots$ و $\frac{۱}{a},\frac{q}{a},\frac{q^{۲}}{a},\ldots$ برابر است. ثابت کنید $-۱<q<۱$.**

۶۹- **فرض کنید $S_۱$، $S_۲$، ... و S_n مجموع n جملهٔ نخست دنباله‌هایی هندسی باشند که جملهٔ نخست هر یک از آن‌ها برابر ۱ و قدرنسبت آن‌ها به ترتیب ۱، ۲، ... و n است. ثابت کنید**

$$S_۱+S_۲+۲S_۳+۳S_۴+\cdots+(n-۱)S_n=۱^n+۲^n+\cdots+n^n$$

۷۰- **در دنباله‌ای هندسی با جملهٔ نخست $a_۱$ و قدرنسبت q ثابت کنید $qS_n+(۱-q)(S_۱+S_۲+\cdots+S_n)=na_۱$.**

۷۱- **فرض کنید $a_۱,a_۲,\ldots,a_n$ دنباله‌ای هندسی باشد و**

$$a_۱+a_۲+\cdots+a_n=S\,,\qquad \frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+\cdots+\frac{۱}{a_n}=T$$

ثابت کنید $(a_۱a_۲\ldots a_n)^{۲}=(\frac{S}{T})^n$.

۷۲- **ثابت کنید در دنباله‌های هندسی** $S_n(S_{۳n}-S_{۲n})=(S_{۲n}-S_n)^{۲}$.

درس اول: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- مجموع ۲۰ جملهٔ نخست دنبالهٔ حسابی $۷,۵,۳,۱,\ldots$ چقدر است؟

۱) -۴۸۰ ۲) -۲۴۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۴۸۰

۲- در یک دنبالهٔ حسابی $a_{۱}=۳۴$ و $a_{۱۴}=-۵$. مجموع ۱۸ جملهٔ نخست این دنباله چقدر است؟

۱) ۱۳۳ ۲) ۱۴۳ ۳) ۱۵۳ ۴) ۱۶۳

۳- جملهٔ اول دنباله‌ای حسابی برابر -۵ و جملهٔ آخر این دنباله ۴۹ است. اگر مجموع جمله‌های این دنباله برابر ۶۱۶ باشد، این دنباله چند عضو دارد؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۶ ۳) ۲۷ ۴) ۲۸

۴- در دنباله‌ای حسابی $a_{۹}+a_{۱۰}=۱۳$. مجموع ۱۸ جملهٔ نخست این دنبالهٔ حسابی چقدر است؟

۱) ۱۱۳ ۲) ۱۱۷ ۳) ۱۱۹ ۴) ۱۲۱

۵- جملهٔ میانی دنباله‌ای حسابی که یازده جمله دارد برابر ۳۰ است. مجموع جمله‌های این دنبالهٔ حسابی چقدر است؟

۱) ۳۳۰ ۲) ۳۳۵ ۳) ۳۴۰ ۴) ۳۵۰

۶- قدرنسبت دنباله‌ای حسابی برابر -۳ و مجموع سیزده جملهٔ نخست آن برابر ۹۱ است. جملهٔ نخست این دنبالهٔ حسابی چقدر است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۳۵

۷- در دنباله‌ای حسابی $S_{۹}-S_{۷}=۲۰$. مقدار $S_{۱۶}$ چقدر است؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۶۰ ۳) ۱۶۵ ۴) ۱۷۰

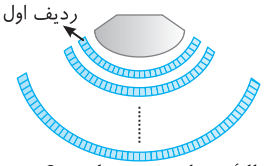
۸- چند تا از جمله‌های دنبالهٔ حسابی $۱۸,۱۶,۱۴,\ldots$ را از ابتدا باید جمع کنیم تا مجموع آن‌ها صفر شود؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

۹- حداقل چند جمله از ابتدای دنبالهٔ حسابی $۲۰,۱۷,۱۴,\ldots$ را جمع کنیم تا حاصل منفی شود؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷

۱۰- یک سالن تئاتر در ردیف اول ۴۰ صندلی، در ردیف دوم ۴۲ صندلی، در ردیف سوم ۴۴ صندلی، ... دارد. اگر این سالن ۷۵ ردیف صندلی داشته باشد، ظرفیت سالن چند نفر است؟



۱) ۸۷۳۰ ۲) ۸۵۵۰
۳) ۷۵۲۰ ۴) ۹۲۷۰

۱۱- در دنباله‌ای حسابی مجموع جمله‌های سوم و پنجم برابر با ۸ شده است. مجموع هفت جملهٔ نخست این دنبالهٔ حسابی چقدر است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۲ ۳) ۲۸ ۴) ۲۴

۱۲- در دنباله‌ای حسابی مجموع جمله‌های سوم، هفتم، چهاردهم و هجدهم برابر با ۱۰ شده است. مجموع بیست جملهٔ نخست این دنباله چقدر است؟

۱) ۴۰ ۲) ۷۰ ۳) ۶۰ ۴) ۵۰

۱۳- جملهٔ عمومی دنباله‌ای حسابی به‌صورت $a_n=-۳n+۷$ است. مجموع ۷ جملهٔ نخست این دنبالهٔ حسابی چقدر است؟

۱) -۱۹ ۲) -۲۷ ۳) -۳۳ ۴) -۳۵

۱۴- در دنباله‌ای حسابی $a_{۱}=۲$ و $S_{۱۴}-S_{۲۰}=۸۷$. مقدار $a_{۹}$ چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) -۶ ۴) -۸

۱۵- در یک دنبالهٔ حسابی مجموع ۱۱ جملهٔ نخست برابر ۱۶۵ است. جملهٔ ششم دنباله چند است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۲۱

۱۶- در یک دنبالهٔ حسابی، اگر مجموع هفده جملهٔ اول با مجموع سیزده جملهٔ اول برابر باشد، مجموع سی جملهٔ اول دنباله کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۴ ۴) صفر

۱۷- در یک دنبالهٔ حسابی مجموع n جملهٔ اول از رابطهٔ $S_n=۳n(n-۳)$ به‌دست می‌آید. جملهٔ عمومی دنباله کدام است؟

۱) $۶n-۱۲$ ۲) $۳n-۶$ ۳) $۶n-۶$ ۴) $۳n-۱۲$

۱۸- در یک دنبالهٔ حسابی مجموع n جملهٔ اول دنباله برابر $4n^2-5n$ است. قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۹- در دنبالهٔ حسابی $\dots,2x-1,3x+1$ مجموع ده جملهٔ اول برابر ۸۵ است. قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۱− ۳) ۹ ۴) ۹−

۲۰- در دنبالهٔ حسابی $\dots,8,3,-2$ مجموع پنج جملهٔ چهارم چقدر است؟

۱) ۴۲۰ ۲) ۴۴۲ ۳) ۴۶۰ ۴) ۴۱۵

۲۱- اگر اعداد سمت چپ معادلهٔ $1+4+7+\dots+x=117$ جملات یک دنبالهٔ حسابی باشند، مقدار x کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۲۵ ۳) ۲۷ ۴) ۲۹

۲۲- در یک دنبالهٔ حسابی با بیست جمله، مجموع سه جملهٔ اول برابر $3-\sqrt{2}$ و مجموع سه جملهٔ آخر برابر $3+\sqrt{2}$ است. مجموع تمام جملات دنباله کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۲ ۴) ۲۴

۲۳- در یک دنبالهٔ حسابی ۳ واحد به قدرنسبت اضافه می‌کنیم و ۵ واحد از جملهٔ اول کم می‌کنیم. به مجموع بیست جملهٔ اول چقدر اضافه می‌شود؟

۱) ۴۵۰ ۲) ۴۷۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۴۹۰

۲۴- در یک دنبالهٔ حسابی $S_{10}=75$ و $S_6=9$. مقدار S_4 چقدر است؟

۱) ۶− ۲) ۳− ۳) ۶ ۴) ۳

۲۵- در دنباله‌ای حسابی $S_6=9$ و $S_{12}=90$. مقدار $S_{13}+S_{17}$ چقدر است؟

۱) ۳۱۳ ۲) ۳۱۵ ۳) ۳۲۱ ۴) ۳۲۳

۲۶- در یک دنبالهٔ حسابی $S_{10}=27$ و $S_{27}=10$. حاصل S_{37} کدام است؟

۱) ۷− ۲) ۳۷− ۳) ۲۷− ۴) ۱۷−

۲۷- مجموع تعدادی از جمله‌های دنبالهٔ حسابی $\dots,36,38,40$ از ابتدا حداکثر چقدر است؟

۱) ۴۰۰ ۲) ۴۱۰ ۳) ۴۲۰ ۴) ۴۳۰

۲۸- در دنبالهٔ حسابی $\dots,a_3,a_2,\frac{1}{3}$ می‌دانیم $a_8=5$. حاصل $a_2+a_5+a_8+\dots+a_{29}$ چند است؟

۱) ۹۵ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۸۱

۲۹- اگر S_n مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_1 و قدرنسبت d باشد، حاصل عبارت $\frac{S_{3n}}{S_{2n}-S_n}$ کدام است؟

۱) $\frac{3a}{d}$ ۲) $\frac{3d}{a}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{1}{3}$

۳۰- اگر قدرنسبت یک دنبالهٔ حسابی برابر ۲ باشد و $a_1+a_2+\dots+a_{100}=100$، حاصل $a_4+a_8+a_{12}+\dots+a_{100}$ کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۵۰ ۳) ۷۵ ۴) ۱۰۰

۳۱- در دنباله‌ای هندسی $q=\frac{1}{3}$، $a_k=5$ و $S_k=1820$. مقدار a_1 چقدر است؟

۱) ۱۲۱۰ ۲) ۱۲۱۲ ۳) ۱۲۱۵ ۴) ۱۲۱۸

۳۲- در دنبالهٔ هندسی $\dots,\sqrt{32}\ ,\sqrt{8},\sqrt{2}$ مجموع ده جملهٔ اول کدام است؟

۱) $511\sqrt{2}$ ۲) $1023\sqrt{2}$ ۳) $2047\sqrt{2}$ ۴) $4095\sqrt{2}$

۳۳- در دنباله‌ای هندسی و غیرثابت $4S_4=5S_2$. مربع قدرنسبت این دنبالهٔ هندسی کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{5}$

۳۴- قدرنسبت دنباله‌ای هندسی برابر $-\frac{1}{2}$ و مجموع هشت جملهٔ نخست آن برابر $\frac{85}{64}$ شده است. جملهٔ نخست این دنباله چقدر است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{7}{2}$

۳۵- جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی برابر ۷، جملهٔ آخر آن برابر ۴۴۸ و مجموع جمله‌های آن برابر ۸۸۹ است. قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۶- در یک دنبالهٔ هندسی مجموع چهار جملهٔ اول برابر ۲ و مجموع هشت جملهٔ اول برابر ۱۳۰ است. قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳۷- در دنباله‌ای هندسی مجموع چهار جملهٔ نخست برابر ۲۰ و مجموع چهار جملهٔ بعدی برابر ۳۲۰ است. مجموع دوازده جملهٔ نخست این دنبالهٔ هندسی چقدر است؟

۱) ۵۴۱۰ ۲) ۵۴۲۰ ۳) ۵۴۴۰ ۴) ۵۴۶۰

۳۸- در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع ۱۰ جملهٔ اول ۲۴۴ برابر مجموع ۵ جملهٔ اول است. جملهٔ پنجم چند برابر جملهٔ اول است؟

۱) ۸۱ ۲) ۲۴۳ ۳) ۲۷ ۴) ۷۲۹

۳۹- مجموع ده جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی $a , a+۲ , a+۴ , \ldots$ با مجموع ده جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $۱ , ۲ , ۴ , \ldots$ برابر است. مقدار a کدام است؟

۱) ۹۱/۲ ۲) ۹۲/۳ ۳) ۹۳/۳ ۴) ۹۴/۱

۴۰- در دنبالهٔ هندسی $a_۱ , a_۲ , \ldots , a_n$ می‌دانیم $S_n=۱۶۰$، $a_۳-a_۱=۳۲$ و $a_۴-a_۲=۹۶$. مقدار n کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۶

۴۱- مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی از رابطهٔ $S_n=\frac{۳(۲^n-۱)}{۴}$ به‌دست می‌آید. جملهٔ پنجم دنباله کدام است؟

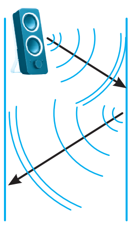
۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۴۲- مجموع ده جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $a_۱ , a_۱q , a_۱q^۲ , \ldots$ دو برابر مجموع ده جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $a_۱ , -a_۱q , a_۱q^۲ , \ldots$ است. مقدار q کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

۴۳- مجموع سه جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی برابر ۲۱ و مجموع سه جملهٔ بعدی آن برابر ۱۶۸ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۳



۴۴- در شکل روبه‌رو تیغه‌های آکوستیک را می‌بینید که قادرند $\frac{۵}{۹}$ صوت صادرشده را جذب کنند و آن را به تیغهٔ روبه‌رو منعکس کنند. حداقل پس از چند برخورد بیش از ۹۰ درصد صوت صادر شده جذب شده است؟

۱) ۲ ۲) ۳
۳) ۴ ۴) ۵

۴۵- یک مثلث با محیط p مفروض است. اگر وسط‌های اضلاع آن را به هم وصل کنیم، یک مثلث کوچک‌تر ایجاد می‌شود و این عمل را روی مثلث کوچک‌تر ایجاد شده تکرار می‌کنیم. اگر این عمل را ده بار انجام دهیم، مجموع محیط مثلث‌ها چند برابر p است؟

۱) $\frac{۱۰۲۳}{۵۱۲}$ ۲) $\frac{۵۱۱}{۲۵۶}$ ۳) $\frac{۲۰۴۷}{۱۰۲۳}$ ۴) $\frac{۴۰۹۵}{۲۰۴۸}$

۴۶- مقدار x از معادلهٔ $۲^x+۲^{x+۱}+۲^{x+۲}+\cdots+۲^{x+۹}=۸۱۸۴$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۷- اگر $f(x)=\frac{x^۹-x}{x+x\sqrt{x}+x^۲+x^۲\sqrt{x}+\cdots+x^۸+x^۸\sqrt{x}}$، مقدار $f(۱/۹۶)$ چقدر است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۵

۴۸- حاصل عبارت $\frac{x^۵-۱}{x-۱}-(x+۱)(x^۲+۱)$ کدام است؟

۱) $x^۴+x$ ۲) $۲x^۴$ ۳) $x^۴$ ۴) $x^۴-x^۳$

۴۹- جواب مثبت معادلهٔ $۱+x+x^۲+\cdots+x^۹=\frac{x^{۱۰}}{x-۱}-x$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}$

۵۰- اگر $x^۶-y^۶=۲(x-y)$ و $x\neq y$ حاصل عبارت $(x+y)(x^۴+y^۴+x^۲y^۲)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $\frac{۱}{۴}$

راه‌حل تمرین‌ها

۱ در این دنباله $a_1=9$ و $d=5-9=-4$. اکنون توجه کنید که

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d).$$

بنابراین $S_{19}=\frac{19}{2}(2\times9+(19-1)(-4))=-513$.

۲ الف) جملهٔ اول دنباله برابر ۰/۳ و قدرنسبت آن برابر ۱/۲ است. بنابراین مجموع صد جملهٔ نخست آن برابر است با

$$S_{100}=\frac{100}{2}(2a_1+99d)=50(2\times0/3+99\times1/2)=5970$$

ب) جملهٔ اول دنباله برابر $\frac{1}{15}$ و قدرنسبت آن برابر $\frac{1}{12}-\frac{1}{15}=\frac{1}{60}$ است. بنابراین مجموع یازده جملهٔ نخست آن برابر است با

$$S_{11}=\frac{11}{2}(2a_1+10d)=\frac{11}{2}(2\times\frac{1}{15}+10\times\frac{1}{60})=\frac{33}{20}$$

۳ مجموع مورد نظر، مجموع یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۳ و قدرنسبت ۵ است که $n+1$ جمله دارد:

$$S_{n+1}=\frac{n+1}{2}(2a_1+(n+1-1)d)=(\frac{n+1}{2})(6+5n)=\frac{5n^2+11n+6}{2}$$

۴ **راه‌حل اول** با قرار دادن $n=1$ و $n=2$ در جملهٔ عمومی مقدار جمله‌های اول و دوم دنباله را حساب می‌کنیم: $a_1=\frac{3\times1-1}{4}=\frac{1}{2}$ و $a_2=\frac{3\times2-1}{4}=\frac{5}{4}$. بنابراین $d=a_2-a_1=\frac{5}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$. در نتیجه

$$S_{20}=\frac{20}{2}(2a_1+19d)=10(2\times\frac{1}{2}+19\times\frac{3}{4})=\frac{305}{2}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $a_1=\frac{3\times1-1}{4}=\frac{1}{2}$ و $a_{20}=\frac{3\times20-1}{4}=\frac{59}{4}$.

بنابراین $S_{20}=\frac{20}{2}(a_1+a_{20})=10(\frac{1}{2}+\frac{59}{4})=\frac{305}{2}$.

۵ چون مجموع جمله‌های دنبالهٔ مورد نظر متناهی است، پس تعداد جمله‌های آن هم متناهی است. اگر تعداد این جمله‌ها برابر با n باشد، آن‌گاه

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)\Rightarrow -504=\frac{n}{2}(6+(-62))\Rightarrow -504=-28n\Rightarrow n=18$$

بنابراین دنبالهٔ حسابی مورد نظر ۱۸ جمله دارد.

۶ توجه کنید که $a_1+a_{24}=a_5+a_{20}=a_{10}+a_{15}$. بنابراین از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$3(a_1+a_{24})=225\Rightarrow a_1+a_{24}=75$$

به این ترتیب $S_{24}=\frac{24}{2}(a_1+a_{24})=12\times75=900$.

۷ چون a_1 و S_{17} را داریم و d را می‌خواهیم، از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

$$S_{17}=\frac{17}{2}(2a_1+(17-1)d)\Rightarrow 15=\frac{17}{2}(2(-9)+16d)=17(-9+8d)$$

$$8d=\frac{15}{17}+9=\frac{168}{17}\Rightarrow d=\frac{21}{17}$$

۸ جملهٔ اول دنباله برابر ۶− و قدرنسبت آن برابر است با $\frac{1}{2}$. بنابراین مجموع n جملهٔ نخست دنباله برابر است با

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=\frac{n}{2}(-12+\frac{n-1}{2})=\frac{n^2-25n}{4}$$

پس

$$\frac{n^2-25n}{4}=-25\Rightarrow n^2-25n+100=0\Rightarrow(n-5)(n-20)=0$$

$$n=5,\ n=20$$

بنابراین مجموع پنج جملهٔ اول دنباله برابر ۲۵− است و مجموع بیست جملهٔ اول دنباله هم برابر ۲۵− است.

۹ توجه کنید که

$$a_5=9\Rightarrow a_1+4d=9,\quad a_2+a_9=20\Rightarrow 2a_1+9d=20$$

از حل دستگاه معادله‌های فوق نتیجه می‌شود $a_1=1$ و $d=2$. بنابراین

$$S_{20}=\frac{20}{2}(2a_1+19d)=10(2+38)=400$$

۱۰ توجه کنید که

$$a_1+a_8=25\Rightarrow 2a_1+7d=25,\quad a_3+a_5=19\Rightarrow 2a_1+6d=19$$

از حل دستگاه معادله‌های فوق نتیجه می‌شود $a_1=-\frac{17}{2}$ و $d=6$. بنابراین

$$S_{12}=\frac{12}{2}(2a_1+11d)=6(-17+66)=294$$

۱۱ در این دنبالهٔ حسابی $a_1=8$. اکنون توجه کنید که $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$. در نتیجه

$$S_{15}=\frac{15}{2}(2\times8+(15-1)d)\Rightarrow 1170=\frac{15}{2}(16+14d)=120+105d$$

$$1050=105d\Rightarrow d=10$$

بنابراین $S_{10}=\frac{10}{2}(2a_1+(10-1)d)=5(16+9\times10)=530$.

۱۲ بنابر فرض $3a_{10}=a_2-24$، بنابراین

$$3(a_1+9d)=a_1+d-24\Rightarrow 2a_1+26d=-24$$

از طرف دیگر، $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$، در نتیجه

$$S_{27}=\frac{27}{2}(2a_1+26d)=\frac{27}{2}(-24)=-324$$

۱۳ بنابر فرض مسئله،

$$S_{14}=77+S_3\Rightarrow\frac{14}{2}(2a_1+13d)=77+\frac{3}{2}(2a_1+2d)$$

$$14a_1+91d=77+3a_1+3d\Rightarrow 11a_1+88d=77\Rightarrow a_1+8d=7$$

بنابراین $a_9=7$.

۱۴ می‌توان نوشت

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)\Rightarrow ۷۲=\frac{n}{۲}(۲\times۱۷-۲(n-۱))$$

$$n^۲-۱۸n+۷۲=۰\Rightarrow(n-۶)(n-۱۲)=۰\Rightarrow n=۶,\ n=۱۲$$

در نتیجه این دنباله یا شش جمله دارد یا دوازده جمله.

۱۵ ابتدا توجه کنید که مجموع پنج جملهٔ دوم دنباله برابر است با $S_{۱۰}-S_۵$. بنابراین

$$S_۵=\frac{۱}{۴}(S_{۱۰}-S_۵)\Rightarrow ۵S_۵=S_{۱۰}\Rightarrow ۵\times\frac{۵}{۲}(۲a_۱+۴d)=\frac{۱۰}{۲}(۲a_۱+۹d)$$

$$۲۵(۴+۴d)=۱۰(۴+۹d)\Rightarrow d=-۶$$

در نتیجه $S_{۳۰}=\frac{۳۰}{۲}(۲a_۱+۲۹d)=۱۵(۲\times۲-۲۹\times۶)=-۲۵۵۰$.

۱۶ توجه کنید که $a_n=a_۱+(n-۱)d=-۳+(n-۱)d$. بنابراین

$$a_۳a_۷=(-۳+۲d)(-۳+۶d)=۲۴\Rightarrow ۴d^۲-۸d-۵=۰$$

$$(۲d+۱)(۲d-۵)=۰\Rightarrow d=-\frac{۱}{۲},\ d=\frac{۵}{۲}\ \text{(غ.ق.ق)}$$

از طرف دیگر $S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$، بنابراین

$$S_{۱۲}=\frac{۱۲}{۲}\left(۲(-۳)+۱۱\left(-\frac{۱}{۲}\right)\right)=-۶۹$$

۱۷ فرض کنید قدرنسبت دنبالهٔ حسابی مورد نظر برابر با d باشد. در این صورت یازده جملهٔ $a_۱,a_۳,\dots,a_{۲۱}$ (جمله‌های با ردیف فرد) دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت $۲d$ تشکیل می‌دهند. همین‌طور ده جملهٔ $a_۲,a_۴,\dots,a_{۲۰}$ (جمله‌های با ردیف زوج) دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت $۲d$ تشکیل می‌دهند.
بنابر فرض، $\frac{۱۱}{۲}(a_۱+a_{۲۱})=\frac{۱۰}{۲}(a_۲+a_{۲۰})+۱۵$. بنابراین

$$\frac{۱۱}{۲}(a_۱+(a_۱+۲۰d))=۵((a_۱+d)+(a_۱+۱۹d))+۱۵\Rightarrow a_۱+۱۰d=۱۵$$

پس $S_{۲۱}=\frac{۲۱}{۲}(۲a_۱+۲۰d)=۲۱(a_۱+۱۰d)=۲۱\times۱۵=۳۱۵$.

۱۸ دنبالهٔ حسابی را با $a_۱,a_۲,\dots,a_n$ نشان می‌دهیم. می‌دانیم $a_۱+a_۲+\cdots+a_n=۷۱۵$. حال به جملهٔ kام عدد $۲k-۱$ را اضافه می‌کنیم. در نتیجه مجموع جدید برابر است با

$$a_۱+a_۲+\cdots+a_n+(۱+۳+\cdots+۲n-۱)=۸۳۶$$

$$۷۱۵+n^۲=۸۳۶\Rightarrow n^۲=۱۲۱$$

در نتیجه $n=۱۱$. اکنون باید مقدار $a_۱+a_۶+a_{۱۱}$ را حساب کنیم. می‌دانیم $a_۱+a_{۱۱}=۲a_۶$. در نتیجه $a_۱+a_۶+a_{۱۱}=۳a_۶$. اکنون توجه کنید که

$$۷۱۵=a_۱+\cdots+a_{۱۱}=\frac{۱۱}{۲}\underbrace{(a_۱+a_{۱۱})}_{۲a_۶}=۱۱a_۶\Rightarrow a_۶=۶۵$$

بنابراین مجموع مورد نظر برابر است با $۳a_۶=۱۹۵$.

۱۹ در دنبالهٔ حسابی $۱,۴,۷,\dots$ جملهٔ اول برابر ۱ و قدرنسبت برابر ۳ است. پس مجموع n جملهٔ نخست آن برابر است با

$$\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)=\frac{n}{۲}(۲+۳(n-۱))=\frac{(۳n-۱)n}{۲}$$

در دنبالهٔ حسابی $۲۳,۲۵,۲۷,\dots$ جملهٔ اول برابر ۲۳ و قدرنسبت برابر ۲ است. پس مجموع n جملهٔ نخست آن برابر است با

$$\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)=\frac{n}{۲}(۲\times۲۳+۲(n-۱))=\frac{(۲n+۴۴)n}{۲}$$

بنابراین

$$\frac{(۳n-۱)n}{۲}=\frac{(۲n+۴۴)n}{۲}\Rightarrow ۳n-۱=۲n+۴۴\Rightarrow n=۴۵$$

۲۰ توجه کنید که قدرنسبت دنبالهٔ حسابی سمت چپ برابر است با $۹+x-(۳+x)=۶$. چون جملهٔ اول برابر $۳+x$ و جملهٔ آخر برابر $۹۳+x$ است، پس

$$a_n=a_۱+(n-۱)d\Rightarrow ۹۳+x=۳+x+(n-۱)۶\Rightarrow n=۱۶$$

بنابراین، چون $S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$، مجموع سمت چپ معادله برابر است با $\frac{۱۶}{۲}(۳+x+۹۳+x)=۱۶(۴۸+x)$. بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود $۱۶(۴۸+x)=۸۳۲$، پس $x=۴$.

۲۱ ابتدا قدرنسبت و جملهٔ اول دنباله را به‌دست می‌آوریم. بنابر فرض مسئله،

$$a_۳=a_۱+۲d=-۱۳,\quad a_۷=a_۱+۶d=۳$$

از حل دستگاه معادله‌های فوق نتیجه می‌شود $a_۱=-۲۱$ و $d=۴$. اکنون توجه کنید که

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)=\frac{n}{۲}(-۴۲+۴(n-۱))=۲n^۲-۲۳n$$

کمترین مقدار عبارت $۲n^۲-۲۳n$ به ازای $n=\frac{۲۳}{۴}$ به‌دست می‌آید که چون n عددی طبیعی است، پس کمترین مقدار S_nها یکی از عددهای $S_۵$ و $S_۶$ است: $S_۵=-۶۵$ و $S_۶=-۶۶$. پس $S_۶$ کمترین مقدار در میان عددهای $S_۱$، $S_۲$، $S_۳$ و ... است.

۲۲ قدرنسبت دنباله را با d نشان می‌دهیم. در نتیجه چون $۳a_۸=۵a_{۱۳}$، پس

$$۳(a_۱+۷d)=۵(a_۱+۱۲d)\Rightarrow ۲a_۱=-۳۹d$$

اکنون توجه کنید که

$$S_{۱۰}=۵(۲a_۱+۹d)=-۱۵۰d,\qquad S_{۱۱}=\frac{۱۱}{۲}(۲a_۱+۱۰d)=-۱۵۹/۵d$$

$$S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(۲a_۱+۱۹d)=-۲۰۰d,\qquad S_{۲۱}=\frac{۲۱}{۲}(۲a_۱+۲۰d)=-۱۹۹/۵d$$

چون $a_۱>۰$، پس $-۳۹d=۲a_۱>۰$، در نتیجه $-d$ عددی مثبت است. بنابراین بزرگ‌ترین عدد میان عبارت‌های به‌دست آمده $-۲۰۰d$، یعنی $S_{۲۰}$ است.

۲۳ چون $\frac{S_{۳n}}{S_n}$ به مقدار n بستگی ندارد، پس مقدار آن به ازای $n=۱$ و $n=۲$ برابر است:

$$\frac{S_۳}{S_۱}=\frac{S_۶}{S_۲}\Rightarrow\frac{\frac{۳}{۲}(۲a_۱+۲d)}{a_۱}=\frac{\frac{۶}{۲}(۲a_۱+۵d)}{\frac{۲}{۲}(۲a_۱+d)}$$

$$\frac{۳(a_۱+۲)}{a_۱}=\frac{۳(۲a_۱+۵\times۲)}{۲a_۱+۲}\Rightarrow a_۱=۱$$

به این ترتیب $S_{۱۵}=\frac{۱۵}{۲}(۲a_۱+۱۴d)=\frac{۱۵}{۲}(۲\times۱+۱۴\times۲)=۲۲۵$.

۲۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$a_n=S_n-S_{n-۱}=۴n^۲-۳n-(۴(n-۱)^۲-۳(n-۱))$$
$$=۴n^۲-۳n-(۴n^۲-۸n+۴-۳n+۳)=۸n-۷$$

بنابراین $a_۱=۸×۱-۷=۱$ و $a_۲=۸×۲-۷=۹$. در نتیجه

$$d=a_۲-a_۱=۹-۱=۸$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$S_۱=۴×۱^۲-۳×۱=۱⇒a_۱=۱,\quad S_۲=۴×۲^۲-۳×۲=۱۰$$
$$a_۱+a_۲=۱۰⇒۱+a_۲=۱۰⇒a_۲=۹$$

پس $d=a_۲-a_۱=۹-۱=۸$.

۲۵ چون $a_۸$ مضرب ۴ است، فرض می‌کنیم $a_۸=۴k$ که در آن k عددی طبیعی است. از طرف دیگر، $۳۳۷<S_{۱۵}<۳۹۳$، پس

$$۳۳۷<\frac{۱۵}{۲}(۲a_۱+۱۴d)<۳۹۳⇒۳۳۷<۱۵(a_۱+۷d)<۳۹۳$$
$$۳۳۷<۱۵a_۸<۳۹۳⇒۳۳۷<۶۰k<۳۹۳⇒۵\frac{۳۷}{۶۰}<k<۶\frac{۱۱}{۲۰}$$

و چون k عددی طبیعی است، پس $k=۶$ و در نتیجه $a_۸=۴k=۲۴$.

۲۶ مضرب‌های دو رقمی ۷ دنباله‌ای حسابی با جملهٔ نخست ۱۴ $(a_۱=۱۴)$ و جملهٔ آخر ۹۸ $(a_n=۹۸)$ تشکیل می‌دهند. قدرنسبت این دنبالهٔ حسابی برابر ۷ است، بنابراین

$$a_n=a_۱+(n-۱)d⇒۹۸=۱۴+(n-۱)۷$$
$$۷(n-۱)=۹۸-۱۴=۸۴⇒n-۱=۱۲⇒n=۱۳$$

یعنی این دنبالهٔ حسابی ۱۳ جمله دارد و در نتیجه مجموع جمله‌های آن برابر است با $S_{۱۳}=\frac{۱۳}{۲}(۱۴+۹۸)=۷۲۸$.

۲۷ این عددها دنباله‌ای حسابی با جملهٔ نخست $a_۱=۱۳$، جملهٔ آخر $a_n=۹۷$ و قدرنسبت ۲ تشکیل می‌دهند. از طرف دیگر،

$$a_n=a_۱+(n-۱)d⇒۹۷=۱۳+(n-۱)۲⇒n=۴۳$$

بنابراین دنبالهٔ مورد نظر ۴۳ جمله دارد. اکنون توجه کنید که $S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$. در نتیجه $S_{۴۳}=\frac{۴۳}{۲}(۱۳+۹۷)=۲۳۶۵$.

توجه: ۵۰ عدد فرد کوچک‌تر از ۱۰۰ داریم که ۷ عدد ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱ و ۹۹ از آن‌ها جز عددهای فرد در بازهٔ $[۱۳,۹۷]$ نیستند. بنابراین تعداد عددهای فرد در این بازه ۴۳ تا است.

۲۸ ابتدا مجموع عددهای سه رقمی را که بر ۱۷ بخش‌پذیر هستند به‌دست می‌آوریم. کوچک‌ترین عدد سه رقمی که بر ۱۷ بخش‌پذیر است، ۱۰۲ است و بزرگ‌ترین این عددها ۹۸۶ است. با توجه به $۱۰۲=۱۷×۶$ و $۹۸۶=۱۷×۵۸$، تعداد این عددها ۵۳ تاست و مجموع آن‌ها برابر است با

$$S_{۵۳}=\frac{۵۳}{۲}(۱۰۲+۹۸۶)=۲۸۸۳۲$$

اکنون مجموع تمام عددهای سه رقمی را به‌دست می‌آوریم. کوچک‌ترین عدد سه رقمی ۱۰۰، بزرگ‌ترین آن‌ها ۹۹۹ و تعدادآن‌ها ۹۰۰ تاست. پس

$$S_{۹۰۰}=\frac{۹۰۰}{۲}(۱۰۰+۹۹۹)=۴۹۴۵۵۰$$

اگر ۲۸۸۳۲ را از عدد فوق کم کنیم، مجموع عددهای سه رقمی که بر ۱۷ بخش‌پذیر نیستند، به‌دست می‌آید که برابر است با ۴۶۵۷۱۸.

۲۹ محیط نیم‌دایرهٔ به شعاع r برابر با πr است. فنر مورد نظر از سیزده نیم‌دایره درست شده است که شعاع‌های آن‌ها دنباله‌ای حسابی با جملهٔ نخست ۰/۵ و قدرنسبت ۰/۵ تشکیل می‌دهند. بنابراین مجموع شعاع‌های آن‌ها برابر است با $S_{۱۳}=\frac{۱۳}{۲}(۲×۰/۵+۱۲×۰/۵)=۴۵/۵$. پس مجموع محیط نیم‌دایره‌ها یا همان طول فنر برابر است با $۴۵/۵×\pi$.

۳۰ شماره‌های خانه‌ها دنباله‌ای حسابی با جملهٔ نخست ۱ و قدرنسبت ۱ تشکیل می‌دهند. در این‌جا به دنبال n ای می‌گردیم که $S_{n-۱}=S_{۴۹}-S_n$. بنابراین

$$\frac{(n-۱)n}{۲}=\frac{۴۹×۵۰}{۲}-\frac{n(n+۱)}{۲}⇒n^۲-n=۴۹×۵۰-n^۲-n$$
$$۲n^۲=۴۹×۵۰⇒n^۲=۴۹×۲۵⇒n=۷×۵=۳۵$$

بنابراین خانهٔ سی‌وپنجم ویژگی مورد نظر را دارد.

۳۱ تعداد شکوفه‌هایی که هر روز می‌رویند دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت ۱۲ تشکیل می‌دهند. تعداد شکوفه‌هایی که در ۹ روز نخست روییده‌اند برابر با $S_۹$ و تعداد شکوفه‌هایی که در ۶ روز آخر روییده‌اند $S_{۱۵}-S_۹$ است. بنابرفرض مسئله، $S_۹=S_{۱۵}-S_۹$، بنابراین $۲S_۹=S_{۱۵}$. به این ترتیب

$$۲×\frac{۹}{۲}(۲a_۱+(۹-۱)d)=\frac{۱۵}{۲}(۲a_۱+(۱۵-۱)d)$$
$$۳۶a_۱+۱۸×۸d=۳۰a_۱+۱۵×۱۴d$$
$$۶a_۱=۶۶d=۶۶×۱۲⇒a_۱=۶۶×۲=۱۳۲$$

بنابراین کل شکوفه‌هایی که در این ۱۵ روز روی درخت روییده‌اند، برابر است با

$$S_{۱۵}=\frac{۱۵}{۲}(۲×۱۳۲+۱۴×۱۲)=۳۲۴۰$$

۳۲ ابتدا توجه کنید که

$$S_۱=۶⇒a_۱=۶$$
$$S_۷=۱۰۵⇒\frac{۷}{۲}(۲a_۱+۶d)=۱۰۵⇒\frac{۷}{۲}(۱۲+۶d)=۱۰۵⇒d=۳$$

بنابراین

$$\frac{S_n}{S_{n-۳}}=\frac{\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)}{(\frac{n-۳}{۲})(۲a_۱+(n-۳-۱)d)}=\frac{n(۱۲+۳(n-۱))}{(n-۳)(۱۲+۳(n-۴))}$$
$$=\frac{۳n(n+۳)}{(n-۳)(۳n)}=\frac{n+۳}{n-۳}$$

۳۳ چون $d=۲a_۱$، پس

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)=\frac{n}{۲}(d+(n-۱)d)=\frac{n^۲d}{۲}$$

به همین ترتیب $S_m=\frac{m^۲d}{۲}$. بنابراین $\frac{S_n}{S_m}=\frac{\frac{n^۲d}{۲}}{\frac{m^۲d}{۲}}=\frac{n^۲}{m^۲}$.

۳۴ ابتدا توجه کنید که

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d),\quad S_{۲n}=\frac{۲n}{۲}(۲a_۱+(۲n-۱)d)$$

بنابراین

$$S_{۲n}-۲S_n=\frac{۲n}{۲}(۲a_۱+(۲n-۱)d)-\frac{۲n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$$
$$=n(۲a_۱+(۲n-۱)d-۲a_۱-(n-۱)d)=n(۲n-۱-n+۱)d=n^۲d$$

۳۵ اگر $m=n$ حکم درست است، پس می‌توانیم فرض کنیم $m>n$. توجه کنید که

$$S_m-S_n=a_1+a_2+\cdots+a_m-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$
$$=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m$$

بنابراین S_m-S_n مجموع $m-n$ جملهٔ دنباله‌ای حسابی است که جملهٔ نخست آن a_{n+1} و جملهٔ آخر آن a_m است. در نتیجه

$$S_m-S_n=\frac{m-n}{2}(a_{n+1}+a_m)\qquad (1)$$

از طرف دیگر،

$$S_{m+n}=\frac{m+n}{2}(a_1+a_{m+n})\qquad (2)$$

اکنون توجه کنید که چون $n+1+m=1+m+n$، پس $a_{n+1}+a_m=a_1+a_{m+n}$. اگر تساوی (۱) را بر تساوی (۲) تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید $\frac{S_m-S_n}{S_{m+n}}=\frac{m-n}{m+n}$.

۳۶ جمله‌های با ردیف فرد، دنباله‌ای حسابی با جملهٔ نخست a_1 و قدرنسبت $2d$ تشکیل می‌دهند و تعداد آن‌ها $n+1$ تاست. بنابراین

$$a_1+a_3+\cdots+a_{2n+1}=\frac{n+1}{2}(2a_1+(n+1-1)(2d))=(n+1)(a_1+nd)$$

جمله‌های با ردیف زوج، دنباله‌ای حسابی با جملهٔ نخست a_2 و قدرنسبت $2d$ تشکیل می‌دهند و تعداد آن‌ها n تاست. بنابراین

$$a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=\frac{n}{2}(2a_2+(n-1)(2d))=n(a_2+(n-1)d)$$
$$=n(a_1+d+(n-1)d)=n(a_1+nd)$$

به این ترتیب، نسبت مورد نظر برابر است با $\frac{(n+1)(a_1+nd)}{n(a_1+nd)}=\frac{n+1}{n}$.

۳۷ چون تساوی $S_{2n}=4S_n$ به ازای هر n طبیعی برقرار است، می‌توانیم مقدار دلخواه $n=1$ را در آن قرار دهیم:

$$n=1\Rightarrow S_2=4S_1\Rightarrow a_2+a_1=4a_1\Rightarrow a_2=3a_1$$

در نتیجه

$$a_1+d=3a_1\Rightarrow d=2a_1$$

بنابراین

$$\frac{S_m}{S_k}=\frac{\frac{m}{2}(2a_1+(m-1)d)}{\frac{k}{2}(2a_1+(k-1)d)}=\frac{m(2a_1+2a_1(m-1))}{k(2a_1+2a_1(k-1))}=\frac{m(2a_1m)}{k(2a_1k)}=\left(\frac{m}{k}\right)^2$$

۳۸ راه‌حل اول توجه کنید که

$$S_k=m\Rightarrow\frac{k}{2}(a_1+a_k)=m\Rightarrow a_1+a_k=\frac{2m}{k}\qquad(1)$$
$$S_m=k\Rightarrow\frac{m}{2}(a_1+a_m)=k\Rightarrow a_1+a_m=\frac{2k}{m}\qquad(2)$$

اگر تساوی (۲) را از تساوی (۱) کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$a_k-a_m=\frac{2m}{k}-\frac{2k}{m}\Rightarrow a_1+(k-1)d-a_1-(m-1)d=\frac{2}{mk}(m^2-k^2)$$
$$(k-1-m+1)d=\frac{2}{mk}(m-k)(m+k)\Rightarrow d=-\frac{2(m+k)}{mk}$$

پس از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$2a_1+(k-1)d=\frac{2m}{k}\Rightarrow 2a_1+\frac{-2(k-1)(m+k)}{mk}=\frac{2m}{k}$$
$$a_1=\frac{m}{k}+\frac{(k-1)(m+k)}{mk}=\frac{m^2+km+k^2-m-k}{mk}$$

بنابراین

$$S_{m+k}=\frac{m+k}{2}(2a_1+(m+k-1)d)$$
$$=\frac{m+k}{2}\left(\frac{2m^2+2km+2k^2-2m-2k}{mk}-\frac{2(m+k-1)(m+k)}{mk}\right)$$
$$=\frac{m+k}{mk}(m^2+km+k^2-m-k-m^2-k^2-2km+m+k)$$
$$=\frac{m+k}{mk}(-km)=-(m+k)$$

راه‌حل دوم

$$S_m=k\Rightarrow\frac{m}{2}(2a_1+(m-1)d)=k\Rightarrow 2ma_1+(m^2-m)d=2k$$
$$S_k=m\Rightarrow\frac{k}{2}(2a_1+(k-1)d)=m\Rightarrow 2ka_1+(k^2-k)d=2m$$

طرفین تساوی‌های فوق را از هم کم می‌کنیم:

$$(2m-2k)a_1+(m^2-m-k^2+k)d=2(k-m)$$
$$2(m-k)a_1+((m-k)(m+k)-(m-k))d=2(k-m)$$
$$2(m-k)a_1+(m-k)(m+k-1)d=-2(m-k)$$
$$2a_1+(m+k-1)d=-2$$

بنابراین $S_{m+k}=\frac{m+k}{2}(2a_1+(m+k-1)d)=\frac{m+k}{2}(-2)=-(m+k)$.

۳۹ توجه کنید که

$$S_m=m^2k\Rightarrow\frac{m}{2}(2a_1+(m-1)d)=m^2k\Rightarrow 2a_1+(m-1)d=2mk\qquad(1)$$
$$S_n=n^2k\Rightarrow\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=n^2k\Rightarrow 2a_1+(n-1)d=2nk\qquad(2)$$

اگر تساوی (۲) را از تساوی (۱) کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$(m-n)d=2k(m-n)\Rightarrow d=2k$$

در نتیجه از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$2a_1+(m-1)(2k)=2mk\Rightarrow a_1=k$$

به این ترتیب $S_k=\frac{k}{2}(2a_1+(k-1)d)=\frac{k}{2}(2k+(k-1)(2k))=k^3$.

۴۰ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)\ ,\qquad S_{n+1}=\frac{n+1}{2}(2a_1+(n+1-1)d)$$
$$S_{n+2}=\frac{n+2}{2}(2a_1+(n+2-1)d)\ ,\quad S_{n+3}=\frac{n+3}{2}(2a_1+(n+3-1)d)$$

بنابراین

$$S_{n+3}-3S_{n+2}+3S_{n+1}-S_n=\frac{n+3}{2}(2a_1+(n+2)d)$$
$$-\frac{3(n+2)}{2}(2a_1+(n+1)d)+\frac{3(n+1)}{2}(2a_1+nd)-\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$$

پس از ساده کردن، حاصل عبارت فوق صفر می‌شود.

راه‌حل دوم از تساوی $S_{k+1}-S_k=a_{k+1}$ نتیجه می‌شود

$$A=S_{n+3}-3S_{n+2}+3S_{n+1}-S_n=(S_{n+3}-S_n)-3(S_{n+2}-S_{n+1})$$
$$=a_{n+3}+a_{n+2}+a_{n+1}-3a_{n+2}=a_{n+3}+a_{n+1}-2a_{n+2}$$

چون a_{n+2} واسطهٔ حسابی a_{n+1} و a_{n+3} است، پس $a_{n+3}+a_{n+1}=2a_{n+2}$ و در نتیجه $A=2a_{n+2}-2a_{n+2}=0$.

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ ۲ دنبالهٔ مورد نظر، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت $d=-2$ و جملهٔ نخست $a_1=7$ است. بنابراین $a_{20}=a_1+19d=7+19(-2)=-31$.

در نتیجه $S_n=S_{20}=\frac{20}{2}(a_1+a_{20})=10(7-31)=-240$.

۲- گزینهٔ ۳ اگر قدرنسبت این دنبالهٔ حسابی برابر d باشد، آن‌گاه

$$a_{14}=-5\Rightarrow a_1+13d=-5\Rightarrow 34+13d=-5\Rightarrow d=-3$$

بنابراین

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)\Rightarrow S_{18}=\frac{18}{2}(2\times34+17(-3))=9\times17=153$$

۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)\Rightarrow 616=\frac{n}{2}(-5+49)\Rightarrow 616=22n\Rightarrow n=28$$

۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$a_9+a_{10}=13\Rightarrow a_1+8d+a_1+9d=13\Rightarrow 2a_1+17d=13$$

بنابراین $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=\frac{18}{2}(2a_1+17d)=9\times13=117$.

۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$a_1+a_{11}=a_2+a_{10}=a_3+a_9=a_4+a_8=a_5+a_7=2a_6$$

بنابراین $S_{11}=\frac{11}{2}(a_1+a_{11})=\frac{11}{2}\times2a_6=11a_6=11\times30=330$.

۶- گزینهٔ ۲ در این مسئله، $d=-3$ و $S_{13}=91$. اکنون توجه کنید که

$$S_{13}=\frac{13}{2}(2a_1+(13-1)d)\Rightarrow 91=13(a_1+6(-3))$$

$$13a_1=91+234=325\Rightarrow a_1=25$$

۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$. بنابراین

$$S_9-S_7=20\Rightarrow\frac{9}{2}(2a_1+8d)-\frac{7}{2}(2a_1+6d)=20\Rightarrow 2a_1+15d=20$$

بنابراین $S_{16}=\frac{16}{2}(2a_1+15d)=8\times20=160$.

۸- گزینهٔ ۲ جملهٔ اول دنباله برابر ۱۸ و قدرنسبت دنباله برابر -2 است. بنابراین مجموع n جملهٔ نخست آن برابر است با

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=\frac{n}{2}(2\times18-2(n-1))=19n-n^2$$

پس

$$S_n=0\Rightarrow 19n-n^2=0\Rightarrow n(19-n)=0\Rightarrow n=19$$

بنابراین مجموع نوزده جملهٔ نخست دنباله برابر صفر است.

۹- گزینهٔ ۳ جملهٔ اول دنباله ۲۰ و قدرنسبت آن -3 است. بنابراین

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=\frac{n}{2}(40-3(n-1))=\frac{n(43-3n)}{2}$$

می‌خواهیم S_n منفی شود. پس

$$\frac{n(43-3n)}{2}<0\Rightarrow 43-3n<0\Rightarrow 3n>43\Rightarrow n>\frac{43}{3}\Rightarrow n\geq15$$

پس حداقل باید ۱۵ جمله از ابتدای دنباله را جمع کنیم.

۱۰- گزینهٔ ۲ تعداد صندلی‌های هر ردیف، دنباله‌ای حسابی با جملهٔ اول $a_1=40$ و قدرنسبت $d=2$ تشکیل می‌دهند. در نتیجه $a_{75}=a_1+74d=188$.

بنابراین تعداد کل صندلی‌ها برابر است با

$$a_1+\cdots+a_{75}=S_{75}=\frac{75}{2}(a_1+a_{75})=\frac{75}{2}(228)=8550$$

۱۱- گزینهٔ ۳ بنابر فرض $a_3+a_5=8$، پس

$$a_1+2d+a_1+4d=8\Rightarrow 2a_1+6d=8$$

بنابراین $S_7=\frac{7}{2}(2a_1+6d)=\frac{7}{2}\times8=28$.

۱۲- گزینهٔ ۴ بنابر فرض مسئله،

$$a_3+a_7+a_{14}+a_{18}=10\Rightarrow a_1+2d+a_1+6d+a_1+13d+a_1+17d=10$$

$$4a_1+38d=10\Rightarrow 2a_1+19d=5$$

بنابراین $S_{20}=\frac{20}{2}(2a_1+19d)=10\times5=50$.

۱۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$a_n=-3n+7\Rightarrow a_1=-3(1)+7=4\ ,\quad a_7=-3(7)+7=-14$$

از طرف دیگر، $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$. بنابراین $S_7=\frac{7}{2}(4-14)=-35$.

۱۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$. بنابراین

$$S_{14}-S_{20}=87\Rightarrow\frac{14}{2}(2\times2+13d)-\frac{20}{2}(2\times2+19d)=87$$

$$7(4+13d)-10(4+19d)=87\Rightarrow -12-99d=87\Rightarrow d=-1$$

در نتیجه $a_9=a_1+8d=2-8=-6$.

۱۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$S_{11}=165\Rightarrow 165=\frac{11}{2}(a_1+a_{11})$$

در نتیجه $\frac{a_1+a_{11}}{2}=\frac{165}{11}=15$. توجه کنید که $a_6=\frac{a_1+a_{11}}{2}$، در نتیجه $a_6=15$.

۱۶- گزینهٔ ۴ با توجه به فرض مسئله،

$$S_{17}=S_{13}\Rightarrow\frac{17}{2}(2a_1+16d)=\frac{13}{2}(2a_1+12d)$$

$$17a_1+17\times8d=13a_1+13\times6d\Rightarrow 4a_1+58d=0\Rightarrow 2a_1+29d=0$$

از طرف دیگر، $S_{30}=\frac{30}{2}(2a_1+29d)$. بنابراین $S_{30}=0$.

۱۷- گزینهٔ ۱ اگر مجموع $(n-1)$ جملهٔ اول دنباله را از مجموع n جملهٔ اول آن کم کنیم جملهٔ n ام باقی می‌ماند که همان جملهٔ عمومی دنباله است:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 3n(n-3) - 3(n-1)(n-1-3)$$
$$= 3n^2 - 9n - 3n^2 + 15n - 12 \Rightarrow a_n = 6n - 12$$

۱۸- گزینهٔ ۳ ابتدا جملهٔ اول و دوم دنباله را حساب می‌کنیم:

$$S_n = 4n^2 - 5n \Rightarrow a_1 = S_1 = 4 - 5 = -1$$
$$a_1 + a_2 = S_2 = 4\times4 - 5\times2 = 6 \Rightarrow -1 + a_2 = 6 \Rightarrow a_2 = 7$$

بنابراین $d = a_2 - a_1 = 7 - (-1) = 8$.

۱۹- گزینهٔ ۳ قدرنسبت دنباله برابر است با

$$d = (2x-1) - (3x+1) = -x-2$$

بنابراین مجموع ده جملهٔ اول برابر است با

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2(3x+1) + 9(-x-2)) = 5(-3x-16)$$

بنابراین

$$5(-3x-16) = 85 \Rightarrow -3x-16 = 17 \Rightarrow x = -11$$

بنابراین $d = -(-11) - 2 = 9$.

۲۰- گزینهٔ ۴ مجموع پنج جملهٔ چهارم از تفاضل مجموع بیست جملهٔ اول و پانزده جملهٔ اول به‌دست می‌آید:

$$S = S_{20} - S_{15} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) - \frac{15}{2}(2a_1 + 14d)$$
$$= 5a_1 + 85d = 5(-2) + 85\times5 = 415$$

۲۱- گزینهٔ ۲ مجموع سمت چپ معادله، مجموع جملات یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول برابر ۱ و قدرنسبت برابر ۳ است. بنابراین

$$\frac{n}{2}(2 + 3(n-1)) = 117 \Rightarrow 3n^2 - n - 234 = 0$$
$$(n-9)(3n+26) = 0 \Rightarrow n = 9, \quad n = -\frac{26}{3} \text{ (غ.ق.ق)}$$

بنابراین جملهٔ نهم دنباله برابر x است و $x = a_9 = a_1 + 8d = 1 + 24 = 25$.

۲۲- گزینهٔ ۲ مجموع سه جملهٔ اول و سه جملهٔ آخر را حساب می‌کنیم:

$$(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) = 3 - \sqrt{2} + 3 + \sqrt{2} = 6$$

چون $a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n$. پس

$$3(a_1 + a_n) = 6 \Rightarrow a_1 + a_n = 2$$

بنابراین $S_{20} = \frac{20}{2}(a_1 + a_n) = 10\times2 = 20$.

۲۳- گزینهٔ ۲ اگر جملهٔ اول را a_1 و قدرنسبت را d در نظر بگیریم، مجموع بیست جملهٔ اول برابر است با $S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = 20a_1 + 190d$.

اگر ۳ واحد به قدر نسبت اضافه کنیم و ۵ واحد از جملهٔ اول کم کنیم، در دنبالهٔ جدید جملهٔ اول $a_1 - 5$ و قدر نسبت $d+3$ است. پس مجموع ۲۰ جملهٔ اول برابر است با

$$S'_{20} = \frac{20}{2}(2(a_1 - 5) + 19(d+3)) = 10(2a_1 + 19d + 47)$$
$$= 20a_1 + 190d + 470 = S_{20} + 470$$

پس ۴۷۰ واحد به مجموع بیست جملهٔ اول اضافه می‌شود.

۲۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$. بنابراین

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2a_1 + 9d) = 75 \Rightarrow 2a_1 + 9d = 15$$
$$S_6 = \frac{6}{2}(2a_1 + 5d) = 9 \Rightarrow 2a_1 + 5d = 3$$

اگر این دستگاه معادلات را حل کنیم به‌دست می‌آید $a_1 = -6$ و $d = 3$.

بنابراین $S_4 = \frac{4}{2}(2a_1 + 3d) = 2(-12 + 9) = -6$.

۲۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$. بنابراین

$$S_6 = 9 \Rightarrow \frac{6}{2}(2a_1 + 5d) = 9 \Rightarrow 2a_1 + 5d = 3 \qquad (1)$$
$$S_{12} = 90 \Rightarrow \frac{12}{2}(2a_1 + 11d) = 90 \Rightarrow 2a_1 + 11d = 15 \qquad (2)$$

اگر دستگاه معادلات (۱) و (۲) راحل کنیم به‌دست می‌آید $a_1 = -\frac{7}{2}$ و $d = 2$.

به این ترتیب

$$S_{13} + S_{17} = \frac{13}{2}(2a_1 + 12d) + \frac{17}{2}(2a_1 + 16d) = 30a_1 + 214d = 323$$

۲۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$S_{27} - S_{10} = \frac{1}{2}\times27(2a_1 + 26d) - \frac{1}{2}\times10(2a_1 + 9d) = -17$$
$$= 17a_1 + 306d = -17 \xrightarrow{\div17} a_1 + 18d = -1$$

بنابراین $S_{37} = \frac{37(2a_1 + 36d)}{2} = \frac{37(-2)}{2} = -37$.

۲۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$. چون $a_1 = 40$ و $d = -2$، پس $S_n = \frac{n}{2}(80 - 2(n-1)) = 41n - n^2$. حداکثر مقدار عبارت درجهٔ دوم $-n^2 + 41n$ به ازای $n = \frac{41}{2}$ به‌دست می‌آید، ولی چون n عدد طبیعی است و نمی‌تواند $\frac{41}{2}$ باشد، پس S_{20} و S_{21} بیشترین مقدار را بین S_n ها دارند: $S_{20} = S_{21} = 420$.

۲۸- گزینهٔ ۳ چون $a_8 = 5$، پس

$$5 = a_8 = a_1 + 7d = \frac{1}{3} + 7d \Rightarrow d = \frac{2}{3}$$

اکنون با مجموعی از دنباله‌ای حسابی سروکار داریم که قدر نسبت آن $3d$ و جملهٔ اول آن $a_2 = 1$ و تعداد جمله‌های آن ۱۰تاست:

$$a_2 + a_5 + a_8 + \cdots + a_{29} = \frac{10}{2}(2a_2 + (10-1)(3d))$$
$$= 5(2\times1 + 27\times\frac{2}{3}) = 5(2 + 18) = 100$$

۲۹- گزینهٔ ۳ می‌دانیم مجموع جملات دنبالهٔ حسابی از رابطهٔ $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ به‌دست می‌آید. پس

$$S_{3n} = \frac{3n}{2}(2a_1 + (3n-1)d)$$
$$S_{2n} - S_n = \frac{2n}{2}(2a_1 + (2n-1)d) - \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$
$$= \frac{n}{2}(4a_1 + (4n-2)d - 2a_1 - (n-1)d) = \frac{n}{2}(2a_1 + (3n-1)d)$$

بنابراین $\frac{S_{3n}}{S_{2n} - S_n} = \frac{\frac{3n}{2}(2a_1 + (3n-1)d)}{\frac{n}{2}(2a_1 + (3n-1)d)} = 3$.