راهنمای استفاده از کتاب

برای کسب بهترین نتیجه در امتحانات مدرسه و کنکور گام‌های زیر را به ترتیب برای هر فصل طی کنید.

گام اول — فیلم آموزشی

۱. هر فصل به تعدادی جلسه تقسیم شده است.
۲. برای استفاده از فیلم‌های آموزشی هر جلسه QR-Codeهای صفحه بعد را اسکن کنید.
۳. در هر جلسه مطالب کتاب درسی درس به درس تدریس شده است.
۴. تمرین‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی به صورت کامل تدریس شده است.

گام دوم — درسنامه آموزشی

۱. هر فصل به تعدادی قسمت تقسیم شده است.
۲. در هر قسمت آموزش مخصوص، عمیق و کاملی به همراه مثال و تست ارائه شده است.
۳. کلیهٔ نکات کنکوری و راهکارهای میان‌بر و تستی مورد نیاز آورده شده است.
۴. تمام تیپ‌های مهم و کنکوری و نیز تمام مطالب کتاب درسی، اعم از فعالیت‌ها، تمرین‌ها، کار در کلاس‌ها و ... در مثال‌های درسنامه پوشش داده شده است.
۵. در انتهای هر فصل، خلاصه نکات آن فصل به منظور مرور و جمع‌بندی، به ویژه برای ایام آزمون سراسری و کنکورهای آزمایشی ارائه شده است.

گام سوم — پرسش‌های تشریحی

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام دوم) تقسیم شده است.
۲. سؤالات از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۳. تمام تمرین‌ها، مثال‌ها و حتی متن کتاب درسی و نیز سؤالات امتحانات نهایی سال‌های قبل که با مباحث کنونی انطباق دارند، پوشش داده شده است.

گام چهارم — پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام دوم و سوم) تقسیم شده است.
۲. هر قسمت نیز دارای ریزطبقه‌بندی است.
۳. تست‌ها از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۴. تمامی تست‌های کنکور داخل و خارج از کشور قابل استفاده و منطبق بر کتاب درسی جدید آورده شده است.
۵. تمام تمرین‌ها، مثال‌ها و حتی متن کتاب درسی به‌صورت تست آورده شده است.
۶. تست‌ها دارای پاسخ تشریحی بوده و تمامی نکات درسی دوباره در پاسخ تست‌ها گنجانده شده است.
۷. تست‌های واجب با علامت ☆ و تست‌های مخصوص جمع‌بندی با علامت ★ مشخص شده است.

به جای آن‌که چندین کتاب بخوانید، کتاب‌های گاج را چندین بار بخوانید

FILM

درسنامه آموزشی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل اوّل: تابع

فصل دوم: مثلثات

فصل سوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

فصل چهارم: مشتق

فصل پنجم: کاربرد مشتق

فصل ششم: هندسه

فصل هفتم: احتمال

پرسش‌های تشریحی

فصل اوّل: تابع

فصل دوم: مثلثات

فصل سوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

فصل چهارم: مشتق

فصل پنجم: کاربرد مشتق

فصل ششم: هندسه

فصل هفتم: احتمال

فصل ۲
قسمت سوم
معادلات مثلثاتی

معادلهٔ مثلثاتی: معادلاتی که بر حسب نسبت‌های مثلثاتی یک زاویهٔ مجهول نوشته می‌شوند را معادلهٔ مثلثاتی می‌نامیم. به عنوان مثال، معادلات $2\sin^2 x+\cos 2x=0$ و $3\tan x+\cot x=1$ معادله‌های مثلثاتی هستند.

جواب معادله: مقدارهایی از زاویهٔ مجهول که به ازای آن‌ها معادله برقرار شود، جواب معادله می‌نامند. مقصود از حل معادلهٔ مثلثاتی پیدا کردن کلیهٔ جواب‌های آن معادله است.

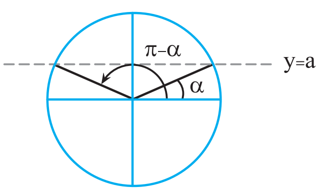
به عنوان مثال، در معادلهٔ مثلثاتی $2\cos x=1$، داریم: $2\cos x=1 \Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}=\cos(-\frac{\pi}{3})$

$x=\frac{\pi}{3}$ و $x=-\frac{\pi}{3}$ جواب‌هایی از معادله‌اند و تمام جواب‌های معادله $(k\in\mathbb{Z})$ $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ می‌باشند.

حل معادله مثلثاتی

برای حل یک معادلهٔ مثلثاتی، ابتدا به کمک رابطه‌های مثلثاتی و دستورهای جبری، آن را به معادلهٔ ساده‌تری تبدیل می‌کنیم تا به یکی از صورت‌های $\sin x=a$ یا $\cos x=a$ یا $\tan x=a$ یا $\cot x=a$ تبدیل شود.

حل معادله $\sin x = a$



برای حل معادلهٔ $\sin x=a$ که $-1\le a\le 1$، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\sin\alpha=a$ شود تا معادله به‌صورت $\sin x=\sin\alpha$ درآید. در این‌صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha \Rightarrow x=2k\pi+\alpha , x=2k\pi+(\pi-\alpha)=(2k+1)\pi-\alpha \ , \ k\in\mathbb{Z}$$

نکته اگر معادلهٔ مثلثاتی را به‌صورت $\sin u=\sin\alpha$ بنویسیم، آن‌گاه تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی به‌صورت $u=2k\pi+(\pi-\alpha)$ و $u=2k\pi+\alpha$ می‌باشد.

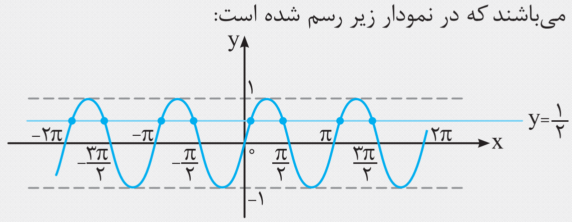
مثال

معادله‌های مثلثاتی $2\sin 2x-1=0$ و $\sin 2x+\sin x=0$ را حل کنید.

پاسخ: معادلهٔ $2\sin 2x-1=0$ را به‌صورت $\sin 2x=\frac{1}{2}$ درمی‌آوریم و با توجه به این‌که $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ می‌باشد، داریم:

$$\sin\underbrace{2x}_{u}=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}\Rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\ 2x=2k\pi+(\pi-\frac{\pi}{6})=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\end{cases}\xrightarrow{\div 2}\begin{cases}x=k\pi+\frac{\pi}{12}\\ x=k\pi+\frac{5\pi}{12}\end{cases}(k\in\mathbb{Z})$$

جواب‌های معادلهٔ $\sin 2x=\frac{1}{2}$، محل تلاقی خط $y=\frac{1}{2}$ با نمودار $y=\sin 2x$ می‌باشند که در نمودار زیر رسم شده است:



برای حل معادلهٔ مثلثاتی $\sin 2x+\sin x=0$، می‌نویسیم:

$$\sin 2x=-\sin x=\sin(-x)\Rightarrow\sin(\underbrace{2x}_{u})=\sin(\underbrace{-x}_{\alpha})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}u=2k\pi+\alpha\\ u=2k\pi+(\pi-\alpha)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi-x\\ 2x=2k\pi+(\pi-(-x))\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x=2k\pi\\ x=2k\pi+\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{2k\pi}{3}\\ x=2k\pi+\pi=(2k+1)\pi\end{cases}(k\in\mathbb{Z})$$

نکته برای یافتن مجموع جواب‌های معادله در یک بازه یا تعداد جواب‌ها، به جای k اعداد صحیح $0, \pm1, \pm2$ و ... را قرار می‌دهیم و برای **محاسبهٔ راحت‌تر**، بهتر است جواب آخر را به‌صورت کسر بنویسیم و سپس به k عدد بدهیم.

تست

مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(2x-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ در بازهٔ $(0,2\pi)$ چقدر است؟

۱) $\frac{5\pi}{3}$ ۲) $\frac{11\pi}{3}$ ۳) $\frac{31\pi}{16}$ ۴) $\frac{41\pi}{16}$

پاسخ: با توجه به این‌که $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ می‌باشد، داریم:

$$\sin(\underbrace{2x-\frac{\pi}{3}}_{u})=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin(\underbrace{\frac{\pi}{4}}_{\alpha})\Rightarrow\begin{cases}2x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{4}\\ 2x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+(\pi-\frac{\pi}{4})\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi+\frac{7\pi}{12}\\ 2x=2k\pi+\frac{13\pi}{12}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=k\pi+\frac{7\pi}{24}=\frac{24k\pi+7\pi}{24}\\ x=k\pi+\frac{13\pi}{24}=\frac{24k\pi+13\pi}{24}\end{cases},k\in\mathbb{Z}$$

با دادن مقادیر صحیح به k، جواب‌های معادله را در بازهٔ $(0,2\pi)$ به‌دست می‌آوریم:

k	0	1
x	$\frac{7\pi}{24},\frac{13\pi}{24}$	$\frac{31\pi}{24},\frac{37\pi}{24}$

$$\text{مجموع جواب‌های معادله}=\frac{7\pi}{24}+\frac{13\pi}{24}+\frac{31\pi}{24}+\frac{37\pi}{24}=\frac{88\pi}{24}=\frac{11\pi}{3}\Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست

معادلهٔ $2\sin^3x-\sin x=0$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ چند جواب دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: برای حل معادله، با استفاده از فاکتورگیری داریم:

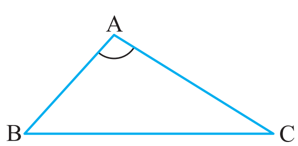
$$\sin x(2\sin^2x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}\sin x=0\Rightarrow x=k\pi\xrightarrow[k=0,1]{x\in(\frac{-\pi}{2},\frac{3\pi}{2})}x=0\ ,\ x=\pi\\ 2\sin^2x-1=0\Rightarrow\sin^2x=\frac{1}{2}\Rightarrow\sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\\ x=2k\pi+(\pi-\frac{\pi}{4})\end{cases}\xrightarrow[k=0]{x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})}\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}\\ x=\frac{3\pi}{4}\end{cases}$$

$$\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin(-\frac{\pi}{4})\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{8k\pi-\pi}{4}\\ x=2k\pi+(\pi+\frac{\pi}{4})=\frac{8k\pi+5\pi}{4}\end{cases}\xrightarrow{x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})}\begin{cases}k=0\Rightarrow x=-\frac{\pi}{4}\\ k=0\Rightarrow x=\frac{5\pi}{4}\end{cases}$$

معادله در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$، ۶ جواب دارد، بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

یادآوری مساحت مثلث ABC برابر است با:



$$S=\frac{1}{2}AB\times AC\times\sin A$$

تست

چند مثلث وجود دارد که مساحت آن ۶ و طول دو ضلع آن ۴ و ۶ باشند؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

پاسخ: با فرض $AB=6$ و $AC=4$ داریم:

$$S=\frac{1}{2}\times6\times4\times\sin A=6\Rightarrow\sin A=\frac{1}{2}$$

چون A اندازهٔ یک زاویهٔ مثلث است، پس $0^\circ<A<180^\circ$ می‌باشد، بنابراین:

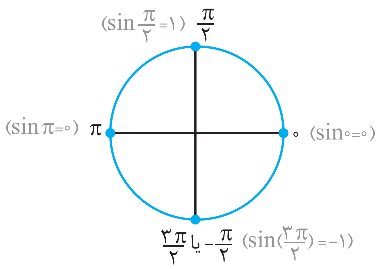
$$\sin A=\frac{1}{2}\Rightarrow\hat{A}=30^\circ\ \text{یا}\ \hat{A}=150^\circ$$

پس دو مثلث می‌توان رسم کرد. بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

در برخی از حالت‌ها، جواب معادلهٔ مثلثاتی فقط با یک رابطه به‌دست می‌آید.

حالت‌های خاص

هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط $\sin u = 0$ و $\sin u = \pm 1$ به‌دست آید با حفظ روابط زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به‌دست آورد:



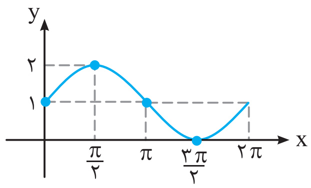
۱) $\sin u = 0 \Rightarrow u = k\pi \ , \ (k \in \mathbb{Z})$

۲) $\sin u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \ , \ (k \in \mathbb{Z})$

۳) $\sin u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \ , \ (k \in \mathbb{Z})$

نکتهٔ مهم ریشه‌های معادلات $\sin u = 1$ و $\sin u = -1$، ریشه‌های مضاعف معادلهٔ مثلثاتی هستند و بقیهٔ ریشه‌ها، جزء ریشه‌های ساده می‌باشند و در تعیین علامت عبارت‌های مثلثاتی، در دو طرف ریشه‌های مضاعف تغییر علامت نداریم و در دو طرف ریشه‌های ساده تغییر علامت داریم.

به عنوان مثال، نمودار تابع $f(x) = 1 + \sin x$ به کمک انتقال در بازهٔ $[0, 2\pi]$ به‌صورت مقابل است:



با توجه به نمودار، $x = \frac{3\pi}{2}$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $f(x) = 0$ است و علامت $f(x)$ در دو طرف $x = \frac{3\pi}{2}$ مثبت است.

تست

معادلهٔ $(3\sin x - 1)(4\sin x - 5)(\sin x + 1) = 0$ در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: $(3\sin x - 1)(4\sin x - 5)(\sin x + 1) = 0 \Rightarrow 3\sin x - 1 = 0$ یا $4\sin x - 5 = 0$ یا $\sin x + 1 = 0$

$\sin x = \frac{1}{3} \Rightarrow$ معادله دو جواب در بازهٔ $[0, 2\pi]$ دارد. ، $\sin x = \frac{5}{4} > 1 \Rightarrow$ معادله ریشه ندارد.

$\sin x = -1 \Rightarrow$ معادله دارای ریشهٔ مضاعف $x = \frac{3\pi}{2}$ است.

بنابراین معادله در بازهٔ $[0, 2\pi]$ دارای سه ریشه است و در نتیجه، گزینهٔ (۱) صحیح است.

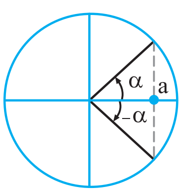
نکتهٔ مهم برای حل معادلهٔ مثلثاتی $\sin^2 u = a^2 = \sin^2 \alpha$ از روابط مقابل استفاده می‌کنیم:

$$u = k\pi \pm \alpha \ , (k \in \mathbb{Z})$$

مثال: $\sin^2 x = \frac{1}{2} = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \sin^2 \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

حل معادلهٔ $\cos x = a$

برای حل معادلهٔ $\cos x = a$ و $-1 \le a \le 1$، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\cos \alpha = a$ شود تا معادله به‌صورت $\cos x = \cos \alpha$ درآید. در این‌صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به‌دست می‌آید:



$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

نکته جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos u = \cos \alpha$ به‌صورت $u = 2k\pi \pm \alpha$ است.

مثال

معادلات زیر را حل کنید و جواب‌های کلی آن‌ها را بیابید.

آ) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$ ب) $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$

پاسخ: آ) $2\cos x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 2\cos x = -\sqrt{3} \Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos \underbrace{\frac{5\pi}{6}}_{\alpha} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$

ب) با توجه به اتحاد مثلثاتی $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$، داریم:

$$\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0 \Rightarrow (2\cos^2 x - 1) - 3\cos x + 2 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$$

با انتخاب $A = \cos x$، معادله به‌صورت $2A^2 - 3A + 1 = 0$ درمی‌آید: $2A^2 - 3A + 1 = 0 \xrightarrow[\text{برابر صفر است.}]{\text{مجموع ضرایب}} A = 1 \ , \ A = \frac{1}{2}$

$A = 1 = \cos x = \cos \underbrace{0}_{\alpha} \Rightarrow x = 2k\pi \pm 0 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ، $A = \frac{1}{2} = \cos x \Rightarrow \cos x = \cos \underbrace{\frac{\pi}{3}}_{\alpha} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

تست جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۲ x = \cos^۲ x + \frac{۱}{۲}$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$ ۳) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$

پاسخ : با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos^۲ x - \sin^۲ x = \cos ۲x$ ، داریم:

$$\sin^۲ x = \cos^۲ x + \frac{۱}{۲} \Rightarrow \underbrace{\sin^۲ x - \cos^۲ x}_{-\cos ۲x} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos ۲x = -\frac{۱}{۲} = \cos(\pi - \frac{\pi}{۳}) = \cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

حالت‌های خاص

هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط $\cos u = ۰$ و $\cos u = \pm ۱$ به‌دست آید، با حفظ روابط زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به‌دست آورد: $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $\cos u = ۰ \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ ۲) $\cos u = ۱ \Rightarrow u = ۲k\pi$ ۳) $\cos u = -۱ \Rightarrow u = ۲k\pi + \pi = (۲k+۱)\pi$

نکته ریشه‌های معادلات $\cos u = \pm ۱$ ، ریشه‌های مضاعف معادلات مثلثاتی هستند.

تست جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos^۲ x + ۳\sin(\frac{\pi}{۲} + x) + ۲ = ۰$ به کدام صورت است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور)

۱) $k\pi$ ۲) $۲k\pi$ ۳) $\frac{k\pi}{۲}$ ۴) $(۲k+۱)\pi$

پاسخ : $\sin(\frac{\pi}{۲} + x) = \cos x \xrightarrow{\text{معادله}} \cos^۲ x + ۳\cos x + ۲ = ۰ \xrightarrow{a+c=b} \cos x = -۱ \text{ ، } \cos x = -\frac{c}{a} = -۲$

معادلهٔ $\cos x = -۲$ جواب ندارد و داریم: $\cos x = -۱ \Rightarrow x = (۲k+۱)\pi$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

مثال معادلهٔ مثلثاتی $\sin x + \cos x + \sin x \cos x + ۱ = ۰$ را حل کنید.

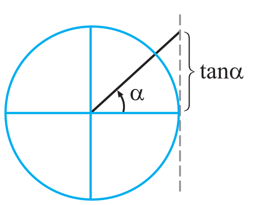
پاسخ : $\sin x + \underline{\cos x} + \underline{\sin x \cos x} + ۱ = ۰ \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} (\sin x + ۱) + \cos x(۱ + \sin x) = ۰$

$$\Rightarrow (\sin x + ۱)(۱ + \cos x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۱ + \sin x = ۰ \Rightarrow \sin x = -۱ \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z} \\ ۱ + \cos x = ۰ \Rightarrow \cos x = -۱ \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = ۲k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

نکتهٔ مهم برای حل معادلهٔ مثلثاتی $\cos^۲ u = a^۲ = \cos^۲ \alpha$ از رابطهٔ مقابل استفاده می‌کنیم: $u = k\pi \pm \alpha \text{ ، } k \in \mathbb{Z}$

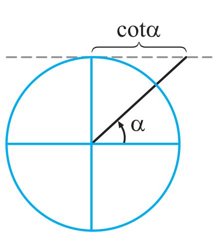
مثال: $\cos^۲ x = \frac{۳}{۴} = (\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲ = \cos^۲ \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$

حل معادلات $\tan x = a$ ، $\cot x = a$



برای حل معادلهٔ $\tan x = a$ و $a \in \mathbb{R}$ ، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\tan \alpha = a$ شود تا معادله به‌صورت $\tan x = \tan \alpha$ درآید. در این‌صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$x = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$$



برای حل معادلهٔ $\cot x = a$ و $a \in \mathbb{R}$ ، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\cot \alpha = a$ شود تا معادله به‌صورت $\cot x = \cot \alpha$ درآید. در این‌صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$x = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

مثال معادلات $\tan x+\sqrt{۳}=۰$ و $\tan ۲x=\cot x$ را حل کنید.

پاسخ:

$$\tan x+\sqrt{۳}=۰\Rightarrow \tan x=-\sqrt{۳}=\tan(\underbrace{-\frac{\pi}{۳}}_{\alpha})\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۳},k\in\mathbb{Z}$$

$$\cot x=\tan(\frac{\pi}{۲}-x)\ ،\ \tan ۲x=\cot x\Rightarrow \tan ۲x=\tan(\underbrace{\frac{\pi}{۲}-x}_{\alpha})\Rightarrow ۲x=k\pi+(\frac{\pi}{۲}-x)\Rightarrow ۳x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶},k\in\mathbb{Z}$$

مثال معادلهٔ $\cot ۲x-۱=۰$ را حل کنید.

پاسخ:

$$\cot ۲x-۱=۰\Rightarrow \cot ۲x=۱=\cot\frac{\pi}{۴}\Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸},k\in\mathbb{Z}$$

حل معادلات مثلثاتی کسری

در حل معادلات مثلثاتی کسری باید ریشه‌های مخرج را از مجموعهٔ جواب حذف کنیم.

مثال جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{۲\sin x+۱}{\sin x+۲}=۱$ را به‌دست آورید.

پاسخ: مخرج کسر همواره مخالف صفر است، لذا هر جوابی که به‌دست آید قابل قبول است: $(\sin x+۲=۰\Rightarrow \sin x=-۲<-۱)$

$$\frac{۲\sin x+۱}{\sin x+۲}=۱\Rightarrow ۲\sin x+۱=\sin x+۲\Rightarrow \sin x=۱\xrightarrow{\text{حالت خاص}} x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲},k\in\mathbb{Z}$$

تست جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\cos ۲x}{\cos(x+\frac{\pi}{۴})}=۰$ به کدام صورت است؟ $(k\in\mathbb{Z})$ (سراسری تجربی)

۱) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۴}$

۲) $k\pi+\frac{\pi}{۴}$

۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{۴}$

۴) $k\pi-\frac{\pi}{۴}$

پاسخ:

جواب مخرج کسر: $\cos(x+\frac{\pi}{۴})=۰\xrightarrow{\text{حالت خاص}} x+\frac{\pi}{۴}=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$ (۱)

$\cos ۲x=۰\xrightarrow{\text{حالت خاص}} ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ (۲)

باید جواب‌های (۱) را از جواب‌های (۲) حذف کنیم: $\{\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}|k\in\mathbb{Z}\}-\{k\pi+\frac{\pi}{۴}|k\in\mathbb{Z}\}$

$$=\{\dots,-\frac{۳\pi}{۴},-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴},\dots\}-\{\dots,-\frac{۳\pi}{۴},\frac{\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴},\dots\}=\{\dots,-\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴},\frac{۷\pi}{۴},\dots\}=\{k\pi-\frac{\pi}{۴}|k\in\mathbb{Z}\}$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

خلاصهٔ فصل دوم

۱) دورهٔ تناوب تابع‌های $y=a\sin(bx+c)+d$ و $y=a\cos(bx+c)+d$ برابر $T=\frac{2\pi}{|b|}$ و دورهٔ تناوب تابع $y=a\tan(bx+c)+d$ برابر $\frac{\pi}{|b|}$ است.

۲) کوچک‌ترین مقدار مثبت T را که به ازای آن تساوی $f(x+T)=f(x)$ برقرار باشد، دورهٔ تناوب تابع f می‌گوییم.

۳) اگر قطعه‌ای از نمودار با دورهٔ تناوب T، در بازه‌ای به طول ۱، n بار تکرار شده باشد، آن‌گاه: $T=\frac{1}{n}$

۴) اگر T دورهٔ تناوب تابع f باشد، آن‌گاه برای هر عدد طبیعی n، تساوی $f(x+nT)=f(x)$ برقرار است.

۵) در توابع $y=a\sin(bx)+c$ و $y=a\cos(bx)+c$، داریم: ماکزیمم مقدار $=|a|+c$ ، مینیمم مقدار $=-|a|+c$

۶) در تابع $y=a\sin(bx+c)+d$، با فرض مثبت بودن ab، داریم:

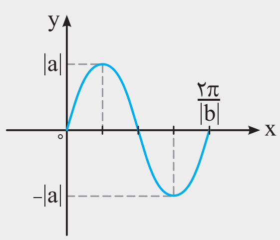
- طول نقاطی که تابع در آن نقاط بیش‌ترین مقدار را اختیار می‌کند: $bx+c=2k\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$
- طول نقاطی که تابع در آن نقاط کم‌ترین مقدار را اختیار می‌کند: $bx+c=2k\pi+\frac{3\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$
- اگر ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=a\sin(bx+c)$ باشد، آن‌گاه طول نقاطی که نمودار تابع در آن نقاط محور xها را قطع می‌کند:
$bx+c=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

۷) در تابع $y=a\sin(bx+c)+d$، با فرض منفی بودن ab، داریم:

- طول نقاطی که تابع در آن نقاط مینیمم دارد: $bx+c=2k\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$
- طول نقاطی که تابع در آن نقاط ماکزیمم دارد: $bx+c=2k\pi+\frac{3\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$
- اگر ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=a\sin(bx+c)$ باشد، آن‌گاه طول نقاطی که نمودار تابع در آن نقاط محور xها را قطع می‌کند:
$bx+c=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

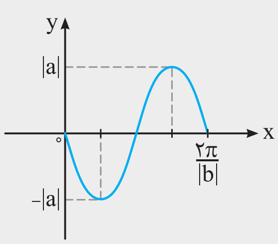
۸) نمودار تابع $y=a\sin(bx)$ با فرض $ab>0$ و در یک دورهٔ تناوب به‌صورت $[0,\frac{2\pi}{|b|}]$ به شکل روبه‌رو می‌باشد:

با توجه به نمودار، اگر $ab>0$، آن‌گاه در بازهٔ $[0,\frac{2\pi}{|b|}]$ تابع ابتدا اکیداً صعودی است.



۹) نمودار تابع $y=a\sin(bx)$ با فرض $ab<0$ و در یک دورهٔ تناوب به‌صورت $[0,\frac{2\pi}{|b|}]$ به شکل روبه‌رو می‌باشد:

با توجه به نمودار، اگر $ab<0$، آن‌گاه در بازهٔ $[0,\frac{2\pi}{|b|}]$ نمودار تابع ابتدا اکیداً نزولی است.



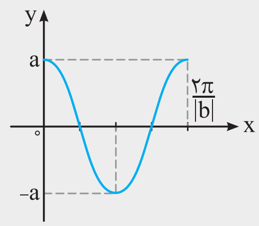
۱۰) در تابع $y=a\cos(bx+c)+d$، با فرض منفی بودن ab، داریم:

- طول نقاطی که تابع کم‌ترین مقدار را در آن نقاط اختیار می‌کند: $bx+c=2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$
- طول نقاطی که تابع بیش‌ترین مقدار را در آن نقاط اختیار می‌کند: $bx+c=2k\pi+\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$
- اگر ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=a\cos(bx+c)$ باشد، آن‌گاه طول نقاطی که نمودار تابع محور xها را در آن نقاط قطع می‌کند:
$bx+c=k\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

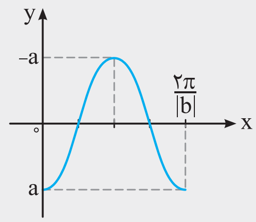
۱۱) در تابع $y=a\cos(bx+c)+d$، با فرض مثبت بودن ab، داریم:

- طول نقاطی که تابع بیش‌ترین مقدار را در آن نقاط اختیار می‌کند: $bx+c=2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$
- طول نقاطی که تابع کم‌ترین مقدار را در آن نقاط اختیار می‌کند: $bx+c=2k\pi+\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$
- اگر ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=a\cos(bx+c)$ باشد، آن‌گاه طول نقاطی که نمودار تابع محور xها را در آن نقاط قطع می‌کند:
$bx+c=k\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

۱۲) نمودار تابع $y = a\cos(bx)$ با فرض $a > ۰$ و در یک دورهٔ تناوب به‌صورت روبه‌رو می‌باشد:



نمودار تابع $y = a\cos(bx)$ با فرض $a < ۰$ و در یک دورهٔ تناوب (بازهٔ $[۰, \frac{۲\pi}{|b|}]$) به‌صورت روبه‌رو می‌باشد:



۱۳) دامنهٔ تابع $y = a + b\tan u$ به‌صورت $\mathbb{R} - \{u = k\pi + \frac{\pi}{۲} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ است.

۱۴) با توجه به نمودار تابع $y = \tan x$ ، تابع در بازه‌های $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ ، $(\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲})$ ، ... و $(\frac{(۲k-۱)\pi}{۲}, \frac{(۲k+۱)\pi}{۲})$ اکیداً صعودی می‌باشد، اما تابع در هر بازه‌ای که شامل این مقادیر باشد، غیریکنوا خواهد شد.

۱۵) $\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{۲}{\sin ۲\alpha}$ ، $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$ یا $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha$

۱۶) اگر مقدار $\sin x + \cos x$ یا $\sin x - \cos x$ را داشته باشیم، می‌توان مقدار $\sin ۲x$ را با به توان رساندن تساوی‌های داده‌شده به‌دست آورد. هم‌چنین اگر مقدار $\cos ۲x$ را بخواهیم به‌دست آوریم، باز هم ابتدا مقدار $\sin ۲x$ را به‌دست می‌آوریم و سپس مقدار $\cos ۲x$ را از رابطهٔ $\cos ۲x = \pm\sqrt{۱ - \sin^۲ ۲x}$ مشخص می‌کنیم.

۱۷) $\sin ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱ + \tan^۲\alpha}$ ، $\cos ۲\alpha = \frac{۱ - \tan^۲\alpha}{۱ + \tan^۲\alpha}$

۱۸) عبارت $۱ + \sin ۲x$ با عبارت $(\sin x + \cos x)^۲$ و عبارت $۱ - \sin ۲x$ با عبارت $(\sin x - \cos x)^۲$ برابر است.

۱۹) $\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x = \cos^۲ x - \sin^۲ x = ۲\cos^۲ x - ۱$

۲۰) $\sin^۲ x$ و $\cos^۲ x$ را می‌توان با فرمول‌های زیر بر حسب $\cos ۲x$ نوشت:

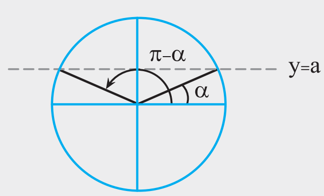
$$\sin^۲ x = \frac{۱ - \cos ۲x}{۲} \quad \text{یا} \quad ۱ - \cos ۲x = ۲\sin^۲ x$$

$$\cos^۲ x = \frac{۱ + \cos ۲x}{۲} \quad \text{یا} \quad ۱ + \cos ۲x = ۲\cos^۲ x$$

۲۱) $\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱ - \tan^۲\alpha}$

۲۲) $\tan\alpha - \cot\alpha = -۲\cot ۲\alpha$

۲۳) برای حل معادلهٔ $\sin x = a$ و $-۱ \le a \le ۱$ ، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\sin\alpha = a$ شود تا معادله به‌صورت $\sin x = \sin\alpha$ درآید. در این‌صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به‌دست می‌آید:



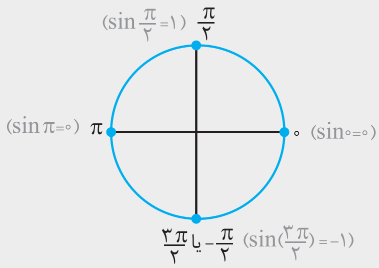
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \ , \ k \in \mathbb{Z} \\ x = ۲k\pi + (\pi - \alpha) = (۲k+۱)\pi - \alpha \ , \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

۲۴) اگر معادلهٔ مثلثاتی را به‌صورت $\sin u = \sin\alpha$ بنویسیم، آن‌گاه تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی به‌صورت $u = ۲k\pi + (\pi - \alpha)$ و $u = ۲k\pi + \alpha$ می‌باشد.

۲۵) برای یافتن مجموع جواب‌های معادله در یک بازه یا تعداد جواب‌ها، به جای k اعداد صحیح $۰, \pm۱, \pm۲$ و ... را قرار می‌دهیم و برای محاسبهٔ راحت‌تر، بهتر است جواب آخر را به‌صورت کسر بنویسیم و سپس به k عدد بدهیم.

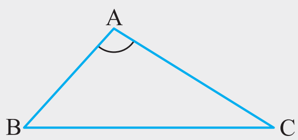
۲۶) هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط $\sin u = 0$ و $\sin u = \pm 1$ به‌دست آید با حفظ روابط زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به‌دست آورد:



$$\sin u = 0 \Rightarrow u = k\pi \ , \ (k\in\mathbb{Z})$$
$$\sin u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \ , \ (k\in\mathbb{Z})$$
$$\sin u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \ , \ (k\in\mathbb{Z})$$

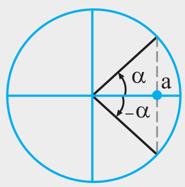
۲۷) برای حل معادلهٔ مثلثاتی $\sin^2 u = a^2 = \sin^2\alpha$ از رابطهٔ $(k\in\mathbb{Z})$، $u = k\pi \pm \alpha$ استفاده می‌کنیم.

۲۸) مساحت مثلث ABC برابر است با:



$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A$$

۲۹) برای حل معادلهٔ $\cos x = a$ و $-1 \le a \le 1$، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\cos\alpha = a$ شود تا معادله به‌صورت $\cos x = \cos\alpha$ درآید. در این‌صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به‌دست می‌آید:



$$\cos x = \cos\alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

۳۰) جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos u = \cos\alpha$ به‌صورت $u = 2k\pi \pm \alpha$ است.

۳۱) هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط $\cos u = 0$ و $\cos u = \pm 1$ به‌دست آید، با حفظ روابط زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به‌دست آورد: $(k\in\mathbb{Z})$

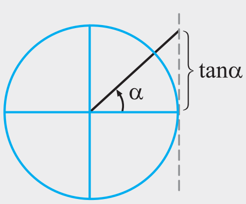
۱) $\cos u = 0 \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}$

۲) $\cos u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi$

۳) $\cos u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi$

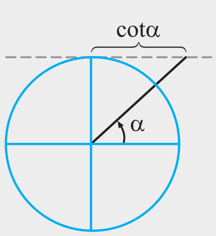
۳۲) برای حل معادلهٔ مثلثاتی $\cos^2 u = a^2 = \cos^2\alpha$ از رابطهٔ $u = k\pi \pm \alpha , k\in\mathbb{Z}$ استفاده می‌کنیم.

برای حل معادلهٔ $\tan x = a$ و $a\in\mathbb{R}$، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\tan\alpha = a$ شود تا معادله به‌صورت $\tan x = \tan\alpha$ درآید. در این‌صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به‌دست می‌آید:



$$x = k\pi + \alpha \ , \ k\in\mathbb{Z}$$

برای حل معادلهٔ $\cot x = a$ و $a\in\mathbb{R}$، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\cot\alpha = a$ شود تا معادله به‌صورت $\cot x = \cot\alpha$ درآید. در این‌صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به‌دست می‌آید:



$$x = k\pi + \alpha \ , \ k\in\mathbb{Z}$$

قسمت سوم: معادلات مثلثاتی

حل معادلهٔ مثلثاتی $\sin u = a$

☆۲۶۷. یکی از جواب‌های معادلهٔ $۲\sin^۲ x - ۳\sin x - ۲ = ۰$ کدام است؟ (سراسری تجربی)

۱) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۶}$ ۳) $\frac{۷\pi}{۶}$ ۴) $\frac{۴\pi}{۳}$

★۲۶۸. جواب‌های کلی معادلهٔ $۵\sin x + ۳\cos(\frac{۳\pi}{۲} - x) - ۱ = ۰$ به‌صورت $x = ۲k\pi + \frac{i\pi}{۶}$ است. مجموعهٔ مقادیر i کدام‌اند؟

۱) $\{۱،۵\}$ ۲) $\{۱،۷\}$ ۳) $\{۵\}$ ۴) $\{۱،۵،۷\}$

☆۲۶۹. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$ در بازهٔ $(۰،\pi)$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $\frac{۳\pi}{۸}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۵\pi}{۸}$ ۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

☆۲۷۰. نمودار تابع $y = \sin ۳x$، خط $y = -\frac{۱}{۲}$ را در بازهٔ $[۰،\pi]$ در چند نقطه قطع می‌کند؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۷۱. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos(\frac{\pi}{۲} + x) + \cos(\frac{۳\pi}{۲} + x) + \sin(\pi + x) = -۱$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ۲) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$ ۳) $۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$ ۴) $۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$

★۲۷۲. جواب کلی معادلهٔ $\sin(\pi + x)\cos(\frac{\pi}{۲} + x) - ۲\sin(\pi - x) + ۱ = ۰$ به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری تجربی- ۹۰)

۱) $۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$ ۲) $۲k\pi + \frac{\pi}{۶}$ ۳) $۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{۲}$

☆۲۷۳. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin\frac{۵\pi}{۶} + \sin(\frac{\pi}{۲} + x)\sin(\pi + x) = ۰$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری ریاضی- ۸۷)

۱) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ۲) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$ ۳) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$ ۴) $۲k\pi + \frac{\pi}{۴}$

☆۲۷۴. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $(۱ + \cos ۲x)\cot(\frac{\pi}{۲} + x) = ۱$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $k\pi + \frac{۳\pi}{۴}$ ۲) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ۳) $k\pi + \frac{\pi}{۳}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{۶}$

☆۲۷۵. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\tan x.\cos^۲ x = ۱$ به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۶)

۱) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$ ۲) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ۳) $۲k\pi - \frac{\pi}{۴}$ ۴) $۲k\pi + \frac{\pi}{۴}$

۲۷۶. یکی از جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sqrt{۳} = \frac{۱ - \cos ۲x}{\sin x}$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $k\pi + \frac{۷\pi}{۶}$ ۲) $k\pi + \frac{۳\pi}{۴}$ ۳) $۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶}$ ۴) $۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳}$

★۲۷۷. یکی از جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۲x + \sin x - ۱ = ۰$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $k\pi + \frac{۲\pi}{۳}$ ۲) $k\pi + \frac{۵\pi}{۶}$ ۳) $۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶}$ ۴) $۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳}$

☆۲۷۸. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۴ x + \cos^۴ x = \frac{۱}{۲}$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$ ۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{k\pi}{۲} \pm \frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{k\pi}{۲} \pm \frac{\pi}{۳}$

☆۲۷۹. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۳x + \sin x = ۰$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری ریاضی)

۱) $\frac{k\pi}{۲}$ ۲) $k\pi$ ۳) $k\pi + \frac{\pi}{۲}$ ۴) $۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$

☆۲۸۰. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin ۳x}{\cos(\frac{۳\pi}{۲} + x)} = ۱$، به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری تجربی- ۹۳)

۱) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ۲) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$ ۳) $۲k\pi \pm \frac{۳\pi}{۴}$ ۴) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$

★**۲۸۱.** مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 5x+\sin 4x=1+\cos\pi$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۲)

۱) 8π ۲) 9π ۳) 10π ۴) 11π

۲۸۲. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 2x+\cos(\frac{\pi}{2}-x)=0$، در بازهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۶)

۱) $\frac{14\pi}{3}$ ۲) 4π ۳) $\frac{9\pi}{2}$ ۴) 5π

☆**۲۸۳.** چند مثلث با مساحت $4\sqrt{3}$ و اندازهٔ دو ضلع ۴ و ۶ وجود دارد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل معادلهٔ مثلثاتی $\cos u=a$

☆**۲۸۴.** جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $4\cos x(\cos x-2)=-3$، کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$ ۳) $2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

★**۲۸۵.** جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sin^2 x=3\cos x$ به کدام صورت است؟ $(k\in\mathbb{Z})$ (سراسری تجربی- ۸۶)

۱) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۲) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۳) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

☆**۲۸۶.** نمودار تابع $y=x+2\cos 3x$، خط $y=x+1$ را با چه طول‌هایی قطع می‌کند؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{9}$ ۴) $\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{8}$

۲۸۷. نمودار تابع $f(x)=2\cos((3x-1)\pi)$ در بازهٔ $[-1,1)$، محور xها را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

☆**۲۸۸.** جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sin^2 2x-\cos 2x+1=0$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $k\pi$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{2}$ ۳) $2k\pi$ ۴) $2k\pi+\frac{\pi}{2}$

☆**۲۸۹.** در معادلهٔ مثلثاتی $2\cos^2 x+\cos x=1$، نقاط پایانی تمام جواب‌ها بر دایرهٔ مثلثاتی، رأس‌های کدام شکل هندسی است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور)

۱) مثلث متساوی‌الاضلاع ۲) مثلث قائم‌الزاویه
۳) ذوزنقه ۴) مستطیل

۲۹۰. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sin(\pi-x).\cos(\frac{3\pi}{2}+x)+3\cot x.\sin(\pi+x)=0$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$ (سراسری تجربی- ۸۷)

۱) $2k\pi+\frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi+\frac{2\pi}{3}$ ۳) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$

★**۲۹۱.** جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $(\sin x-\tan x)\tan(\frac{3\pi}{2}-x)=\cos\frac{4\pi}{3}$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۰)

۱) $k\pi-\frac{\pi}{6}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{3}$ ۳) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$

☆**۲۹۲.** جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin(\frac{\pi}{2}+x)\cos(-x)=\sin^2\frac{5\pi}{6}$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۲) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

۲۹۳. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $(1+\tan^2 x)\cos(\pi+2x)=2$ به کدام صورت است؟ $(k\in\mathbb{Z})$ (سراسری تجربی)

۱) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{3}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

★**۲۹۴.** جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sin^2 x+3\cos x=0$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$ (سراسری تجربی- ۹۵)

۱) $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ ۲) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۳) $2k\pi\pm\frac{5\pi}{6}$ ۴) $k\pi-\frac{\pi}{3}$

☆**۲۹۵.** جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x+2\cos^2 x=0$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$ (سراسری تجربی- ۹۶)

۱) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

۲۹۶. معادلهٔ $\sin 2x + \sqrt{2}\cos x = 0$ در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۹۷☆. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x - 5\cos x + 4 = 0$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ ۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ۴) $2k\pi$

۲۹۸. مجموع جواب‌های معادلهٔ $\cos 3x - \sin x = 0$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $-\frac{\pi}{8}$ ۲) $-\frac{\pi}{2}$ ۳) $-\frac{3\pi}{8}$ ۴) $-\frac{5\pi}{8}$

۲۹۹★. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$، با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۴)

۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

۳۰۰★. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{2} + x)$ به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری تجربی- ۹۱)

۱) $\frac{k\pi}{3}$ ۲) $\frac{2k\pi}{3}$ ۳) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۳۰۱☆. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$، به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری تجربی- ۹۲)

۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۳۰۲☆. نقاط پایانی کمان جواب‌های معادلهٔ $1 + \cos x = \frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x}$ بر روی دایرهٔ مثلثاتی، رأس‌های کدام چندضلعی است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۱)

۱) مربع ۲) مستطیل ۳) مثلث قائم‌الزاویه ۴) مثلث متساوی‌الساقین

۳۰۳. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$، کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۷)

۱) $\frac{k\pi}{5}$ ۲) $\frac{2k\pi}{5}$ ۳) $k\pi + \frac{\pi}{5}$ ۴) $\frac{(2k+1)\pi}{5}$

حل معادلهٔ مثلثاتی $\tan u = a$

۳۰۴★. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\tan x \tan 3x = 1$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری تجربی- ۹۷)

۱) $\frac{k\pi}{4}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ ۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$ ۴) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

۳۰۵☆. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sin^2 x - \sin 2x = 1$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری تجربی)

۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

۳۰۶. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\cos x(\cos x - \sin x) = 1$ به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری ریاضی خارج از کشور)

۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

۳۰۷☆. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1$، به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری تجربی- ۹۴)

۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

۳۰۸★. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری ریاضی- ۸۶)

۱) $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ ۲) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ ۳) $k\pi + \frac{5\pi}{6}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{3}$

تست‌های V.I.P

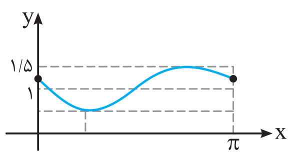
۳۰۹. دورهٔ تناوب تابع $f(x)=(-۱)^{[\frac{x}{۲}]}\cos(\pi x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۳۱۰. دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\tan x.\cot x$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) π ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) ۲π

۳۱۱. شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۱+a\sin(bx-\frac{\pi}{۶})$ است. $a+b$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۵)



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۳۱۲. حاصل $\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}+\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$ به ازای $x=۱۵^\circ$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۳۱۳. حاصل $\sin^۲(\frac{\pi}{۴}-\alpha)\sin^۲(\frac{\pi}{۴}+\alpha)$ به ازای $\alpha=\frac{\pi}{۲۴}$ کدام است؟

۱) $۲(\sqrt{۵}-۱)$ ۲) $\frac{۱}{۱۶}(\sqrt{۳}+۲)$ ۳) $\frac{۱}{۱۶}(۲-\sqrt{۳})$ ۴) $\sqrt{۵}-۱$

۳۱۴. اگر $a+b=\frac{\pi}{۴}$ باشد، حاصل $۸\cos a\cos b\cos(\frac{\pi}{۲}-a)\cos(\frac{\pi}{۲}-b)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $\sin ۴a$ ۲) $\cos ۴a$ ۳) $\sin^۲ ۲a$ ۴) $\cos^۲ ۲a$

۳۱۵. حاصل $\cos ۳۶^\circ \cos ۷۲^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳۱۶. حاصل عددی $\sin ۱۰^\circ \cos ۲۰^\circ \cos ۴۰^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۳۱۷. حاصل $\tan^۲\alpha-\cot^۲\alpha$ به ازای $\alpha=\frac{\pi}{۸}$، کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $-۴\sqrt{۲}$ ۴) $-۲\sqrt{۲}$

۳۱۸. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x}=\sqrt{۳}$، به کدام صورت است؟ $(k\in\mathbb{Z})$ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۱)

۱) $\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶}$ ۳) $k\pi+\frac{\pi}{۶}$ ۴) $k\pi-\frac{\pi}{۶}$

۳۱۹. اگر $\tan x+\cot x=k-۱$، آن‌گاه حدود k برای آن‌که معادله جواب داشته باشد، کدام است؟

۱) $-۱<k<۳$ ۲) $k\geq ۳$ یا $k\leq -۱$ ۳) $k>۲$ ۴) $k<-\frac{۱}{۲}$

☆**۳۲۰.** مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۴x=\sin^۴ x-\cos^۴ x$، در بازهٔ $[۰,\pi]$، برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۵)

۱) $\frac{۷\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۹\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۱۱\pi}{۳}$

۳۲۱. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\cos ۲x=\cot x(۴\sin x+\tan x)$، کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۲)

۱) $k\pi-\frac{\pi}{۳}$ ۲) $k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$

۳۲۲. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cot\frac{x}{۲}-\tan\frac{x}{۲}=۲\sqrt{۳}$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{۴\pi}{۳}$ ۲) ۲π ۳) $\frac{۷\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۱۱\pi}{۳}$

۳۲۳. در معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۲x(\sin x+\cos x)=\cos ۲x(\cos x-\sin x)$، مجموع تمام جواب‌ها در بازهٔ $[۰,\pi]$، کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۳)

۱) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۷\pi}{۴}$

۲۶۷ ۱ ۲ **۳** ۴

با انتخاب $\sin x = A$، معادله به‌صورت $۲A^۲-۳A-۲=۰$ درمی‌آید:

$$۲A^۲-۳A-۲=۰\ ,\ \Delta=۲۵\Rightarrow A=\frac{۳\pm۵}{۴}$$

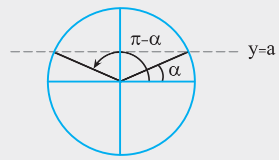
$$\Rightarrow\begin{cases}A=۲=\sin x & (\text{غیرممکن})\\ A=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$A=-\frac{۱}{۲}=\sin x\ ,\ \sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin(\pi+\frac{\pi}{۶})=-\sin\frac{\pi}{۶}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{۷\pi}{۶}$$

۲۶۸ **۱** ۲ ۳ ۴

نکته: برای حل معادلهٔ $\sin x=a$ و $-۱\le a\le ۱$، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\sin\alpha=a$ شود تا معادله به‌صورت $\sin x=\sin\alpha$ درآید. در این‌صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به‌دست می‌آید:



$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\alpha\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=۲k\pi+(\pi-\alpha)=(۲k+۱)\pi-\alpha\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\cos(\frac{۳\pi}{۲}-x)=-\sin x$$

$$۵\sin x+۳\cos(\frac{۳\pi}{۲}-x)=۱\Rightarrow ۵\sin x-۳\sin x=۱$$

$$\Rightarrow ۲\sin x=۱\Rightarrow \sin x=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ x=۲k\pi+(\pi-\frac{\pi}{۶})=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}\end{cases}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{i\pi}{۶},i\in\{۱,۵\}$$

۲۶۹ ۱ **۲** ۳ ۴

نکته: اگر معادلهٔ مثلثاتی را به‌صورت $\sin u=\sin\alpha$ بنویسیم، آن‌گاه تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی به‌صورت $u=۲k\pi+(\pi-\alpha)$ و $u=۲k\pi+\alpha$ می‌باشد.

نکته: برای یافتن مجموع جواب‌های معادله در یک بازه یا تعداد جواب‌ها، به جای k اعداد صحیح ۰، ±۱، ±۲ و ... را قرار می‌دهیم و برای **محاسبهٔ راحت‌تر**، بهتر است جواب آخر را به‌صورت کسر بنویسیم و سپس به k عدد بدهیم.

عبارت $\sin x\cos x$ با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\sin۲\alpha$ برابر $\frac{۱}{۲}\sin۲x$ است. طبق فرض داریم:

$$\frac{۱}{۲}\sin۲x=\frac{\sqrt{۲}}{۴}\Rightarrow\sin۲x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\\ ۲x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۴}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\div ۲}\begin{cases}x=k\pi+\frac{\pi}{۸}=\frac{۸k\pi+\pi}{۸}\\ x=k\pi+\frac{۳\pi}{۸}=\frac{۸k\pi+۳\pi}{۸}\end{cases},\ k\in\mathbb{Z}$$

با قرار دادن اعداد صحیح ۰، ±۱، ±۲ و ... به جای k، xهایی که در بازهٔ $(۰,\pi)$ قرار دارند را مشخص می‌کنیم:

$$k=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۸},\frac{۳\pi}{۸}$$

$$k=۱\Rightarrow x=\frac{۹\pi}{۸}\notin(۰,\pi)\ ,\ x=\frac{۱۱\pi}{۸}\notin(۰,\pi)$$

به ازای سایر مقادیر k نیز، xهای به‌دست آمده در بازهٔ $(۰,\pi)$ قرار ندارند.

بنابراین معادله در بازهٔ $(۰,\pi)$ دارای دو جواب $\frac{\pi}{۸}$ و $\frac{۳\pi}{۸}$ است و در نتیجه:

$$\text{مجموع جواب‌ها}=\frac{\pi}{۸}+\frac{۳\pi}{۸}=\frac{۴\pi}{۸}=\frac{\pi}{۲}$$

۲۷۰ ۱ ۲ **۳** ۴

با حل معادلهٔ مثلثاتی $\sin۳x=-\frac{۱}{۲}$، طول نقاط تلاقی دو نمودار در بازهٔ $[۰,\pi]$ مشخص می‌شود:

$$\sin(۳x)=-\frac{۱}{۲}=\sin(\overbrace{-\frac{\pi}{۶}}^{\alpha})\Rightarrow\begin{cases}۳x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}\\ ۳x=(۲k+۱)\pi+\frac{\pi}{۶}\end{cases},k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۲k\pi}{۳}-\frac{\pi}{۱۸}=\frac{۱۲k\pi-\pi}{۱۸}\\ x=\frac{(۲k+۱)\pi}{۳}+\frac{\pi}{۱۸}=\frac{۶(۲k+۱)\pi+\pi}{۱۸}\end{cases},\ k\in\mathbb{Z}$$

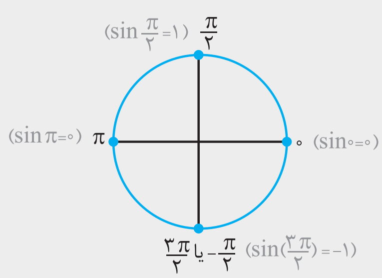
با قرار دادن اعداد صحیح ۰، ±۱، ... به جای k، xهای بین $[۰,\pi]$ را مشخص می‌کنیم:

$$k=۱\Rightarrow x=\frac{۱۱\pi}{۱۸}\ \checkmark\ ,\ k=۰\Rightarrow x=\frac{۷\pi}{۱۸}\ \checkmark$$

دو مقدار برای x به‌دست می‌آید و در نتیجه نمودار دو تابع همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند.

۲۷۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

نکته: هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط $\sin u=۰$ و $\sin u=\pm۱$ به‌دست آید با حفظ روابط زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به‌دست آورد:



$$\sin u=۰\Rightarrow u=k\pi\ ,\ (k\in\mathbb{Z})$$

$$\sin u=۱\Rightarrow u=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ,\ (k\in\mathbb{Z})$$

$$\sin u=-۱\Rightarrow u=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\ ,\ (k\in\mathbb{Z})$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}+x)=-\sin x\ ,\ \cos(\frac{۳\pi}{۲}+x)=\sin x$$

$$\sin(\pi+x)=-\sin x$$

$$\Rightarrow -\cancel{\sin x}+\cancel{\sin x}-\sin x=-۱\Rightarrow \sin x=۱$$

$$\xrightarrow{\text{حالت خاص}} x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

۲۷۲ ۱ ۲ **۳** ۴

$\sin(\pi+x)=-\sin x$ ، $\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin x$ ، $\sin(\pi-x)=\sin x$

$$\Rightarrow(-\sin x)(-\sin x)-2\sin x+1=0\Rightarrow \sin^2 x-2\sin x+1=0$$

$$\Rightarrow(\sin x-1)^2=0\Rightarrow \sin x=1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

۲۷۳ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\sin(\frac{5\pi}{6})=\sin(\pi-\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos x$ ، $\sin(\pi+x)=-\sin x$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}-\sin x\cos x=0\xrightarrow{\times 2}1-\underbrace{2\sin x\cos x}_{\sin 2x}=0\Rightarrow \sin 2x=1$$

$$\xrightarrow{\text{حالت خاص}}2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

۲۷۴ **۱** ۲ ۳ ۴

$\cot(\frac{\pi}{2}+x)=-\tan x$ ، $1+\cos 2x=2\cos^2 x$

$$(1+\cos 2x)\cot(\frac{\pi}{2}+x)=1\Rightarrow 2\cos^2 x\times(-\tan x)=1$$

$$\Rightarrow 2\cos^{\cancel{2}}x\times\frac{-\sin x}{\cancel{\cos x}}=1\Rightarrow -\sin 2x=1\Rightarrow \sin 2x=-1=\sin\frac{3\pi}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{حالت خاص}}2x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}\Rightarrow x=k\pi+\frac{3\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}$$

۲۷۵ ۱ **۲** ۳ ۴

سمت چپ معادله را ساده می‌کنیم:

$$2\tan x.\cos^2 x=2\times\frac{\sin x}{\cos x}.\cos^2 x=2\sin x\cos x=\sin 2x$$

$$\Rightarrow \sin 2x=1\xrightarrow{\text{حالت خاص}}2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}\quad(*)$$

$$\cos x\neq 0\Rightarrow x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\xrightarrow{(*)}x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

دقت کنید که به ازای هیچ مقدار k، $k\pi+\frac{\pi}{2}$ برابر $k\pi+\frac{\pi}{4}$ نمی‌شود.

۲۷۶ ۱ ۲ ۳ **۴**

مقدار $\sin x$ باید عددی مخالف صفر باشد، بنابراین باید داشته باشیم:

$$x\neq k\pi , k\in\mathbb{Z}$$

با استفاده از اتحاد مثلثاتی $1-\cos 2x=2\sin^2 x$، داریم:

$$\frac{1-\cos 2x}{\sin x}=\frac{2\sin^2 x}{\sin x}=2\sin x=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi+\frac{\pi}{3}\\ x=2k\pi+(\pi-\frac{\pi}{3})=2k\pi+\frac{2\pi}{3}\end{cases}$$

۲۷۷ ۱ ۲ **۳** ۴

برای حل معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x+\sin x-1=0$، از اتحاد مثلثاتی $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ استفاده می‌کنیم تا معادله‌ای درجه دوم بر حسب $\sin x$ به‌دست آید:

$$\cos 2x+\sin x-1=0\Rightarrow(1-2\sin^2 x)+\sin x-1=0$$

$$-2\sin^2 x+\sin x=0\xrightarrow{\text{فاکتورگیری}}\sin x(-2\sin x+1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin x=0\xrightarrow{\text{حالت خاص}}x=k\pi\\ -2\sin x+1=0\Rightarrow \sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\ x=2k\pi+(\pi-\frac{\pi}{6})=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\end{cases}$$

۲۷۸ ۱ ۲ **۳** ۴

نکته: برای حل معادلهٔ مثلثاتی $\sin^2 u=a^2=\sin^2\alpha$ از رابطهٔ $(k\in\mathbb{Z})$ ، $u=k\pi\pm\alpha$ استفاده می‌کنیم.

با توجه به اتحاد جبری $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ و اتحاد مثلثاتی $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$، داریم:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-2(\sin x\cos x)^2=1-2(\frac{1}{2}\sin 2x)^2=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 2x=1=\sin^2\frac{\pi}{2}\Rightarrow 2x=k\pi\pm\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4}$$

۲۷۹ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\sin 3x+\sin x=0\Rightarrow \sin\underbrace{3x}_{u}=-\sin x=\sin(\underbrace{-x}_{\alpha})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3x=2k\pi-x\Rightarrow 4x=2k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}\\ 3x=2k\pi+(\pi-(-x))\Rightarrow 2x=2k\pi+\pi\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اجتماع}}x=\frac{k\pi}{2}$$

۲۸۰ ۱ ۲ ۳ **۴**

$\cos(\frac{3\pi}{2}+x)=\sin x$ ، $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2}+x)}=1$

$$\Rightarrow \frac{\sin 3x}{\sin x}=1\Rightarrow \sin 3x=\sin x$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3x=2k\pi+x\Rightarrow x=k\pi\\ 3x=2k\pi+\pi-x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

توجه کنیم که $x=k\pi$ غیر قابل قبول است، زیرا مخرج کسر را صفر می‌کند.

۲۸۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\sin 5x+\sin 4x=1+\overset{-1}{\cancel{\cos\pi}}=0\Rightarrow \sin 5x=-\sin 4x$$

$$\Rightarrow \sin 5x=\sin(-4x)\Rightarrow\begin{cases}5x=2k\pi-4x\\ 5x=2k\pi+(\pi-(-4x))\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{2k\pi}{9}\\ x=2k\pi+\pi\end{cases}$$

$$\xrightarrow{x\in[0,2\pi]}\begin{cases}x=0,\frac{2\pi}{9},\frac{4\pi}{9},\frac{6\pi}{9},\frac{8\pi}{9},\dots,\frac{18\pi}{9}\\ x=\pi\end{cases}$$

مجموع جواب‌های معادله $=(0+\frac{2\pi}{9}+\dots+\frac{18\pi}{9})+\pi=11\pi$

۲۸۲ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\cos(\frac{\pi}{۲}-x)=\sin x$$

معادله: $\sin ۲x+\sin x=۰\Rightarrow \sin \underbrace{۲x}_{u}=-\sin x=\sin(\underbrace{-x}_{\alpha})$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x=۲k\pi-x \\ ۲x=۲k\pi+\pi-(-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳x=۲k\pi \\ x=۲k\pi+\pi \end{cases}$$

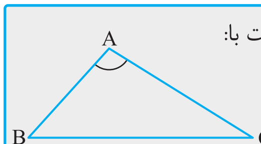
$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۲k\pi}{۳} \\ x=۲k\pi+\pi \end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,۲\pi]$، ۰، $\frac{۲\pi}{۳}$، π، $\frac{۴\pi}{۳}$ و ۲π است. داریم:

$$\text{مجموع جواب‌ها}=۰+\frac{۲\pi}{۳}+\pi+\frac{۴\pi}{۳}+۲\pi=۵\pi$$

۲۸۳ ۱ ۲ **۳** ۴

یادآوری: مساحت مثلث ABC برابر است با:



$$S=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times \sin A$$

طبق فرض اگر $AB=۴$، $AC=۶$ و $S=۴\sqrt{۳}$ باشد، آن‌گاه داریم:

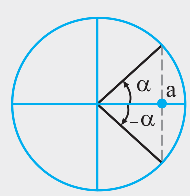
$$S=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times \sin A\Rightarrow \cancel{۴}\sqrt{۳}=\frac{۱}{۲}\times\cancel{۴}\times ۶\times \sin A$$

$$\Rightarrow \sin A=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

A یک زاویهٔ مثلث است و در نتیجه $۰^\circ<A<۱۸۰^\circ$. در این محدوده دو مقدار برای A وجود دارد که $\sin A=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ شود. پس دو مثلث با فرض‌های داده‌شده وجود دارد.

۲۸۴ **۱** ۲ ۳ ۴

نکتهٔ ۱: برای حل معادلهٔ $\cos x=a$ و $-۱\le a\le ۱$، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\cos\alpha=a$ شود تا معادله به‌صورت $\cos x=\cos\alpha$ درآید. در این‌صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول روبه‌رو به‌دست می‌آید:



$$\cos x=\cos\alpha\Rightarrow x=۲k\pi\pm\alpha$$

نکتهٔ ۲: جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos u=\cos\alpha$ به‌صورت $u=۲k\pi\pm\alpha$ است.

با تغییر متغیر $\cos x=t$، معادله به‌صورت $۴t(t-۲)=-۳$ درمی‌آید:

$$۴t(t-۲)=-۳\Rightarrow ۴t^۲-۸t=-۳\Rightarrow ۴t^۲-۸t+۳=۰$$

$$\Rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=۶۴-۴(۴)(۳)=۱۶\Rightarrow t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۸\pm ۴}{۲(۴)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=\frac{۳}{۲}=\cos x \quad (\text{غیرممکن}) \\ t=\frac{۱}{۲}=\cos x=\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

معادلهٔ $\cos x=\frac{۳}{۲}$ جواب ندارد، زیرا $\frac{۳}{۲}$ عددی بزرگ‌تر از یک است.

۲۸۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

با اتحاد $\sin^۲ x=۱-\cos^۲ x$، معادله را بر حسب کسینوس می‌نویسیم:

$$۲(۱-\cos^۲ x)=۳\cos x\Rightarrow ۲\cos^۲ x+۳\cos x-۲=۰$$

$$\xrightarrow{A=\cos x}۲A^۲+۳A-۲=۰\ ,\ \Delta=۲۵\Rightarrow A=\frac{-۳\pm ۵}{۴}$$

$$\Rightarrow A=\frac{۱}{۲},-۲\xrightarrow{-۱\le\cos x\le ۱}A=\cos x=\frac{۱}{۲}=\cos\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

۲۸۶ ۱ ۲ **۳** ۴

با حل معادلهٔ $x+۲\cos ۳x=x+۱$، طول نقاط تلاقی دو نمودار به‌دست می‌آید:

$$\cancel{x}+۲\cos ۳x=\cancel{x}+۱\Rightarrow \cos ۳x=\frac{۱}{۲}=\cos\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow ۳x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}\pm\frac{\pi}{۹}$$

۲۸۷ ۱ ۲ ۳ **۴**

نکته: هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط $\cos u=۰$ و $\cos u=\pm ۱$ به‌دست آید، با حفظ روابط زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به‌دست آورد: $(k\in \mathbb{Z})$

۱) $\cos u=۰\Rightarrow u=k\pi+\frac{\pi}{۲}$

۲) $\cos u=۱\Rightarrow u=۲k\pi$

۳) $\cos u=-۱\Rightarrow u=۲k\pi+\pi=(۲k+۱)\pi$

با حل معادلهٔ $f(x)=۰$، طول نقاط تلاقی نمودار تابع با محور xها مشخص می‌شود. همچنین با قرار دادن اعداد صحیح ۰، ±۱ و ... به جای kهای بازهٔ $[-۱,۱)$ را مشخص می‌کنیم.

$$۲\cos((۳x-۱)\pi)=۰\Rightarrow (۳x-۱)\pi=k\pi+\frac{\pi}{۲},k\in\mathbb{Z}$$

$$\xrightarrow{\div\pi}۳x-۱=k+\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{k}{۳}+\frac{۱}{۲}=\frac{۲k+۳}{۶}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\xrightarrow{x\in[-۱,۱)}x=-\frac{۵}{۶},-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۶},\frac{۱}{۶},\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۶}$$

بنابراین نمودار f، محور xها را در ۶ نقطه قطع می‌کند.

۲۸۸ **۱** ۲ ۳ ۴

با اتحاد مثلثاتی $\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha$، همهٔ نسبت‌ها به کسینوس تبدیل می‌شود:

$$۲(۱-\cos^۲ ۲x)-\cos ۲x+۱=۰\Rightarrow -۲\cos^۲ ۲x-\cos ۲x+۳=۰$$

$$\xrightarrow[\text{برابر صفر است}]{\text{مجموع ضرایب}}\cos ۲x=۱\ ,\ \cos ۲x=\frac{c}{a}=-\frac{۳}{۲}<-۱$$

معادلهٔ $\cos ۲x=-\frac{۳}{۲}$ جواب ندارد و در نتیجه:

$$\cos ۲x=۱\xrightarrow{\text{حالت خاص}}۲x=۲k\pi\Rightarrow x=k\pi$$

۲۸۹ **۱** ۲ ۳ ۴

$$۲\cos^۲ x+\cos x-۱=۰\xrightarrow{A=\cos x}۲A^۲+A-۱=۰$$

$$\Rightarrow A=-۱\ ,\ A=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \begin{cases} \cos x=-۱\Rightarrow x=\pi \\ \cos x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۳},۲\pi-\frac{\pi}{۳}=\frac{۵\pi}{۳} \end{cases}$$