

فهرست

فصل سوم: استدلال و اثبات در هندسه

- ۷۰ درس اول: استدلال
- ۷۱ تمرین
- ۷۴ درس دوم: آشنایی با اثبات در هندسه
- ۷۷ تمرین
- ۸۰ درس سوم: هم‌نهشتی مثلث‌ها
- ۸۳ تمرین
- ۸۷ درس چهارم: حل مسئله در هندسه
- ۸۹ تمرین
- ۹۳ درس پنجم: شکل‌های متشابه
- ۹۴ تمرین
- ۹۷ امتحان نهایی فصل سوم

فصل چهارم: توان و ریشه

- ۱۰۴ درس اول: توان صحیح
- ۱۰۸ تمرین
- ۱۱۲ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
- ۱۱۳ درس دوم: نماد علمی
- ۱۱۴ تمرین
- ۱۱۶ درس سوم: ریشه‌گیری
- ۱۱۹ تمرین
- ۱۲۴ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
- ۱۲۵ درس چهارم: جمع و تفریق رادیکال‌ها
- ۱۲۸ تمرین
- ۱۳۱ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
- ۱۳۲ امتحان نهایی فصل چهارم
- ۱۳۷ امتحان نوبت اول

فصل اول: مجموعه‌ها

- ۲ درس اول: معرفی مجموعه
- ۴ تمرین
- ۷ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
- ۸ درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها ...
- ۱۲ تمرین
- ۱۶ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
- ۱۷ درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها
- ۲۲ تمرین
- ۲۷ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
- ۲۸ درس چهارم: مجموعه‌ها و احتمال
- ۳۱ تمرین
- ۳۵ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
- ۳۶ امتحان نهایی فصل اول

فصل دوم: عددهای حقیقی

- ۴۰ درس اول: عددهای گویا
- ۴۴ تمرین
- ۴۸ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
- ۴۹ درس دوم: عددهای حقیقی
- ۵۲ تمرین
- ۵۵ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
- ۵۶ درس سوم: قدرمطلق و محاسبه تقریبی
- ۵۹ تمرین
- ۶۳ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
- ۶۴ امتحان نهایی فصل دوم

فصل پنجم: عبارتهای جبری

- درس اول: عبارتهای جبری و مفهوم اتحاد ۱۴۰
- تمرین ۱۴۵
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۵۲
- درس دوم: چند اتحاد دیگر، تجزیه و کاربردها ... ۱۵۳
- تمرین ۱۵۶
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۶۱
- درس سوم: نابرابری‌ها و نامعادله‌ها ۱۶۲
- تمرین ۱۶۵
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۷۰
- امتحان نهایی فصل پنجم ۱۷۱

فصل ششم: خط و معادله‌های خطی

- درس اول: معادله خط ۱۷۶
- تمرین ۱۷۹
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۸۳
- درس دوم: شیب خط و عرض از مبدأ ۱۸۴
- تمرین ۱۸۹
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۹۶
- درس سوم: دستگاه معادله‌های خطی ۱۹۷
- تمرین ۲۰۱
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۰۶
- امتحان نهایی فصل ششم ۲۰۷

فصل هفتم: عبارتهای گویا

- درس اول: معرفی و ساده کردن عبارتهای گویا .. ۲۱۴
- تمرین ۲۱۵
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۱۹

- درس دوم: محاسبات عبارتهای گویا ۲۲۰
- تمرین ۲۲۲
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۲۸
- درس سوم: تقسیم چندجمله‌ای‌ها ۲۲۹
- تمرین ۲۳۲
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۳۷
- امتحان نهایی فصل هفتم ۲۳۸

فصل هشتم: حجم و مساحت

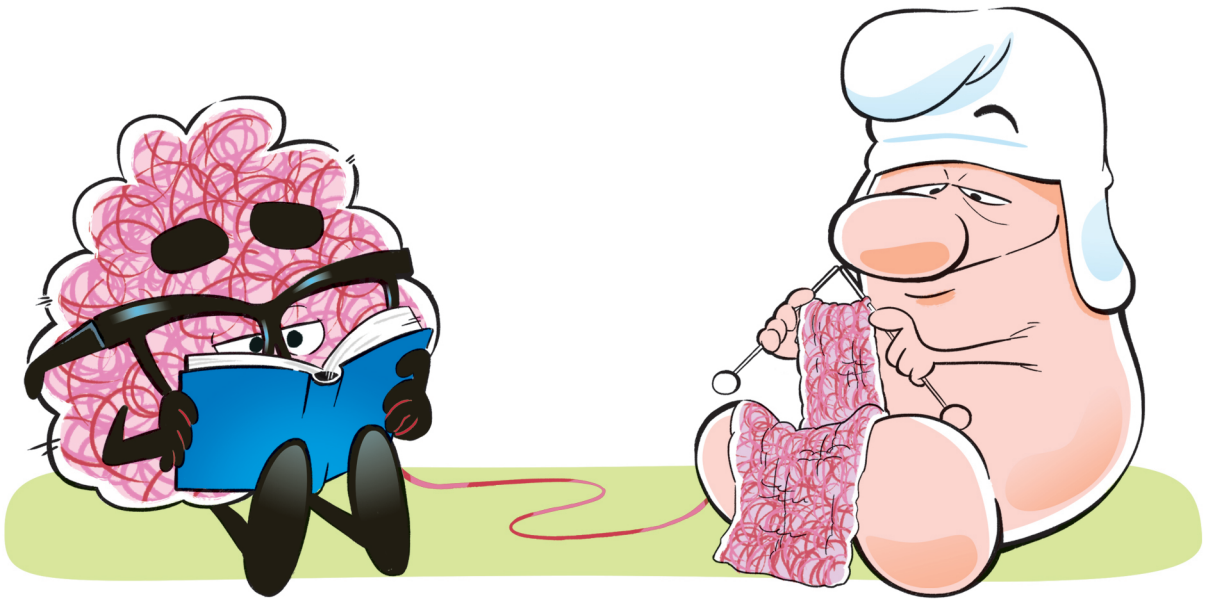
- درس اول: حجم و مساحت کره ۲۴۴
- تمرین ۲۴۶
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۴۹
- درس دوم: حجم هرم و مخروط ۲۵۰
- تمرین ۲۵۲
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۵۷
- درس سوم: سطح و حجم ۲۵۸
- تمرین ۲۶۰
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۶۵
- امتحان نهایی فصل هشتم ۲۶۷

امتحانات هماهنگ استانی

- امتحان هماهنگ استانی - اصفهان ۱۴۰۰ ۲۷۳
- امتحان هماهنگ استانی - کرمان ۱۴۰۰ ۲۷۶
- امتحان هماهنگ استانی - خراسان رضوی ۱۴۰۰ ۲۷۸
- امتحان هماهنگ استانی - آذربایجان شرقی ۱۴۰۱ .. ۲۸۱
- امتحان هماهنگ استانی - مازندران ۱۴۰۱ ۲۸۳
- امتحان هماهنگ استانی - تهران ۱۴۰۱ ۲۸۶

فصل اول

مجموعه‌ها





درس اول: معرفی مجموعه



مفهوم مجموعه

در زندگی روزمره برای مشخص کردن چیزهایی که ویژگی مورد نظر ما را دارند از کلمه‌هایی مانند «دسته»، «گروه» و «مجموعه» استفاده می‌کنیم که هر سه یک معنی را می‌دهند. مثلاً می‌گوییم «دسته‌ای از پرنده‌ها»، «گروهی از پرنده‌ها» یا «مجموعه‌ای از پرنده‌ها». در ریاضیات کلمه «مجموعه» معنی خاصی دارد.

در ریاضیات برای توصیف و نمایش دسته‌ای از اشیای مشخص و متمایز از مجموعه استفاده می‌کنیم. کلمه «مشخص» یعنی اینکه ویژگی اشیای متعلق به مجموعه را طوری توصیف کنیم که هیچ ابهامی ایجاد نشود. کلمه «تتمایز» یعنی اینکه در مجموعه هیچ دو شیئی برابر نیستند.

مثال

می‌توانیم بگوییم «مجموعه عددهای طبیعی کوچک‌تر از ۵»، زیرا با این توصیف معلوم است که منظورمان عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ هستند. اما نمی‌توانیم بگوییم «مجموعه عددهای طبیعی کوچک‌تر از ۵ که ممکن است کسی آن‌ها را دوست نداشته باشد»، زیرا هیچ توصیف مشخصی برای دوست نداشتن عددها نمی‌شناسیم. همچنین می‌توانیم بگوییم «مجموعه عددهای ۱، ۲ و ۳»، اما نمی‌توانیم بگوییم «مجموعه عددهای ۱، ۲ و ۳». با این حال، توافق می‌کنیم که در چنین مواردی، هر عضو تکراری را فقط یک بار به حساب بیاوریم.

مثال

دانش‌آموزان پایه نهم شهر شما در سال تحصیلی جاری افرادی مشخص هستند و یک مجموعه را مشخص می‌کنند. البته، اگر شهر شما بزرگ باشد، ممکن است همه عضوهای این مجموعه را نشناسید!

عضویت

معمولاً مجموعه‌ها را با حروف بزرگ انگلیسی نام‌گذاری می‌کنیم. اگر شیئی مانند a در مجموعه A باشد، می‌گوییم a عضو مجموعه A است و می‌نویسیم $a \in A$ (بخوانید a عضو مجموعه A است). اگر شیئی مانند a عضو مجموعه A نباشد، می‌نویسیم $a \notin A$ (بخوانید a عضو مجموعه A نیست). توجه کنید که لزومی ندارد عضوهای یک مجموعه از یک جنس باشند. مثلاً، ممکن است عدد ۲ و مثلث ABC عضو یک مجموعه باشند.

مثال

فرض کنید A مجموعه عددهای اول کوچک‌تر از ۷ باشد. در این صورت $2 \in A$ ، $3 \in A$ و $5 \in A$ ، اما $7 \notin A$ ، همین‌طور، $4 \notin A$.

نمایش مجموعه‌ها

معمولاً مجموعه‌ها را با نوشتن عضوهایشان بین دو آکلاف نشان می‌دهیم.

مثال

اگر A مجموعه عددهای اول کوچک‌تر از ۷ باشد، مجموعه A را به صورت $\{2, 3, 5\}$ نشان می‌دهیم.

مثال

مجموعه $\{2, \{2\}\}$ دو عضو دارد که ۲ و $\{2\}$ هستند.

فرض کنید $A = \{1, \Delta, \{2\}, \{3, 4\}\}$ در این صورت



$$1 \in A, \Delta \in A, \{2\} \in A, \{3, 4\} \in A, \{\Delta\} \notin A, 2 \notin A$$

ترتیب عضوها

اگر مجموعه‌ای را با دو آکلاد نشان دهیم، ترتیب نوشتن عضوهایش اهمیتی ندارد. همچنین با تکرار عضوهای یک مجموعه، مجموعه جدیدی ساخته نمی‌شود. بنابراین می‌توان فرض کرد که عضوهای مجموعه متمایزند.

اگر A مجموعه عددهای اول کوچک‌تر از ۷ باشد، می‌توانیم بنویسیم $A = \{2, 3, 5\}$ یا $A = \{5, 2, 3\}$.



به جای نمایش مجموعه‌ای به صورت $\{1, 1, 2, 3\}$ می‌نویسیم $\{1, 2, 3\}$ ، یعنی عضوهای تکراری را فقط یک بار می‌نویسیم.

مجموعه‌های بزرگ

گاهی ممکن است نوشتن همه عضوهای مجموعه‌ای ممکن نباشد. مثلاً نوشتن همه عضوهای مجموعه عددهای طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰۰ عملاً ممکن نیست. در این موارد، اگر عضوهای مجموعه الگویی داشته باشند، چند عضو نخست را می‌نویسیم تا الگو مشخص شود، سپس با گذاشتن «...» نشان می‌دهیم که این الگو ادامه دارد و در آخر هم یک یا چند عضو آخر مجموعه را می‌نویسیم. به این ترتیب، مجموعه عددهای طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰۰ را به صورت $\{1, 2, 3, \dots, 998, 999\}$ می‌نویسیم. همچنین، اگر نتوانیم ابتدا یا انتهای مجموعه را مشخص کنیم، باز هم از «...» استفاده می‌کنیم. مثلاً مجموعه عددهای طبیعی را به صورت $\{1, 2, 3, \dots\}$ و مجموعه عددهای صحیح منفی را به صورت $\{\dots, -3, -2, -1\}$ یا $\{-1, -2, -3, \dots\}$ می‌نویسیم.

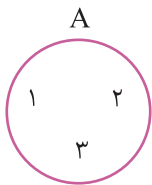
مجموعه $\{3, 6, 9, 12, \dots, 36\}$ را به صورت «مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۳ که از ۳۷ کمترند» توصیف می‌کنیم.



مجموعه $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$ را به صورت «مجموعه مربع‌های اعداد طبیعی» توصیف می‌کنیم.

نمودار ون یک مجموعه

روشی دیگر برای نمایش مجموعه‌ها این است که مجموعه را با نوشتن عضوهایش درون یک منحنی بسته نشان دهیم. این طرز نمایش را **نمودار ون** می‌نامند.



فرض کنید A مجموعه $\{1, 2, 3\}$ باشد. نمودار ون مجموعه A به صورت مقابل است.



مجموعه تهی و مجموعه ناتهی

اگر مجموعه‌ای هیچ عضوی نداشته باشد، آن را **مجموعه تهی** می‌نامیم و با \emptyset یا $\{\}$ نشان می‌دهیم. اگر مجموعه‌ای تهی نباشد، به آن **مجموعه ناتهی** می‌گوییم.

مجموعه عددهای اول و زوج بزرگ‌تر از ۲ تهی است.

مجموعه جواب‌های معادله $x^2 + 1 = 0$ تهی است.

مجموعه اعداد طبیعی‌ای که هم مربع کامل هستند و هم مکعب کامل، ناتهی است. مثلاً عدد ۶۴ عضوی از این مجموعه است، زیرا مربع ۸ و مکعب ۴ است.





مجموعه تهی را نباید با مجموعه‌های $\{\emptyset\}$ ، $\{\{\}\}$ و $\{0\}$ که هر کدام یک عضو دارند اشتباه کرد. همچنین، مجموعه تهی را با نمودار ون نشان نمی‌دهیم.



ممکن است مجموعه تهی خودش عضو یک مجموعه باشد. معلوم است که ساده‌ترین مثال $\{\emptyset\}$ است. مثالی دیگر $\{\emptyset, 1\}$ است.



درست یا نادرست



- الف) عبارت «کتاب‌های سخت ریاضی» یک مجموعه را مشخص می‌کند.
- ب) اگر P مجموعه اعداد اول باشد، آن گاه $2 \in P$.
- پ) کوچک‌ترین عضو مجموعه $\{3, 2, 5\}$ برابر ۳ است.
- ت) مجموعه مثلث‌هایی که دو زاویه باز دارند، تهی است.
- ث) مجموعه $\{1, 2, 2, 3, 4\}$ پنج عضو دارد.



- الف) برای توصیف دسته‌ای از اشیای مشخص و متمایز از استفاده می‌کنیم.
- ب) بزرگ‌ترین عضو مجموعه $\{1, 3, 7, 2, 0\}$ برابر است.
- پ) تعداد عضوهای مجموعه $\{\emptyset, \{2\}, \{2\}$ برابر است.
- ت) مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد، مجموعه نام دارد.

پرسش‌های دو گزینه‌ای



- الف) کدام گزینه توصیف یک مجموعه را مشخص می‌کند؟
 (۱) آدم‌های خوب شهر (۲) انسان‌هایی که تاکنون زیسته‌اند
- ب) کدام عدد عضو مجموعه $\{2, \{1, 2\}, \{1\}\}$ است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲
- پ) کدام یک مجموعه تهی است؟
 (۱) مجموعه جواب‌های صحیح معادله $2x - 3 = 0$
 (۲) مجموعه نقطه‌های روی یک پاره‌خط که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله‌اند
- ت) مجموعه $\{1, 2, 3, 4\}$ چند عضو کمتر از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 19\}$ دارد؟
 (۱) ۱۵ (۲) ۱۶
- ث) چند عضو باید به مجموعه $\{2, 4, 6\}$ اضافه کنیم تا مجموعه مضرب‌های طبیعی ۲ که از ۲۰ کوچک‌تر هستند، به دست بیاید؟
 (۱) ۶ (۲) ۷



۱) در هر مورد، مشخص کنید که عبارت داده شده یک مجموعه را مشخص می‌کند یا خیر. سپس، مجموعه‌ها را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

الف) اعداد صحیح یک‌رقمی بزرگ‌تر از ۶ ب) پنج ماه از سال

پ) سه رنگ شاد

ت) اعداد طبیعی بین ۱۷ و ۱۸

ث) چهار عدد اول دورقمی

ج) اعداد گویای مثبت مانند $\frac{a}{b}$ که $a+b=7$

چ) جواب‌های معادله $3x-5=14$

ح) اعداد طبیعی‌ای که ۵ شمارنده آن‌هاست

۲) مولوی می‌گوید: «ای عاشقان، ای عاشقان آن کس که ببند روی او / شوریده گردد عقل او، آشفته گردد خوی او». آیا عبارت «ای عاشقان» در این بیت مجموعه‌ای از انسان‌ها را مشخص می‌کند؟

۳) متناظر با هر عبارت، یک مجموعه بنویسید و تعداد عضوهای هر مجموعه را تعیین کنید.

الف) اعداد صحیح بین -۵ و ۸

ب) اعداد اول بین ۱۰ و ۲۰

پ) عددهای اول زوج

ت) عددهای دورقمی مربع کامل

۴) متناظر با هر عبارت، یک مجموعه بنویسید.

الف) اعداد طبیعی فرد

ب) اعداد صحیح به صورت $5k+2$ (k عددی طبیعی است)

۵) سه مجموعه متفاوت بنویسید که ۳ و ۵ عضو آن‌ها باشند.

۶) سه عبارت بنویسید که مجموعه $\{2\}$ را توصیف کنند.

۷) برای توصیف مجموعه‌های زیر، یک عبارت بنویسید.

ب) $\{2, 4, 6, 8\}$

الف) $\{3, 5, 7\}$

ت) $\{-6, -3, 0, 3, 6, 9\}$

پ) $\{-4, -2, 0, 2, 4\}$

ج) $\{3, 6, 9, 12, \dots\}$

ث) $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

ح) $\{1, 8, 27, 64, 125, \dots\}$

چ) $\{10, 12, 14, \dots, 98\}$



۸ اگر A مجموعه اعداد طبیعی زوج و کوچک‌تر از 20 باشد، درستی یا نادرستی هر مورد را تعیین کنید.

- الف) $0 \in A$ ب) $12 \in A$ پ) $13 \notin A$

۹ اگر $A = \{a, \{a\}, \{a, b\}, c\}$ ، در هر مورد مشخص کنید حکم داده شده درست است یا خیر.

- الف) $a \in A$ ب) $b \notin A$ پ) $\{a\} \in A$
 ت) $\{c\} \in A$

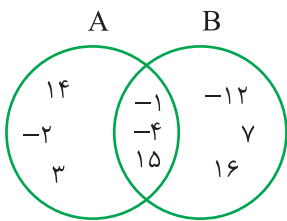
۱۰ فرض کنید $A = \{1, 2, \{1, 2\}, 3, \{4\}\}$. در هر مورد، نماد « \in » یا « \notin » را طوری قرار دهید که حکم حاصل درست باشد.

- الف) $\{1\} \in A$ ب) $2 \in A$ پ) $\{1, 2\} \in A$
 ت) $4 \in A$ ث) $\{1, 2, 3\} \in A$ ج) $\{3, \{4\}\} \in A$

۱۱ مجموعه عددهای زوج یک‌رقمی را با نمودار ون نشان دهید.

۱۲ نمودار ون مجموعه‌های A و B در شکل مقابل رسم شده است.

الف) مجموعه‌های A و B را با نوشتن عضوهایشان مشخص کنید.



ب) بزرگ‌ترین عضو مجموعه A چه عددی است؟

پ) کوچک‌ترین عضو مجموعه B چه عددی است؟

ت) کوچک‌ترین عضوی که هم در مجموعه A و هم در مجموعه B است، چه عددی است؟

۱۳ الف) دو مجموعه $A = \{-3, -1, 0, 8, 9\}$ و $B = \{-1, 5, 7, 8\}$ را در نظر بگیرید و

نمودار ون مقابل را کامل کنید.

ب) مجموعه عضوهایی را که هم در مجموعه A و هم در مجموعه B هستند، بنویسید.

پ) مجموعه عضوهایی را که در مجموعه B هستند ولی در مجموعه A نیستند، بنویسید.

۱۴ سه مجموعه متفاوت مثال بزنید که هر یک از آن‌ها مجموعه تهی باشد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. کدام گزینه یک مجموعه را مشخص نمی‌کند؟

- (۱) عددهای زوج کوچک‌تر از ۱۰
 (۲) عددهای اول بزرگ‌تر از ۳
 (۳) سه عدد اول بین ۱۰ و ۲۰
 (۴) عددهای اول بین ۲۵ و ۲۸

۲. مجموعه عددهای صحیح بین $\sqrt{13}$ و $\sqrt{98}$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

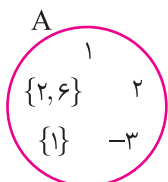
۳. کدام گزینه عضو مجموعه $\{1, \{2, 3\}, \{4\}, 5, 6\}$ است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\{3\}$ (۴) ۴

۴. کدام گزینه عضو مجموعه $\{1, \{2\}, \{3, 4\}, 5, 6\}$ نیست؟

- (۱) ۱ (۲) $\{2\}$ (۳) ۳ (۴) ۶

۵. نمودار ω مجموعه A در شکل مقابل داده شده است. کدام گزینه درست نیست؟



(۱) $1 \in A$

(۲) $\{1\} \in A$

(۳) $-4 \notin A$

(۴) $\{2, 6\} \notin A$

۶. مجموعه $\{1, \{1\}, \{1, 2\}, \emptyset, \{2, 1\}\}$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۷. مجموعه $\{1, \{1\}, \{1, 2\}, \emptyset, \{\emptyset\}\}$ چند عضو دارد که عضو مجموعه $\{1, \{2, 1\}, \{\}, \{\{\emptyset\}\}$ نیستند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸. اگر مجموعه $\{1, 2, x, x^2 + 1\}$ دو عضو داشته باشد، مقدار x کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) صفر

۹. کدام یک مجموعه تهی است؟

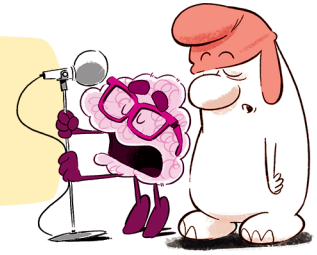
- (۱) مجموعه عددهای اول بین ۲۵ و ۳۰
 (۲) مجموعه عددهای اول کوچک‌تر از ۱۰
 (۳) مجموعه مثلث‌هایی که دو زاویه باز دارند
 (۴) مجموعه مثلث‌هایی که دو زاویه تند دارند

۱۰. کدام یک مجموعه تهی نیست؟

- (۱) مجموعه مضرب‌های ۱۳ بین ۴۰ و ۵۰
 (۲) مجموعه عددهای اول دورقمی
 (۳) مجموعه عددهای اول بین ۵۵ و ۵۸
 (۴) مجموعه مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویه باز دارند



درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها



مجموعه‌های برابر

اگر هر عضو مجموعه A عضوی از مجموعه B باشد و هر عضو مجموعه B نیز عضوی از مجموعه A باشد، می‌گوییم مجموعه‌های A و B برابرند و می‌نویسیم $A=B$.

مثال

- فرض کنید A مجموعه شماره‌های اول عدد ۱۵ باشد. در این صورت $A=\{3, 5\}$. همچنین، فرض کنید B مجموعه شماره‌های اول عدد ۴۵ باشد. در این صورت $B=\{3, 5\}$. بنابراین $A=B$.
- مجموعه حروف کلمه «مادر» با مجموعه حروف کلمه «مراد» برابر است، زیرا هر دو $\{ر, د, ا, م\}$ هستند.

مثال

- فرض کنید $A=\left\{1, -1, \frac{5}{4}, a\right\}$. چون مجموعه‌های دو طرف تساوی برابرند، پس هر عضو هر کدام از آن‌ها باید عضو دیگری هم باشد. چون ۱ عضو مجموعه سمت چپ است، پس باید عضو مجموعه سمت راست هم باشد. در نتیجه $b=1$. از طرف دیگر، چون ۳ عضو مجموعه سمت راست است، پس باید عضو مجموعه سمت چپ هم باشد. در نتیجه $a=3$.

مجموعه‌های نابرابر

اگر یکی از دو مجموعه A و B عضوی داشته باشد که در دیگری نباشد، می‌گوییم مجموعه‌های A و B برابر نیستند و می‌نویسیم $A \neq B$.

مثال

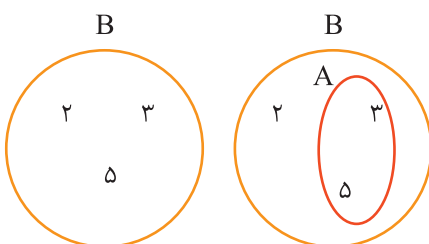
- فرض کنید A مجموعه شماره‌های اول عدد ۳۰ باشد. در این صورت $A=\{2, 3, 5\}$. همچنین فرض کنید B مجموعه شماره‌های اول عدد ۴۲ باشد. در این صورت $B=\{2, 3, 7\}$. توجه کنید که $5 \in A$ اما $5 \notin B$ ، پس $A \neq B$. البته می‌توانستیم بگوییم $7 \in B$ اما $7 \notin A$ ، پس $A \neq B$.

زیرمجموعه

اگر هر عضو مجموعه A عضوی از مجموعه B باشد، می‌گوییم مجموعه A زیرمجموعه مجموعه B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$.

مثال

هر عضو مجموعه $A=\{1, 2, 3\}$ عضوی از مجموعه $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ است. پس A زیرمجموعه B است.



مثال

فرض کنید A مجموعه شماره‌های اول عدد ۴۵ باشد. در این صورت $A=\{3, 5\}$. همچنین، فرض کنید B مجموعه شماره‌های اول عدد ۳۰ باشد. در این صورت $B=\{2, 3, 5\}$. معلوم است که هر عضو مجموعه A عضوی از مجموعه B است، یعنی $A \subseteq B$. نمودار B را در شکل سمت چپ نشان داده‌ایم. اگر بخواهیم نمودار A را هم روی این شکل رسم کنیم، باید مانند شکل سمت راست دور عدد‌های ۳ و ۵ یک منحنی بسته بکشیم.

مثال فرض کنید A مجموعهٔ مثلث‌های متساوی‌الاضلاع و B مجموعهٔ مثلث‌های متساوی‌الساقین باشد. چون هر مثلث متساوی‌الاضلاع مثلثی متساوی‌الساقین نیز هست، پس $A \subseteq B$.

زیرمجموعه نبودن

اگر مجموعهٔ A عضوی داشته باشد که عضوی از مجموعهٔ B نباشد، می‌گوییم مجموعهٔ A زیرمجموعهٔ مجموعهٔ B نیست و می‌نویسیم $A \not\subseteq B$.

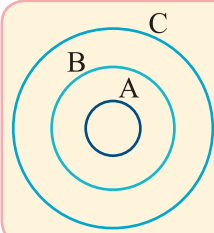
مثال فرض کنید A مجموعهٔ مثلث‌های متساوی‌الساقین و B مجموعهٔ مثلث‌های متساوی‌الاضلاع باشد. چون مثلثی متساوی‌الساقین وجود دارد که متساوی‌الاضلاع نیست (مثلاً مثلث با طول ضلع‌های ۱، ۵ و ۵)، پس $A \not\subseteq B$.

اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، آن‌گاه $\{1, 2, 3\} \subseteq A$ ، $\{2, 4\} \subseteq A$ ، $\{\{1\}\} \not\subseteq A$ و $\{1, 2, 3, 4\} \subseteq A$.

فرض کنید $A = \{a, b, \{c\}, \{d, e\}\}$. در این صورت $\{a, b\} \subseteq A$ ، $\{d, e\} \not\subseteq A$ و $\{\{c\}\} \subseteq A$.

اگر $A = \{0, 2, 3, \{1\}, \{2, 3\}\}$ ، مجموعهٔ $\{2, 3\}$ هم عضو مجموعهٔ A است هم زیرمجموعهٔ آن، یعنی $\{2, 3\} \in A$ و $\{2, 3\} \subseteq A$.

روابط زیرمجموعه بودن



اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه $A \subseteq A$ و $\emptyset \subseteq A$.

فرض کنید A ، B و C سه مجموعه باشند. اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ ، آن‌گاه $A \subseteq C$.

نوشتن زیرمجموعه‌های یک مجموعه

هر زیرمجموعهٔ ناتهی یک مجموعه از چند عضو این مجموعه تشکیل شده است. برای نوشتن همهٔ زیرمجموعه‌های یک مجموعه، بهتر است ابتدا زیرمجموعهٔ صفرعضوی آن را (که مجموعهٔ تهی است) بنویسیم، سپس زیرمجموعه‌های یک‌عضوی آن را بنویسیم، بعد زیرمجموعه‌های دوعضوی آن را بنویسیم و همین‌طور ادامه دهیم تا در نهایت خود مجموعه را بنویسیم.

مثال همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{1, 2, 3, 4\}$ را در زیر نوشته‌ایم:

- صفرعضوی: \emptyset
- یک‌عضوی: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$
- دوعضوی: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$
- سه‌عضوی: $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$
- چهارعضوی: $\{1, 2, 3, 4\}$

مثال مجموعهٔ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ هشت زیرمجموعه دارد که ۲ عضوی از آن‌هاست. این زیرمجموعه‌ها عبارت‌اند از

- $\{2\}, \{2, 1\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 1, 3\}, \{2, 1, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 1, 3, 4\}$



نمایش مجموعه‌های مهم اعداد

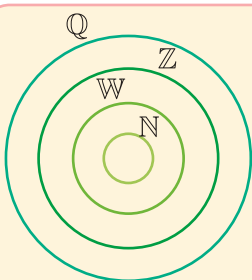
برای چند مجموعه معروف از عددها نمادهای خاصی وجود دارد.

● مجموعه عددهای طبیعی را با \mathbb{N} نشان می‌دهیم و می‌نویسیم
 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

● مجموعه عددهای حسابی را با \mathbb{W} نشان می‌دهیم و می‌نویسیم
 $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

● مجموعه عددهای صحیح را با \mathbb{Z} نشان می‌دهیم و می‌نویسیم
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

● مجموعه عددهای گویا را با \mathbb{Q} نشان می‌دهیم.



چون هر عدد طبیعی، عددی حسابی است و هر عدد حسابی، عددی صحیح است و هر عدد صحیح، عددی گویاست، پس

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

نمایش مجموعه‌ها به کمک نمادهای ریاضی

اگر بخواهیم مجموعه‌ای را به صورت $\{ \dots | \dots \}$ نشان دهیم، در سمت چپ نماد «|» صورت کلی عضوهای مجموعه و در سمت راست نماد «|» شرط یا شرط‌هایی که این عضو را به طور کامل توصیف می‌کنند، می‌نویسیم. نماد «|» را می‌خوانیم «به طوری که».



● اگر E مجموعه عددهای طبیعی زوج باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$E = \{2, 4, 6, \dots\}$$

توجه کنید که مجموعه E از همه عددهای به صورت $2k$ تشکیل شده است که در آن‌ها k عددی طبیعی است. بنابراین

$$E = \{2k | k \in \mathbb{N}\}$$

تساوی بالا را می‌خوانیم «مجموعه E برابر است با مجموعه عددهایی مانند $2k$ به طوری که k عضو مجموعه \mathbb{N} است».

● اگر O مجموعه عددهای طبیعی فرد باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$O = \{1, 3, 5, \dots\}$$

توجه کنید که مجموعه O از همه عددهای به صورت $2k-1$ تشکیل شده است که در آن‌ها k عددی طبیعی است. بنابراین

$$O = \{2k-1 | k \in \mathbb{N}\}$$

● مجموعه عددهای گویا را می‌توانیم به صورت زیر نشان دهیم:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

● اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، می‌توانیم A را به شکل‌های زیر نشان دهیم:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\} \quad \text{یا} \quad A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 4\}$$

● مجموعه $B = \{2, 4, 6, 8\}$ را در نظر بگیرید. می‌توانیم بنویسیم

$$B = \{x \mid x \in E, x < 10\} \quad \text{یا} \quad B = \{2x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 4\}$$





در هر مورد، مجموعه داده شده را با نوشتن عضوهای مشخص کرده‌ایم.

الف) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x < 3\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

ب) $B = \{2x \mid x \in \mathbb{N}, 3 < x < 7\} = \{8, 10, 12\}$

اگر مجموعه‌ای با عضوهای مشخص شده باشد، نمایش آن با نمادهای ریاضی منحصر به فرد نیست.



مجموعه‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \{0, 4, 8, 12, \dots, 24, 28\}, \quad B = \{1, 6, 11, \dots, 26, 31\}$$

عضوهای مجموعه A مضرب‌های غیرمنفی عدد ۴ هستند که از ۲۸ کوچک‌تر یا با آن برابرند. بنابراین، می‌توان نوشت

$$A = \{4k \mid k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq 7\} = \{4k \mid k \in \mathbb{W}, k \leq 7\}$$

هر عضو مجموعه B یک واحد از مضربی غیرمنفی از عدد ۵ که از ۳۰ کوچک‌تر یا با آن برابر است، بیشتر است. بنابراین، می‌توان نوشت

$$B = \{5k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq 6\}$$

راه‌های دیگری هم برای نمایش مجموعه B به کمک نمادهای ریاضی وجود دارد، مثلاً،

$$B = \{5k - 4 \mid k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 7\} \quad \text{یا} \quad B = \{5k + 6 \mid k \in \mathbb{Z}, -1 \leq k \leq 5\}$$



مجموعه $\{0\}$ را می‌توانیم به صورت‌های زیر بنویسیم:

$$\left\{x \mid x \in \mathbb{W}, -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right\} \quad \text{یا} \quad \left\{x \mid x \in \mathbb{Z}, -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}\right\}$$

مسئله‌های تکمیلی

مسئله ۱- اگر $\{3x + 7, -4\} = \{y - 1, 5x + 1\}$ ، مقادیر x و y را مشخص کنید.

راه‌حل: چون -4 عضو مجموعه سمت چپ تساوی است، پس باید عضو مجموعه سمت راست تساوی نیز باشد. بنابراین یا $y - 1$ برابر -4 است، یا $5x + 1$ برابر -4 است. این دو حالت را بررسی می‌کنیم.

حالت ۱: $y - 1 = -4$ ، پس $y = -3$. توجه کنید که در این حالت عضو $3x + 7$ از مجموعه سمت چپ تساوی باید با عضو $5x + 1$ از مجموعه سمت راست تساوی برابر باشد. بنابراین

$$3x + 7 = 5x + 1 \Rightarrow 5x - 3x = 7 - 1 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

در نتیجه در این حالت $x = 3$ و $y = -3$.

حالت ۲: $5x + 1 = -4$ ، پس $5x = -5$ ، یعنی $x = -1$. توجه کنید که در این حالت عضو $3x + 7$ از مجموعه سمت چپ تساوی باید با عضو $y - 1$ از مجموعه سمت راست تساوی برابر باشد. بنابراین

$$\begin{cases} 3x + 7 = y - 1 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow 3 \times (-1) + 7 = y - 1 \Rightarrow -3 + 7 = y - 1 \Rightarrow 4 = y - 1 \Rightarrow y = 5$$

در نتیجه در این حالت $x = -1$ و $y = 5$.

مسئله ۲- فرض کنید $A = \{1, 2, 0, x\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, y\}$. اگر $A \subseteq B$ ، مقادیر x و y را پیدا کنید.

راه‌حل: چون $0 \in A$ و $A \subseteq B$ ، پس $0 \in B$ ، چون صفر عضو B است، پس $y = 0$. همین‌طور، چون $x \in A$ و $A \subseteq B$ ، پس

$x \in B$. بنابراین x یکی از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ و صفر است.



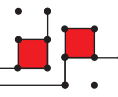
تمرین

درست یا نادرست



- (الف) هر مجموعه زیرمجموعه خودش است.
- (ب) هر مجموعه زیرمجموعه تهی است.
- (پ) هر مجموعه دست کم دو زیرمجموعه دارد.
- (ت) مجموعه تهی هیچ زیرمجموعه‌ای ندارد.
- (ث) مجموعه $\{\emptyset\}$ یک زیرمجموعه دارد.

کامل کنید



- (الف) اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ ، آن گاه
 (ب) مجموعه زیرمجموعه همه مجموعه‌هاست.
 (پ) تعداد زیرمجموعه‌های یک عضو مجموعه $\{1, 2, 3\}$ برابر است.
 (ت) اگر عضوی در مجموعه A باشد و در مجموعه B نباشد، آن گاه مجموعه A مجموعه B نیست.
 (ث) مجموعه $\{2x | x \in \mathbb{N}\}$ برابر مجموعه عددهای طبیعی است.

پرسش‌های دو گزینه‌ای



- (الف) کدام رابطه درست است؟
 (۱) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W}$ (۲) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{W}$
- (ب) کدام یک زیرمجموعه مجموعه $\{1, \{2\}, \{2, 3\}\}$ است؟
 (۱) $\{\{2\}\}$ (۲) $\{1, 2\}$
- (پ) کدام توصیف برای مجموعه $\{2k+1 | k \in \mathbb{W}\}$ درست است؟
 (۱) مجموعه عددهای طبیعی فرد (۲) مجموعه عددهای طبیعی زوج
- (ت) نمایش ریاضی مجموعه عددهای گویا کدام است؟
 (۱) $\left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$ (۲) $\left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\}$
- (ث) مجموعه $\left\{ \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{Z}, -4 < x < -2 \right\}$ برابر کدام مجموعه است؟
 (۱) $\left\{ \frac{1}{x+2} \mid x \in \mathbb{Z}, -6 < x < -4 \right\}$ (۲) $\left\{ \frac{1}{x-2} \mid x \in \mathbb{Z}, -6 < x < -4 \right\}$



۱) فرض کنید A مجموعه لاک پشت‌هایی باشد که می‌توانند از روی کوه دماوند بپرند و B مجموعه جواب‌های معادله $x^2 + 1 = 0$ باشد. آیا $A = B$ ؟

۲) x و y چه عددهایی باشند که مجموعه‌های $\{y, 7, -\circ/5\}$ و $\{-\frac{1}{2}, x, \sqrt{9}\}$ برابر باشند؟

۳) اگر $A = \{a, \{a\}, \{a, b\}, c\}$ ، در هر مورد مشخص کنید که حکم داده شده درست است یا خیر.

الف) $a \subseteq A$ ب) $\{a\} \subseteq A$ پ) $\{c\} \subseteq A$

ت) $\{a, b\} \subseteq A$ ث) $\{a, c\} \subseteq A$ ج) $\{\{a\}\} \subseteq A$

۴) فرض کنید $A = \{a, b, \{c\}, \{d, e\}\}$. در هر مورد، نماد « \subseteq » یا « $\not\subseteq$ » را طوری قرار دهید که حکم حاصل درست باشد.

الف) $\{a\} \circ A$ ب) $\{a, \{b\}\} \circ A$ پ) $\{c\} \circ A$ ت) $\{\{d, e\}\} \circ A$

۵) فرض کنید A مجموعه همه مضرب‌های طبیعی عدد ۲ و B مجموعه همه مضرب‌های طبیعی عدد ۴ باشد. آیا $A \subseteq B$ ؟ آیا $B \subseteq A$ ؟

۶) مجموعه‌هایی مانند A و B مثال بزنید که $A \in B$ و $A \not\subseteq B$.

۷) اگر $A = \{1, 2, 3, 4 - k\}$ ، $B = \{1, 2, 3, 4\}$ و $A \subseteq B$ ، تمام مقادیر ممکن k را به دست آورید.

۸) همه زیرمجموعه‌های مجموعه $\{a, b, c\}$ را بنویسید.

۹) تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی و تمام زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ را بنویسید.



۱۰ در هر مورد، مجموعه داده شده را با نمادهای ریاضی بنویسید.

الف) $A = \{2, 3, 4, 5, 6\} =$

ب) $B = \{2, 4, 8, 16, 32\} =$

پ) $C = \{-3, -4, -5, \dots\} =$

ت) $D = \{3, 6, 9, \dots\} =$

ث) $E = \{-1, 3, 7, 11, 15, 19\} =$

ج) $F = \left\{ -1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{25} \right\} =$

چ) $G = \{0, 7, 26, 63, \dots\} =$

ح) $H = \left\{ \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, \dots, \frac{10}{\sqrt{13}} \right\} =$

خ) $I = \{1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots\} =$

د) $J = \left\{ 2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \dots \right\} =$

۱۱ اعضای مجموعه‌های زیر را بنویسید.

الف) $A = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}, 0 < x \leq 2\} =$

ب) $B = \left\{ 2x - 7 \mid x \in \mathbb{N}, \frac{12}{x} \in \mathbb{Z} \right\} =$

پ) $C = \left\{ \frac{2k}{y} \mid k \in \mathbb{Z}, k \leq 3 \right\} =$

ت) $D = \{mn \mid m, n \in \{1, 2, 3\}\} =$

ث) $E = \{(-1)^y y^2 \mid y \in \mathbb{N}\} =$

ج) $F = \{x \mid x \in \mathbb{N}, (x+10)(x+9) \dots (x-9)(x-10) = 0\} =$

ح) $G = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^2-1}{x^2+1} \right\} =$

چ) $H = \{3n\sqrt{2} \mid n \in \mathbb{W}\} =$

۱۲ مجموعه $\left\{ x \mid x = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, ab = 15 \right\}$ را با عضوهایش بنویسید.

۱۳ مجموعه $\{\sqrt{x} \mid x \in \mathbb{N}, 100 \leq x \leq 1000\}$ چند عضو طبیعی دارد؟

۱) مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ چند زیرمجموعه دارد که a و b هر دو عضو آن‌ها هستند؟ آن‌ها را بنویسید.

۲) اگر دو مجموعه $\{x-5, 5-x\}$ و $\{2y+2\}$ برابر باشند، مقدار $y-x$ را پیدا کنید.

۳) اگر $\{2x+3, -1\} = \{x-2, 2y-3, 5\}$ ، مقادیر x و y را به دست آورید.

۴) A, B و C سه مجموعه‌اند. اگر $A \neq B$ و $B \neq C$ ، آیا لزوماً $A \neq C$ ؟

۵) همهٔ زیرمجموعه‌های سه‌عضوی مجموعه $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 7\}$ را بنویسید.

۶) اگر $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ، اعضای مجموعه‌های زیر را بنویسید:

الف) $A = \{-x \mid x \in M, x^2 < 20\} =$

ب) $B = \left\{ x \in A \mid \frac{x+5}{2} \in \mathbb{Z} \right\} =$



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱ فرض کنید $A = \{4, 5, 6, 7\}$ ، $B = \{4, a, b, c\}$ و $C = \{5, a, b, 4\}$. اگر $A = B = C$ ، مقدار $ab + c$ کدام است؟

- ۴۷ (۱) ۴۶ (۲) ۴۱ (۳) ۳۷ (۴)

۲ اگر $\{x, y-1\} = \{2x-5, 5\}$ ، مقدار $x+y$ کدام است؟

- ۱۱ (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴)

۳ اگر $A = \{a, \{b\}, \{a, b\}, c\}$ ، کدام مجموعه زیرمجموعه A است؟

- {a} (۱) {a, b} (۲) {{a, b}} (۳) {{b}, {c}} (۴)

۴ اگر $A = \{1, \{1, 2\}, 3\}$ ، کدام گزینه درست نیست؟

- {1, 2} \subseteq A (۱) {1} \subseteq A (۲) {1, 2, 3} \subseteq A (۳) {1, 3} \subseteq A (۴)

۵ اگر $A = \{a, b, \{a, b\}, \{c\}\}$ ، کدام مجموعه زیرمجموعه A نیست؟

- {a} (۱) {b} (۲) {c} (۳) {a, b} (۴)

۶ اگر $A = \{1, 2, \{3, 4\}, 5, \{6\}\}$ ، کدام گزینه درست نیست؟

- {6} \in A (۱) {{6}} \subseteq A (۲) {3, 4} \subseteq A (۳) {5, {6}} \subseteq A (۴)

۷ اگر $A = \{a, b, c, \{b\}, \{a, c\}\}$ ، کدام گزینه هم عضو A است هم زیرمجموعه آن؟

- a (۱) b (۲) {a} (۳) {b} (۴)

۸ اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 4 < x^2 \leq 25\}$ ، مجموعه A چند عضو دارد؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴)

۹ بزرگ‌ترین عضو مجموعه $A = \left\{x \mid x \in \mathbb{Z}, \frac{x}{2} < -3\right\}$ کدام است؟

- ۷ (۱) -۶ (۲) -۵ (۳) (۴) بزرگ‌ترین عضو ندارد.

۱۰ مجموعه $A = \{x \mid 20 \leq x \leq 48, x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$ چند عضو دارد؟

- ۱۱ (۱) ۱۰ (۲) ۹ (۳) ۲۸ (۴)

درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها



اشتراک دو مجموعه

اشتراک دو مجموعه A و B مجموعه‌ای است که بین مجموعه‌های A و B مشترک است، یعنی هم‌عضو مجموعه A و هم‌عضو مجموعه B هستند. اشتراک دو مجموعه A و B را با $A \cap B$ نشان می‌دهیم. می‌توان نوشت

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$

برای نوشتن اشتراک دو مجموعه، عضوهای مشترک آن‌ها را در یک مجموعه می‌نویسیم.

مثال فرض کنید $A = \{1, 3, 5, 7\}$ و $B = \{0, 1, 2, 5\}$. توجه کنید که عضوهای ۱ و ۵ در هر دو مجموعه مشترک هستند. بنابراین $A \cap B = \{1, 5\}$.

مثال فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ ، $B = \{2, 4, 6\}$ و $C = \{1, 4, 6\}$. می‌خواهیم مجموعه‌های $A \cap (B \cap C)$ و $(A \cap B) \cap C$ را مشخص کنیم. ابتدا توجه کنید که

$$B \cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{1, 4, 6\} = \{4, 6\}$$

پس

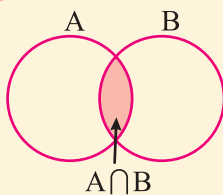
$$A \cap (B \cap C) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\} \cap \{4, 6\} = \{6\}$$

به همین ترتیب،

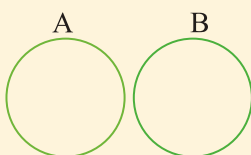
$$A \cap B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\} \cap \{2, 4, 6\} = \{2, 6\}, \quad (A \cap B) \cap C = \{2, 6\} \cap \{1, 4, 6\} = \{6\}$$

اگر A ، B و C سه مجموعه باشند، آن‌گاه مجموعه‌های $(A \cap B) \cap C$ و $A \cap (B \cap C)$ برابرند و آن‌ها را با $A \cap B \cap C$ نیز نشان می‌دهیم.

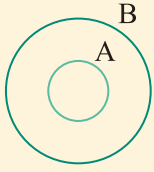
نمودار ون دو مجموعه



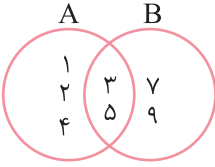
اگر درباره وضعیت مجموعه‌های A و B نسبت به هم چیزی ندانیم، نمودار ون آن‌ها را به صورت مقابل رسم می‌کنیم.



معلوم است که اگر مجموعه‌های A و B هیچ عضو مشترکی نداشته باشند، یعنی $A \cap B = \emptyset$ ، نمودار ون آن‌ها به صورت مقابل است.



اگر $A \subseteq B$ ، آن‌گاه نمودار و مجموعه‌های A و B را به صورت مقابل رسم می‌کنیم.



مثال فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{3, 5, 7, 9\}$. در این صورت عضوهای مشترک مجموعه‌های A و B عددهای ۳ و ۵ هستند، یعنی $A \cap B = \{3, 5\}$. نمودار و این مجموعه‌ها به صورت مقابل است.



روابط اشتراک دو مجموعه

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند.

$A \cap B \subseteq B$ و $A \cap B \subseteq A$

اگر $A \subseteq B$ ، آن‌گاه $A \cap B = A$ و برعکس، یعنی اگر $A \cap B = A$ ، آن‌گاه $A \subseteq B$.

$A \cap \emptyset = \emptyset$ و $A \cap A = A$

$A \cap B = B \cap A$

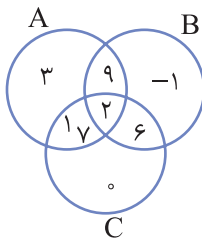
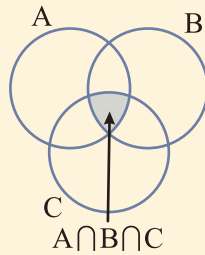


چون $N \subseteq Z$ ، پس $N \cap Z = N$.

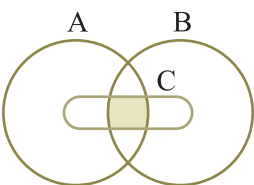


نمودار و سه مجموعه

نمودار و سه مجموعه A ، B و C در حالت کلی به صورت زیر رسم می‌شود:



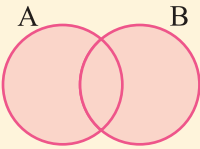
مثال فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 7, 9\}$ ، $B = \{-1, 2, 6, 9\}$ و $C = \{0, 1, 2, 7, 6\}$. نمودار و این سه مجموعه به صورت مقابل است. از روی این نمودار معلوم می‌شود که $A \cap B = \{2, 9\}$ ، $B \cap C = \{2, 6\}$ ، $C \cap A = \{1, 2, 7\}$ ، $A \cap B \cap C = \{2\}$



مثال ناحیه سایه‌دار در نمودار و مقابل را در نظر بگیرید. توجه کنید که ناحیه سایه‌دار، اشتراک مجموعه‌های $A \cap B$ و C است، یعنی مجموعه مورد نظر می‌شود $(A \cap B) \cap C$.



اجتماع دو مجموعه



اجتماع دو مجموعه A و B مجموعه همهٔ عضوهای است که عضو مجموعه A یا عضو مجموعه B هستند. اجتماع دو مجموعه A و B را با $A \cup B$ نشان می‌دهیم. می‌توان نوشت

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

برای نوشتن اجتماع دو مجموعه، همهٔ عضوهای آن‌ها را در یک مجموعه می‌نویسیم (عضوهای مشترک را یک بار می‌نویسیم).

مثال

○ فرض کنید $A = \{-1, 0, 2, 7\}$ و $B = \{-2, -1, 3, 7\}$. در این صورت مجموعه $A \cup B$ از همهٔ عضوهای A و B تشکیل شده است، یعنی $A \cup B = \{-2, -1, 0, 2, 3, 7\}$.

○ فرض کنید $A = \{a, b, \{a, b\}, c\}$ و $B = \{a, c, \{b, c\}\}$. در این صورت

$$A \cup B = \{a, b, c, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

مثال

فرض کنید $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{-1, 0, 1\}$ و $C = \{-1, 3, 5\}$. می‌خواهیم مجموعه‌های $(A \cup B) \cup C$ و $A \cup (B \cup C)$ را مشخص کنیم. ابتدا توجه کنید که

$$B \cup C = \{-1, 0, 1\} \cup \{-1, 3, 5\} = \{-1, 0, 1, 3, 5\}$$

در نتیجه

$$A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3\} \cup \{-1, 0, 1, 3, 5\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 5\}$$

از طرف دیگر،

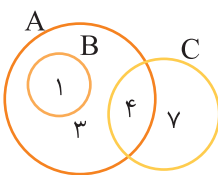
$$A \cup B = \{1, 2, 3\} \cup \{-1, 0, 1\} = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

در نتیجه

$$(A \cup B) \cup C = \{-1, 0, 1, 2, 3\} \cup \{-1, 3, 5\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 5\}$$

اگر A ، B و C سه مجموعه باشند، آن‌گاه مجموعه‌های $(A \cup B) \cup C$ و $A \cup (B \cup C)$ با هم برابرند و آن‌ها را با $A \cup B \cup C$ نیز نشان می‌دهیم.

مثال



نمودار ون مجموعه‌های A ، B و C در شکل مقابل رسم شده است. مجموعه $A \cap (B \cup C)$ را مشخص می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که

$$A = \{1, 3, 4\}, \quad B = \{1\}, \quad C = \{4, 7\}$$

بنابراین

$$B \cup C = \{1\} \cup \{4, 7\} = \{1, 4, 7\}, \quad A \cap (B \cup C) = \{1, 3, 4\} \cap \{1, 4, 7\} = \{1, 4\}$$

روابط اجتماع دو مجموعه

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند.

○ $B \subseteq A \cup B$ و $A \subseteq A \cup B$

○ اگر $A \subseteq B$ ، آن‌گاه $A \cup B = B$ و برعکس، یعنی اگر $A \cup B = B$ ، آن‌گاه $A \subseteq B$.

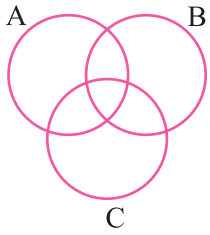
○ $A \cup \emptyset = A$ و $A \cup A = A$

○ $A \cup B = B \cup A$

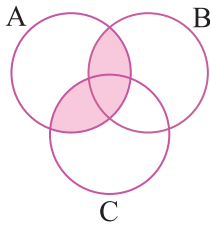
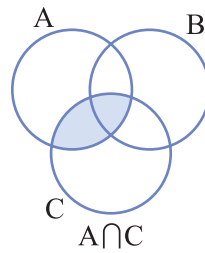
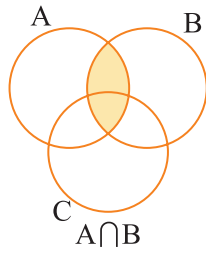
○ $A \cup (A \cap B) = A$ و $A \cap (A \cup B) = A$



چون $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ ، پس $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$.



می‌خواهیم مجموعه $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ را در نمودار وِن مقابل سایه‌دار کنیم. برای این کار، ابتدا مجموعه‌های $A \cap B$ و $A \cap C$ را سایه می‌زنیم.

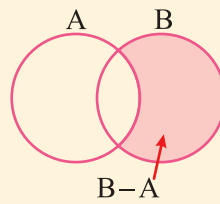
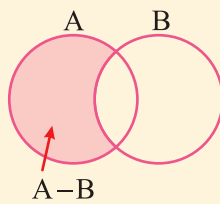


بنابراین مجموعه $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ ناحیه سایه‌دار در نمودار مقابل است.

تفاضل دو مجموعه

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. مجموعه $A - B$ (بخوانید A منهای B) مجموعه همه عضوهایی از مجموعه A است که عضو مجموعه B نیستند. در حقیقت،

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

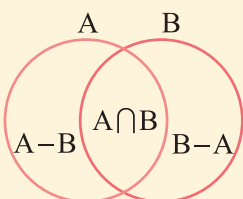


برای نوشتن مجموعه $A - B$ ، عضوهای مجموعه A را که در مجموعه B نیستند، در یک مجموعه می‌نویسیم.

فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{3, 4, 5, 6\}$. در این صورت $A - B = \{1, 2\}$.



در حالت کلی، ناحیه‌های نمودار وِن دو مجموعه A و B به صورت مقابل هستند.



روابط تفاضل دو مجموعه

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند.

- $B-A \subseteq B$ و $A-B \subseteq A$
- اگر $A \subseteq B$ ، آن گاه $A-B = \emptyset$ و برعکس، یعنی اگر $A-B = \emptyset$ ، آن گاه $A \subseteq B$.
- در حالت کلی، $A-B \neq B-A$.
- $(A-B) \cup (A \cap B) \cup (B-A) = A \cup B$

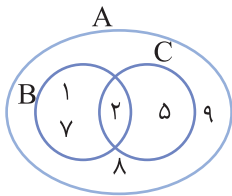
فرض کنید $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ و $C = \{1, 5\}$. می‌خواهیم مجموعه $(A-B)-C$ را مشخص کنیم. ابتدا

توجه کنید که

$$A-B = \{1, 2, 3\} - \{2, 3, 4, 5, 6\} = \{1\}$$

در نتیجه

$$(A-B)-C = \{1\} - \{1, 5\} = \emptyset$$



با توجه به نمودار وِ نِ مقابل، مجموعه $A \cap (B-C)$ را مشخص می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که

$$A = \{1, 2, 5, 7, 8, 9\}, \quad B = \{1, 2, 7\}, \quad C = \{2, 5\}$$

بنابراین

$$B-C = \{1, 2, 7\} - \{2, 5\} = \{1, 7\}$$

در نتیجه

$$A \cap (B-C) = \{1, 2, 5, 7, 8, 9\} \cap \{1, 7\} = \{1, 7\}$$

تعداد عضوهای یک مجموعه

تعداد عضوهای مجموعه A را با $n(A)$ نشان می‌دهیم.

• اگر $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ، آن گاه $n(A) = 4$.

• فرض کنید $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^3 < 100\}$. توجه کنید که

$$1^3 = 1, \quad 2^3 = 8, \quad 3^3 = 27, \quad 4^3 = 64, \quad 5^3 = 125, \quad \dots$$

بنابراین $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و در نتیجه $n(A) = 4$.

اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $B = \{2, 5, 7, 9\}$ ، مقدارهای $n(A \cup B)$ ، $n(A \cap B)$ ، $n(A-B)$ و $n(B-A)$ را حساب می‌کنیم.

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{2, 5, 7, 9\} = \{2, 5\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{2, 5, 7, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\} \Rightarrow n(A \cup B) = 8$$

$$A-B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{2, 5, 7, 9\} = \{1, 3, 4, 6\} \Rightarrow n(A-B) = 4$$

$$B-A = \{2, 5, 7, 9\} - \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{7, 9\} \Rightarrow n(B-A) = 2$$



مسئله‌های تکمیلی

مسئله ۱ - فرض کنید A مجموعه مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۸، B مجموعه مضرب‌های کوچک‌تر از ۱۰۰ عدد ۹ و C مجموعه عددهای اول یک‌رقمی باشد. مجموعه $(A-B) \cap C$ را مشخص کنید.

راه‌حل ۱ ابتدا توجه کنید که

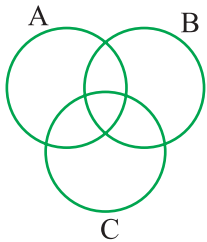
$$A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}, \quad B = \{9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99\}, \quad C = \{2, 3, 5, 7\}$$

به این ترتیب،

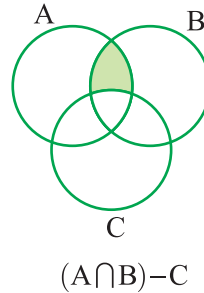
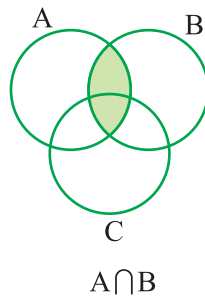
$$A - B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} - \{9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99\} = \{1, 2, 3, 6\}$$

$$(A - B) \cap C = \{1, 2, 3, 6\} \cap \{2, 3, 5, 7\} = \{2, 3\}$$

مسئله ۲ - در نمودار ون مقابل، مجموعه $(A \cap B) - C$ را سایه‌دار کنید.



راه‌حل ۲ ابتدا مجموعه $A \cap B$ را سایه می‌زنیم، سپس قسمت مشترک آن با مجموعه C را حذف کنیم تا مجموعه $(A \cap B) - C$ به دست آید.



تمرین

درست یا نادرست



- الف) هر عضو مجموعه A در مجموعه $A \cup B$ نیز هست.
- ب) هر عضو مجموعه A در مجموعه $A \cap B$ نیز هست.
- پ) هر عضو مجموعه $A - B$ در مجموعه A نیز هست.
- ت) اشتراک هر دو مجموعه زیرمجموعه اجتماع آن‌هاست.
- ث) مجموعه A زیرمجموعه $A - B$ است.

کامل کنید

الف) اگر $A \subseteq B$ ، آن‌گاه $A \cup B$ برابر با مجموعه است.

ب) اگر $A \cap B = B$ ، آن‌گاه مجموعه زیرمجموعه است.

پ) مجموعه $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}$ ، برابر با مجموعه است.

ت) اگر $A \subseteq B$ ، مجموعه $A - B$ برابر با مجموعه است.

ث) اگر $A \cap B = \emptyset$ ، مجموعه $A - B$ برابر با مجموعه است.

الف) مجموعه $A \cap \emptyset$ برابر کدام مجموعه است؟

۱) A (۲) \emptyset

ب) مجموعه $A \cup \emptyset$ برابر کدام مجموعه است؟

۱) A (۲) \emptyset

پ) مجموعه $\mathbb{W} - \mathbb{N}$ چند عضو دارد؟

۱) صفر (۲) ۱

ت) اگر $n(A) = 5$ و $n(B) = 3$ ، مقدار $n(A \cup B)$ حداکثر کدام است؟

۱) ۵ (۲) ۸

ث) اگر $n(A) = 4$ و $n(B) = 7$ ، مجموعه $A - B$ حداکثر چند عضو دارد؟

۱) ۳ (۲) ۴

تمرین‌های تشریحی

۱) اگر $A = \{x | x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x \leq 4\}$ و $B = \{x | x \in \mathbb{N}, -2 < x < 3\}$ ، مجموعه $A \cap B$ را پیدا کنید.

۲) اگر $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x < 10\}$ و $B = \{x | x \in \mathbb{N}, x^2 < 20\}$ ، مجموعه $A \cup B$ را مشخص کنید.

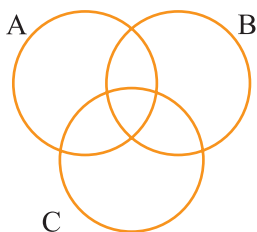
۳) فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 6, 7, 9\}$ ، $B = \{2, 4, 7, 8\}$ و $C = \{4, 5, 7, 9\}$. مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $A \cap B =$ ب) $B \cap C =$

پ) $A \cup B =$ ت) $B \cup C =$

ث) $A \cup (B \cap C) =$

ج) $(A \cap B) \cup C =$



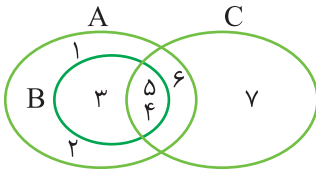
۴) مجموعه A شامل شماره‌های طبیعی عدد ۲۴، مجموعه B شامل اعداد اول یک‌رقمی و مجموعه C شامل مضارب طبیعی ۳ و کوچک‌تر از ۲۰ هستند.

الف) اعضای این مجموعه‌ها را در نمودار ون روبه‌رو بنویسید.

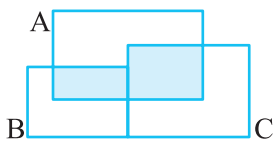
ب) مجموعه $(A \cap B) \cap C$ را به‌دست آورید.



۵) با توجه به نمودار ون مقابل، مجموعه $(A \cup B) \cap (A \cap C)$ را مشخص کنید.



۶) اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x < 17\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -6 \leq x < 13\}$ ، مجموعه‌های $A \cap B$ و $A \cup B$ را با استفاده از نمادهای ریاضی بنویسید.



۷) ناحیه سایه‌دار در شکل مقابل کدام مجموعه را مشخص می‌کند؟

۸) فرض کنید $A = \{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$ ، $B = \{1, 2, 3, 6\}$ و $C = \{3, 4, 5, 6\}$ مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $A - B =$

ب) $B - A =$

پ) $A - C =$

ت) $C - A =$

۹) فرض کنید $A = \{1, 2, \{3\}, 5\}$ و $B = \{1, 2, 3, \{3\}, 4, 5\}$ مجموعه $A - B$ را مشخص کنید.

۱۰) مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضایشان مشخص کنید.

الف) $\mathbb{Z} - \mathbb{N} =$

ب) $\mathbb{N} - \mathbb{Z} =$

پ) $\mathbb{N} - \mathbb{W} =$

ت) $\mathbb{W} - \mathbb{N} =$

ث) $\mathbb{Z} - \mathbb{W} =$

ج) $\mathbb{W} - \mathbb{Z} =$

۱) $\mathbb{N} \cap \mathbb{W} =$

۲) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{N} =$

۱۱) فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ، $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ و $C = \{1, 3, 6, 9\}$ مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $A - (B \cap C) =$

ب) $A - (B \cup C) =$

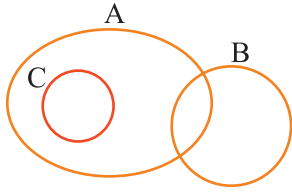
۱۲) فرض کنید $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$ و $B = \{x^2 + 1 \mid x \in A\}$ مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $A \cup B =$

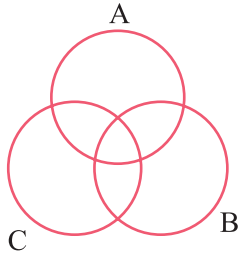
ب) $A \cap B =$

پ) $A - B =$

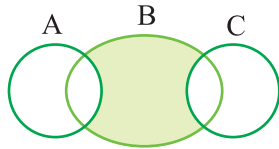
ت) $B - A =$



الف) در نمودارِ وِن مقابلِ مجموعهٔ $(A \cap B) \cup C$ را سایه بزنید.



ب) مجموعهٔ $(B \cup A) - (B \cap C)$ را روی نمودارِ وِن مقابلِ سایه بزنید.



پ) ناحیهٔ سایه‌دار در نمودارِ وِن مقابلِ کدام مجموعه است؟

۱۴) در هر مورد تعداد اعضای مجموعه را مشخص کنید.

الف) $A = \{1, 2, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$

ب) $B = \{x \mid x \in \mathbb{W}, x < 7\}$

پ) $C = \{\emptyset\}$

ت) $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 1\}$

۱۵) اگر $A = \{1, 3, 4, 9\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 \in A\}$ ، مقدار $n(A \cup B)$ چند است؟

۱۶) اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x \leq 6\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -6 \leq x \leq 1\}$ ، مقدار $n(A \cup B) + n(A \cap B)$ چند است؟

۱۷) دو مجموعه مانند A و B مثال بزنید که $n(A) = 6$ ، $n(B) = 4$ و $n(A \cup B) = 8$.

۱۸) دو مجموعه مانند A و B مثال بزنید که $n(A) = 7$ ، $n(B) = 3$ و $n(A \cap B) = 1$.



۱۹ دو مجموعه مانند A و B مثال بنویس که $n(A)=5$ ، $n(B)=4$ و $n(A-B)=3$.

تمرین‌های ویژه

۱ مجموعه‌هایی مانند A و B مثال بنویس که $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ، $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $A \cap \{6, 7\} = \emptyset$.

۲ مقادیر x و y را در هر یک از تساوی‌های زیر به دست آورید.

الف) $\{11, x, 5\} \cup \{-5, 13, 11, 2\} = \{5, 2, 11, -5, y\}$

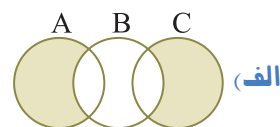
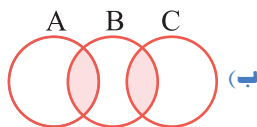
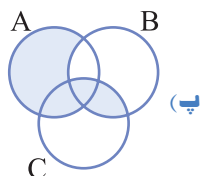
ب) $\{1, x\} = \left\{ 7, -6, 4, \frac{y}{4} \right\} \cap \{4, y+1, 0, x-3\}$

۳ فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ، $B = \{1, 2, 7\}$ و $C = \{3, 4, 7, 8\}$.

الف) تحقیق کنید که $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

ب) تحقیق کنید که $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

۴ در هر مورد تعیین کنید ناحیه سایه‌دار کدام مجموعه را مشخص می‌کند.



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. مجموعه $(A \cap B) \cup (A \cap \emptyset)$ کدام است؟

- ۱) \emptyset (۲) $A \cap B$ (۳) $A \cup B$ (۴) A

۲. اگر x زوج است، $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}\}$ و x مضرب ۳ است، $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}\}$ ، کوچک‌ترین عضو مجموعه $A \cap B$ کدام است؟

- ۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱۲

۳. اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، مجموعه B حداکثر چند عضو دارد؟

- ۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴. اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ، مجموعه $A - (A \cap B)$ چند عضو دارد؟

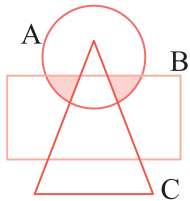
- ۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۵. اگر $A = \{\nabla, \emptyset, \{\emptyset\}, \Delta, ?\}$ و $B = \{\{\emptyset, \nabla\}, \Delta, \{?\}\}$ ، مقدار $n(A \cup B)$ کدام است؟

- ۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

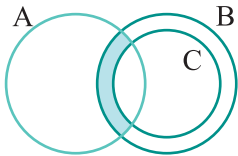
۶. اگر $A = \{x \mid 15 \leq x \leq 67, x = 4n, n \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{y \mid 18 < y \leq 75, y = 3k, k \in \mathbb{N}\}$ ، مقدار $n(A \cap B)$ کدام است؟

- ۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷



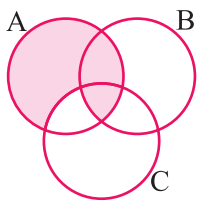
۷. نمودار ون مقابل کدام مجموعه را نشان می‌دهد؟

- ۱) $A \cap B \cap C$
۲) $(A - C) - B$
۳) $(A \cap B) - C$
۴) $(B - C) - A$



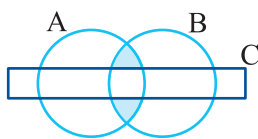
۸. نمودار ون مقابل کدام مجموعه را نشان می‌دهد؟

- ۱) $A \cap B \cap C$
۲) $(B - C) \cap (A \cap C)$
۳) $(B - C) - A$
۴) $(A \cap B) - C$



۹. ناحیه سایه‌دار در نمودار ون مقابل کدام مجموعه است؟

- ۱) $(A \cap B \cap C) \cup A$
۲) $(A \cap B) \cup C$
۳) $A - (A \cap B)$
۴) $(A \cap B) \cup (A - (B \cup C))$



۱۰. ناحیه سایه‌دار در نمودار ون مقابل کدام مجموعه است؟

- ۱) $(A \cap B) - C$
۲) $(A \cup B) \cap C$
۳) $(A - B) \cap C$
۴) $(C \cap B) \cup A$