فهرست

امتحان نهایی

بارم‌بندی درس ریاضی ۲

شماره فصل		نوبت اول	نوبت دوم
اول		۶	۲
دوم		۶	۲/۵
سوم		۶	۲/۵
چهارم	تا صفحه ۷۶	۲	۳
	صفحه ۷۷ به بعد	-	
پنجم		-	۳/۵
ششم		-	۳/۵
هفتم		-	۳
جمع		۲۰	۲۰

بخش ۱

درسنامه

و سؤالات تشریحی

فصل اول

۱ هندسه تحلیلی و جبر

ریاضی ۲

فصل اول کتاب شامل هندسهٔ تحلیلی، معادلهٔ درجه دوم، سهمی، معادلهٔ گویا و معادلهٔ رادیکالی است. از این فصل در امتحان نوبت اول ۶ نمره و در امتحان خرداد، ۲ نمره و در شهریور و دی، ۲/۵ نمره سؤال مطرح می‌شود. این فصل دارای ۵ بسته است.

فیلم شب امتحان

برای استفاده از فیلم‌های آموزشی شب امتحان هر بسته QR-codeها مقابل را اسکن کنید.

بستهٔ ۱ — بستهٔ ۲ — بستهٔ ۳ — بستهٔ ۴ و ۵

بستهٔ اول

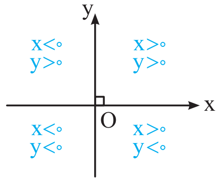
بخش اول هندسه تحلیلی (معادلهٔ خط)

صفحه ۲ تا ۵ کتاب درسی

با معادلهٔ خط، رسم خط، نوشتن معادلهٔ خط، دو خط متقاطع، دو خط موازی و دو خط عمود آشنایی دارید. در این بسته، مطالب را یادآوری می‌کنیم و مسائلی را حل می‌کنیم.

الف معادلهٔ خط

برای تعیین یک نقطه از صفحه، از دستگاه محورهای مختصات دکارتی استفاده می‌کنیم. این دستگاه از دو محور عمود بر هم $x'Ox$ (محور x ها) و $y'Oy$ (محور y ها) تشکیل شده است و این محورها صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هر کدام از آن‌ها را یک ربع می‌نامند و به هر نقطهٔ A از صفحه، یک زوج مرتب (x, y) از اعداد حقیقی متناظر می‌شود. x را طول نقطه و y را عرض آن می‌نامند. علامت x و y در چهار ناحیه در نمودار مقابل مشخص شده است:



نکته ❶ اگر نقطه‌ای روی محور x ها قرار داشته باشد، عرض آن صفر است، لذا مختصات آن به‌صورت $(x, \circ)$ می‌باشد.

❷ اگر نقطه‌ای روی محور y ها قرار داشته باشد، طول آن صفر است، لذا مختصات آن به‌صورت $(\circ, y)$ می‌باشد.

معادلهٔ خط: معادلهٔ یک خط در دستگاه مختصات دکارتی به‌صورت $ax + by + c = \circ$ است که در آن a و b هم‌زمان صفر نیستند، یعنی $a^۲ + b^۲ \neq \circ$

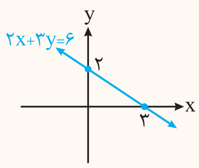
ب رسم خط

می‌دانیم از هر دو نقطهٔ متمایز، فقط یک خط می‌گذرد، بنابراین می‌توان با داشتن معادلهٔ یک خط و مشخص کردن مختصات ۲ نقطه از خط، نمودار آن را در دستگاه محورهای مختصات رسم کرد.

سؤال نمودار خط به معادلهٔ $۲x + ۳y = ۶$ را در دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

پاسخ در معادله به جای x، دو مقدار دلخواه قرار می‌دهیم تا مقدار y به‌دست آید و از آن‌جا با مشخص شدن مختصات دو نقطه، خط را رسم می‌کنیم:

x	۰	۳
y	۲	۰



شیب خط

شیب یک خط برابر است با نسبت تفاضل عرض‌های هر دو نقطهٔ دلخواه روی آن به تفاضل طول‌های همان دو نقطه. به عبارت دیگر اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه روی یک خط باشند و $x_A \neq x_B$ باشد، آن‌گاه:

$$\text{شیب خط} = m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

مثال شیب خط گذرنده از نقاط $A(۱, -۴)$ و $B(۳, ۲)$ برابر است با:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۲-(-۴)}{۳-۱} = \frac{۶}{۲} = ۳$$

محاسبهٔ شیب خط با داشتن معادلهٔ خط

۱ اگر معادلهٔ خط به‌صورت $ax + by + c = ۰$ (یا $ax + by = c$) باشد و $b \neq ۰$، آن‌گاه:

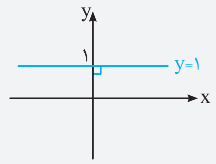
$$\text{شیب خط} = -\frac{x\ \text{ضریب}}{y\ \text{ضریب}} = -\frac{a}{b}$$

مثال شیب خط به معادلهٔ $۲x + ۳y = ۱$ برابر $-\frac{۲}{۳} = -\frac{x\ \text{ضریب}}{y\ \text{ضریب}}$ است.

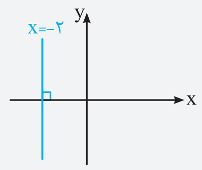
۲ اگر معادلهٔ خط به‌صورت $y = mx + h$ باشد، آن‌گاه شیب خط برابر m (ضریب x) است.

مثال شیب خط به معادلهٔ $y = -\frac{۱}{۲}x + ۳$ برابر $m = -\frac{۱}{۲}$ است.

! نکته **۱** اگر خط L موازی محور x ها باشد، در این صورت شیب خط برابر صفر است و اگر خط از نقطهٔ (a, b) بگذرد، معادلهٔ آن به‌صورت $y = b$ است. به عنوان مثال، خط $y = ۱$ موازی محور x ها است و شیب آن برابر صفر است.

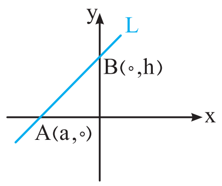


۲ اگر خط L موازی محور y ها باشد، در این صورت برای خط L شیب تعریف نمی‌شود و اگر خط از نقطهٔ (a, b) بگذرد، معادلهٔ آن به‌صورت $x = a$ است. به عنوان مثال، خط $x = -۲$ موازی محور y ها است و این خط شیب ندارد.



طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط راست

با توجه به شکل مقابل، خط L محور x ها را در نقطهٔ $A(a, ۰)$ قطع کرده است، a را طول از مبدأ خط L می‌گوییم. هم‌چنین خط L محور y ها را در نقطهٔ $B(۰, h)$ قطع کرده است، h را عرض از مبدأ خط L می‌گوییم.



! نکته معادلهٔ خط با شیب m و عرض از مبدأ h به‌صورت $y = mx + h$ می‌باشد.

حالا می‌خواهیم معادلهٔ خط را بنویسیم. در دو حالت می‌توانیم معادلهٔ خط را بنویسیم و باید در تمام مسائل نوشتن معادلهٔ خط، شرایط یکی از این دو حالت را در نظر بگیریم.

پ نوشتن معادلهٔ خط

حالت اول اگر شیب خط و نقطه‌ای از خط را داشته باشیم، می‌توانیم معادلهٔ آن را بنویسیم. هرگاه شیب خط m باشد و خط از نقطهٔ $A(x_۱, y_۱)$ بگذرد، آن‌گاه معادلهٔ خط از رابطهٔ مقابل به‌دست می‌آید:

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

سؤال **معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $A(-۱, ۳)$ بگذرد و شیب آن برابر ۴ باشد.**

پاسخ در رابطهٔ $y - y_۱ = m(x - x_۱)$، به جای $x_۱$ عدد -۱، به‌جای $y_۱$ عدد ۳ و به‌جای m، عدد ۴ قرار می‌دهیم. داریم:

$$y - ۳ = ۴(x + ۱) \Rightarrow y - ۳ = ۴x + ۴ \Rightarrow y = ۴x + ۴ + ۳ \Rightarrow y = ۴x + ۷$$

حالت دوم اگر مختصات دو نقطه از خط را داشته باشیم، می‌توانیم معادلهٔ آن را بنویسیم. هرگاه خطی از نقاط $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ بگذرد، آن‌گاه شیب خط از رابطهٔ $m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$ به‌دست می‌آید و با در نظرگرفتن یکی از نقاط A یا B روی خط، مانند حالت اول معادلهٔ خط را می‌نویسیم و یا می‌توان مستقیماً از رابطهٔ مقابل استفاده کرد:

$$y - y_۱ = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}(x - x_۱) \quad , \quad x_۲ \neq x_۱$$

سؤال **معادلهٔ خطی را بنویسید که از دو نقطهٔ $(۲,-۵)$ و $(-۲,۷)$ بگذرد.**

پاسخ
$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۷-(-۵)}{-۲-۲}=\frac{۱۲}{-۴}=-۳\ ,\ A(۲,-۵)\Rightarrow y-(-۵)=-۳(x-۲)\Rightarrow y+۵=-۳x+۶\Rightarrow y=-۳x+۱$$

نکته اگر $x_۲=x_۱$، آن‌گاه معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $(x_۱,y_۱)$ و $(x_۲,y_۲)$ به‌صورت $x=x_۱$ است و اگر $y_۱=y_۲$، آن‌گاه معادلهٔ خط به‌صورت $y=y_۱$ می‌باشد.

ت وضعیت نسبی دو خط در صفحه

دو خط در صفحه یا موازی‌اند و یا متقاطع.

حالت اول: دو خط موازی

اگر دو خط همدیگر را قطع نکنند و یا بر هم منطبق باشند، دو خط موازی‌اند.

نکته اگر دو خط با هم موازی باشند، آن‌گاه شیب آن‌ها با هم برابر است و برعکس.

سؤال **معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $(۳,-۴)$ بگذرد و موازی خط $۵x-۳y=۱$ باشد.**

پاسخ شیب خط $۵x-۳y=۱$ برابر $\frac{۵}{۳}=-\frac{۵}{-۳}=-\frac{x \text{ ضریب}}{y \text{ ضریب}}=m$ است. از آن جایی‌که شیب دو خط موازی با هم برابرند، پس باید معادلهٔ خطی را بنویسیم که از نقطهٔ $(۳,-۴)$ می‌گذرد و شیب آن برابر $\frac{۵}{۳}$ است:
$$y-(-۴)=\frac{۵}{۳}(x-۳)\xrightarrow{\times ۳}۳(y+۴)=۵(x-۳)\Rightarrow ۳y+۱۲=۵x-۱۵\Rightarrow ۳y-۵x+۲۷=۰$$

حالت دوم: دو خط متقاطع

اگر دو خط در صفحه موازی نباشند، دو خط متقاطع‌اند. در واقع اگر دو خط در صفحه همدیگر را در یک نقطه قطع کنند، آن‌گاه می‌گوییم دو خط متقاطع هستند و اگر $ax+by+c=۰$ و $a'x+b'y+c'=۰$ معادلهٔ دو خط در صفحه باشند، آن‌گاه با حل دستگاه دو معادله دو مجهولی $\begin{cases}ax+by+c=۰\\a'x+b'y+c'=۰\end{cases}$، محل تلاقی دو خط به‌دست می‌آید.

سؤال **معادلهٔ خطی را بنویسید که از محل تلاقی دو خط به معادلات $x+۲y=-۵$ و $۲x-y=۰$ و نقطهٔ $(۳,۵)$ می‌گذرد.**

پاسخ ابتدا محل تلاقی دو خط را با حل دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی $\begin{cases}x+۲y=-۵\\۲x-y=۰\end{cases}$ به‌دست می‌آوریم:
$$\begin{cases}x+۲y=-۵\\ ۲\times\ ۲x-y=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+۲y=-۵\\۴x-۲y=۰\end{cases}\Rightarrow ۵x=-۵\Rightarrow x=-۱\xrightarrow{۲x-y=۰}-۲-y=۰\Rightarrow y=-۲$$
بنابراین نقطهٔ $(-۱,-۲)$ محل تلاقی دو خط است. برای نوشتن معادلهٔ خط داریم:
$$\begin{cases}A(-۱,-۲)\\B(۳,۵)\end{cases}\Rightarrow m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۵+۲}{۳+۱}=\frac{۷}{۴}\Rightarrow y+۲=\frac{۷}{۴}(x+۱)\xrightarrow{\times ۴}۴(y+۲)=۷(x+۱)\Rightarrow ۴y-۷x+۱=۰$$

دو خط عمود بر هم

یکی از حالت‌های متقاطع بودن دو خط، عمود بودن آن است. با توجه به ویژگی مهم آن، سؤالات خوبی مطرح می‌شود.

نکته اگر m و m' شیب دو خط باشند و $mm'=-۱$، آن‌گاه دو خط بر هم عمودند. بنابراین شیب دو خط عمود بر هم، عکس و قرینهٔ هم می‌باشند.

سؤال **معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $(-۱,۴)$ بگذرد و بر خط به معادلهٔ $y=-۲x+۳$ عمود باشد.**

پاسخ شیب خط $y=-۲x+۳$ برابر $m=-۲$ است، پس شیب خط عمود بر این خط برابر $\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{-۲}=-\frac{۱}{m}=m'$ می‌باشد. معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(-۱,۴)$ بگذرد و شیب آن $\frac{۱}{۲}$ باشد، به‌صورت زیر است:
$$y-۴=\frac{۱}{۲}(x+۱)\xrightarrow{\times ۲}۲(y-۴)=(x+۱)\Rightarrow ۲y-۸=x+۱\Rightarrow ۲y-x-۹=۰$$

بسته ۱ پرسش‌های تشریحی — بخش اول هندسه تحلیلی (معادلهٔ خط)

● درجاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

۱. از هر دو نقطهٔ متمایز .... یک خط عبور می‌کند.

۲. اگر خط L، محور x ها را در نقطه‌ای با طول a قطع کند، آن‌گاه a، .... خط L نامیده می‌شود و اگر خط L، محور y ها را در نقطه‌ای با عرض b قطع کند، آن‌گاه b، .... خط L نامیده می‌شود.

۳. معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $(۷ , ۰)$ و شیب -۲ برابر .... است.

۴. دو خط موازی دارای .... برابر هستند.

● درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۵. شیب خط $۲x + ۵y = ۱۱$ برابر $-\frac{۲}{۵}$ است.

۶. شیب هر خط موازی با محور x ها برابر یک است.

۷. دو خط $x + ۲y = ۱$ و $y = ۲x + ۳$ بر هم عمود هستند. (شهریور ۱۴۰۲)

۸. نمودار هر یک از خط‌های زیر را رسم کنید. (مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۲ کتاب درسی)

آ) $y = -۲x + ۵$ ب) $۲x - y = ۱$ پ) $۳x + ۴y = ۱۲$ ت) $x = -۱$ ث) $y = ۴$

۹. در هر یک از قسمت‌های زیر، معادلهٔ خط را بنویسید.

آ) شیب خط -۴ و عرض از مبدأ آن برابر ۲ باشد. ب) شیب خط ۵ باشد و از نقطهٔ $(-۲ , -۳)$ بگذرد.

پ) خط از نقاط $(-۱,۲)$ و $(۱,۰)$ بگذرد.

ت) خط از نقطهٔ $(۳,۰)$ بگذرد و با خط $۵x + ۳y = ۲$ موازی باشد. (مشابه کار در کلاس ۶ صفحهٔ ۳ کتاب درسی)

ث) خط از نقطهٔ $(۴,۲)$ بگذرد و عمود بر خط به معادلهٔ $۳x + ۲y = ۴$ باشد.

ج) طول از مبدأ خط ۲ و عرض از مبدأ آن ۵ باشد.

۱۰. معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $(-۴,۱)$ و موازی خط گذرنده از دو نقطهٔ $(۵,۱)$ و $(-۴,۳)$ را بنویسید.

۱۱. معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $(۳,۲)$ و عمود بر خط گذرنده از دو نقطهٔ $(۲,۰)$ و $(-۱,۶)$ را بنویسید.

۱۲. معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $(۳,-۲)$ و نقطهٔ تلاقی دو خط به معادلات $۴x - y = ۱$ و $x + ۲y = ۷$ را بنویسید.

۱۳. وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید. (موازی، عمود یا متقاطع غیرعمود) (مشابه کار در کلاس ۱ صفحهٔ ۴ کتاب درسی)

$L_۱ : -۳x + ۵y = ۱$, $L_۲ : ۳x - y = ۱$, $L_۳ : ۵x + ۳y = ۷$, $L_۴ : ۶x = ۲y + ۵$

۱۴. دو خط به معادلات $۳x + (۲m + ۱)y = ۴$ و $mx + ۷y = ۱۱$ داده شده است. (مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۴ کتاب درسی)

آ) مقدار m را طوری به‌دست آورید که دو خط با هم موازی باشند.

ب) مقدار m را طوری به‌دست آورید که دو خط بر هم عمود باشند.

۱۵. مقدار m را طوری به‌دست آورید که دو خط به معادلات $۲x + (-m + ۴)y = ۳$ و $(۵ + ۳m)x + (m^۲ + ۴)y = ۷$ با هم موازی باشند.

۱۶. خط گذرنده از دو نقطهٔ $(m , ۲m)$ و $(۱,-۱)$ بر خط به معادلهٔ $۲x - ۵y = ۷$ عمود است. مقدار m را به‌دست آورید.

۱۷. مربع ABCD که $A(۴,۱)$ و $B(۶,۲)$ دو رأس مجاور آن هستند، مفروض است. (مشابه کار در کلاس ۳ صفحهٔ ۴ کتاب درسی)

آ) شیب ضلع AB را بیابید و معادلهٔ آن را بنویسید.

ب) شیب ضلع BC را به‌دست آورید و معادلهٔ آن را بنویسید.

پ) اگر $D(-۱,۱۱)$ یک رأس دیگر این مربع باشد، مختصات رأس C را مشخص کنید.

۱۸. مقدار a را طوری به‌دست آورید که نقاط $(۳,۱)$، $(۵,-۳)$ و $(a , ۲a - ۱)$ روی یک خط راست قرار داشته باشند.

۱۹. مقدار m را طوری به‌دست آورید که سه خط به معادله‌های $x + ۳y = -۱$ ، $۳x - ۲y = ۸$ و $(m + ۱)x + my = ۷$ از یک نقطه بگذرند.

۲۰. مربع ABCD که $A(-۳,-۱)$ و $B(۰,۲)$ دو رأس مجاور آن هستند، مفروض است.

آ) معادلهٔ ضلع AB را بنویسید.

ب) اگر $C(۳,a)$ و $D(۰,۲a - ۲)$ دو رأس دیگر مربع باشند، مختصات رأس‌های C و D را بیابید.

بسته دوم

بخش دوم هندسه تحلیلی

صفحه ۵ تا ۱۰ کتاب درسی

در این بسته، مسائلی چون فاصلهٔ دو نقطه، مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط، قرینهٔ نقطه نسبت به نقطهٔ دیگر، معادلهٔ عمود منصف و فاصلهٔ نقطه از خط را مطرح و به آن‌ها پاسخ می‌دهیم.

الف فاصلهٔ دو نقطه

۱ اگر A و B دو نقطهٔ هم‌عرض در صفحه باشند، آن‌گاه:

$$AB = |x_B - x_A|$$

۲ اگر C و D دو نقطهٔ هم‌طول باشند، آن‌گاه:

$$CD = |y_D - y_C|$$

مثال فاصلهٔ بین دو نقطهٔ هم‌طول $A(۵,-۲)$ و $B(۵,۷)$ برابر است با:

$AB = |$ اختلاف بین عرض‌ها $| = |۷-(-۲)| = ۹$

۳ فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$$

سؤال ۱ فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $(۳,۲)$ و $(-۱,۰)$ را به‌دست آورید.

۲ اگر نقاط $A(-۱,۴)$ و $B(۳,۳)$ دو رأس مجاور یک مربع باشند، محیط و مساحت مربع را به‌دست آورید.

پاسخ ۱ با فرض $A(\underset{x_۱}{۳}, \underset{y_۱}{۲})$ و $B(\underset{x_۲}{-۱}, \underset{y_۲}{۰})$، داریم:

$$AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲} = \sqrt{(-۱-۳)^۲ + (۰-۲)^۲} = \sqrt{۱۶+۴} = \sqrt{۲۰} = \sqrt{۴\times۵} = ۲\sqrt{۵}$$

۲ فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B، طول ضلع مربع می‌باشد:

$$a = BA = \sqrt{(-۱-۳)^۲ + (۴-۳)^۲} = \sqrt{۱۶+۱} = \sqrt{۱۷}$$

محیط مربع $= ۴a = ۴\sqrt{۱۷}$ و مساحت مربع $= a^۲ = ۱۷$

نکته فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۱, y_۱)$ تا مبدأ مختصات برابر $OA = \sqrt{x_۱^۲ + y_۱^۲}$ است. به عنوان مثال، فاصلهٔ نقطهٔ $(۶,۸)$ تا مبدأ مختصات برابر $\sqrt{۶^۲ + ۸^۲} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$ می‌باشد.

دایره: مجموعه‌ای از نقاط در صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از نقطه‌ای ثابت در همان صفحه به نام مرکز، مقداری ثابت است. این مقدار ثابت را شعاع دایره می‌گوییم و با R نشان می‌دهیم.

- اگر مختصات نقطه‌ای روی دایره و مرکز دایره داده شده باشد، فاصلهٔ بین این دو نقطه برابر اندازهٔ شعاع دایره است.

سؤال دایره‌ای به مرکز $(۳,-۱)$ از نقطهٔ $(۵,۲)$ گذشته است. شعاع این دایره را به‌دست آورید. آیا نقطهٔ $(۶,۲)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

پاسخ فاصلهٔ هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر اندازهٔ شعاع دایره است. پس فاصلهٔ نقطهٔ $A(۵,۲)$ روی دایره از نقطهٔ $O'(۳,-۱)$ (مرکز دایره) برابر R است:

$$R = O'A = \sqrt{(۵-۳)^۲ + (۲+۱)^۲} = \sqrt{۴+۹} = \sqrt{۱۳}$$

اگر فاصلهٔ نقطهٔ $B(۶,۲)$ از نقطهٔ $O'(۳,-۱)$ برابر $R = \sqrt{۱۳}$ شود، آن‌گاه نقطهٔ B روی این دایره قرار دارد:

$O'B = \sqrt{(۶-۳)^۲ + (۲+۱)^۲} = \sqrt{۹+۹} = \sqrt{۱۸} \neq \sqrt{۱۳} \Rightarrow$ نقطهٔ B روی این دایره قرار ندارد.

ب مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط

اگر بخواهیم مختصات وسط دو نقطه و یا یک پاره‌خط را وقتی‌که مختصات آن‌ها را در اختیار داریم، به‌دست بیاوریم، از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم.

۱ اگر A و B دو نقطهٔ دلخواه روی محور x ها و M وسط AB باشد، آن‌گاه:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲}$$

۲ اگر C و D دو نقطهٔ دلخواه روی محور y ها و N وسط CD باشد، آن‌گاه:

$$y_N = \frac{y_C + y_D}{۲}$$

۳ فرض کنیم A و B دو نقطهٔ دلخواه در صفحهٔ مختصات و M وسط AB باشد. در این صورت:

$$M = \left(\frac{\text{مجموع طول‌های A و B}}{۲}, \frac{\text{مجموع عرض‌های A و B}}{۲}\right) = \left(\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲}\right)$$

سؤال نقاط $A(۵,-۱)$، $B(-۱,۳)$ و $C(۳,۵)$ رأس‌های مثلث ABC هستند.

۱ مختصات M، نقطهٔ وسط ضلع AB را مشخص کنید.

۲ طول میانهٔ CM را به‌دست آورید.

۳ معادلهٔ میانهٔ CM را بنویسید.

پاسخ **۱** M وسط پاره‌خط AB است، بنابراین:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲}\right) = \left(\frac{۵-۱}{۲}, \frac{-۱+۳}{۲}\right) = (۲,۱)$$

۲ طول پاره‌خط CM را با داشتن مختصات دو نقطهٔ C و M به‌دست می‌آوریم:

$$C(۳,۵), M(۲,۱) \Rightarrow CM = \sqrt{(۲-۳)^۲ + (۱-۵)^۲} = \sqrt{۱+۱۶} = \sqrt{۱۷}$$

۳ معادلهٔ خط گذرنده از نقاط C و M، معادلهٔ میانهٔ CM است:

$$m_{CM} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۱-۵}{۲-۳} = \frac{-۴}{-۱} = ۴ \,,\; C(۳,۵)$$

$$\text{معادلهٔ CM}: \; y - ۵ = ۴(x-۳) \Rightarrow y - ۵ = ۴x - ۱۲ \Rightarrow y - ۴x + ۷ = ۰$$

پ قرینهٔ یک نقطه نسبت به نقطهٔ دیگر

اگر نقطهٔ A را به نقطهٔ M وصل کنیم و به همان اندازه امتداد دهیم تا به نقطهٔ A′ برسیم، آن‌گاه A′ قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ M است.

! نکته **۱** اگر A′ قرینهٔ نقطهٔ $A(x_A, y_A)$ نسبت به نقطهٔ $M(x_M, y_M)$ باشد، آن‌گاه M وسط پاره‌خط AA′ است و مختصات نقطهٔ A′ از فرمول مقابل به‌دست می‌آید:

$$A'(۲x_M - x_A, ۲y_M - y_A)$$

مثال قرینهٔ نقطهٔ $A(۳,-۱)$ نسبت به نقطهٔ $M(۲,۴)$، نقطهٔ A′ است که در آن:

$$A'(۲x_M - x_A, ۲y_M - y_A) = (۲\times۲-۳, ۲\times۴-(-۱)) = (۱,۹)$$

۲ قرینهٔ نقطهٔ $P(\alpha,\beta)$ نسبت به مبدأ مختصات، نقطهٔ $P'(-\alpha,-\beta)$ است.

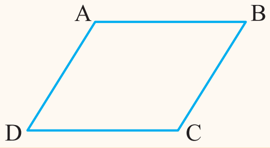
یکی از مسائلی که در تمرینات کتاب مطرح شده است این است که مختصات سه رأس یک مستطیل داده شده است و می‌خواهیم مختصات رأس چهارم را به‌دست بیاوریم. برای این کار از نکتهٔ بعدی که برای متوازی‌الاضلاع گفته می‌شود، استفاده می‌کنیم.

! نکته اگر چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

سؤال اگر $A(۲,۱)$ ، $B(۳,۴)$ و $C(-۱,۵)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ با قطر AC باشد، مختصات رأس D را به‌دست آورید.

پاسخ مطابق شکل روبه‌رو، داریم:



$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲ - ۱ = ۳ + x_D \\ ۱ + ۵ = ۴ + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = -۲ \\ y_D = ۲ \end{cases} \Rightarrow D(-۲,۲)$$

تذکر مربع، مستطیل و لوزی حالت خاصی از متوازی‌الاضلاع هستند، بنابراین نکتهٔ قبل برای آن‌ها نیز صادق است.

ت عمود منصف یک پاره خط

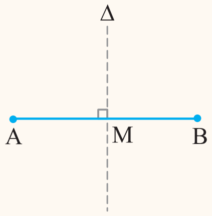
عمودمنصف: عمودمنصف پاره‌خط AB ، خطی است که از وسط پاره‌خط AB می‌گذرد و بر پاره‌خط AB عمود است.

نوشتن معادلهٔ عمودمنصف یک پاره خط

برای نوشتن معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB ، ابتدا مختصات نقطهٔ M وسط AB را مشخص می‌کنیم و سپس شیب آن را که قرینه و عکس شیب خط گذرنده از نقاط A و B است، به‌دست می‌آوریم.

سؤال دو نقطهٔ $A(۳,۶)$ و $B(۱,۲)$ مفروضند. معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB را بنویسید.

پاسخ عمودمنصف پاره‌خط AB از وسط آن می‌گذرد و بر آن عمود است:



$$M = \frac{A+B}{۲} = \left(\frac{۳+۱}{۲}, \frac{۶+۲}{۲}\right) = (۲,۴)$$

شیب خط Δ ، عکس و قرینهٔ شیب خط AB است:

$$m_{AB} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۲-۶}{۱-۳} = ۲ \Rightarrow m_\Delta = \frac{-۱}{m_{AB}} = -\frac{۱}{۲}$$

معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $(۲,۴)$ با شیب $-\frac{۱}{۲}$ برابر است با:

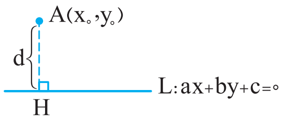
$$y - ۴ = -\frac{۱}{۲}(x - ۲) \xrightarrow{\times ۲} ۲y - ۸ = -x + ۲ \Rightarrow ۲y + x = ۱۰$$

! نکته یکی از ویژگی‌های مهم عمود منصف آن است که فاصلهٔ هر نقطه روی آن از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

یکی از فرمول‌های خیلی مهم که باید آن را حفظ کنیم، فاصلهٔ نقطه از خط است. از این فرمول علاوه بر به‌دست آوردن فاصلهٔ نقطه از خط، برای به‌دست آوردن فاصلهٔ بین دو خط موازی و طول ارتفاع در مثلث استفاده می‌کنیم.

ث فاصلهٔ نقطه از خط

- اگر A نقطه‌ای خارج از خط L باشد، فاصلهٔ A تا L برابر است با طول پاره‌خطی که از عمود A بر L رسم می‌شود، یعنی کوتاه‌ترین مسیر از A به L؛ از فرمول زیر برای محاسبهٔ فاصلهٔ نقطهٔ از خط راست استفاده می‌کنیم:
- اگر مختصات نقطهٔ A به‌صورت $(x_۰, y_۰)$ و معادلهٔ خط L به‌صورت $ax + by + c = ۰$ باشد، آن‌گاه:



$$d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

- برای استفاده از فرمول بالا، باید مراحل زیر را انجام دهیم:

۱ همهٔ اجزای معادلهٔ خط در یک طرف تساوی باشند.

۲ در معادلهٔ خط به جای x ، طول نقطه $(x_۰)$ و به جای y ، عرض نقطه $(y_۰)$ را قرار می‌دهیم و مساوی صفر را حذف می‌کنیم و حاصل مثبت را در صورت کسر قرار می‌دهیم.

۳ ضرایب x (یعنی a) و y (یعنی b) را به توان ۲ می‌رسانیم و جذر آن را به‌دست می‌آوریم و حاصل را در مخرج کسر قرار می‌دهیم.

۴ نسبت عدد قسمت (۲) به قسمت (۳) فاصلهٔ بین نقطه و خط می‌باشد.

سؤال ❶ فاصلهٔ نقطهٔ $A(۳,۲)$ از خط به معادلهٔ $۴x+۳y+۱=۰$ را به‌دست آورید. **مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۹ کتاب درسی**

❷ خط $۵x-۱۲y+۴=۰$ بر دایره‌ای به مرکز $W(۲,-۱)$ مماس است. اندازهٔ شعاع دایره را بیابید.

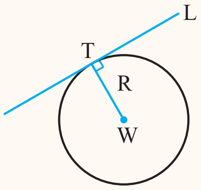
پاسخ ❶

در معادله به جای x، ۳ و به جای y، ۲ قرار می‌دهیم.

$$d=\frac{|۴(۳)+۳(۲)+۱|}{\sqrt{\underset{\text{ضریب } x}{۴}^۲+\underset{\text{ضریب } y}{۳}^۲}}=\frac{۱۹}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۱۹}{۵}$$

❷ اگر از مرکز دایره، خطی بر خط مماس رسم کنیم، در نقطهٔ تماس، خط رسم شده بر خط مماس بر دایره عمود است.
پس فاصلهٔ W تا خط، برابر اندازهٔ شعاع دایره است.

$$R=\frac{|۵(۲)-۱۲(-۱)+۴|}{\sqrt{۵^۲+(-۱۲)^۲}}=\frac{|۱۰+۱۲+۴|}{\sqrt{۲۵+۱۴۴}}=\frac{۲۶}{\sqrt{۱۶۹}}=\frac{۲۶}{۱۳}=۲$$



! نکته ❶ فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

❷ فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از خط $x=a$ برابر $d=|x_۰-a|$ و از خط $y=b$ برابر $d=|y_۰-b|$ است.

مثال فاصلهٔ نقطهٔ $A(۳,۴)$ از خط $x=۲$ برابر $d=|۳-۲|=۱$ و از خط $y=-۵$ برابر $d=|۴-(-۵)|=۹$ می‌باشد.

فاصلهٔ بین دو خط موازی

برای به‌دست آوردن فاصلهٔ بین دو خط موازی، یک نقطهٔ دلخواه روی یکی از خطوط در نظر بگیرید و فاصلهٔ آن را از خط دیگر به‌دست آورید.

سؤال فاصلهٔ بین دو خط موازی به معادلات $x+y-۳=۰$ و $x+y=۵$ را به‌دست آورید.

پاسخ نقطهٔ دلخواه روی خط $x+y-۳=۰$ مشخص می‌کنیم:

$$x=۰\Rightarrow y-۳=۰\Rightarrow y=۳\Rightarrow A(۰,۳)$$

فاصلهٔ نقطهٔ $A(۰,۳)$ تا خط به معادلهٔ $x+y-۵=۰$، فاصلهٔ بین دو خط موازی می‌باشد:

$$d=\frac{|۰+۳-۵|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}$$

! نکته برای به‌دست آوردن فاصلهٔ بین دو خط موازی، ابتدا ضرایب دو خط را یکسان می‌کنیم و داریم:

$$\begin{matrix}ax+by+c=۰\\ a'x+b'y+c'=۰\end{matrix}\xrightarrow[\text{دو خط موازی هستند.}]{a=a',\ b=b'}d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

بستهٔ ۲ پرسش‌های تشریحی — بخش دوم هندسه تحلیلی

● **جاهای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.**

۲۱. **قرینهٔ نقطهٔ $C(۱,۲)$ نسبت به نقطهٔ $M(-۱,۴)$ برابر .... است.** (شبه‌نهایی)

۲۲. **فاصله نقطه $(-۱,۲)$ از خط $۳x-۴y+۶=۰$ برابر .... است.**

۲۳. **اگر $A(۳,-۲)$ و $B(-۱,۶)$ دو نقطه باشند.** (مشابه تمرین ۲ کتاب درسی صفحهٔ ۹)

آ) طول پاره‌خط AB را به‌دست آورید.

ب) فاصلهٔ مبدأ مختصات را از وسط AB به‌دست آورید.

۲۴. **نقاط $A(-۴,۴)$، $B(۰,۴)$ و $C(-۲,۲)$ را در نظر بگیرید.** (مشابه کار در کلاس ۱ صفحهٔ ۶ کتاب درسی و تمرین ۳ صفحهٔ ۹)

آ) مثلث ABC را رسم کنید.

ب) نشان دهید مثلث ABC مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است.

پ) مساحت مثلث را به‌دست آورید.

۲۵. نوع مثلث با رأس $(۲,۰)$ ، $(-۱,۴)$ و $(۶,-۳)$ را مشخص کنید.

۲۶. اگر نقاط $A(۲,۴)$ و $B(۵,۸)$ دو رأس مجاور یک مربع باشند، محیط و مساحت مربع را به‌دست آورید.

۲۷. شخصی برای انجام یک عملیات بانکی نیاز به یک عابربانک دارد. اگر موقعیت این شخص نقطهٔ $(۴,-۲)$ باشد و سه عابربانک با موقعیت‌های $(۲,۵)$ ، $(۱,۴)$ و $(-۳,۳)$ وجود داشته باشد، این شخص برای رسیدن هرچه سریع‌تر به عابربانک، کدام‌یک را باید انتخاب کند؟ (مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۶ کتاب درسی)

۲۸. دایره‌ای به مرکز $(-۱,۲)$ ، از نقطهٔ $(۴,۲)$ گذشته است. شعاع دایره را محاسبه کنید. کدام‌یک از نقاط $(۳,-۵)$ و $(-۱,۴)$ روی این دایره قرار دارند؟ چرا؟

۲۹. اگر $A(۲,۴)$ و $B(۴,-۲)$ دو سر قطر یک دایره باشند، مختصات مرکز دایره را بیابید. (خرداد ۱۴۰۲)

۳۰. $A(۲,-۲)$ و $B(۴,۴)$ دو انتهای یک قطر دایره‌ای هستند.

آ) اندازهٔ شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید. (خرداد ۱۴۰۲)

ب) آیا نقطهٔ $(۰,۲)$ روی این دایره قرار دارد؟ چرا؟

۳۱. مثلث با رأس‌های $A(-۲,۴)$ ، $B(۳,-۲)$ و $C(۵,۴)$ را در نظر بگیرید. (مشابه کار در کلاس ۱ صفحهٔ ۷ کتاب درسی)

آ) مختصات M ، نقطهٔ وسط ضلع BC را مشخص کنید.

ب) طول میانهٔ AM را به‌دست آورید.

پ) معادلهٔ میانهٔ AM را بنویسید.

۳۲. با توجه به مختصات نقاط داده‌شده، به سؤالات زیر پاسخ دهید. (مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۷ کتاب درسی)

آ) نقطهٔ $M(۵,-۱)$ وسط پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ $A(۳,۲)$ و B است. مختصات نقطهٔ B را بیابید.

ب) قرینهٔ نقطهٔ $A(-۳,۴)$ را نسبت به نقطهٔ $M(-۱,۲)$ به‌دست آورید.

پ) قرینهٔ نقطهٔ B را نسبت به نقطهٔ $(۳,۰)$ مشخص کنید.

ت) قرینهٔ نقطهٔ $(-۳,۵)$ را نسبت به مبدأ مختصات به‌دست آورید.

۳۳. نقاط $A(-۲,-۱)$ ، $B(۲,۱)$ و $C(-۳,۱)$ سه رأس از یک مستطیل هستند. (مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۹ کتاب درسی)

آ) مختصات رأس چهارم آن را مشخص کنید.

ب) مساحت مستطیل را به‌دست آورید.

۳۴. دو نقطهٔ $A(۳,-۴)$ و $B(-۱,۰)$ مفروض‌اند. معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB را بنویسید.

۳۵. نقاط $(۲,۰)$ و $(۴,۲)$ دو رأس مقابل یک مربع هستند. معادلهٔ قطرهای این مربع را بنویسید.

۳۶. نقاط $A(۳,۱)$ ، $B(-۱,۳)$ ، $C(-۴,-۱)$ و $D(۴,-۱)$ مفروض‌اند. نقطه‌ای مشخص کنید که فاصلهٔ آن از هر چهار نقطه به یک اندازه باشد. (مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۹ کتاب درسی)

۳۷. فاصلهٔ نقطهٔ $(-۶,۴)$ را از دو خط به معادلات $x=-۲$ و $y=۵$ به‌دست آورید. (مشابه کار در کلاس ۹ صفحهٔ ۹ کتاب درسی)

۳۸. در هر قسمت مختصات یک نقطه و معادلهٔ یک خط داده شده است. فاصلهٔ نقطه تا خط را به‌دست آورید. (مشابه کار در کلاس ۹ صفحهٔ ۹ کتاب درسی)

آ) $۳x+۴y+۱=۰ \ , \ (۲,-۱)$

ب) $۲x=y-۴ \ , \ (-۴,۵)$

۳۹. یکی از اضلاع مربع بر خط به معادلهٔ $y=۲x-۱$ واقع است. اگر نقطهٔ $A(۳,۰)$ یکی از رأس‌های این مربع باشد، مساحت مربع را به‌دست آورید. (شهریور ۱۴۰۲)

۴۰. نقطهٔ $A(۳,۰)$ یکی از رئوس مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط $L: y-x=۵$ می‌باشد. مساحت این مربع را به‌دست آورید. (خرداد ۱۴۰۲)

۴۱. اگر خط $۴x+۳y=-۱۰$ بر دایره به مرکز $(۱,۲)$ مماس باشد، اندازهٔ شعاع دایره را بیابید. (شهریور ۱۴۰۲)

۴۲. خط $۴x-۳y=۰$ بر دایره‌ای به مرکز $(۳,-۱)$ مماس است. مساحت دایره را محاسبه کنید. (خرداد ۱۴۰۳)

۴۳. فاصلهٔ نقطهٔ $A(-۲,۲)$ از خط $۳x+۴y-۶=۰$ کدام است؟ (خرداد ۱۴۰۲)

۱) $-\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۸}{۵}$ ۴) $\frac{۶}{۵}$

۴۴. در هر یک از قسمت‌های زیر، ابتدا نشان دهید دو خط داده‌شده با هم موازیند و سپس فاصلهٔ بین آن‌ها را به‌دست آورید. (مشابه تمرین ۸ صفحهٔ ۹ کتاب درسی)

آ) $۴x-۲y=۵ \ , \ ۲x-y=۱۱$

ب) $۲x+۲y=۷ \ , \ x=-y+۴$

۴۵. مثلث ABC را با رأس‌های $A(۲,۰)$ ، $B(-۱,۴)$ و $C(-۲,۱)$ در نظر بگیرید.

آ) طول ارتفاع AH را به‌دست آورید.

ب) مساحت مثلث ABC را به‌دست آورید.

۴۶. اگر مسافت فیزیکی هر درجه طول و عرض جغرافیایی ۱۱۰ کیلومتر و طول و عرض جغرافیایی شهر A به ترتیب ۴۵° و ۳۷° و طول و عرض جغرافیایی شهر B به ترتیب ۳۷° و ۳۱° باشد، فاصلهٔ بین دو شهر A و B چند کیلومتر است؟ (مشابه تمرین ۹ صفحه ۱۰ کتاب درسی)

۴۷. فاصلهٔ نقطهٔ $(۳,۴)$ از خط $x+۳y=a$ برابر $\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$ است. مقدار a را به‌دست آورید.

۴۸. مثلث ABC با سه رأس $A(۱,۴)$، $B(-۲,-۲)$ و $C(۴,۲)$ مفروض است.

آ) معادلهٔ میانهٔ وارد بر ضلع BC را به‌دست آورید.
ب) طول میانهٔ AM را به‌دست آورید.
پ) معادلهٔ ارتفاع BH را محاسبه کنید.
ت) نقطهٔ تلاقی میانهٔ AM و ارتفاع BH را به‌دست آورید.
ث) مساحت مثلث ABC را به‌دست آورید.

بسته سوم
معادلهٔ درجه دوم
صفحه ۱۱ تا ۱۳ کتاب درسی

با حل معادلهٔ درجهٔ دوم در سال گذشته آشنا شده‌ایم. در این قسمت برای یادآوری هر ۴ روشی را که برای حل معادله استفاده می‌شود بیان می‌کنیم. این بسته شامل روش تغییر متغیر برای حل معادله، روابط بین ریشه‌ها و تشکیل معادلهٔ درجهٔ دوم می‌باشد.

معادلهٔ درجه دوم

هر معادله به شکل $ax^۲+bx+c=۰$ را که در آن a، b و c اعداد حقیقی و $a\neq ۰$ باشد، یک معادلهٔ درجه دوم می‌نامیم.

روش‌های حل معادلهٔ درجه دوم

۱. روش تجزیه

ویژگی حاصل‌ضرب صفر: اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $AB=۰$، آن‌گاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است. به عبارت دیگر:

$AB=۰ \Rightarrow A=۰$ یا $B=۰$

در حل معادلهٔ درجه دوم به روش تجزیه، ابتدا معادلهٔ درجه دوم را به حاصل‌ضرب دو عبارت جبری تجزیه کرده و سپس از ویژگی فوق استفاده می‌کنیم.

سؤال معادلهٔ $x^۲+۵x+۶=۰$ را به روش تجزیه حل کنید.

پاسخ عبارت درجهٔ دوم $x^۲+۵x+۶$ را به کمک اتحاد جملهٔ مشترک تجزیه می‌کنیم. باید دو عدد مشخص کنیم که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۶ و حاصل‌جمع آن‌ها برابر ۵ باشد. این دو عدد، ۲ و ۳ هستند. بنابراین:

$$x^۲+۵x+۶=(x+۲)(x+۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x+۲=۰ \\ x+۳=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-۲ \\ x=-۳ \end{cases}$$

۲. روش ریشه‌گیری

ابتدا نکتهٔ زیر را که به قاعدهٔ ریشه‌گیری معروف بوده و در حل معادلهٔ درجه دوم به کار می‌رود، بیان می‌کنیم:

نکته فرض کنید a یک عدد حقیقی و $a\geq ۰$ باشد، در این صورت:

$$x^۲=a \Rightarrow x=\pm\sqrt{a}$$

اگر در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$، $b=۰$ و اعداد a و c مختلف‌العلامه باشند، برای یافتن ریشه‌های این معادله، می‌توان از این روش استفاده کرد. در واقع داریم:

$$ax^۲+c=۰ \Rightarrow ax^۲=-c \Rightarrow x^۲=-\frac{c}{a} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

توجه کنید که چون طبق فرض a و c مختلف‌العلامه هستند، پس $-\frac{c}{a}$ مثبت بوده و در نتیجه معادله دارای دو جواب قرینه می‌باشد. بدیهی است که اگر a و c هم‌علامت باشند، معادله در این حالت ریشه نخواهد داشت.

سؤال معادلهٔ $(۲x-۱)^۲=۲۵$ را به روش ریشه‌گیری حل کنید.

پاسخ

$$(۲x-۱)^۲=۲۵ \xrightarrow{\text{روش ریشه‌گیری}} ۲x-۱=\pm\sqrt{۲۵}=\pm۵$$

هریک از معادله‌های $۲x-۱=۵$ و $۲x-۱=-۵$ را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۲x-۱=۵ \\ ۲x-۱=-۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x=۵+۱ \\ ۲x=-۵+۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x=۶ \\ ۲x=-۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ x=-۲ \end{cases}$$

۳. روش مربع کامل

مراحل حل یک معادلهٔ درجه دوم به روش مربع کامل، به‌صورت زیر است:

۱ جملات شامل مجهول x را در یک طرف نگه داشته و عدد ثابت را به طرف دیگر منتقل می‌کنیم.

۲ اگر ضریب x^2 عددی غیر از یک باشد، طرفین معادله را بر این ضریب تقسیم می‌کنیم تا ضریب x^2 برابر یک شود.

۳ به طرفین معادله، مربع نصف ضریب x را اضافه می‌کنیم تا یک طرف معادله به مربع کامل تبدیل شود.

۴ اگر دو طرف معادله مثبت باشد، به روش ریشه‌گیری ریشه‌های معادله را به‌دست می‌آوریم.

سؤال **معادلهٔ $x^2+4x=0$ را به روش مربع کامل حل کنید.**

پاسخ به دو طرف معادله عدد ۴ را اضافه می‌کنیم ($\text{ضریب } x = 4 \xrightarrow{\div 2} 2 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 2^2 = 4$):

$$x^2+4x+4=4 \Rightarrow (x+2)^2=4 \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} x+2=\pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x+2=2 \\ x+2=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-4 \end{cases}$$

نکته در حل معادلات درجه دوم به روش مربع کامل، عبارت x^2+Ax را می‌توان با استفاده از فرمول $x^2+Ax=\left(x+\frac{A}{2}\right)^2-\left(\frac{A}{2}\right)^2$ به مربع کامل تبدیل کرد.

۴. روش فرمول کلی (مبین یا دلتا)

در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، به عبارت b^2-4ac که وجود ریشه‌های معادله به علامت آن بستگی دارد، **مبین یا دلتای** معادله می‌گوییم و آن را با حرف Δ نمایش می‌دهیم. در این صورت با توجه به علامت Δ، داریم:

آ) اگر $\Delta=b^2-4ac<0$ باشد، معادله **ریشهٔ حقیقی ندارد.**

ب) اگر $\Delta=b^2-4ac=0$ باشد، معادله دارای یک ریشه است که به آن **ریشهٔ مضاعف** یا مکرر مرتبهٔ دوم می‌گوییم و ریشهٔ مضاعف معادله برابر است با:

$$x=-\frac{b}{2a}$$

پ) اگر $\Delta=b^2-4ac>0$ باشد، معادله دارای **دو ریشهٔ حقیقی متمایز** است که از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \beta=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

سؤال **ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-5x+1=0$ را با فرمول کلی به‌دست آورید.**

پاسخ در معادلهٔ داده‌شده، $a=2$، $b=-5$ و $c=1$ می‌باشد. مقدار Δ را از فرمول $\Delta=b^2-4ac$ به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4(1)(2)=25-8=17 \Rightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-5)+\sqrt{17}}{2(2)}=\dfrac{5+\sqrt{17}}{4} \\ \beta=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-5)-\sqrt{17}}{2(2)}=\dfrac{5-\sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

روش تغییر متغیر برای حل معادله

گاهی اوقات با معادلاتی مواجه می‌شویم که درجه دوم نیستند، ولی با یک تغییر متغیر می‌توان آن‌ها را به معادلهٔ درجه دوم تبدیل کرد.

سؤال **معادلهٔ $x^4-5x^2+4=0$ را حل کنید.**

پاسخ اگر x^2 را برابر A در نظر بگیریم، آن‌گاه معادلهٔ اصلی به یک معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل می‌شود:

$$x^4-5x^2+4=0 \Rightarrow (x^2)^2-5(x^2)+4=0 \xrightarrow{x^2=A} A^2-5A+4=0$$

$$\Rightarrow (A-1)(A-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} A-1=0 \Rightarrow A=1 \\ A-4=0 \Rightarrow A=4 \end{cases}$$

به‌جای A، x^2 قرار می‌دهیم و سپس مقادیر x را به روش ریشه‌گیری به‌دست می‌آوریم:

$$A=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1, A=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

گاهی اوقات به‌دست آوردن مقدار دقیق ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم، اهمیتی ندارد و فقط مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها اهمیت دارد.

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^{۲}+bx+c=۰\ (a\neq ۰)$ باشند، آن‌گاه:

(مجموع دو ریشه) $S=\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$

(حاصل‌ضرب دو ریشه) $P=\alpha\times\beta=\dfrac{c}{a}$

سؤال

۱ بدون حل معادلهٔ $۳x^{۲}-۹x+۲=۰$، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله را به‌دست آورید.

۲ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}-۷x+۱=۰$ باشند، حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

آ) $\dfrac{۱}{\alpha}+\dfrac{۱}{\beta}$

ب) $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$

پاسخ ۱ در معادلهٔ داده شده، $a=۳$، $b=-۹$ و $c=۲$ است. جمع ریشه‌ها برابر $-\dfrac{b}{a}$ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\dfrac{c}{a}$ است.

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-۹}{۳}=\frac{۹}{۳}=۳\ ,\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{۲}{۳}$$

۲ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}-۷x+۱=۰$ را به‌دست می‌آوریم:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-۷}{۱}=۷\ \ ,\ \ P=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۱}=۱$$

آ)

$$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}=\frac{۷}{۱}=۷$$

ب) عبارت $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ را برابر A در نظر می‌گیریم و حاصل $A^{۲}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}}A^{۲}=(\sqrt{\alpha})^{۲}+۲\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+(\sqrt{\beta})^{۲}=\alpha+۲\sqrt{\alpha\beta}+\beta$$

$$=\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}=S+۲\sqrt{P}=۷+۲\sqrt{۱}=۷+۲=۹\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}}A=\pm ۳$$

چون A عددی مثبت است، پس داریم:

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=۳$$

در بعضی ازمسائل می‌خواهیم دو عددی را مشخص کنیم که مجموع و حاصل‌ضرب آن‌ها را می‌دانیم. برای این کار باید معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهیم. با حل معادله، ریشه‌های به‌دست آمده همان دو عدد موردنظر هستند.

نوشتن معادلهٔ درجه دوم با داشتن S و P

اگر α و β ریشه‌های یک معادلهٔ درجه دوم باشند، آن‌گاه برای نوشتن معادله، ابتدا S (مجموع ریشه‌ها) و P (حاصل‌ضرب ریشه‌ها) را به‌دست می‌آوریم و سپس معادلهٔ مقابل را تشکیل می‌دهیم:

$$x^{۲}-Sx+P=۰$$

سؤال **معادلهٔ درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $۳+\sqrt{۵}$ و $۳-\sqrt{۵}$ باشند.**

پاسخ با فرض $\alpha=۳+\sqrt{۵}$ و $\beta=۳-\sqrt{۵}$، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$S=\alpha+\beta=(۳+\sqrt{۵})+(۳-\sqrt{۵})=۶\ ,\ P=\alpha\beta=(۳+\sqrt{۵})(۳-\sqrt{۵})=۳^{۲}-(\sqrt{۵})^{۲}=۹-۵=۴$$

معادله: $x^{۲}-Sx+P=۰\Rightarrow x^{۲}-۶x+۴=۰$

بسته ۳ **پرسش‌های تشریحی** معادلهٔ درجه دوم

● **درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.**

۴۹. معادلهٔ $x^{4}-3x^{2}+1=0$ دارای دو جواب حقیقی است. (خرداد ۱۴۰۳)

۵۰. در معادلهٔ $3x^{2}-11x+6=0$، اختلاف بین مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{5}{3}$ است.

۵۱. **معادله‌های درجه دوم زیر را از روش خواسته‌شده حل کنید.**

آ) $3x^{2}+5x-2=0$ (روش کلی)
ب) $-2x^{2}+7x+1=0$ (روش کلی)
پ) $x^{2}+6x=0$ (مربع کامل)
ت) $(3x-1)^{2}=16$ (روش ریشه‌گیری)
ث) $x^{2}-4x+3=0$ (تجزیه)
ج) $x^{2}-5x+6=0$ (تجزیه)

۵۲. **هریک از معادلات زیر را حل کنید.** (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی)

آ) $5x^{4}-x^{2}-4=0$
ب) $4x^{4}-7x^{2}-2=0$
پ) $-2x^{6}+11x^{3}+40=0$

۵۳. بدون حل معادله، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $5x^{2}-11x+1=0$ را به‌دست آورید.

۵۴. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^{2}-8x+4=0$ باشند، بدون حل معادله، حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

آ) $\alpha+\beta$
ب) $\alpha\beta$
پ) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$
ت) $\alpha^{2}+\beta^{2}$

۵۵. در معادلهٔ درجه دوم $x^{2}+(m+3)x-7+m=0$، مقدار m را طوری به‌دست آورید که:

آ) مجموع ریشه‌ها برابر ۴ شود.
ب) حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $-\frac{3}{2}$ شود.

۵۶. در معادلهٔ $2x^{2}-(2m+1)x+m=0$، مقدار m را طوری به‌دست آورید که:

آ) یکی از ریشه‌ها، قرینهٔ ریشهٔ دیگر باشد.
ب) یکی از ریشه‌ها، عکس ریشهٔ دیگر باشد.
پ) یکی از ریشه‌ها، یک واحد بیش‌تر از دو برابر ریشهٔ دیگر باشد.

۵۷. در معادلهٔ درجه دوم $ax^{2}+bx+c=0$، اگر یکی از ریشه‌های این معادله برابر ۲ و $c=2b$ باشد، در این صورت ریشه دیگر این معادله را به‌دست آورید. (شبه‌نهایی)

۵۸. **معادلهٔ درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن به‌صورت زیر باشند.** (مشابه کاردرکلاس ۳ صفحهٔ ۱۳ و تمرین ۲ صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی)

آ) -5 و 11
ب) $3+\sqrt{2}$ و $3-\sqrt{2}$
پ) $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$ و $\frac{2-\sqrt{3}}{5}$ (خرداد ۱۴۰۳)

۵۹. دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آن‌ها $\frac{5}{2}$ و حاصل‌ضربشان -21 باشد. (مشابه کاردرکلاس ۱ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

۶۰. دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آن‌ها برابر ۴ و حاصل ضرب آن‌ها برابر یک باشد. (مشابه کاردرکلاس ۱ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

۶۱. طول و عرض مستطیلی را مشخص کنید که مساحت آن ۱۰ و محیط آن ۱۳ باشد. (مشابه کاردرکلاس ۲ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

۶۲. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^{2}-3x-5=0$ باشند، بدون محاسبهٔ ریشه‌های معادله، حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

آ) $\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}$
ب) $\alpha^{3}\beta+\alpha\beta^{3}$
پ) $\alpha^{3}+\beta^{3}$

۶۳. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^{2}-3mx+4=0$ باشند، m را چنان تعیین کنید که داشته باشیم $\alpha\beta^{2}=-4$.

۶۴. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^{2}-(2m-1)x+m=0$ باشند، مقدار m را طوری به‌دست آورید که:

آ) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{5}{3}$
ب) $\alpha^{2}+\beta^{2}=\frac{13}{4}$

۶۵. در معادلهٔ $2x^{2}-8x+m=0$، اگر یکی از جواب‌ها دو برابر جواب دیگر باشد، m و هر دو جواب را پیدا کنید.

۶۶. هریک از معادلات زیر را حل کنید.

آ) $x-4\sqrt{x}+3=0$
ب) $(x^{2}-4x)^{2}-4(x^{2}-4x)-5=0$

بخش ۲

پاسخ‌نامه

فصل ۱ **هندسهٔ تحلیلی و جبر**

۱ | فقط

۲ | طول از مبدأ - عرض از مبدأ

۳ | $y=-۲x+۷$ زیرا:

$$m=-۲\ ,\ A(۰\ ,\ ۷)\Rightarrow y-۷=-۲(x-۰)\Rightarrow y=-۲x+۷$$

۴ | شیب

۵ | درست، شیب خط $ax+by=c$ برابر $-\frac{a}{b}$ است، پس شیب خط $۲x+۵y=۱۱$ برابر $-\frac{۲}{۵}$ است.

۶ | نادرست، شیب هر خط موازی با محور xها برابر صفر است.

۷ | درست، شیب خط $x+۲y=۱$ برابر $-\frac{۱}{۲}$ و شیب خط $y=۲x+۳$ برابر ۲ می‌باشد و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۱- است.

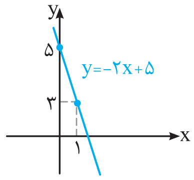
۸ | با مشخص کردن دو نقطهٔ دلخواه روی خط، خط را رسم می‌کنیم.

آ) برای مشخص کردن دو نقطهٔ دلخواه، به جای x (یا y) دو عدد دلخواه در معادله قرار می‌دهیم و دیگری را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}x=۰\Rightarrow y=-۲(۰)+۵=۵\\ x=۱\Rightarrow y=-۲(۱)+۵=۳\end{cases}$$

x	۰	۱
y	۵	۳

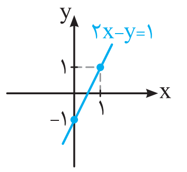
نمودار $\longrightarrow$



ب) $۲x-y=۱$

x	۰	۱
y	۱-	۱

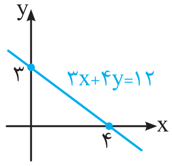
نمودار $\longrightarrow$



پ) $۳x+۴y=۱۲$

x	۰	۴
y	۳	۰

نمودار $\longrightarrow$

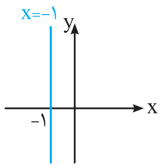


ت) $x=-۱$، خطی به موازات محور yها است که طول هر نقطه روی آن برابر ۱- است:

$x=-۱$

x	۱-	۱-
y	۰	۱

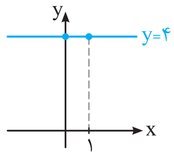
نمودار $\longrightarrow$



ث) عرض تمام نقاط روی خط $y=۴$ برابر ۴ است:

x	۰	۱
y	۴	۴

نمودار $\longrightarrow$



۹ | آ) معادلهٔ خط با شیب m و عرض از مبدأ h به‌صورت $y=mx+h$ می‌باشد، بنابراین معادلهٔ خط با شیب $m=-۴$ و عرض از مبدأ $h=۲$ برابر $y=-۴x+۲$ است.

ب) معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $(x_۱,y_۱)$ با شیب m به‌صورت زیر است:

$$y-y_۱=m(x-x_۱)$$

$$m=۵\ ,\ (\underset{x_۱}{\underset{\downarrow}{-۲}},\underset{y_۱}{\underset{\downarrow}{-۳}})\Rightarrow y+۳=۵(x+۲)$$

$$\Rightarrow y+۳=۵x+۱۰\Rightarrow y=۵x+۷$$

پ) شیب خط گذرنده از نقاط $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ برابر است با:

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$$

$$A(-۱,۲)\ ,\ B(۱,۰)\Rightarrow m=\frac{۰-۲}{۱+۱}=-۱$$

با داشتن شیب خط (m) و مختصات یک نقطه (مثلاً A)، معادله را می‌نویسیم:

$$m=-۱\ ,\ A(-۱,۲)\Rightarrow y-۲=-۱(x+۱)\Rightarrow y=-x+۱$$

ت) شیب دو خط موازی با هم برابر است. شیب خط $۵x+۳y=۲$ برابر $m=-\frac{x\ \text{ضریب}}{y\ \text{ضریب}}=-\frac{۵}{۳}$ است، پس شیب خط مطلوب نیز برابر $-\frac{۵}{۳}$ می‌باشد:

$$m=-\frac{۵}{۳}\ ,\ A(۳,۰)\Rightarrow y-۰=-\frac{۵}{۳}(x-۳)$$

$$\xrightarrow{\times ۳}۳y=-۵x+۱۵\Rightarrow ۳y+۵x=۱۵$$

ث) حاصل‌ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم برابر ۱- است. شیب خط $۳x+۲y=۴$ برابر $-\frac{۳}{۲}$ می‌باشد، پس شیب خط مورد نظر برابر $m=\frac{-۱}{-\frac{۳}{۲}}=\frac{۲}{۳}$ می‌باشد:

$$m=\frac{۲}{۳}\ ,\ A(۴,۲)\Rightarrow y-۲=\frac{۲}{۳}(x-۴)$$

$$\xrightarrow{\times ۳}۳(y-۲)=۲(x-۴)\Rightarrow ۳y-۶=۲x-۸\Rightarrow ۳y-۲x=-۲$$

ج) طول از مبدأ خط، محل برخورد خط با محور x ها می‌باشد، پس خط از نقطهٔ $(۲,۰)$ می‌گذرد. هم‌چنین عرض از مبدأ خط، محل برخورد خط با محور y ها می‌باشد، پس خط از نقطهٔ $(۰,۵)$ نیز می‌گذرد:

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۵-۰}{۰-۲}=-\frac{۵}{۲}$$

$$m=-\frac{۵}{۲}\ ,\ A(۲,۰)\Rightarrow y-۰=-\frac{۵}{۲}(x-۲)$$

$$\xrightarrow{\times ۲}۲y=-۵(x-۲)\Rightarrow ۲y=-۵x+۱۰\Rightarrow ۲y+۵x=۱۰$$

۱۰ | شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(۵,۱)$ و $B(-۴,۳)$ را به‌دست می‌آوریم. این عدد شیب خط مطلوب است:

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۱-۳}{۵-(-۴)}=-\frac{۲}{۹}$$

معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $(-۴,۱)$ با شیب $m=-\frac{۲}{۹}$ به‌صورت زیر است:

$$y-۱=-\frac{۲}{۹}(x+۴)\Rightarrow ۹(y-۱)=-۲(x+۴)$$

$$\Rightarrow ۹y-۹=-۲x-۸\Rightarrow ۹y+۲x=۱$$

۱۱ | شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $(۲,۰)$ و $(-۱,۶)$ برابر است با:

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۶-۰}{-۱-۲}=\frac{۶}{-۳}=-۲$$

اگر m' شیب خط مطلوب باشد، آن‌گاه $m' = -\frac{۱}{m}$ است و در نتیجه، داریم:

$$m' = -\frac{۱}{m} = \frac{۱}{۲}\;,\; A(۳,۲)$$

معادلهٔ خط: $y-۲ = \frac{۱}{۲}(x-۳) \xrightarrow{\times ۲} ۲(y-۲) = x-۳$

$$\Rightarrow ۲y-۴ = x-۳ \Rightarrow ۲y-x = ۱$$

۱۲ | با حل دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی $\begin{cases} ۴x-y=۱ \\ x+۲y=۷ \end{cases}$، نقطهٔ تلاقی دو خط را به‌دست می‌آوریم:

$$\times ۲\begin{cases} ۴x-y=۱ \\ x+۲y=۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۸x-\cancel{۲y}=۲ \\ x+\cancel{۲y}=۷ \end{cases} \Rightarrow ۹x=۹ \Rightarrow x=۱$$

$$\xrightarrow{x+۲y=۷} ۱+۲y=۷ \Rightarrow ۲y=۶ \Rightarrow y=۳$$

نقطهٔ $A(۱,۳)$، نقطهٔ تلاقی دو خط است. معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(۱,۳)$ و $B(۳,-۲)$ به‌صورت زیر است:

$$m = \frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱} = \frac{-۲-۳}{۳-۱} = -\frac{۵}{۲}\;,\; A(۱,۳)$$

$$y-۳ = -\frac{۵}{۲}(x-۱) \xrightarrow{\times ۲} ۲(y-۳) = -۵(x-۱)$$

$$\Rightarrow ۲y-۶ = -۵x+۵ \Rightarrow ۲y+۵x = ۱۱$$

۱۳ | شیب هر یک از خطوط را به‌دست می‌آوریم. اگر شیب دو خط با هم برابر باشند، آن دو خط موازی، اگر حاصل‌ضرب شیب‌ها برابر ۱− باشد، دو خط بر هم عمود و در غیر این‌صورت دو خط متقاطع غیرعمودند.

شیب خط $y=ax+b$ برابر a و شیب خط $ax+by=c$ یا $ax+by+c=۰$ برابر $-\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{a}{b}$ است.

$$L_۱: -۳x+۵y=۱ \Rightarrow m_۱ = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{-۳}{۵} = \frac{۳}{۵}$$

$$L_۲: ۳x-y=۱ \Rightarrow m_۲ = -\frac{۳}{-۱} = ۳$$

$$L_۳: ۵x+۳y=۷ \Rightarrow m_۳ = -\frac{۵}{۳}$$

$$L_۴: ۶x=۲y+۵ \Rightarrow ۶x-۲y=۵ \Rightarrow m_۴ = -\frac{۶}{-۲} = ۳$$

دو خط $L_۱$ و $L_۳$ بر هم عمودند. $\Rightarrow m_۱.m_۳ = -۱$

دو خط $L_۲$ و $L_۴$ موازی‌اند. $\Rightarrow m_۲ = m_۴$

$L_۱$ و $L_۳$ با $L_۲$ و $L_۴$ متقاطع غیرعمود می‌باشند.

۱۴ | آ) در دو خط موازی، شیب‌ها با هم برابرند:

$$۳x+(۲m+۱)y=۴ \Rightarrow \text{شیب خط} = a = -\frac{۳}{۲m+۱}$$

$$mx+۷y=۱۱ \Rightarrow \text{شیب خط} = a' = -\frac{m}{۷}$$

$$a=a' \Rightarrow -\frac{۳}{۲m+۱} = -\frac{m}{۷} \Rightarrow ۳\times۷ = m(۲m+۱)$$

$$\Rightarrow ۲۱ = ۲m^۲+m \Rightarrow ۲m^۲+m-۲۱=۰$$

$$\Delta = b^۲-۴ac = (۱)^۲-۴(۲)(-۲۱) = ۱۶۹ = ۱۳^۲$$

$$\Rightarrow m = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۱\pm۱۳}{۲(۲)}$$

$$\Rightarrow m_۱ = \frac{-۱+۱۳}{۴} = \frac{۱۲}{۴} = ۳\;,\; m_۲ = \frac{-۱-۱۳}{۴} = \frac{-۱۴}{۴} = -\frac{۷}{۲}$$

ب) اگر حاصل‌ضرب شیب دو خط برابر ۱− شود، آن‌گاه دو خط بر هم عمودند:

$$aa' = -۱ \Rightarrow \left(-\frac{۳}{۲m+۱}\right)\left(-\frac{m}{۷}\right) = -۱ \Rightarrow \frac{۳m}{۷(۲m+۱)} = -۱$$

$$\Rightarrow ۳m = -۷(۲m+۱) \Rightarrow ۳m = -۱۴m-۷ \Rightarrow ۳m+۱۴m = -۷$$

$$\Rightarrow ۱۷m = -۷ \Rightarrow m = -\frac{۷}{۱۷}$$

۱۵ | با مساوی قرار دادن شیب‌های دو خط، مقدار m را به‌دست می‌آوریم:

$$۲x+(-m+۴)y=۳ \Rightarrow a = -\frac{۲}{-m+۴}$$

$$(۵+۳m)x+(m^۲+۴)y=۷ \Rightarrow a' = -\frac{۵+۳m}{m^۲+۴}$$

$$a=a' \Rightarrow \cancel{-}\frac{۲}{-m+۴} = \cancel{-}\frac{۵+۳m}{m^۲+۴}$$

$$\Rightarrow ۲(m^۲+۴) = (۵+۳m)(-m+۴)$$

$$\Rightarrow ۲m^۲+۸ = -۵m+۲۰-۳m^۲+۱۲m \Rightarrow ۵m^۲-۷m-۱۲=۰$$

$$\Delta = (-۷)^۲-۴(۵)(-۱۲) = ۲۸۹ = ۱۷^۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \frac{۷+۱۷}{۲(۵)} = \frac{۲۴}{۱۰} = \frac{۱۲}{۵} \\ m = \frac{۷-۱۷}{۲(۵)} = \frac{-۱۰}{۱۰} = -۱ \end{cases}$$

۱۶ | شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $(m,۲m)$ و $(۱,-۱)$ برابر است با:

$$a = \frac{۲m+۱}{m-۱}$$

از طرفی شیب خط به معادلهٔ $۲x-۵y=۷$ برابر $a' = -\frac{۲}{-۵} = \frac{۲}{۵}$ است.

چون دو خط بر هم عمودند، پس باید داشته باشیم:

$$aa' = -۱ \Rightarrow \frac{۲m+۱}{m-۱}\times\frac{۲}{۵} = -۱$$

$$\Rightarrow \frac{۲(۲m+۱)}{۵(m-۱)} = -۱ \Rightarrow ۲(۲m+۱) = -۵(m-۱)$$

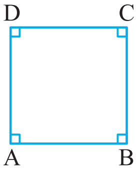
$$\Rightarrow ۴m+۲ = -۵m+۵ \Rightarrow ۹m = ۳ \Rightarrow m = \frac{۱}{۳}$$

۱۷ | آ) ابتدا شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$m_{AB} = \frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱} = \frac{۲-۱}{۶-۴} = \frac{۱}{۲}\;,\; A(۴,۱)$$

معادلهٔ خط AB: $y-۱ = \frac{۱}{۲}(x-۴) \xrightarrow{\times ۲} ۲(y-۱) = x-۴$

$$۲y-۲ = x-۴ \Rightarrow ۲y-x = -۲$$



ب) با توجه به شکل فرضی مقابل، BC بر AB عمود است، پس:

$$m_{BC} = \frac{-۱}{m_{AB}} \overset{(آ)}{=} \frac{-۱}{\frac{۱}{۲}} = -۲\;,\; B(۶,۲)$$

معادلهٔ خط BC: $y-۲ = -۲(x-۶) \Rightarrow y = -۲x+۱۴$

پ) معادلهٔ خط DC را می‌نویسیم. با داشتن معادلهٔ خط BC و قرار دادن آن‌ها در یک دستگاه و حل آن، مختصات نقطهٔ C به دست می‌آید. با توجه به این‌که خط DC موازی AB است، پس شیب خط DC با شیب خط AB برابر می‌باشد:

$$m_{DC} = m_{AB} = \frac{۱}{۲}\;,\; D(-۱,۱۱)$$

DC معادلهٔ خط: $y-11=\frac{1}{2}(x+1) \xrightarrow{\times 2} 2y-22=x+1$

$\Rightarrow 2y-x=23$

$$\times(-2)\begin{cases} y=-2x+14 \\ 2y-x=23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-2y}=4x-28 \\ \cancel{2y}-x=23 \end{cases} \Rightarrow -x=4x-5$$

$$\Rightarrow -5x=-5 \Rightarrow x=1 \xrightarrow{y=-2x+14} y=-2+14=12$$

$\Rightarrow C(1,12)$

---

۱۸ | ابتدا معادلهٔ خطی را که از دو نقطهٔ $(3,1)$ و $(5,-3)$ می‌گذرد، می‌نویسیم:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-3-1}{5-3}=\frac{-4}{2}=-2\ ,\ A(3,1)$$

$$y-1=-2(x-3) \Rightarrow y-1=-2x+6 \Rightarrow y=-2x+7$$

چون سه نقطه روی یک خط قرار دارند، پس مختصات نقطهٔ $C(a,2a-1)$ نیز باید در معادلهٔ $y=-2x+7$ صدق کند:

$$C(a,2a-1)\ ,\ y=-2x+7 \Rightarrow 2a-1=-2a+7$$

$$\Rightarrow 2a+2a=7+1 \Rightarrow 4a=8 \Rightarrow a=2$$

---

۱۹ | محل تلاقی دو خط به معادله‌های $x+3y=-1$ و $3x-2y=8$ از حل دستگاه $\begin{cases} x+3y=-1 \\ 3x-2y=8 \end{cases}$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{matrix}\times 2 \\ \times 3\end{matrix}\begin{cases} x+3y=-1 \\ 3x-2y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+\cancel{6y}=-2 \\ 9x-\cancel{6y}=24 \end{cases} \Rightarrow 11x=22 \Rightarrow x=2$$

$$\xrightarrow{x+3y=-1} 2+3y=-1 \Rightarrow 3y=-3 \Rightarrow y=-1$$

نقطهٔ $(2,-1)$ محل تلاقی دو خط است. خط $(m+1)x+my=7$ از نقطهٔ $(2,-1)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ $(m+1)x+my=7$ صدق می‌کند:

$$2(m+1)-m=7 \Rightarrow 2m+2-m=7 \Rightarrow m=5$$

---

۲۰ | آ) شیب ضلع AB برابر است با:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2+1}{0+3}=1\ ,\ A(-3,-1)$$

AB معادلهٔ ضلع: $y-(-1)=1(x-(-3))$

$\Rightarrow y+1=x+3 \Rightarrow y=x+2$

ب) ضلع CD موازی ضلع AB است، پس شیب دو خط با هم برابرند:

$$m_{AB}=m_{CD}\ ,\ m_{AB}=1\ ,\ m_{CD}=\frac{y_D-y_C}{x_D-x_C}=\frac{(2a-2)-a}{0-3}$$

$$=\frac{a-2}{-3}=1 \Rightarrow a-2=-3 \Rightarrow a=-1$$

$\Rightarrow C(3,-1)\ ,\ D(0,-4)$

---

۲۱ | $(-3,6)$

$$C'=2M-C=(-2,8)-(1,2)=(-3,6)$$

---

۲۲ | ۱

$$d=\frac{|3(-1)-4(2)+6|}{\sqrt{9+16}}=\frac{5}{5}=1$$

---

۲۳ | آ) اگر $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ باشند، آن‌گاه طول پاره‌خط AB برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$A(3,-2)\ ,\ B(-1,6) \Rightarrow AB=\sqrt{(-1-3)^2+(6-(-2))^2}$$

$$=\sqrt{(-4)^2+(8)^2}=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}=\sqrt{16\times 5}=4\sqrt{5}$$

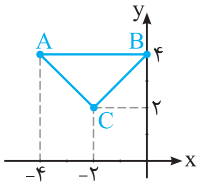
ب) اگر $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ باشد، آن‌گاه مختصات نقطهٔ M وسط AB به‌صورت $M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ است. بنابراین:

$$M=\left(\frac{3-1}{2},\frac{-2+6}{2}\right)=(1,2)\ ,\ O(0,0)$$

$$\Rightarrow OM=\sqrt{(1-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

---

۲۴ | آ) هر یک از نقاط را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم و آن‌ها را به هم وصل می‌کنیم.



ب) طول اضلاع مثلث را به‌دست می‌آوریم:

$$AB=\sqrt{(4-4)^2+(0+4)^2}=\sqrt{0+16}=\sqrt{16}=4$$

$$AC=\sqrt{(2-4)^2+(-2+4)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$BC=\sqrt{(2-4)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

چون $AC=BC$، پس مثلث متساوی‌الساقین است. از طرفی تساوی $AB^2=AC^2+BC^2$ برقرار است، پس مثلث در رأس C قائم‌الزاویه است.

پ) مساحت مثلث، نصف حاصل‌ضرب ارتفاع در قاعده است.

$$S=\frac{1}{2}CA\times CB=\frac{1}{2}\times\sqrt{8}\times\sqrt{8}=\frac{1}{2}\times 8=4$$

---

۲۵ | هر یک از رأس‌ها را نام‌گذاری می‌کنیم:

$A(2,0), B(-1,4), C(6,-3)$

طول اضلاع مثلث را به‌دست می‌آوریم. فاصلهٔ بین دو نقطه، طول ضلع مثلث است:

$$AB=\sqrt{(-1-2)^2+(4-0)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

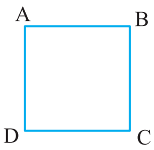
$$AC=\sqrt{(6-2)^2+(-3-0)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

$$BC=\sqrt{(6+1)^2+(-3-4)^2}=\sqrt{49+49}=7\sqrt{2}$$

طول دو ضلع مثلث برابرند و در نتیجه مثلث متساوی‌الساقین است.

---

۲۶ | فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B، طول ضلع مربع است:



$$AB=\sqrt{(8-4)^2+(5-2)^2}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

محیط مربع برابر $4AB=4\times 5=20$ و مساحت مربع برابر $a^2=5^2=25$ می‌باشد.

۲۷ اگر $P(۴,-۲)$ موقعیت این شخص و نقاط $A(۲,۵)$ ، $B(۱,۴)$ و $C(-۳,۳)$ موقعیت‌های این سه عابربانک باشند، با به‌دست آوردن فاصلهٔ نقطهٔ P تا هر یک از نقاط A ، B و C ، کوتاه‌ترین فاصله را انتخاب می‌کنیم.

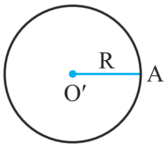
$$PA=\sqrt{(۲-۴)^۲+(۵+۲)^۲}=\sqrt{۴+۴۹}=\sqrt{۵۳}$$

$$PB=\sqrt{(۱-۴)^۲+(۴+۲)^۲}=\sqrt{۹+۳۶}=\sqrt{۴۵}$$

$$PC=\sqrt{(-۳-۴)^۲+(۳+۲)^۲}=\sqrt{۴۹+۲۵}=\sqrt{۷۴}$$

با توجه به اعداد به‌دست‌آمده، کم‌ترین فاصلهٔ این شخص تا عابربانک B است.

۲۸ مطابق شکل فاصلهٔ نقطهٔ $A(۴,۲)$ تا مرکز دایره، یعنی $O'(۲,-۱)$ برابر اندازهٔ شعاع دایره است:



$$R=O'A=\sqrt{(۴-۲)^۲+(۲+۱)^۲}=\sqrt{۴+۹}=\sqrt{۱۳}$$

هر نقطه‌ای روی دایره باشد، باید فاصلهٔ آن تا O' برابر $\sqrt{۱۳}$ شود.

فاصلهٔ هر یک از نقاط $B(۵,-۳)$ و $C(-۱,۴)$ را تا نقطهٔ O' به‌دست می‌آوریم، هر کدام برابر $\sqrt{۱۳}$ شود، روی این دایره قرار دارد:

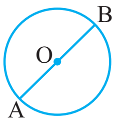
$$O'B=\sqrt{(۵-۲)^۲+(-۳+۱)^۲}=\sqrt{۹+۴}=\sqrt{۱۳}$$

پس B روی این دایره قرار دارد.

$$O'C=\sqrt{(-۱-۲)^۲+(۴+۱)^۲}=\sqrt{۹+۲۵}=\sqrt{۳۴}$$

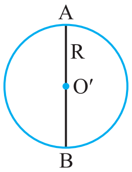
بنابراین C روی این دایره قرار ندارد.

۲۹ وسط دو نقطهٔ A و B مرکز دایره است. اگر O مرکز دایره باشد، آن‌گاه:



$$\left.\begin{array}{l} x_O=\dfrac{x_A+x_B}{۲}=\dfrac{۲+۴}{۲}=۳ \\ y_O=\dfrac{y_A+y_B}{۲}=\dfrac{۴-۲}{۲}=۱ \end{array}\right\} \Rightarrow O(۳,۱)$$

۳۰ آ) نقطهٔ وسط پاره‌خط AB ، مرکز دایره است:



$$O'=\left(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲}\right)=\left(\frac{۲+۴}{۲},\frac{-۲+۴}{۲}\right)=(۳,۱)$$

فاصلهٔ دو نقطهٔ A و O' برابر اندازهٔ شعاع دایره است:

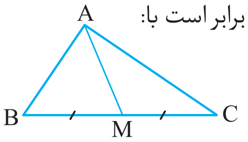
$$R=O'A=\sqrt{(۳-۲)^۲+(۱+۲)^۲}=\sqrt{۱+۹}=\sqrt{۱۰}$$

ب) اگر فاصلهٔ نقطهٔ $M(۰,۲)$ تا O' (مرکز دایره) برابر $\sqrt{۱۰}$ باشد، آن‌گاه نقطهٔ M روی این دایره قرار دارد. فاصلهٔ O' تا M را به‌دست می‌آوریم:

$$O'M=\sqrt{(۰-۳)^۲+(۲-۱)^۲}=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰}=R$$

پس نقطهٔ M روی محیط این دایره قرار دارد.

۳۱ آ) مختصات M وسط پاره‌خط BC برابر است با:



$$M=\left(\frac{x_B+x_C}{۲},\frac{y_B+y_C}{۲}\right)=\left(\frac{۳+۵}{۲},\frac{-۲+۴}{۲}\right)=\left(\frac{۸}{۲},\frac{۲}{۲}\right)=(۴,۱)$$

ب) با داشتن مختصات دو نقطهٔ A و M ، طول پاره‌خط AM را به‌دست می‌آوریم:

$$A(-۲,۴)\ ,\ M(۴,۱)\Rightarrow AM=\sqrt{(۴+۲)^۲+(۱-۴)^۲}$$

$$=\sqrt{۳۶+۹}=\sqrt{۴۵}=\sqrt{۹\times ۵}=۳\sqrt{۵}$$

پ) مختصات نقطهٔ A و M را داریم. معادلهٔ خطی که از این دو نقطه می‌گذرد را می‌نویسیم.

$$m=\frac{y_M-y_A}{x_M-x_A}=\frac{۱-۴}{۴-(-۲)}=\frac{-۳}{۶}=-\frac{۱}{۲} \quad (\text{شیب ضلع } AM)$$

$$m=-\frac{۱}{۲},A(-۲,۴)\Rightarrow y-۴=-\frac{۱}{۲}(x+۲)$$

$$\xrightarrow{\times ۲} ۲(y-۴)=-(x+۲)\Rightarrow ۲y-۸=-x-۲\Rightarrow ۲y+x=۶$$

۳۲ آ) اگر $M(۵,-۱)$ ، $A(۳,۲)$ و $B(x_B,y_B)$ ، آن‌گاه:

$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{۲}\Rightarrow ۵=\dfrac{۳+x_B}{۲}\Rightarrow ۳+x_B=۱۰\Rightarrow x_B=۷ \\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{۲}\Rightarrow -۱=\dfrac{۲+y_B}{۲}\Rightarrow y_B+۲=-۲\Rightarrow y_B=-۴ \end{cases}$$

پس مختصات نقطهٔ B ، به‌صورت $B(۷,-۴)$ است.

ب) اگر A' قرینهٔ نقطهٔ $A(-۳,۴)$ نسبت به نقطهٔ $M(-۱,۲)$ باشد، آن‌گاه:

$$A'=(۲x_M-x_A,۲y_M-y_A)=$$

$$(۲(-۱)-(-۳),۲(۲)-۴)=(-۲+۳,۴-۴)=(۱,۰)$$

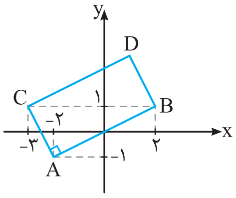
پ) مختصات نقطهٔ B از قسمت (آ) به‌صورت $B(۷,-۴)$ است. قرینهٔ نقطهٔ B نسبت به نقطهٔ $M(۳,۰)$ به‌صورت زیر است:

$$B'=(۲x_M-x_B,۲y_M-y_B)=(۲\times ۳-۷\ ,\ ۲\times ۰+۴)$$

$$=(-۱,۴)$$

ت) قرینهٔ نقطهٔ (x,y) نسبت به مبدأ مختصات، نقطهٔ $(-x,-y)$ است، پس قرینهٔ نقطهٔ $A(-۳,۵)$ نسبت به مبدأ مختصات، نقطهٔ $A'(۳,-۵)$ می‌باشد.

۳۳ با مشخص کردن نقاط A ، B و C در دستگاه محورهای مختصات، رأس‌های روبه‌رو را مشخص می‌کنیم:



آ) نقاط B و C روبه‌روی هم و نقاط A و D روبه‌روی هم قرار دارند. در مستطیل (هرمتوازی‌الاضلاعی) داریم:

$$\begin{cases} x_A+x_D=x_B+x_C \\ y_A+y_D=y_B+y_C \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} -۲+x_D=۲-۳ \\ -۱+y_D=۱+۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_D=۱ \\ y_D=۳ \end{cases}\Rightarrow D(۱,۳)$$

ویراست جدید

*منطبق‌تر با امتحان‌های «دی» و «خرداد»

گاج

پاسخ تمرین‌های کتاب درسی

ریاضی ۲

فرمول بیست

هدیه رایگان

فرمول بیست

در این کتابچه،
«تمرین‌های» کتاب درسی
را به طور کامل پاسخ
داده‌ایم.
از آن‌جایی که تقریباً
بیش از نیمی از سؤالات
امتحانات نهایی مشابه
تمرینات کتاب درسی
طراحی می‌شوند مرور
مطالب این کتابچه در
شب امتحان به شما کمک
می‌کند تا با آمادگی کامل
سر جلسه امتحان حاضر
شوید.

تهران، میدان انقلاب
نبش بازارچه کتاب
www.gajmarket.com

فهرست

فصل ۱
هندسهٔ تحلیلی و جبر

درس ۱ هندسهٔ تحلیلی

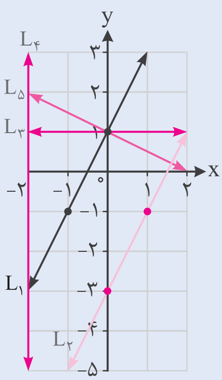
کاردرکلاس | ص ۲ و ۳ کتاب درسی

۱ به طور شهودی می‌توان دید که از هر دو نقطهٔ متمایز، تنها یک خط عبور می‌کند؛ بنابراین:

الف) با داشتن مختصات ۲ نقطه از یک خط باید بتوان معادلهٔ آن را به دست آورد.

ب) با داشتن معادلهٔ یک خط می‌توان با مشخص کردن ۲ نقطه از خط، نمودار آن را در دستگاه مختصات رسم کرد.

۲ نمودار خطوط با معادلات زیر را در دستگاه مختصات مشخص‌شده، رسم کنید:



الف) $L_1 : y = 2x + 1$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & -1 & 0 \\ \hline y & -1 & 1 \end{array}$

ب) $L_2 : y = 2x - 3$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & -3 & -1 \end{array}$

پ) $L_3 : y = 1$ $\Rightarrow$ تابع ثابت $\Rightarrow$

به‌ازای تمام مقادیر x ، y همواره مقدار یک را اختیار می‌کند.

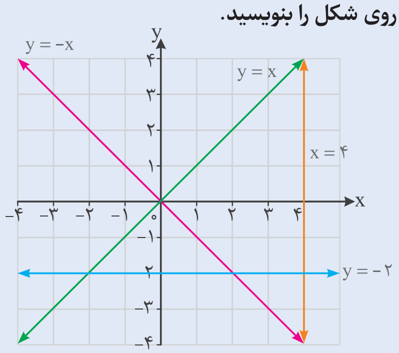
ت) $L_4 : x = -2$ $\Rightarrow$ تابع ثابت $\Rightarrow$

به‌ازای تمام مقادیر y، x همواره مقدار ۲- را اختیار می‌کند.

ث) $L_5 : x + 2y = 2 \Rightarrow 2y = 2 - x$

$\Rightarrow y = 1 - \frac{x}{2}$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ \hline y & 1 & 0 \end{array}$

۳ معادلهٔ هر یک از خط‌های نمایش داده‌شده روی شکل را بنویسید.



۴ **الف) می‌دانیم که شیب یک خط برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی** افقی**؛**

به عبارت دیگر شیب خط گذرا از دو نقطهٔ غیر هم‌طول A و B برابر است با:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

ب) شرط موازی بودن دو خط آن است که دارای شیب‌های **برابر باشند.**

۵ **الف) از پایهٔ نهم به خاطر داریم که هرگاه خط L محور yها را در نقطه‌ای با عرض h قطع کند، آنگاه h،** عرض از مبدأ **خط L نامیده می‌شود.**

ب) در سؤال ۲، شیب و عرض از مبدأ هر یک از پنج خط ذکرشده را بنویسید. در این سؤال کدام دو خط با هم موازی‌اند؟

الف) $L_۱: y=۲x+۱$ $\quad m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۱-(-۱)}{۰-(-۱)}=\frac{۲}{۱}=۲\Rightarrow m=۲\ ,\ h=۱$

ب) $L_۲: y=۲x-۳$ $\quad m=\frac{-۱-(-۳)}{۱-۰}=\frac{۲}{۱}=۲\Rightarrow m=۲\ ,\ h=-۳$

پ) $L_۳: y=۱$ $\quad m=\frac{۱-۱}{-۱-۱}=۰\Rightarrow m=۰\ ,\ h=۱$

ت) $L_۴: x=-۲$ $\quad m=\frac{۱-۲}{-۲-(-۲)}=\frac{-۱}{۰}=$ تعریف‌نشده

$\Rightarrow m=$ تعریف‌نشده $, h=$ ندارد

این خط عرض از مبدأ ندارد، زیرا محور yها را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند.

ث) $L_۵: y=۱-\frac{x}{۲}$ $\quad m=\frac{۰-۱}{۲-۰}=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow m=-\frac{۱}{۲}\ ,\ h=۱$

دو خط $L_۱$ و $L_۲$ با شیب ۲ با هم موازی هستند.

۶ **الف) خط با شیب m و عرض از مبدأ h معادله‌ای به صورت** $y=mx+h$ **دارد.**

ب) می‌خواهیم معادلهٔ خط L، گذرا از دو نقطهٔ $A(۰,۷)$ و $B(۳,۱)$ را بنویسیم. برای این کار، ابتدا شیب خط را محاسبه می‌کنیم:

شیب خط: $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۱-۷}{۳-۰}=-۲$

معادلهٔ خط: $y=-۲x+h$

$B(۳,۱): ۱=-۲(۳)+h\Rightarrow h=۷$ **روی خط L واقع است.**

البته اگر به مختصات نقطهٔ $A(۰,۷)$ از خط L دقت کنیم، بدون محاسبه متوجه می‌شویم که عرض از مبدأ این خط $h=۷$ است. پس: **معادلهٔ خط L:** $y=-۲x+۷$

پ) معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $P(۲,-۱)$ را بنویسید؛ به طوری که با خط $y=۳x-۴$ موازی باشد.

شیب دو خط موازی با یکدیگر برابر است، پس $m=۳$ است.

روش اول: $y=mx+h \Rightarrow y=۳x+h \xrightarrow{P(۲,-۱)} -۱=۳(۲)+h \Rightarrow h=-۷$

$\Rightarrow y=۳x-۷$

معادله خط گذرنده از نقطه $(x_۰,y_۰)$ با شیب m برابر است با: $(y-y_۰)=m(x-x_۰)$

روش دوم: $y-y_۰=m(x-x_۰) \Rightarrow y-(-۱)=۳(x-۲) \Rightarrow y+۱=۳x-۶$

$\Rightarrow y=۳x-۶-۱ \Rightarrow y=۳x-۷$

کار در کلاس | ص ۴ کتاب درسی

۱ در هر قسمت شیب دو خط داده‌شده را به دست آورید و مشخص کنید که دو خط نسبت به هم چه وضعی دارند. (موازی، عمود یا متقاطعِ غیرعمود؟)

الف) $L: y=۵x-۲$ $\qquad T: y=\frac{-۱}{۵}x+۳$

$L: m=۵, T: m'=\frac{-۱}{۵} \Rightarrow mm'=۵(\frac{-۱}{۵})=-۱ \Rightarrow mm'=-۱ \Rightarrow$ دو خط بر هم عمودند.

ب) $L: y=\frac{۱}{۲}x+۷$ $\qquad T: x-۲y=۱$

$L: m=\frac{۱}{۲}, T: ۲y=x-۱ \Rightarrow y=\frac{x}{۲}-\frac{۱}{۲} \Rightarrow m=\frac{۱}{۲} \Rightarrow m=m' \Rightarrow$ دو خط با هم موازی‌اند.

پ) $L: ۲x-۳y+۳=۰$ $\qquad T: ۳x+۲y=۰$

$$\left.\begin{array}{l} L: ۳y=۲x+۳ \Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x+۱ \Rightarrow m=\frac{۲}{۳} \\ T: ۲y=-۳x \Rightarrow y=\frac{-۳}{۲}x \Rightarrow m'=\frac{-۳}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow mm'=\frac{۲}{۳}\times(-\frac{۳}{۲})=-۱$$

$\Rightarrow$ دو خط بر هم عمودند.

ت) $L: x=۱$ $\qquad T: y=-۳$

$$\left.\begin{array}{l} L: \text{این خط عمودی است.} \\ T: (m=۰)\text{این خط افقی است.} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{دو خط بر هم عمودند.}$$

ث) $L: y=۳x+۱$ $\qquad T: x=۳y-۱$

$L: m=۳, T: ۳y=x+۱ \Rightarrow y=\frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۳} \Rightarrow m'=\frac{۱}{۳} \Rightarrow mm'=۳(\frac{۱}{۳})=۱\neq-۱$

$\Rightarrow$ دو خط متقاطع غیرعمود هستند.

۲ خط L به معادلهٔ $۲y-۳x=۱$ و خط T با عرض از مبدأ ۵ به معادلهٔ $y=mx+۵$ را در نظر بگیرید.

الف) m، را طوری بیابید که خط T با خط L موازی باشد.

$$L: ۲y-۳x=۱ \Rightarrow ۲y=۳x+۱ \Rightarrow y=\frac{۳}{۲}x+\frac{۱}{۲} \Rightarrow m'=\frac{۳}{۲}\ ,\ T: y=mx+۵$$

شرط موازی بودن: $m=m'=\frac{۳}{۲} \Rightarrow y=\frac{۳}{۲}x+۵$

ب) به ازای چه مقداری از m، دو خط بر یکدیگر عمودند؟

شرط عمود بودن: $mm'=-۱ \Rightarrow m\times(\frac{۳}{۲})=-۱ \Rightarrow m=\frac{-۲}{۳} \Rightarrow y=\frac{-۲}{۳}x+۵$

۳ مربع ABCD در ناحیهٔ اول صفحهٔ مختصات واقع است، به طوری که $A(۵,۱)$ و $B(۱۰,۴)$ دو رأس مجاور آن هستند.

الف) شیب ضلع AB را بنویسید.

$$m_{AB}=\frac{۴-۱}{۱۰-۵}=\frac{۳}{۵}$$

ب) شیب ضلع AD را حساب کنید و معادلهٔ این ضلع را بنویسید.

در مربع دو ضلع روبه‌رو موازی‌اند، بنابراین $m_{AD}=m_{BC}$.

$$m_{BC}=\frac{۹-۴}{۷-۱۰}=\frac{۵}{-۳}=\frac{-۵}{۳} \Rightarrow m_{AD}=-\frac{۵}{۳}$$

$$y-y_۰=m(x-x_۰)\xrightarrow{A(۵,۱)} y-۱=\frac{-۵}{۳}(x-۵) \Rightarrow y=\frac{-۵}{۳}x+\frac{۲۵}{۳}+۱$$

$\Rightarrow y=\frac{-۵}{۳}x+\frac{۲۸}{۳} \Rightarrow ۳y=-۵x+۲۸ \Rightarrow ۵x+۳y=۲۸$: AD معادلهٔ خط (ضلع)

پ) اگر بدانیم نقطهٔ $C(۷,۹)$ رأس سوم مربع است، مختصات رأس D را بیابید.

در مربع دو ضلع روبه‌رو موازی‌اند، بنابراین شیب یکسان دارند. $m_{CD}=m_{AB}=\frac{۳}{۵}$

$$y-y_۰=m(x-x_۰)\xrightarrow{C(۷,۹)} y-۹=\frac{۳}{۵}(x-۷)$$

$\Rightarrow ۳x-۵y=-۲۴$: CD معادلهٔ خط (ضلع)

از برخورد دو خط (ضلع) AD و CD، نقطهٔ D به دست می‌آید:

$$\begin{matrix} ۵\times \\ ۳\times \end{matrix}\begin{cases} ۵x+۳y=۲۸ \\ ۳x-۵y=-۲۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲۵x+\cancel{۱۵y}=۱۴۰ \\ ۹x-\cancel{۱۵y}=-۷۲ \end{cases} \Rightarrow ۳۴x=۶۸ \Rightarrow x=۲$$

$$۵x+۳y=۲۸ \Rightarrow ۵\times۲+۳y=۲۸ \Rightarrow ۱۰+۳y=۲۸ \Rightarrow ۳y=۱۸ \Rightarrow y=۶$$

پس مختصات نقطهٔ D به صورت $(۲,۶)$ است.