فصل اول

۱

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها (قسمت اول)

هندسهٔ **دوازدهم**

آشنایی با ماتریس

■ **ماتریس:** هرآرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند C،B،A و... نامگذاری می‌کنند. به ماتریس A توجه کنید. این ماتریس دارای دو سطر و سه ستون است.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & \pi \\ \sqrt{۳} & ۴ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & \pi \\ \sqrt{۳} & ۴ & -۱ \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \text{سطر اول} \\ \text{سطر دوم} \end{array} \quad , \quad A=\begin{array}{ccc} \text{ستون اول} & \text{ستون دوم} & \text{ستون سوم} \\ \hline ۱ & ۲ & \pi \\ \sqrt{۳} & ۴ & -۱ \end{array}$$

حواست باشه که سطرها رو از بالا به پایین و ستون‌ها رو از چپ به راست شماره‌گذاری می کنیم.

■ **مرتبهٔ ماتریس:** اگر ماتریس A دارای m سطر و n ستون باشد می‌نویسیم $A_{m\times n}$ و به صورت A ماتریسی از مرتبهٔ m در n (یا از مرتبهٔ $m\times n$) است، می‌خوانیم. *(یادت باشه که برای بیان مرتبهٔ ماتریس، عدد سمت چپیه تعداد سطرهاست و عدد سمت راستیه تعداد ستون‌ها.)* مثلاً در مثال بالا ماتریس A یک ماتریس از مرتبهٔ ۲ در ۳ است.

باورت میشه که از تعاریف هم سؤال میاد تو نهایی. تمرین پایینو نگاه کن.

جای خالی را با عبارت مناسب پُر کنید. (دی ۱۴۰۰)

هرآرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون، .... نامیده می‌شود.

ماتریس

■ **درایهٔ ماتریس:** هرعدد حقیقی واقع در ماتریس را درایهٔ آن ماتریس می‌نامیم. مثلاً در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ به ۱، ۲، ۳ و ۴ درایه‌های ماتریس A می‌گوییم.

درایه‌های هر ماتریس را با حرف کوچک اسم ماتریس نشان می‌دهیم و به منظور مشخص کردن جایگاه آن، دو اندیس در نظر می‌گیریم که اندیس سمت چپ شمارهٔ سطر و اندیس سمت راست شمارهٔ ستون آن درایه را مشخص می‌کند *(اندیس همون عددهای کوچولویی هستن که زیر حروف قرار می‌دیم).* یعنی a_{ij} درایهٔ سطر i ام و ستون j ام ماتریس A.

مثال $A_{۲\times ۳}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{bmatrix}$

■ **تعداد درایه‌های ماتریس:** یک ماتریس از مرتبهٔ m در n، دارای $m\times n$ درایه است. مثلاً یک ماتریس ۳ در ۴ دارای $۱۲=۴\times ۳$ درایه است.

■ **ماتریس با درایهٔ عمومی:** گاهی اوقات درایه‌های ماتریس A را می‌توان با ضابطه یا ضابطه‌هایی مشخص کرد که به آن درایهٔ عمومی ماتریس A می‌گویند. در این صورت ماتریس A را به‌صورت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نمایش می‌دهیم. مثلاً در ماتریس $A_{۲\times ۳}=[a_{ij}]$ اگر $a_{ij}=i+j$ باشد، برای به دست آوردن درایه‌های آن کافی است به جای درایهٔ سطر i ام و ستون j اُم مجموع شمارهٔ سطر و ستون آن درایه را قرار دهیم:

$$A=\begin{bmatrix} ۱+۱ & ۱+۲ & ۱+۳ \\ ۲+۱ & ۲+۲ & ۲+۳ \end{bmatrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

توجه اگرتمام درایه‌های یک ماتریس از یک قانون تبعیت کنند می‌توان قانون درایه را درکروشه نیزقرار داد مثلاً در مثال بالا می‌توانیم بنویسیم $A=[i+j]_{۲\times ۳}$.

جای خالی را با عبارت مناسب پُرکنید. (دی ۹۸)

در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۴\times۳}$ که در آن $a_{ij}=\frac{۲i}{j-۱}$ باشد، درایهٔ واقع در سطرسوم و ستون دوم ماتریس A برابر .... است.

درایهٔ سطرسوم و ستون دوم ماتریس A، یعنی $a_{۳۲}$. پس باید در ضابطهٔ a_{ij} به جای i عدد ۳ و به جای j عدد ۲ را قرار دهیم. بنابراین داریم:

$$a_{۳۲}=\frac{۲(۳)}{۲-۱}=\frac{۶}{۱}=۶$$

توجه گاهی ضابطهٔ درایه‌ها با هم فرق می‌کنند. در این صورت باید حواسمان باشد که برای هر درایه، ضابطهٔ مربوط به آن را انتخاب کنیم.

در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ که در آن $a_{ij}=\begin{cases}۲i-j & ; & i>j\\ ۲ & ; & i=j\\ j-i & ; & i<j\end{cases}$ باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم کدام است؟

درایه‌های ستون دوم $a_{۱۲}$ ، $a_{۲۲}$ و $a_{۳۲}$ هستند. در $a_{۱۲}$ ، $i<j$ ، در $a_{۲۲}$ ، $i=j$ و در $a_{۳۲}$ ، $i>j$ است. پس:

$$A=\begin{bmatrix}\bigcirc & a_{۱۲} & \bigcirc\\ \bigcirc & a_{۲۲} & \bigcirc\\ \bigcirc & a_{۳۲} & \bigcirc\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}i<j\Rightarrow a_{ij}=j-i\Rightarrow a_{۱۲}=۲-۱=۱\\ i=j\Rightarrow a_{ij}=۲\Rightarrow a_{۲۲}=۲\\ i>j\Rightarrow a_{ij}=۲i-j\Rightarrow a_{۳۲}=۲(۳)-۲=۶-۲=۴\end{cases}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ستون دوم برابر $۱+۲+۴=۷$ است.

درس ۱ پرسش‌های تشریحی — ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

● جاهای خالی را با عبارات مناسب پرکنید.

۱. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را .... آن ماتریس می‌نامیم.

۲. ماتریس A که دارای ۵ سطر و ۳ ستون است دارای .... درایه است.

۳. در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۴}$ که در آن $a_{ij}=i^۲j-۳$ باشد، درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون چهارم برابر .... است.

۴. در ماتریس $B=[\frac{i+j}{۲j}]_{۳\times۴}$ ، درایهٔ سطر دوم و ستون سوم برابر .... است.

۵. در ماتریس $C=[c_{ij}]_{۳\times۴}$ که در آن $c_{ij}=\begin{cases}i+j & ; & i\geq j\\ j^۲-۱ & ; & i<j\end{cases}$ باشد، درایهٔ سطر اول و ستون دوم برابر .... است.

۶. مجموع درایه‌های ماتریس $A=[(-۱)^{i+j}ij]_{۲\times۲}$ برابر .... است.

● درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

۷. ماتریسی که دارای سه سطر و پنج ستون باشد از مرتبهٔ ۳×۵ است.

۸. ماتریسی که ۱۲ درایه دارد می‌تواند ۵ سطر داشته باشد.

۹. در ماتریس $A=[i^۲+j^۲]_{۲\times۲}$ مجموع درایه‌ها برابر ۲۰ است.

۱۰. در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ و $a_{ij}=\begin{cases}i^۲+۱ & ; & i=j\\ ۲i+j & ; & i>j\\ i-j & ; & i<j\end{cases}$ ، مجموع درایه‌های سطر دوم و ستون سوم برابر ۱۶ است.

۱۱. اگر $[a_{ij}]=\begin{bmatrix}۱ & -۳ & -۱\\ ۴ & ۳ & ۲\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $a_{۱۲}\times(a_{۲۳}+a_{۲۱})$ را به دست آورید.

۱۲. ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با $a_{ij}=\begin{cases}\sqrt{۲} & ; & i=j\\ \frac{۱}{۲} & ; & i<j\\ -۱ & ; & i>j\end{cases}$ را با درایه‌هایش مشخص کنید. (کتاب راهنمای معلم)

۱۳. در ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ که $a_{ij}=\begin{cases} i-2j & ; \quad i>j \\ i+j & ; \quad i\le j\end{cases}$ می‌باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس A را به دست آورید. (دی خارج ۱۴۰۰)

۱۴. در ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$, $a_{ij}=\begin{cases} i-\frac{j}{2} & ; \quad i<j \\ i^2-j^i & ; \quad i\ge j\end{cases}$ می‌باشد. مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس A را به‌دست آورید.

۱۵. اگر $A=[a_{ij}]$ یک ماتریس 3×3 با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases} i-j & ; \quad i<j \\ 2 & ; \quad i=j \\ i+j & ; \quad i>j\end{cases}$ باشد، درایه‌های a_{33} ، a_{31} و a_{12} را به‌دست آورید. (دی ۹۹)

۱۶. ماتریس $A=[a_{ij}]_{4\times 4}$ که درآن $a_{ij}=\begin{cases} 2 & ; \quad i>j \\ -3 & ; \quad i=j \\ i^j & ; \quad i<j\end{cases}$ می‌باشد، مفروض است. ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۱۷. اگر $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ به‌طوری‌که $a_{ij}=\begin{cases} i+j & ; \quad i=j \\ j & ; \quad i>j \\ 0 & ; \quad i<j\end{cases}$ باشد، ماتریس A را به‌صورت آرایش مستطیلی بنویسید. (خرداد ۱۴۰۱)

۱۸. ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ که $a_{ij}=\begin{cases} 2 & ; \quad |i-j| \text{ زوج است.} \\ -3 & ; \quad |i-j| \text{ فرد است.}\end{cases}$ را با درایه‌هایش معلوم کنید.

۱۹. ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 4}$ با $a_{ij}=\begin{cases} 2 & ; \quad i+j=3k \\ 2-j & ; \quad i+j=3k-1 \\ i+j & ; \quad i+j=3k+1\end{cases}$ را با درایه‌هایش بنویسید.

۲۰. اگر ماتریس A به‌صورت $A=[3i-2j]_{3\times 3}$ باشد، ماتریس A را به‌صورت آرایش مستطیلی بنویسید. (شهریور ۱۴۰۱)

۲۱. اگر $b_{ij}=\begin{cases} i+1 & ; \quad i=j \\ j-2 & ; \quad i<j \\ 1 & ; \quad i>j\end{cases}$ و $B=[b_{ij}]_{3\times 3}$ ، ماتریس B را به‌صورت آرایش مستطیلی بنویسید. (دی ۱۴۰۱)

۲۲. ماتریس $A=[i^2-2ij]_{2\times 4}$ را با درایه‌هایش مشخص کنید. (کتاب راهنمای معلم)

۲۳. ماتریس‌های $A=[i-j]_{1\times 3}$ و $B=[i^j-j]_{2\times 3}$ مفروض‌اند. ماتریس $C=\begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}$ را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۲۴. ماتریس‌های $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$ که $a_{ij}=\begin{cases} 2 & ; \quad i=j \\ j^2-i & ; \quad i\ne j\end{cases}$ و $B=[i^2+j]_{2\times 2}$ مفروض‌اند. ماتریس $C=[AB]$ را با درایه‌هایش مشخص کنید.

یادداشت:

فصل اول

۱

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها (قسمت دوم)

هندسهٔ **دوازدهم**

الف. معرفی چند ماتریس خاص

۱ ماتریس مربعی: اگر در ماتریس A، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس مربعی $n \times n$ می‌نامیم. مثلاً ماتریس‌های زیر همگی مربعی هستند، زیرا تعداد سطرها و ستون‌های آن‌ها برابر است.

$$A = [۵]_{۱\times۱} \qquad B = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}_{۲\times۲} \qquad C = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۴ & ۱ \\ ۱ & ۵ & -۲ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

نکته ❶ به ماتریس مربعی $n \times n$، به‌طور خلاصه ماتریس مرتبهٔ n نیز می‌گویند. مثلاً وقتی در سؤالی می‌گویند ماتریس A از مرتبهٔ ۴ است یعنی A یک ماتریس مربعی است که دارای ۴ سطر و ۴ ستون می‌باشد.

❷ ماتریس مربعی مرتبهٔ ۱ یعنی $[k]_{۱\times۱}$ را مساوی عدد حقیقی k نیز تعریف می‌کنند. یعنی به‌جای این‌که بنویسند $A = [۵]$، آن را به‌صورت $A = ۵$ هم نمایش می‌دهند.

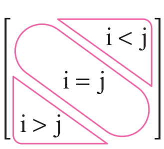
قطرهای اصلی و فرعی: در ماتریس مربعی A قطر اصلی و قطر فرعی را ببینید. درایه‌های روی قطر اصلی دارای شمارهٔ سطر و ستون برابر هستند اما اگر a_{ij} درایهٔ روی قطر فرعی باشد، $i + j = n + ۱$ می‌باشد. *(حواست باشه n همون مرتبهٔ ماتریسه)*

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

قطر فرعی — قطر اصلی

توجه در ماتریس‌های مربعی در درایه‌های بالای قطر اصلی $i < j$ و در درایه‌های پایین قطر اصلی $i > j$ می‌باشد.

(در درایه‌های روی قطر اصلی هم که $i = j$ بود.)



❓ **در ماتریس $A = [۲i - j]_{۳\times۳}$ مجموع درایه‌های قطر اصلی را به‌دست آورید.**

✅ درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس مربعی A، درایه‌های $a_{۱۱}$، $a_{۲۲}$ و $a_{۳۳}$ هستند پس:

$$\begin{cases} a_{۱۱} = ۲(۱) - ۱ = ۲ - ۱ = ۱ \\ a_{۲۲} = ۲(۲) - ۲ = ۴ - ۲ = ۲ \\ a_{۳۳} = ۲(۳) - ۳ = ۶ - ۳ = ۳ \end{cases} \Rightarrow a_{۱۱} + a_{۲۲} + a_{۳۳} = ۱ + ۲ + ۳ = ۶$$

۲ ماتریس سطری: اگر ماتریس A فقط دارای یک سطر باشد آن را یک ماتریس سطری می‌نامیم. مرتبهٔ ماتریس‌های سطری به‌صورت $۱ \times n$ است. مثلاً ماتریس‌های زیر همگی ماتریس‌های سطری هستند.

$$A = [۱ \quad ۲ \quad ۵]_{۱\times۳} \qquad B = [۲ \quad ۳]_{۱\times۲} \qquad C = [۵]_{۱\times۱} = ۵$$

حواست باشه در ماتریس سطری مهم اینه که فقط یک سطر داشته باشیم و تعداد ستون‌ها مهم نیست، حتی می‌تونه یک ستون هم داشته باشه!

❓ **ماتریس سطری $A = [a_{ij}]$ دارای ۵ درایه است. اگر $a_{ij} = i + j$ باشد، ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.**

✅ ماتریس سطری دارای یک سطر است. چون ماتریس A دارای ۵ درایه است پس مرتبهٔ آن ۱×۵ می‌باشد. حال داریم:

$$A = [۱+۱ \quad ۱+۲ \quad ۱+۳ \quad ۱+۴ \quad ۱+۵] \Rightarrow A = [۲ \quad ۳ \quad ۴ \quad ۵ \quad ۶]$$

۳ ماتریس ستونی: اگر ماتریس A فقط دارای یک ستون باشد، آن را یک ماتریس ستونی می‌نامیم. مرتبهٔ ماتریس‌های ستونی $m\times ۱$ است. مثلاً ماتریس‌های زیر همگی ستونی هستند.

$$A=\begin{bmatrix}۳\\ \pi\\ ۴\end{bmatrix}_{۳\times ۱}\qquad B=\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}_{۲\times ۱}\qquad C=[۱۲]_{۱\times ۱}=۱۲$$

ماتریس ستونی هم مثل ماتریس سطریه. فقط باید یک ستون داشته باشه. تعداد سطرها هم مهم نیست.

۴ ماتریس قطری: ماتریسی مربعی است که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند. دقت کنید درایه‌های واقع بر قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند. مثلاً ماتریس‌های زیر همگی قطری‌اند.

$$A=\begin{bmatrix}۲&۰\\ ۰&۱\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\ ۰&۴&۰\\ ۰&۰&۹\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}-۱&۰&۰\\ ۰&۰&۰\\ ۰&۰&۷\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\ ۰&۰&۰\\ ۰&۰&۰\end{bmatrix}$$

؟ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۱ ماتریس مربعی که همهٔ درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند را ماتریس .... گویند. (شهریور ۱۴۰۰)

۲ در ماتریس قطری $A=\begin{bmatrix}۰&۳\\ ۴&m-۱\end{bmatrix}$ ، مقدار m برابر .... است. (شهریور ۹۹)

✓ ۱ قطری

۲ در ماتریس قطری درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر هستند، پس: $m-۱=۰\Rightarrow m=۱$

؟ ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲&m-۳&۰\\ ۰&۴&۰\\ n+۲&۰&۵\end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری است. مقدار $m+n$ را به‌دست آورید.

✓ چون A یک ماتریس قطری است پس درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن باید صفر باشند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}m-۳=۰\Rightarrow m=۳\\ n+۲=۰\Rightarrow n=-۲\end{cases}\Rightarrow m+n=۳+(-۲)=۱$$

۵ ماتریس اسکالر: اگر در یک ماتریس قطری تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، آن را یک ماتریس اسکالر می‌نامیم. مثلاً ماتریس‌های زیر همگی اسکالر هستند.

$$A=\begin{bmatrix}۴&۰&۰\\ ۰&۴&۰\\ ۰&۰&۴\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}۳&۰\\ ۰&۳\end{bmatrix}\qquad C=[۲]$$

؟ درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (دی ۹۸)

«هر ماتریس اسکالر یک ماتریس قطری است.»

✓ درست

۶ ماتریس واحد یا همانی: اگر در ماتریس اسکالر، تمام درایه‌های روی قطر اصلی ۱ باشد، ماتریس را ماتریس واحد یا همانی می‌نامیم. ماتریس همانی از مرتبهٔ n را با I_n نمایش می‌دهیم.

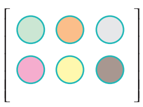
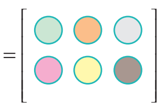
$$I_۲=\begin{bmatrix}۱&۰\\ ۰&۱\end{bmatrix}\qquad I_۳=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\ ۰&۱&۰\\ ۰&۰&۱\end{bmatrix}\qquad I_۴=\begin{bmatrix}۱&۰&۰&۰\\ ۰&۱&۰&۰\\ ۰&۰&۱&۰\\ ۰&۰&۰&۱\end{bmatrix}$$

توجه: ماتریس اسکالر $\begin{bmatrix}K&۰&\cdots&۰\\ ۰&K&\cdots&۰\\ \vdots&&&\\ ۰&۰&\cdots&K\end{bmatrix}_{n\times n}$ را با KI_n نشان می‌دهیم. مثلاً ماتریس $۴I_۳$ به صورت $\begin{bmatrix}۴&۰&۰\\ ۰&۴&۰\\ ۰&۰&۴\end{bmatrix}$ می‌باشد.

۷ ماتریس صفر: ماتریسی است که همهٔ درایه‌های آن صفر باشند. ماتریس صفر را با $\overline{O}$ نشان می‌دهیم. *(ماتریس صفر، حتماً مربعی نیست و می‌تونه از هر مرتبه‌ای باشه.)*

$$\overline{O}=\begin{bmatrix}۰&۰\\ ۰&۰\end{bmatrix}\qquad \overline{O}=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\ ۰&۰&۰\end{bmatrix}\qquad \overline{O}=\begin{bmatrix}۰\\ ۰\\ ۰\end{bmatrix}$$

تساوی دو ماتریس: دو ماتریس هنگامی مساوی‌اند که اولاً هم‌مرتبه باشند، ثانیاً درایه‌های نظیر آن‌ها مساوی باشند. *(درایه‌های نظیر، درایه‌هایی هستند که شمارهٔ سطر و ستون آن‌ها در دو ماتریس برابر باشد.)* در دو ماتریس زیر درایه‌های نظیر با رنگ‌های یکسان مشخص شده‌اند:

A = 　B = 

اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x-۱ & ۸ \\ ۳ & z+۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} y+۱ & x-۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $x+y+z$ را بیابید. (شهریور ۹۹)

باید درایه‌های نظیر ماتریس‌های A و B برابر باشند:

$$\begin{cases} y+۱=x-۱ \\ x-۲=۸ \Rightarrow x=۱۰ \\ ۳=۳ \\ ۴=z+۱ \Rightarrow z=۳ \end{cases} \xrightarrow{x=۱۰} y+۱=۹ \Rightarrow y=۸$$

$$\Rightarrow x+y+z=۱۰+۸+۳=۲۱$$

ب. اعمال روی ماتریس‌ها

جمع و تفریق ماتریس‌ها: دو ماتریس هم‌مرتبه را می‌توان با هم جمع یا از هم کم کرد. برای جمع یا تفاضل دو ماتریس هم‌مرتبهٔ A و B، کافی است درایه‌های دو ماتریس را نظیر به نظیر با هم جمع یا از هم کم کنیم. حاصل مجموع یا تفاضل A و B ماتریسی مانند C است که از همان مرتبهٔ A و B می‌باشد.

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\ ,\ B=[b_{ij}]_{m\times n} \Rightarrow A\pm B=[a_{ij}]\pm[b_{ij}]=[a_{ij}\pm b_{ij}]_{m\times n}$$

دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. آیا جمع دو ماتریس A و B تعریف می‌شود؟ چرا؟ (شهریور ۱۴۰۰)

خیر. چون دو ماتریس A و B هم‌مرتبه نیستند. ماتریس A از مرتبهٔ ۲×۳ و ماتریس B از مرتبهٔ ۳×۲ است.

دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & m-۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ n+۲ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ m & ۰ & ۲ \\ ۳ & -۱ & n-۱ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل $A+B$ را محاسبه کنید.

چون A ماتریس قطری است، پس درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن همگی صفرند:

$$\begin{cases} m-۳=۰ \\ n+۲=۰ \end{cases} \Rightarrow m=۳\ ,\ n=-۲$$

بنابراین ماتریس‌های A و B به‌صورت زیر هستند و حاصل $A+B$ برابر است با:

$$A+B=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۳ & ۰ & ۲ \\ ۳ & -۱ & -۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲+۲ & ۰+(-۱) & ۰+۱ \\ ۰+۳ & ۱+۰ & ۰+۲ \\ ۰+۳ & ۰+(-۱) & ۴+(-۳) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

ضرب عدد در ماتریس: برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس، آن عدد را در تمام درایه‌های ماتریس ضرب می‌کنیم. به بیان دیگر اگر A یک ماتریس $m\times n$ و r یک عدد حقیقی باشد، داریم:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n} \Rightarrow rA=[ra_{ij}]_{m\times n}$$

مثلاً اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۷ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $۳A$ برابر $\begin{bmatrix} ۳ & ۱۲ \\ ۶ & ۲۱ \end{bmatrix}$ است.

اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ باشند، حاصل $۲A-۳B$ را به‌دست آورید.

$$۲A-۳B=۲\times\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}-۳\times\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۶ & ۸ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -۳ & ۰ \\ ۶ & -۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴-(-۳) & ۲-۰ \\ ۶-۶ & ۸-(-۳) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ & ۲ \\ ۰ & ۱۱ \end{bmatrix}$$

قرینهٔ یک ماتریس: قرینهٔ ماتریس A را با $-A$ نمایش داده و از ضرب عدد (-۱) در ماتریس A به‌دست می‌آید. واضح است که مجموع هر ماتریس با قرینه‌اش برابر ماتریس صفر است.

$$A+(-A)=\bar{O}$$

اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ ۲ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}$ ، ماتریس B را به‌گونه‌ای معلوم کنید که $A+B=\bar{O}$ باشد.

چون $A+B=\bar{O}$ است، پس B قرینهٔ ماتریس A می‌باشد. بنابراین داریم:

$$B=-A=\begin{bmatrix} -۱ & -۲ & ۳ \\ -۲ & -۱ & -۵ \end{bmatrix}$$

خواص جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس: اگر A، B و C سه ماتریس هم‌مرتبه باشند، داریم:

۱ جمع ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد. $\mathbf{A+B=B+A}$

۲ جمع ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد. $\mathbf{A+(B+C)=(A+B)+C}$

۳ ماتریس صفر، عضو خنثی عمل جمع است. $\mathbf{A+\bar{O}=\bar{O}+A=A}$

۴ اگر r یک عدد حقیقی باشد. داریم: $\mathbf{r(A\pm B)=rA\pm rB}$

اثبات

با توجه به تعریف جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس داریم: $r(A\pm B)=r([a_{ij}]\pm[b_{ij}])=r[a_{ij}\pm b_{ij}]=[r(a_{ij}\pm b_{ij})]$

از آن‌جایی که ضرب نسبت به جمع در مجموعهٔ اعداد حقیقی توزیع‌پذیر است داریم:

$$[r(a_{ij}\pm b_{ij})]=[ra_{ij}\pm rb_{ij}]=[ra_{ij}]\pm[rb_{ij}]=r[a_{ij}]\pm r[b_{ij}]=rA\pm rB$$

۵ اگر r و s اعداد حقیقی باشند، داریم: $\mathbf{(r\pm s)A=rA\pm sA}$

اثبات

با توجه به تعریف ضرب عدد در ماتریس داریم:

$$(r\pm s)A=(r\pm s)[a_{ij}]=[(r\pm s)a_{ij}]=[ra_{ij}\pm sa_{ij}]=[ra_{ij}]\pm[sa_{ij}]=r[a_{ij}]\pm s[a_{ij}]=rA\pm sA$$

۶ طرفین یک تساوی ماتریسی را می‌توان در یک عدد دلخواه ضرب کرد. $\mathbf{A=B\Rightarrow rA=rB}$

۷ طرفین یک تساوی ماتریسی را می‌توان بر یک عدد دلخواه مخالف صفر تقسیم کرد. $\mathbf{rA=rB\ ,\ r\neq ۰\Rightarrow A=B}$

درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. (خرداد ۱۴۰۰)

«اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه و r یک عدد حقیقی دلخواه و مخالف صفر باشد و $rA=rB$ آن‌گاه داریم $A=B$ »

با توجه به ویژگی‌های گفته شده عبارت فوق درست است.

اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و هم‌چنین $r=۳$ و $s=۲$ باشند، درستی تساوی‌های زیر را نشان دهید.

۱ $\mathbf{(A+C)+B=A+(C+B)}$ ۲ $\mathbf{(r+s)A=rA+sA}$

۱ یک بار $(A+C)+B$ و بار دیگر $A+(C+B)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$(A+C)+B=\left(\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۶ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$A+(C+B)=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۲ & ۷ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۶ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A+C)+B=A+(C+B)$$

۲ یک بار $(r+s)A$ و بار دیگر $rA+sA$ را محاسبه می‌کنیم:

$$(r+s)A=(۳+۲)A=۵A=۵\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۰ & -۵ \\ ۱۵ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

$$rA+sA=۳A+۲A=۳\times\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}+۲\times\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶ & -۳ \\ ۹ & ۶ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ ۶ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۰ & -۵ \\ ۱۵ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (r+s)A=rA+sA$$

درس ۱ **پرسش‌های تشریحی** ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

● **جاهای خالی را با عبارات مناسب پرکنید.**

۲۵. درماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۸ & ۵\end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های واقع برقطراصلی برابر .... است.

۲۶. اگرماتریسی فقط دارای یک سطرباشد، به آن ماتریس .... می‌گوییم.

۲۷. اگرماتریسی فقط دارای یک ستون باشد آن را ماتریس .... می‌نامیم. (دی خارج ۱۴۰۱)

۲۸. درماتریس اسکالردرایه‌های واقع برقطراصلی .... هستند.

۲۹. ماتریس قطری که درایه‌های روی قطراصلی آن با هم برابرباشند، ماتریس .... می‌نامیم. (دی ۹۷)

۳۰. در ماتریس قطری $A=\begin{bmatrix}۰ & -۳\\ ۲ & ۲k-۱\end{bmatrix}$ مقدار k برابر .... است. (دی ۱۴۰۲)

۳۱. اگردو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۳ & ۲x-۱\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & ۵\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}$ مساوی باشند، آن‌گاه مقدار x برابربا .... است. (شهریور ۱۴۰۱)

۳۲. دو ماتریس .... را می‌توان با هم جمع کرد.

۳۳. جمع دو ماتریس خاصیت جابه‌جایی ....

۳۴. درماتریس اسکالر $A=\begin{bmatrix}۰ & n+۲\\ ۴ & m-۱\end{bmatrix}$ مقدار $m+n$ برابر .... است.

۳۵. اگرماتریس $A=\begin{bmatrix}x^۳-x & \frac{y-x}{x-۲}\\ \frac{۲}{x+۱} & x^۲+x\end{bmatrix}$ ، اسکالرباشد، مقدار $x+y$ برابر .... است.

۳۶. درماتریس اسکالردرایه‌های غیرواقع برقطراصلی همگی .... هستند.

۳۷. اگرماتریس $A=\begin{bmatrix}۰ & ۴^{x-y}\\ ۵^{x-۴} & x+y+z\end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد، مقدارz برابر .... است.

۳۸. اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۵ & -۲\end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های $A+۲B$ برابر .... است.

۳۹. اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۲ & ۰\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}m & -۲\\ n & ۰\end{bmatrix}$ و $۳A+B$ ماتریس همانی باشد، بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس $A-۲B$ برابر .... است.

۴۰. اگر $\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ ۱۲ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & x+۵\\ y-۱ & ۱\end{bmatrix}$ ۴ باشد، مقدار xy برابر .... است.

● **درستی یا نادرستی عبارات زیررا مشخص کنید.**

۴۱. تعداد درایه‌های ماتریس مربعی A می‌تواند برابر ۳۲ باشد.

۴۲. ماتریس صفریک ماتریس مربعی است.

۴۳. هر ماتریس صفر، ماتریس اسکالر نیز است.

۴۴. درماتریس مربعی A درایه‌های واقع برقطرفرعی دارای شمارهٔ سطرو ستون برابرهستند.

۴۵. در ماتریس مربعی A از مرتبهٔ ۴ درایهٔ $a_{۳۲}$ روی قطر فرعی قرار دارد.

۴۶. درایه‌های واقع برقطراصلی ماتریس قطری، غیرصفرهستند.

۴۷. ماتریس سطری نمی‌تواند مربعی باشد.

۴۸. ماتریس مربعی وجود داردکه ماتریس ستونی هم باشد.

۴۹. ماتریس مربعی که فقط درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند، ماتریس قطری است.

۵۰. هر ماتریس اسکالر، مربعی است.

۵۱. هر ماتریس قطری، اسکالر است.

۵۲. تعداد درایه‌های ماتریس صفر می‌تواند ۶ باشد.

۵۳. ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۰ & a+۲b & ۰ \\ ۰ & a-۳b & a+c \\ c-۲ & ۰ & a-b \end{bmatrix}$ به ازای هیچ مقدار حقیقی a، b و c ماتریس قطری نمی‌شود.

۵۴. جمع ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد.

۵۵. جمع ماتریس‌های هم‌مرتبه خاصیت شرکت‌پذیری دارد. (دی خارج ۱۴۰۰)

۵۶. طرفین یک تساوی ماتریسی را می‌توان بر یک عدد دلخواه تقسیم کرد.

۵۷. ماتریس اسکالر عضو خنثی عمل جمع است.

۵۸. ماتریس مربعی A از مرتبهٔ $(۵-n)\times(۳n-۷)$ است. ماتریس $B=[ni-۳j]_{۲\times۲}$ را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۵۹. ماتریس مربعی $A=[a_{ij}]$ دارای ۹ درایه است. اگر $a_{ij}=\begin{cases} i-j & ; \; i=j \\ ۲i+j & ; \; i>j \\ j-i & ; \; i<j \end{cases}$ باشد، ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۶۰. در ماتریس $A=[i^۲-mj]_{۳\times۳}$ مجموع درایه‌های قطر اصلی برابر ۸ است. مقدار m را به‌دست آورید.

۶۱. اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & m-۴ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & n-۳ & ۴ \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری و $B=\begin{bmatrix} m-k & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & n \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر باشد، مقدار $m+n+k$ را به‌دست آورید.

۶۲. اگر $A=\begin{bmatrix} m & ۰ \\ m-۲ & n \end{bmatrix}$ ماتریسی اسکالر باشد، مقادیر m و n را بیابید. (دی ۱۴۰۱)

۶۳. اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۳a & c-۱ \\ a+b & -۶ \end{bmatrix}$ ماتریس اسکالر باشد، مقدار $a(b+c)$ را به‌دست آورید.

۶۴. اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} a-۲ & c-b \\ d+a & b+۲ \end{bmatrix}$ ماتریس واحد باشد، مقدار $a+b+c+d$ را به‌دست آورید.

۶۵. اگر ماتریس $\begin{bmatrix} x+۱ & x^۲-x-۲ \\ x^۲+x & ۲x+۱ \end{bmatrix}$ قطری باشد، مجموع درایه‌های ماتریس A را به‌دست آورید.

۶۶. اگر $A=\begin{bmatrix} ۲x & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A=B$ در این‌صورت $x+۲y+۳z$ را به‌دست آورید. (دی ۱۴۰۰ـ شهریور ۹۸)

۶۷. اگر $A=\begin{bmatrix} x^۲-y^۲ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۷ & ۲ \\ ۰ & x+y \end{bmatrix}$ و $A=B$ ، در این صورت حاصل $x^۲+y^۲$ را بیابید. (دی خارج ۱۴۰۱)

۶۸. اگر $A=\begin{bmatrix} ۲x-y & ۵ \\ z & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $A=B$ باشند، حاصل $x^۲-۲y+z$ را به‌دست آورید. (دی ۱۴۰۲)

۶۹. اگر ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} x+۲y & ۳ \\ x & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ t & ۲x-y \end{bmatrix}$ برابر باشند، مقدار $y+t$ را به‌دست آورید.

۷۰. ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ab & ۴ \\ ۳ & a+b \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ با هم برابرند. مقدار $a^۲+b^۲$ را به‌دست آورید. (کتاب راهنمای معلم)

۷۱. اگر ماتریس‌های $A=[۳i-j^۲]$ و $B=\begin{bmatrix} b-۲ & a+۱ \\ c+۱ & ۲ \end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $a+b+c$ را به‌دست آورید.

۷۲. ماتریس $\begin{bmatrix} x+۵ & y+۲ \\ ۲x-۸ & ۳z \end{bmatrix}$ با ماتریس حاصل از ضرب عدد حقیقی m در ماتریس همانی برابر است. حاصل $\frac{m+x}{z+y}$ را به‌دست آورید.

۷۳. اگر $A=[(-۱)^{ij}i^{۲}j]_{۲\times ۲}$ باشد، قرینهٔ ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۷۴. مرتبهٔ ماتریس‌های A، B و $A-B$ به ترتیب $(a+۱)\times ۳$ ، $۴\times(b-۱)$ و $c\times d$ است. مقدار $a+b+c+d$ را به‌دست آورید.

۷۵. ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x+۱ & y+۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ را درنظربگیرید. اگر $A+B=\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۸ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد. آن‌گاه مقادیر x و y را به‌دست آورید. (خرداد ۱۴۰۲)

۷۶. اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ به‌صورت $a_{ij}=\begin{cases} ij & ; \quad i>j \\ i^{۲} & ; \quad i=j \\ ۲i-j & ; \quad i<j \end{cases}$ تعریف شده باشد، ماتریس $۲A-۳I$ را به‌دست آورید. (دی ۹۷)

۷۷. اگر A یک ماتریس مربعی، $A^{۲}=\begin{bmatrix} ۱ & ۶ \\ -۱۸ & ۱۳ \end{bmatrix}$ و $A^{۲}=۶A-۱۱I$ باشد، ماتریس A را به‌دست آورید. (دی خارج ۱۴۰۱)

۷۸. ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} -۱ & m \\ -۲ & m \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ چنان هستندکه $C=۳A+۲B$ ماتریس قطری است. مقدار m و مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C را حساب کنید. (خرداد ۱۴۰۳)

۷۹. ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & m \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & -۹ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر $۲C+A=۳I+B$ و مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C برابر -۴ باشد، ماتریس $A+۲B-C$ را با درایه‌هایش بنویسید.

۸۰. اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & m+۱ \\ ۲n+۴ & ۵ \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، با محاسبهٔ m و n ، ماتریس $A+I$ را بیابید (I ماتریس همانی مرتبه دو است). (شهریور ۱۴۰۱)

۸۱. ماتریس اسکالر $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ با $a_{۳۳}+a_{۲۲}=-۲$ مفروض است. اگر $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A-۳B$ را به‌دست آورید.

۸۲. ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ با $a_{ij}=\begin{cases} ۲i-۳ & ; \quad i\geq j \\ i+j & ; \quad i<j \end{cases}$ و ماتریس B یک ماتریس اسکالرکه مجموع درایه‌های آن برابر ۱۲ است مفروض‌اند. اگر جمع دو ماتریس قابل تعریف باشد، ماتریس $۲A-B$ را به‌دست آورید.

۸۳. اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۴ \\ ۲ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۴ \end{bmatrix}$ دو ماتریس باشند، ماتریس $۲A-۳B$ را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۸۴. ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۳ \\ ۰ & ۴ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۴ \\ -۱ & ۵ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر $A+C=\bar{O}$ باشد، ماتریس $۲B+۳C$ را به‌دست آورید.

۸۵. اگر $A=[a_{ij}]$ که $a_{ij}=\begin{cases} i^{۲}-j & ; \quad i\geq j \\ ۲i-j & ; \quad i<j \end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۴ & ۰ & ۲ \\ ۵ & -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ دو ماتریس باشند، ماتریس $۲A-۳B+۲I$ را به‌دست آورید.

۸۶. مجموع ماتریس‌های $A=[i-xj]_{y\times x}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & x+y \\ -۱ & ۳ \\ x^{۲}-y^{۲} & ۲-x \end{bmatrix}$ تعریف می‌شود. ماتریس $۲A-۳B$ را با درایه‌هایش بنویسید.

۸۷. اگر $A+۳B=\begin{bmatrix} ۲ & ۷ \\ ۸ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A-B=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی ماتریس A را به‌دست آورید.

۸۸. اگر A و B دو ماتریس و r یک عدد حقیقی باشد، ثابت کنید $r(A\pm B)=rA\pm rB$.

۸۹. اگر A یک ماتریس و r و s اعداد حقیقی باشند ثابت کنید $(r\pm s)A=rA\pm sA$.

۲

بخش

پاسخ‌نامه

فصل ۱
ماتریس و کاربردها

۱

درایه

۲

$5\times 3=15$

۳

در درایهٔ سطر دوم و ستون چهارم، $i=2$ و $j=4$ است پس:

$$a_{ij}=i^2j-3\Rightarrow a_{24}=2^2\times 4-3=13$$

۴

در درایهٔ سطر دوم و ستون سوم، $i=2$ و $j=3$ است پس:

$$a_{ij}=\frac{i+j}{2j}\Rightarrow a_{23}=\frac{2+3}{2\times 3}=\frac{5}{6}$$

۵

در درایهٔ سطر اول و ستون دوم، $i=1$ و $j=2$ است. چون $i<j$ می‌باشد، از قانون j^2-1 استفاده می‌کنیم: $a_{12}=2^2-1=3$

۶

$$A=\begin{bmatrix}(-1)^{1+1}\times 1\times 1 & (-1)^{1+2}\times 1\times 2\\ (-1)^{2+1}\times 2\times 1 & (-1)^{2+2}\times 2\times 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ مجموع درایه‌ها $=1$

۷

نادرست.

در معرفی مرتبهٔ ماتریس در سمت چپ تعداد سطرها و در سمت راست تعداد ستون‌ها را اعلام می‌کنیم، بنابراین مرتبهٔ ماتریس 5×3 است.

۸

نادرست.

اگر تعداد ستون‌ها را m فرض کنیم، باید $5\times m$ برابر ۱۲ شود. در این‌صورت مقدار طبیعی برای m به‌دست نمی‌آید. *(حواست هست که تعداد ستون‌ها باید یه عدد طبیعی باشه.)*

۹

درست

ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}1^2+1^2 & 1^2+2^2\\ 2^2+1^2 & 2^2+2^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 5 & 8\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌ها برابر $2+5+5+8=20$ است.

۱۰

درست

درایه‌های سطر دوم و ستون سوم را معلوم می‌کنیم:

$$\begin{cases}a_{21}=2(2)+1=4+1=5\\ a_{22}=2^2+1=4+1=5\\ a_{23}=2-3=-1\end{cases}\Rightarrow \text{مجموع}=5+5+(-1)=9$$

$$\begin{cases}a_{13}=1-3=-2\\ a_{23}=2-3=-1\\ a_{33}=3^2+1=9+1=10\end{cases}\Rightarrow \text{مجموع}=(-2)+(-1)+10=7$$

بنابراین مجموع درایه‌های سطر دوم و ستون سوم برابر $9+7=16$ است.

۱۱

a_{12} درایهٔ سطر ۱ و ستون ۲ است که برابر ۳- می‌باشد. a_{23} درایهٔ سطر ۲ و ستون ۳ می‌باشد که برابر ۴ و a_{21} درایهٔ سطر ۲ و ستون ۱ می‌باشد که برابر ۲ است، پس:

$$a_{12}\times(a_{23}+a_{21})=-3\times(4+2)=-3\times 6=-18$$

۱۲

$$A=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -1 & \sqrt{2} & \frac{1}{2}\\ -1 & -1 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$$

۱۳

مجموع درایه‌های a_{12}، a_{22} و a_{32} را می‌خواهیم:

$$\begin{cases}a_{12}=1+2=3\\ a_{22}=2+2=4\\ a_{32}=3-4=-1\end{cases}\Rightarrow a_{12}+a_{22}+a_{32}=3+4+(-1)=6$$

۱۴

درایه‌های ستون دوم A همان a_{12}، a_{22} و a_{32} هستند، پس:

$$i<j\Rightarrow a_{ij}=i-\frac{j}{2}\Rightarrow a_{12}=1-\frac{2}{2}=1-1=0$$

$$i=j\Rightarrow a_{ij}=i^2-j^i\Rightarrow a_{22}=2^2-2^2=4-4=0$$

$$i>j=a_{ij}=i^2-j^i\Rightarrow a_{32}=3^2-2^3=9-8=1$$

بنابراین مجموع درایه‌های ستون دوم برابر $0+0+1=1$ است.

۱۵

با توجه به ضابطهٔ a_{ij} داریم:

$$i=j\Rightarrow a_{ij}=2\Rightarrow a_{33}=2$$

$$i>j=a_{ij}=i+j\Rightarrow a_{31}=3+1=4$$

$$i<j\Rightarrow a_{ij}=i-j\Rightarrow a_{12}=1-2=-1$$

۱۶

با توجه به ضابطهٔ a_{ij} داریم:

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 1^2 & 1^3 & 1^4\\ 2 & -3 & 2^3 & 2^4\\ 2 & 2 & -3 & 3^4\\ 2 & 2 & 2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 8 & 16\\ 2 & 2 & -3 & 81\\ 2 & 2 & 2 & -3\end{bmatrix}$$

۱۷

$$A=\begin{bmatrix}1+1 & 0 & 0\\ 1 & 2+2 & 0\\ 1 & 2 & 3+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 0\\ 1 & 2 & 6\end{bmatrix}$$

۱۸

برای نوشتن ماتریس A با درایه‌هایش باید توجه داشته باشیم که صفر عددی زوج است.

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 2\\ -3 & 2 & -3\\ 2 & -3 & 2\end{bmatrix}$$

۱۹

$$A=\begin{bmatrix}2-1 & 2 & 1+3 & 2-4\\ 2 & 2+2 & 2-3 & 2\\ 3+1 & 2-2 & 2 & 3+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & -2\\ 2 & 4 & -1 & 2\\ 4 & 0 & 2 & 7\end{bmatrix}$$

۲۰

$$A=\begin{bmatrix}۳-۲ & ۳-۴ & ۳-۶\\ ۶-۲ & ۶-۴ & ۶-۶\\ ۹-۲ & ۹-۴ & ۹-۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & -۳\\ ۴ & ۲ & ۰\\ ۷ & ۵ & ۳\end{bmatrix}$$

۲۱

$$B=\begin{bmatrix}۱+۱ & ۲-۲ & ۳-۲\\ ۱ & ۲+۱ & ۳-۲\\ ۱ & ۱ & ۳+۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۱\\ ۱ & ۳ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۴\end{bmatrix}$$

۲۲

$$A=\begin{bmatrix}۱^۲-۲\times۱\times۱ & ۱^۲-۲\times۱\times۲ & ۱^۲-۲\times۱\times۳ & ۱^۲-۲\times۱\times۴\\ ۲^۲-۲\times۲\times۱ & ۲^۲-۲\times۲\times۲ & ۲^۲-۲\times۲\times۳ & ۲^۲-۲\times۲\times۴\\ ۳^۲-۲\times۳\times۱ & ۳^۲-۲\times۳\times۲ & ۳^۲-۲\times۳\times۳ & ۳^۲-۲\times۳\times۴\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-۱ & -۳ & -۵ & -۷\\ ۰ & -۴ & -۸ & -۱۲\\ ۳ & -۳ & -۹ & -۱۵\end{bmatrix}$$

۲۳

ابتدا ماتریس‌های A و B را مشخص می‌کنیم:

$$A=[۱-۱ \quad ۱-۲ \quad ۱-۳]=[۰ \quad -۱ \quad -۲]$$

$$B=\begin{bmatrix}۱^۱-۱ & ۱^۲-۲ & ۱^۳-۳\\ ۲^۱-۱ & ۲^۲-۲ & ۲^۳-۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & -۱ & -۲\\ ۱ & ۲ & ۵\end{bmatrix}$$

حال ماتریس C به صورت زیر است:

$$C=\begin{bmatrix}۰ & -۱ & -۲\\ ۱ & ۲ & ۵\\ ۰ & -۱ & -۲\end{bmatrix}$$

۲۴

ابتدا ماتریس‌های A و B را با درایه‌هایش می‌نویسیم:

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۲^۲-۱\\ ۱^۲-۲ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}۱^۲+۱ & ۱^۲+۲\\ ۲^۲+۱ & ۲^۲+۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۵ & ۶\end{bmatrix}$$

حال ماتریس C به صورت زیر است:

$$C=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & ۲ & ۳\\ -۱ & ۲ & ۵ & ۶\end{bmatrix}$$

۲۵

۹

درایه‌های قطر اصلی ۱ و ۸ هستند، پس $۹ = ۸ + ۱$ می‌باشد.

۲۶

سطری

۲۷

ستونی

۲۸

برابر

۲۹

اسکالر

۳۰

$\frac{۱}{۲}$.

در ماتریس قطری درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر هستند، پس:

$$۲k-۱=۰ \Rightarrow k=\frac{۱}{۲}$$

۳۱

۳

$$۲x-۱=۵ \Rightarrow ۲x=۶ \Rightarrow x=۳$$

۳۲

هم‌مرتبه

۳۳

دارد.

۳۴

۳

در ماتریس اسکالر درایه‌های روی قطر اصلی برابر و درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر هستند. پس:

$$\begin{cases}n+۲=۴ \Rightarrow n=۲\\ m-۱=۰ \Rightarrow m=۱\end{cases} \Rightarrow m+n=۱+۲=۳$$

۳۵

-۴

در ماتریس اسکالر درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی صفر هستند، پس:

$$x^۳-x=۰ \Rightarrow x(x^۲-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۰\\ x^۲-۱=۰ \Rightarrow x^۲=۱ \Rightarrow \begin{cases}x=۱\\ x=-۱\end{cases}\end{cases}$$

$$x^۲+x=۰ \Rightarrow x(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۰\\ x=-۱\end{cases}$$

بنابراین x می‌تواند صفر یا ۱− باشد. از آن‌جایی که درایهٔ $\frac{۲}{x+۱}$ به ازای $x=-۱$ تعریف نمی‌شود، پس فقط $x=۰$ قابل قبول است. بنابراین داریم:

$$A=\begin{bmatrix}\frac{y}{-۲} & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix} \xRightarrow{\text{A اسکالر است}} \frac{y}{-۲}=۲ \Rightarrow y=-۴$$

پس $x+y$ برابر ۴− می‌باشد.

۳۶

صفر

۳۷

-۸

ماتریس همانی، ماتریس $I=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ می‌باشد، پس:

$$\begin{cases}۴^{x-y}=۱ \Rightarrow ۴^{x-y}=۴^۰ \Rightarrow x-y=۰\\ ۵^{x-۴}=۱ \Rightarrow ۵^{x-۴}=۵^۰ \Rightarrow x-۴=۰\\ x+y+z=۰ \Rightarrow ۴+۴+z=۰ \Rightarrow z=-۸\end{cases} \Rightarrow x=۴ \,,\, y=۴$$

۳۸

۱۴

ماتریس $A+۲B$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A+۲B=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}+۲\times\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ -۲ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۴ & ۲\\ -۴ & ۱۰\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۵ & ۴\\ -۵ & ۱۰\end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=۵+۴+(-۵)+۱۰=۱۴$$

۳۹

۲۱

ابتدا m و n را معلوم می‌کنیم:

$$3A+B=I \Rightarrow 3\times\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & m\\ 0 & n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}3 & 9\\ 0 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & m\\ 0 & n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1 & m+9\\ 0 & n+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{cases}m+9=0\Rightarrow m=-9\\ n+6=1\Rightarrow n=-5\end{cases}$$

حال ماتریس $A-2B$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A-2B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}-2\times\begin{bmatrix}-2 & -9\\ 0 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-4 & -18\\ 0 & -10\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5 & 21\\ 0 & 12\end{bmatrix}\Rightarrow \text{بزرگ‌ترین درایه} = 21$$

۴۰

۱۶-

$$4\begin{bmatrix}x+5 & 0\\ 1 & y-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 4 & 12\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}4(x+5) & 0\\ 4(1) & 4(y-1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 4 & 12\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}4(x+5)=4\Rightarrow x+5=1\Rightarrow x=-4\\ 4(y-1)=12\Rightarrow y-1=3\Rightarrow y=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow xy=(-4)\times 4=-16$$

۴۱

نادرست. تعداد درایه‌های مربعی A از مرتبهٔ n برابر n^2 است که عددی مربع کامل می‌باشد، در حالی‌که ۳۲ مربع کامل نیست.

۴۲

نادرست

در ماتریس صفر تمام درایه‌ها صفر است اما مرتبهٔ ماتریس می‌تواند هر چیزی باشد.

۴۳

نادرست. ماتریس‌های اسکالر، مربعی هستند ولی ماتریس صفر ممکن است مربعی نباشد.

۴۴

نادرست

درایه‌های واقع بر قطر اصلی این‌گونه‌اند.

۴۵

درست. اگر در ماتریس مربعی مرتبهٔ n، $i+j=n+1$ باشد a_{ij} روی قطر فرعی قرار دارد.

۴۶

نادرست

درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس قطری نیز می‌توانند صفر باشند، مثلاً ماتریس $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری است.

۴۷

نادرست. ماتریس مربعی مرتبهٔ ۱ ماتریس سطری نیز هست.

۴۸

درست. ماتریس مربعی از مرتبهٔ ۱، ماتریس ستونی هم هست زیرا فقط یک ستون دارد.

۴۹

نادرست. در ماتریس قطری علاوه بر درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی، درایه‌های واقع بر قطر اصلی نیز می‌توانند صفر باشند.

۵۰

درست

ماتریس‌های اسکالر نوعی از ماتریس‌های مربعی هستند.

۵۱

نادرست

هر ماتریس قطری لزوماً اسکالر نیست، مثلاً ماتریس $\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ قطری است اما اسکالر نیست.

۵۲

درست. مثلاً ماتریس صفر از مرتبهٔ 2×3 باشد تعداد درایه‌های آن برابر ۶ است.

۵۳

نادرست

در ماتریس قطری درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر هستند، پس:

$$\begin{cases}a+2b=0\\ a+c=0\\ c-2=0\Rightarrow c=2\end{cases}$$

حال داریم:

$$a+c=0\xRightarrow{c=2}a=-2$$

$$a+2b=0\xRightarrow{a=-2}-2+2b=0\Rightarrow b=1$$

توجه کنید در ماتریس قطری مهم نیست که درایه‌های روی قطر اصلی صفر باشند یا نباشند.

۵۴

درست

۵۵

درست

۵۶

نادرست

طرفین تساوی ماتریسی را می‌توان بر یک عدد غیرصفر تقسیم کرد.

۵۷

نادرست

ماتریس صفر عضو خنثی عمل جمع است.

۵۸

چون ماتریس A مربعی است، پس:

$$3n-7=5-n\Rightarrow 4n=12\Rightarrow n=3$$

حال ماتریس $B=[3i-3j]_{2\times 2}$ را با درایه‌هایش معلوم می‌کنیم:

$$B=\begin{bmatrix}3(1)-3(1) & 3(1)-3(2)\\ 3(2)-3(1) & 3(2)-3(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -3\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

۵۹

می‌دانیم ماتریس‌های مربعی از مرتبهٔ n در n هستند، پس:

$$n\times n=۹\Rightarrow n=۳$$

بنابراین با توجه به ضابطه‌های a_{ij} و این‌که مرتبهٔ ماتریس ۳ است، داریم:

$$A=\begin{bmatrix}۱-۱ & ۲-۱ & ۳-۱\\ ۲(۲)+۱ & ۲-۲ & ۳-۲\\ ۲(۳)+۱ & ۲(۳)+۲ & ۳-۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۲\\ ۵ & ۰ & ۱\\ ۷ & ۸ & ۰\end{bmatrix}$$

۶۰

درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix}۱^۲-m\times۱ & \bigcirc & \bigcirc\\ \bigcirc & ۲^۲-m\times۲ & \bigcirc\\ \bigcirc & \bigcirc & ۳^۲-m\times۳\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}۱-m & \bigcirc & \bigcirc\\ \bigcirc & ۴-۲m & \bigcirc\\ \bigcirc & \bigcirc & ۹-۳m\end{bmatrix}$$

حال داریم:

$$۱-m+۴-۲m+۹-۳m=۸\Rightarrow ۱۴-۶m=۸$$

$$\Rightarrow ۶m=۶\Rightarrow m=۱$$

۶۱

چون A ماتریس قطری است، درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر هستند. پس:

$$\begin{cases}m-۴=۰\Rightarrow m=۴\\ n-۳=۰\Rightarrow n=۳\end{cases}$$

حال چون ماتریس B اسکالر است، پس:

$$\begin{cases}m-k=۳\xrightarrow{m=۴}۴-k=۳\Rightarrow k=۱\\ n=۳\end{cases}$$

بنابراین $m+n+k$ برابر $۴+۳+۱=۸$ است.

۶۲

در ماتریس اسکالر درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر هستند و هم‌چنین درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابرند، پس:

$$A=\begin{bmatrix}m & ۰\\ m-۲ & n\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}m-۲=۰\Rightarrow m=۲\\ m=n\xrightarrow{m=۲}n=۲\end{cases}$$

۶۳

در ماتریس اسکالر درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر و درایه‌های روی قطر اصلی برابر هستند. پس:

$$\begin{cases}۳a=-۶\Rightarrow a=-۲\\ c-۱=۰\Rightarrow c=۱\\ a+b=۰\xrightarrow{a=-۲}-۲+b=۰\Rightarrow b=۲\end{cases}$$

بنابراین $a(b+c)$ برابر $-۲\times(۲+۱)=-۶$ است.

۶۴

در ماتریس واحد یا همانی درایه‌های روی قطر اصلی برابر ۱ و درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر هستند. پس:

$$\begin{cases}a-۲=۱\Rightarrow a=۳\\ c-b=۰\cdots\xrightarrow{b=-۱}c+۱=۰\Rightarrow c=-۱\\ d+a=۰\cdots\xrightarrow{a=۳}d+۳=۰\Rightarrow d=-۳\\ b+۲=۱\Rightarrow b=-۱\end{cases}$$

بنابراین مقدار $a+b+c+d$ برابر $-۲=(-۳)+(-۱)+(-۱)+۳$ می‌باشد.

۶۵

در ماتریس قطری درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر است. پس:

$$\begin{cases}x^۲-x-۲=۰\Rightarrow(x+۱)(x-۲)=۰\Rightarrow x=-۱\,,\ x=۲\\ x^۲+x=۰\Rightarrow x(x+۱)=۰\Rightarrow x=۰\,,\ x=-۱\end{cases}$$

واضح است که فقط $x=-۱$ می‌تواند هم‌زمان هر دو درایه را صفر کند. پس ماتریس A به‌صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=-۱$$

۶۶

ماتریس‌های A و B که هم‌مرتبه هستند. پس فقط باید درایه‌های نظیر به نظیر آن‌ها مساوی باشند:

$$\begin{cases}۲x=۳\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}\\ ۲x+y=۵\xrightarrow{۲x=۳}y=۲\Rightarrow x+۲y+۳z=\frac{۳}{۲}+۲(۲)+۳(-۲)=-\frac{۱}{۲}\\ z=-۲\end{cases}$$

۶۷

باید $x^۲-y^۲=-۷$ و $x+y=-۱$ باشد، پس:

$$\begin{cases}x^۲-y^۲=-۷\Rightarrow(x-y)(x+y)=-۷\\ x+y=-۱\end{cases}$$

$$\xrightarrow{x+y=-۱}(x-y)(-۱)=-۷\Rightarrow x-y=۷$$

حال داریم:

$$\begin{cases}x-y=۷\\ x+y=-۱\end{cases}\xrightarrow{+}۲x=۶\Rightarrow x=۳\Rightarrow y=-۴$$

بنابراین $x^۲+y^۲=۹+۱۶=۲۵$ است.

۶۸

باید درایه‌های نظیر با هم برابر باشند:

$$\begin{cases}۲x-y=۳\\ ۲x+y=۵\\ z=-۳\end{cases}\xrightarrow{+}۴x=۸\Rightarrow x=۲\Rightarrow y=۱$$

بنابراین حاصل $x^۲-۲y+z$ برابر است با:

$$x^۲-۲y+z=۲^۲-۲(۱)+(-۳)=۴-۲-۳=-۱$$

۶۹

باید درایه‌های نظیر با هم برابر باشند، پس:

$$\begin{cases}x+۲y=۵\\ ۳x-y=۱\\ t=x\xrightarrow{x=۱}t=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳x+۶y=۱۵\\ ۳x-y=۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۷y=۱۴\Rightarrow y=۲\Rightarrow x=۱$$

بنابراین $y+t$ برابر $۲+۱=۳$ است.

ویرایش جدید*

منطبق بر «امتحان‌های نهایی»

و «کنکور ۱۴۰۴»

گاج

پاسخ تمرین‌های کتاب درسی

هندسه ۳

فرمول بیست

هدیه رایگان

فرمول بیست

در این کتابچه، «تمرین‌های» کتاب درسی را به طور کامل پاسخ داده‌ایم.
از آن‌جایی که تقریباً بیش از نیمی از سؤالات امتحانات نهایی مشابه تمرینات کتاب درسی طراحی می‌شوند مرور مطالب این کتابچه در شب امتحان به شما کمک می‌کند تا با آمادگی کامل سر جلسه امتحان حاضر شوید.

تهران، میدان انقلاب
نبش بازارچه کتاب
www.gajmarket.com

فهرست

فصل ۱
ماتریس و کاربردها

درس ۱ ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

کاردرکلاس | ص ۱۱ کتاب درسی

اطلاعات مربوط به ۴ فروشگاه A ، B ، C و D در مورد تعداد شلوار، بلوز و پیراهن‌های موجود در هر فروشگاه، در جدول دوبعدی زیر آمده است. این اطلاعات را یک بار با یک ماتریس ۴×۳ و یک بار با ماتریسی ۳×۴ نمایش دهید.

فروشگاه A	۲۴ شلوار، ۱۵ بلوز و ۷ پیراهن
فروشگاه B	۲۶ شلوار، ۱۹ بلوز و ۱۱ پیراهن
فروشگاه C	۱۷ شلوار، ۲۸ بلوز و ۲۲ پیراهن
فروشگاه D	۱۲ شلوار، ۳۱ بلوز و ۳۵ پیراهن

$$M_{۴\times۳}=\begin{array}{c} \\ A\\ B\\ C\\ D \end{array}\begin{array}{c} \text{شلوار}\quad\text{بلوز}\quad\text{پیراهن} \\ \begin{bmatrix} ۲۴ & ۱۵ & ۷ \\ ۲۶ & ۱۹ & ۱۱ \\ ۱۷ & ۲۸ & ۲۲ \\ ۱۲ & ۳۱ & ۳۵ \end{bmatrix}\end{array}$$

$$M_{۳\times۴}=\begin{array}{c} \\ \text{شلوار}\\ \text{بلوز}\\ \text{پیراهن} \end{array}\begin{array}{c} A\quad B\quad C\quad D \\ \begin{bmatrix} ۲۴ & ۲۶ & ۱۷ & ۱۲ \\ ۱۵ & ۱۹ & ۲۸ & ۳۱ \\ ۷ & ۱۱ & ۲۲ & ۳۵ \end{bmatrix}\end{array}$$

کاردرکلاس | ص ۱۴ کتاب درسی

مانند نمونه ماتریس‌های A و B را در هر حالت با هم جمع یا تفریق کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & -۱ \\ ۴ & ۵ & ۶ & -۱ \\ ۷ & ۸ & ۹ & -۱ \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} -۱ & -۲ & -۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} ۱+(-۱) & ۲+(-۲) & ۳+(-۳) & (-۱)+۱ \\ ۴+۱ & ۵+۲ & ۶+۳ & (-۱)+۴ \\ ۷+۵ & ۸+۶ & ۹+۷ & (-۱)+۸ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۵ & ۷ & ۹ & ۳ \\ ۱۲ & ۱۴ & ۱۶ & ۷ \end{bmatrix}$$

الف) $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow A-B=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

ب) $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳ & ۷ \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & -۱ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow A+B=\begin{bmatrix} ۴ & ۱ & ۲ & ۱۱ \end{bmatrix}$

پ) $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ & ۲ \\ \sqrt{۲} & ۵ & -۱ & ۴ \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۴ & -۷ \\ ۱ & ۲ & ۳ & -۹ \end{bmatrix} \Rightarrow A-B=\begin{bmatrix} ۲ & -۲ & -۱ & ۹ \\ \sqrt{۲}-۱ & ۳ & -۴ & ۱۳ \end{bmatrix}$

ت) $A=[۵]$ ، $B=[-۷] \Rightarrow A+B=[-۲]$

ث) دو ماتریس ۳×۳ و غیرصفر مثال بزنید که جمع آنها برابر با ماتریس صفر باشد.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۳ & -۱ & ۴ \\ ۵ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۱ & -۲ & ۰ \\ -۳ & ۱ & -۴ \\ -۵ & -۲ & -۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\bar{O}$$

کاردرکلاس | ص ۱۵ کتاب درسی

۱ در هر حالت طرف دوم تساوی‌های زیر را به دست آورید.

الف) $-۱\times\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ -۴ & -۵ & -۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & -۲ & -۳ \\ -۴ & -۵ & -۶ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}$

ب) $\frac{۱}{۲}\times\begin{bmatrix} ۴ & ۶ & ۸ & ۱ \\ ۰ & ۳ & ۵ & ۷ \\ \sqrt{۲} & -۱ & ۲ & ۸ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ & \frac{۱}{۲} \\ ۰ & \frac{۳}{۲} & \frac{۵}{۲} & \frac{۷}{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{-۱}{۲} & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$

پ) $۰\times\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ -۲ & -۳ & -۴ \\ ۵ & ۶ & ۷ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\bar{O}$

ت) $۷\times\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\bar{O}$

۲ هر یک از ماتریس‌های زیر را به صورت ضرب یک عدد در یک ماتریس بنویسید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۲ \\ ۳ & ۱ & ۴ \\ ۲ & ۵ & ۰ \end{bmatrix}=(-۱)\times\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ -۳ & -۱ & -۴ \\ -۲ & -۵ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۶ \\ ۸ & ۴ & ۲ \\ ۱۰ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}=۲\times\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۲ & ۱ \\ ۵ & \frac{۳}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

فرمول بیست

کاردرکلاس | ص ۱۷ کتاب درسی

۱ برای ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و دو عدد حقیقی $r=۳$ و $s=-۲$ برقراری خاصیت $(r\pm s)A=rA\pm sA$ را تحقیق کنید.

$$\left.\begin{array}{l} (۳+(-۲))\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} \\ ۳A+(-۲)A=\begin{bmatrix} ۳ & ۶ \\ -۳ & ۹ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ ۲ & -۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow (r+s)A=rA+sA$$

$$\left.\begin{array}{l} (۳-(-۲))\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۱۰ \\ -۵ & ۱۵ \end{bmatrix} \\ ۳A-(-۲)A=\begin{bmatrix} ۳ & ۶ \\ -۳ & ۹ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ ۲ & -۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۱۰ \\ -۵ & ۱۵ \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow (r-s)A=rA-sA$$

۲ درستی خاصیت بالا را در حالت کلی ثابت کنید.

فرض کنیم $A=[a_{ij}]$ **یک ماتریس** $m\times n$ **باشد و r و s دو عدد حقیقی باشند، آنگاه:**

$$(r+s)A=(r+s)[a_{ij}]=[(r+s)a_{ij}]=[ra_{ij}+sa_{ij}]=r[a_{ij}]+s[a_{ij}]=rA+sA$$

کاردرکلاس | ص ۱۷ کتاب درسی

یک ماتریس سطری ۳×۱ مانند A و یک ماتریس ستونی ۱×۳ مانند B طوری تعریف کنید که $A\times B=-۷$

$$A=[۱ \quad ۲ \quad ۱], B=\begin{bmatrix} -۱ \\ -۲ \\ -۲ \end{bmatrix} \Rightarrow A\times B=[۱ \quad ۲ \quad ۱]\times\begin{bmatrix} -۱ \\ -۲ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

$$=۱\times(-۱)+۲\times(-۲)+۱\times(-۲)=-۷$$

کاردرکلاس | ص ۱۸ و ۱۹ کتاب درسی

۱ برای هر حالت $A\times B$ و $B\times A$ را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف) $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}_{۳\times۳}, B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & -۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ & -۲ \\ ۳ & ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}_{۳\times۴} \Rightarrow A\times B=\begin{bmatrix} ۱۴ & ۶ & -۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۸ & ۵ & ۲ & -۵ \end{bmatrix}_{۳\times۴}$

$B_{۳\times۴}\times A_{۳\times۳}\Rightarrow$ تعریف نمی‌شود.

ب) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix}_{3\times 2}$, $B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 0 & 5\end{bmatrix}_{2\times 3} \Rightarrow A\times B=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -4\\ 7 & -2 & 7\\ 0 & -3 & -7\end{bmatrix}_{3\times 3}$

$B\times A=\begin{bmatrix}3 & -5\\ 18 & -13\end{bmatrix}_{2\times 2}$

پ) $A=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 2\end{bmatrix}_{3\times 1}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\end{bmatrix}_{1\times 3} \Rightarrow A\times B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ -2 & -3 & -4\\ 4 & 6 & 8\end{bmatrix}_{3\times 3}$, $B\times A=[7]=7$

ت) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & -1 & -1\end{bmatrix}_{2\times 3}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -2\\ -1 & 2 & -2\\ -1 & 2 & -2\end{bmatrix}_{3\times 3} \Rightarrow A\times B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}_{2\times 3}=\overline{O}$

$B_{3\times 3}\times A_{2\times 3}\Rightarrow$ تعریف نمی‌شود.

قسمت (ت) را با این حکم در اعداد حقیقی، که «اگر $a\times b=0$ آنگاه $a=0$ یا $b=0$» مقایسه کنید.

اگر حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی مساوی صفر باشد، آنگاه حداقل یکی از آنها صفر است امّا در ماتریس‌ها اگر حاصل‌ضرب دو ماتریس، صفر باشد، ممکن است که هیچ یک از ماتریس‌ها صفر نباشد. یعنی اگر $A\times B=\overline{O}$ آنگاه ممکن است $A\neq\overline{O}$ و $B\neq\overline{O}$.

۲ اگر A ماتریسی 3×5 باشد در این صورت در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید که $A\times B$ و $B\times A$ قابل تعریف است یا خیر و در صورت تعریف مرتبهٔ آن را بیابید:

الف) $B=[b_{ij}]_{3\times 2}$

$B_{3\times 2}\times A_{3\times 5}\Rightarrow$ تعریف نمی‌شود.

$A_{3\times 5}\times B_{3\times 2}\Rightarrow$ تعریف نمی‌شود.

ب) $B=[b_{ij}]_{3\times 5}$

$B_{3\times 5}\times A_{3\times 5}\Rightarrow$ تعریف نمی‌شود.

$A_{3\times 5}\times B_{3\times 5}\Rightarrow$ تعریف نمی‌شود.

پ) $B=[b_{ij}]_{5\times 3}$

$A_{3\times 5}\times B_{5\times 3}\Rightarrow$ تعریف می‌شود و مرتبهٔ ماتریس حاصل‌ضرب 3×3 است.

$B_{5\times 3}\times A_{3\times 5}\Rightarrow$ تعریف می‌شود و مرتبهٔ ماتریس حاصل‌ضرب 5×5 است.

ت) $B=[b_{ij}]_{5\times 4}$

$A_{3\times 5}\times B_{5\times 4}\Rightarrow$ تعریف می‌شود و مرتبهٔ ماتریس حاصل‌ضرب 3×4 است.

$B_{5\times 4}\times A_{3\times 5}\Rightarrow$ تعریف نمی‌شود.

ث) $B=[b_{ij}]_{5\times 5}$

$A_{3\times 5}\times B_{5\times 5}\Rightarrow$ تعریف می‌شود و مرتبهٔ ماتریس حاصل‌ضرب 3×5 است.

$B_{5\times 5}\times A_{3\times 5}\Rightarrow$ تعریف نمی‌شود.

کاردرکلاس | ص ۱۹ و ۲۰ کتاب درسی

۱ **فرض کنید** $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ **و** $B=\begin{bmatrix} -۱ & -۴ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ **در این صورت حاصل $(A\times B)$ و $(B\times A)$ را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟**

$A\times B=\begin{bmatrix} ۱ & -۴ \\ ۴ & ۴ \end{bmatrix}$ $\quad$ $B\times A=\begin{bmatrix} ۳ & -۱۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$

نتیجه می‌گیریم که $A\times B\neq B\times A$ و ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.

۲ **ماتریس اسکالر** $I=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ **را از چپ و راست در ماتریس** $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ **ضرب کرده و حاصل‌ضرب‌ها را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟**

$$\left.\begin{array}{l} A\times I=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ I\times A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \end{array}\right\}\Rightarrow A\times I=I\times A=A$$

نتیجه می‌گیریم برای هر ماتریس مربعی A و ماتریس همانی هم‌مرتبه با A داریم:

$A\times I=I\times A=A$

۳ **اگر** $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}_{۳\times۲}$ **و** $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}_{۲\times۲}$ **و** $C=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}_{۲\times۲}$ **در این صورت درستی تساوی** $A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$ **را بررسی کنید.**

$$\left.\begin{array}{l} B+C=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}\Rightarrow A\times(B+C)=\begin{bmatrix} ۵ & ۱۰ \\ -۳ & -۲ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix} \\ A\times B=\begin{bmatrix} ۵ & ۵ \\ -۱ & ۱ \\ ۰ & -۵ \end{bmatrix}_{۳\times۲}, A\times C=\begin{bmatrix} ۰ & ۵ \\ -۲ & -۳ \\ ۵ & ۵ \end{bmatrix}_{۳\times۲} \Rightarrow (A\times B)+(A\times C)=\begin{bmatrix} ۵ & ۱۰ \\ -۳ & -۲ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$

۴ **با همان ماتریس‌های معرفی‌شده در شمارهٔ (۳) درستی تساوی زیر را بررسی کنید:**

$\mathbf{A\times(B\times C)=(A\times B)\times C}$

$$\left.\begin{array}{l} A\times(B\times C)=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\times(\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۹ \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} ۵ & ۲۰ \\ -۳ & -۲ \\ ۵ & -۵ \end{bmatrix} \\ (A\times B)\times C=\begin{bmatrix} ۵ & ۵ \\ -۱ & ۱ \\ ۰ & -۵ \end{bmatrix}\times(\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} ۵ & ۲۰ \\ -۳ & -۲ \\ ۵ & -۵ \end{bmatrix} \end{array}\right\}\Rightarrow A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$$

فرمول بیست

تمرین | ص ۲۰ و ۲۱ کتاب درسی

۱ اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۴}$ ماتریسی ۳×۴ باشد به طوری که برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=۷$ و برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=i+j$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^۲$ در این صورت ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۷ & ۱^۲ & ۱^۲ & ۱^۲ \\ ۲+۱ & ۷ & ۲^۲ & ۲^۲ \\ ۳+۱ & ۳+۲ & ۷ & ۳^۲ \end{bmatrix}_{۳\times۴}=\begin{bmatrix} ۷ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۷ & ۴ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۷ & ۹ \end{bmatrix}$$

۲ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲x-y & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A=B$ در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.

$$\begin{cases} ۲x-y=۳ \\ ۲x+y=۵ \\ z=-۲ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=۲ \\ y=۱ \\ z=-۲ \end{cases}\Rightarrow x+y+z=۲+۱+(-۲)=۱$$

۳ دو ماتریس ۳×۳ مانند A و B مثال بزنید که $A\neq\overline{O}$ و $B\neq\overline{O}$ ولی $AB=\overline{O}$.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\neq\overline{O}\,,\,B=\begin{bmatrix} -۲ & -۲ & -۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\neq\overline{O}\Rightarrow A\times B=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\overline{O}$$

۴ با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد. به عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلّی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix},B=\begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix},C=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix},A\times C=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\Rightarrow A\times B=A\times C$$

اما $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ یعنی $B\neq C$.

۵ اگر A ماتریسی مربعی باشد و توان‌های A را به صورت $A^۲=AA$ و $A^۳=AA^۲$ و ... و $A^n=AA^{n-۱}$ $(n\in\mathbb{N}\ n>۱)$ در این صورت با فرض $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ حاصل $A^۲$ و $A^۳$ و $A^۷$ را بیابید.

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^۳=A\times A^۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$A^۷=A^۳\times A^۳\times A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$