

## فهرست مطالب

۱۱ فصل دوم: تابع	
۱۴۹	درس اول: توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی
۱۵۷	درس دوم: توابع پلکانی و قدر مطلق
۱۷۵	درس سوم: اعمال بر روی توابع

۱۱ فصل سوم: آمار	
۱۸۲	درس اول: شاخص‌های آماری
۱۸۹	درس دوم: سری‌های زمانی

۱۲ فصل اول: آمار و احتمال	
۱۹۶	درس اول: شمارش
۲۱۲	درس دوم: احتمال
۲۳۵	درس سوم: چرخه آمار در حل مسائل

۱۲ فصل دوم: الگوهای خطی	
۲۴۰	درس اول: مدل‌سازی و دنباله
۲۵۱	درس دوم: دنباله‌های حسابی

۱۲ فصل سوم: الگوهای غیرخطی	
۲۶۴	درس اول: دنباله هندسی
۲۸۰	درس دوم: ریشه‌های $n$ ام و توان گویا
۲۹۱	درس سوم: تابع نمایی

۲۹۹	پاسخ‌های تشریحی
-----	-----------------

۱۰ فصل اول: معادله درجه دوم	
۶	درس اول: معادله و مسائل توصیفی
۱۱	درس دوم: حل معادله درجه ۲ و کاربردها
۳۳	درس سوم: معادله‌های شامل عبارت‌های گویا

۱۰ فصل دوم: تابع	
۴۲	درس اول: مفهوم تابع
۴۶	درس دوم: ضابطه جبری تابع
۵۳	درس سوم: نمودار تابع خطی
۶۲	درس چهارم: نمودار تابع درجه ۲

۱۰ فصل سوم: کار با داده‌های آماری	
۷۸	درس اول: گردآوری داده‌ها
۸۴	درس دوم: معیارهای گرایش به مرکز
۹۵	درس سوم: معیارهای پراکندگی

۱۰ فصل چهارم: نمایش داده‌ها	
۱۰۸	درس اول: نمودارهای یک متغیره
۱۲۰	درس دوم: نمودارهای چندمتغیره

۱۱ فصل اول: آشنایی با منطق و استدلال ریاضی	
۱۲۸	درس اول: گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها
۱۴۱	درس دوم: استدلال ریاضی



# رياضی و آمار

پایه دهم

## پایه دهم

## فصل اول

# درس اول: معادله و مسائل توصیفی

ابتدا ببینیم معادله چیست. جواب یا ریشه معادله به پی میگویند و انواع معادلاتی که قراره تو این فصل بفونیم چیا هستن.

### آشنایی با معادله

**معادله:** به هر تساوی که در آن مجهول (متغیر) وجود دارد و به ازای بعضی مقادیر برای آن مجهول، تساوی برقرار است، معادله می‌گویند. (البته ممکنه هیچ مقداری برای مجهول پیدا نشه و یا حتی بی‌شمار مقدار برای آن مجهول یافت بشه) مثلاً هر یک از تساوی‌های  $3x = 6$ ،  $2x^2 + 4x = 0$  و  $\frac{1}{x-1} + \frac{x}{2} = 2x$  یک معادله هستند.

**جواب یا ریشه معادله:** به عدد یا عددهایی که به جای مجهول قرار می‌گیرند و معادله را به یک تساوی عددی درست تبدیل می‌کنند، جواب یا ریشه معادله می‌گوییم. مثلاً در معادله  $3x = 6$ ، اگر  $x = 4$  باشد، آن‌گاه تساوی به صورت  $3(4) = 6$  در می‌آید که نادرست است زیرا  $12 \neq 6$  می‌باشد پس  $x = 4$  جواب معادله نیست، اما اگر به جای مجهول  $x$ ، عدد ۲ را قرار دهیم، به یک تساوی درست می‌رسیم، پس  $x = 2$  جواب معادله یا ریشه معادله است.

**حل معادله:** منظور از حل یک معادله به دست آوردن جواب یا جواب‌های معادله در صورت وجود است. در این فصل با سه نوع از معادلات به نام‌های معادله درجه اول، معادله درجه دوم و معادله گویا آشنا می‌شویم.

### معادله درجه اول

**معادله درجه اول:** هر معادله به صورت  $ax + b = 0$  که در آن  $a$  و  $b$  اعداد حقیقی و  $a$  مخالف صفر است را معادله درجه اول می‌نامند. مثلاً معادله  $3x - 4 = 0$  یک معادله درجه اول است. (در معادله درجه اول توان متغیر  $x$  برابر یک) اما معادلات  $2x^2 + 5x = 3$  (توان  $x$  برابر ۲ هستش)،  $x + \frac{2}{x} = 3$  (در مخرج کسر اومده) و  $2|x| - 4 = 0$  (در داخل قدرمطلق قرار گرفته) درجه اول نیستند.

**حل معادله درجه اول:** معادله درجه اول  $ax + b = 0$  در صورتی که  $a$  مخالف صفر باشد (اگر  $a = 0$  بشه،  $x$  از معادله حذف می‌شه) همواره یک جواب دارد. برای حل آن، جمله دارای مجهول یعنی  $ax$  را در همان سمتی که هست نگه داشته و عدد  $b$  را به طرف دیگر تساوی می‌بریم (خواست هست که وقتی  $b$  رو می‌بری اون سمت تساوی باید علامتش رو قرینه کنی؟) حال با تقسیم طرفین معادله بر ضریب  $x$  یعنی عدد  $a$ ، مقدار  $x$  که همان جواب یا ریشه معادله است، به دست می‌آید.

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

مثلاً جواب معادله  $3x + 5 = 0$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$3x + 5 = 0 \Rightarrow 3x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$$

+5 رفعت اونور شد -5

**توجه** مطمئناً انتظار ندارید که در کنکور، معادله درجه اول را به صورت  $ax + b = 0$  بدهند و از شما جواب معادله را بخواهند (فراوانی قبلی آسون میشه)، معمولاً با معادله‌ای سروکار دارید که چند تا جمع و تفریق و ضرب نیاز دارد تا در نهایت به فرم  $ax + b = 0$  در آید و یا ممکن است معادله شامل کسرهایی باشد که باید با ضرب طرفین معادله در یک عدد مناسب (عدد مناسب عددی که همه کسرها رو از بین می‌بره. همون کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌هاست.) کسرها را از بین ببریم.

؟ جواب معادله  $2(1-x) - 3(x+1) = 14$  کدام است؟

۱. -۴      ۲. -۳      ۳. -۲      ۴. -۱

✓ گزینه ۲ ابتدا کاری می‌کنیم که در معادله فقط یک بار  $x$  دیده شود: (اینه بری بشه  $ax + b = 0$ )

$$2(1-x) - 3(x+1) = 14 \Rightarrow 2 - 2x - 3x - 3 = 14 \Rightarrow -5x - 1 = 14 \Rightarrow -5x = 14 + 1 \Rightarrow -5x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{-5} = -3$$

**نکته** جواب هر معادله، در خود معادله صدق می‌کند، یعنی با قرار دادن جواب معادله در معادله، به یک تساوی عددی درست می‌رسیم. حالا با این جمله می‌شود دو کار مهم کرد:

۱) اگر جواب معادله در گزینه‌های تست، داده شده بود می‌توان گزینه‌ها را در معادله جای‌گذاری کرد، هر کدام صدق کرد، همان جواب معادله سؤال است. (این کار بعضی اوقات از راه اصلی طولانی‌تره. اما باید به‌عنوان یه ابزار هل، بلد باشیم) مثلاً حل تمرین قبلی را با این روش ببینید:

$$1) x = -4 \Rightarrow 2(1 - (-4)) - 3(-4 + 1) = 14 \Rightarrow 2(5) - 3(-3) = 14 \Rightarrow 10 + 9 = 14 \Rightarrow 19 = 14 \quad \times$$

$$2) x = -3 \Rightarrow 2(1 - (-3)) - 3(-3 + 1) = 14 \Rightarrow 2(4) - 3(-2) = 14 \Rightarrow 8 + 6 = 14 \Rightarrow 14 = 14 \quad \checkmark$$

بنابراین  $x = -3$  جواب معادله است و نیازی به بررسی گزینه‌های (۳) و (۴) نیست.

۲) تست‌هایی مثل مثال زیر که مجهول دیگری غیر از  $x$  دارند، می‌توانند شما را مجبور به استفاده از مفهوم «جواب هر معادله، در خود معادله صدق می‌کند» کنند. در این گونه سؤال‌ها یک معادله جدید از دل معادله صورت سؤال به دست می‌آید که باید آن را حل کنید و مجهول دیگر را به دست آورید.

۱) اگر  $x = -4$  جواب معادله  $mx + \frac{x}{4} = -3m$  باشد، مقدار  $m$  کدام است؟

۱. (۴)      ۲. (۲)      ۳. (۱)      ۴. (۳)

**گزینه ۳** جواب معادله، در معادله صدق می‌کند. پس به جای تمام  $x$  ها عدد  $-4$  را قرار می‌دهیم:

$$m(-4) + \frac{(-4)}{4} = -3m \Rightarrow -4m - 1 = -3m \Rightarrow -1 = -3m + 4m \Rightarrow -1 = m \Rightarrow m = -1$$

**نکته** وقتی گفته می‌شود دو معادله ریشه مشترک دارند، باید ریشه یک معادله را به دست آورید و در دیگری جای‌گذاری کنید.

۱) دو معادله  $\frac{x+m}{2} + \frac{x+1}{2} = m+1$  و  $2(x-3) + 3x = 4(x-1)$  جواب مشترک دارند. مقدار  $m$  کدام است؟

۱. (۱)      ۲. (۲)      ۳. (۳)      ۴. (۴)      ۵. (۴)

**گزینه ۲** وقتی دو معادله جواب مشترک دارند، یعنی جواب معادله  $2(x-3) + 3x = 4(x-1)$  جواب معادله  $\frac{x+m}{2} + \frac{x+1}{2} = m+1$  نیز هست. پس ابتدا جواب معادله  $2(x-3) + 3x = 4(x-1)$  را به دست می‌آوریم:

$$2x - 6 + 3x = 4x - 4 \Rightarrow 5x - 6 = 4x - 4 \Rightarrow 5x - 4x = -4 + 6 \Rightarrow x = 2$$

حال  $x = 2$  را در معادله  $\frac{x+m}{2} + \frac{x+1}{2} = m+1$  جای‌گذاری می‌کنیم تا مقدار  $m$  معلوم شود:

$$\frac{2+m}{2} + \frac{2+1}{2} = m+1 \Rightarrow 2+m+3 = 2m+2 \Rightarrow 5+m = 2m+2 \Rightarrow 5-2 = 2m-m \Rightarrow 3 = m \Rightarrow m = 3$$

اول یادآوری زیر رو بخون، بعد برو سراغ تست بعدی.

**یادآوری** کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد غیرصفر  $a$  و  $b$  یا  $k$ .  $m$  دو عدد غیرصفر  $a$  و  $b$ ، کوچک‌ترین عددی است که بر هر دو عدد  $a$  و  $b$  بخش‌پذیر است. یکی از مهم‌ترین کاربردهای  $k$ .  $m$  در پیدا کردن مخرج مشترک دو کسر است. در اینجا ما از  $k$ .  $m$  برای از بین بردن مخرج کسرها معادله استفاده می‌کنیم.

۱) جواب معادله  $\frac{1-x}{6} + \frac{x+3}{4} = \frac{2x}{3}$  کدام است؟

۱. (۴)      ۲. (۳)      ۳. (۲)      ۴. (۱)      ۵. (۴)

**گزینه ۳** برای آن‌که از شر مخرج‌ها خلاص شویم، کافی است طرفین معادله را در  $6$  ضرب کنیم: (۶ کوچک‌ترین عددی است که هم بر  $6$  و هم بر  $3$  و هم بر  $4$  بخش‌پذیره)

$$6 \times \left( \frac{1-x}{6} + \frac{x+3}{4} \right) = 6 \times \frac{2x}{3} \Rightarrow 1-x + 2(x+3) = 4x \Rightarrow 1-x + 2x + 6 = 4x \Rightarrow 2x + 10 = 4x$$

$$\Rightarrow 10 = 4x - 2x \Rightarrow 10 = 2x \Rightarrow x = \frac{10}{2} \Rightarrow x = 5$$

**■ معادلات درجه اول غیر عادی**

۱) بعضی اوقات ظاهر معادله، درجه اول نیست اما با ساده کردن معادله، تمام  $x$ هایی که توان غیر یک دارند، با هم ساده می شوند و معادله به یک معادله درجه اول تبدیل می شود و جواب معادله به راحتی معلوم می شود (در یک کلاس، از ظاهر معادله نترسین، شاید طبل توقالی باشد)

۱) جواب معادله  $x(x+2) - 2 = x^2 - 3(x-1)$  با جواب کدام معادله برابر است؟

(۱)  $-x + 2 = 3$  (۲)  $3x + 6 = 0$  (۳)  $2x - 4 = 0$  (۴)  $-3x + 3 = 0$

🔍 **گزینه ۴** ابتدا با انجام دادن ضرب ها و جمع و تفریق ها معادله را مرتب می کنیم، شاید معادله ساده تر از ظاهرش شود:

$$x(x+2) - 2 = x^2 - 3(x-1) \Rightarrow x^2 + 2x - 2 = x^2 - 3x + 3$$

از طرفین تساوی سازه می شور

$$2x + 3x = 3 + 2 \Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین جواب معادله،  $x = 1$  است. حال باید بررسی کنیم که  $x = 1$  جواب کدام گزینه است. برای این کار  $x = 1$  را در تک تک معادله ها جای گذاری می کنیم تا ببینیم در کدام صدق می کند. واضح است که  $x = 1$  فقط در معادله  $-3x + 3 = 0$  صدق می کند.

۲) گاهی بعد از ساده سازی معادله، تمام  $x$ ها با هم ساده می شوند (ریگه هیچ  $x$  ای در معادله نیست). حال دو حالت اتفاق می افتد:

الف) اگر بعد از ساده شدن  $x$ ها، به یک تساوی همیشه درست رسیدیم (مثلاً به  $3 = 3$  رسیدیم)، معادله بی شمار جواب دارد.

ب) اگر بعد از ساده شدن  $x$ ها، به یک تساوی همیشه نادرست رسیدیم (مثلاً به  $2 = 4$  رسیدیم)، معادله جواب ندارد.

۱) معادله  $m(x+2) = -2x+5$  جواب ندارد. مقدار  $m$  کدام است؟

(۱)  $-4$  (۲)  $-3$  (۳)  $-2$  (۴)  $-1$

🔍 **گزینه ۳** برای آن که معادله درجه اول جواب نداشته باشد، باید  $x$  در معادله نباشد، پس:

$$m(x+2) = -2x+5 \Rightarrow mx+2m = -2x+5 \Rightarrow m = -2$$

باید با هم سازه شوند

ثانیاً به ازای  $m = -2$ ، معادله به تساوی نادرست تبدیل شود که در اینجا به ازای  $m = -2$  به تساوی نادرست  $-4 = 5$  می رسیم، پس قطعاً معادله جواب ندارد.

۱) معادله  $(m+1)(x-3) = -4x+n+2$  بی شمار جواب دارد. مقدار  $m+n$  کدام است؟

(۱)  $-5$  (۲)  $5$  (۳)  $-10$  (۴)  $10$

🔍 **گزینه ۲** اولاً باید  $x$  در معادله حضور نداشته باشد، پس:

$$(m+1)(x-3) = -4x+n+2 \Rightarrow (m+1)x - 3(m+1) = -4x+n+2 \Rightarrow m+1 = -4 \Rightarrow m = -5$$

باید با هم سازه شوند

ثانیاً باید بعد از این که  $x$  حذف شد، یک تساوی همیشه درست داشته باشیم، پس:

$$-3(m+1) = n+2 \xrightarrow{m=-5} -3(-5+1) = n+2 \Rightarrow -3(-4) = n+2 \Rightarrow 12 = n+2 \Rightarrow 12-2 = n \Rightarrow n = 10$$

بنابراین  $m+n$  برابر  $-5+10 = 5$  می باشد.

■ **کاربرد معادله درجه اول در حل مسائل توصیفی:** گاهی یک مسئله را به صورت توصیفی بیان می کنند و مقدار مجهولی را از ما می خواهند. در این گونه مسائل باید مقدار مجهول را  $x$  فرض کرده و با توجه به صورت سؤال، ارتباط  $x$  را با دیگر فرض های مسئله بنویسیم. معادله حاصل، ممکن است یک معادله درجه اول باشد که با حل آن، مقدار مجهول، معلوم می شود.

۱) دو برابر عددی به علاوه یک، مساوی پنج برابر همان عدد منهای چهار می باشد. آن عدد کدام است؟

(۱)  $\frac{5}{3}$  (۲)  $\frac{3}{5}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴)  $\frac{4}{3}$

🔍 **گزینه ۱** عدد مورد نظر را  $x$  فرض می کنیم. دو برابر عدد به علاوه یک، یعنی  $2x+1$  و هم چنین پنج برابر همان عدد منهای چهار، یعنی  $5x-4$ . حال این دو با هم برابرند، پس  $2x+1 = 5x-4$  می باشد، بنابراین داریم:

$$2x+1 = 5x-4 \Rightarrow 1+4 = 5x-2x \Rightarrow 5 = 3x \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$



۱۱. جواب معادله  $37 - \frac{12x}{y} = \frac{12x}{y} + 4 = \frac{11x}{3}$  کدام است؟

- (۱) -۴۱ (۲) -۴۰ (۳) -۲۱ (۴) -۳۷

۱۲. اگر  $A = 2 - 3x$  و  $B = 5x - 2$  باشند، جواب معادله  $2A + 3B = 7$  کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۳. اگر جواب معادله  $3(x-2) + 4(x+a) = 28$  برابر ۲ باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

بعضی اوقات معادله درجه اول جواب تکرار یا بی شمار جواب دارد.

۱۴. معادله  $3x + 5 = x(7-a) + 2$  جواب ندارد. مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۵. معادله  $3x + 7(5-4x) + nx = m$  بی شمار جواب دارد. مقدار  $m+n$  کدام است؟

- (۱) ۵۰ (۲) ۵۵ (۳) ۶۰ (۴) ۶۵

۱۶. اگر  $a = 2x - 1$ ،  $b = a + 3$  و  $c = 2 - b$  باشند، به ازای کدام مقدار  $m$  معادله  $2a - b + c = m$  بی شمار جواب دارد؟

- (۱) -۳ (۲) -۴ (۳) -۵ (۴) -۶

### کاربرد معادله درجه اول در حل مسائل توصیفی

تو مسائل توصیفی، باید رو نوشتن درست معادله تهر پیدا کنی...

۱۷. سن پدری ۴۰ برابر سن فرزندش است. اگر پنج سال بعد، سن او سه برابر سن فرزندش شود، مجموع سن آن‌ها اکنون چقدر است؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۴۵ (۳) ۵۰ (۴) ۶۰

۱۸. سن پدری ۴ برابر مجموع سن دو فرزندش است. ۶ سال بعد، سن پدر ۲ برابر مجموع سن دو فرزند خواهد بود. سن فعلی پدر کدام است؟

- (۱) ۲۸ (۲) ۳۲ (۳) ۳۴ (۴) ۳۶

۱۹. سن پدری ۵، برابر اختلاف سن دو فرزندش است. ۱۴ سال بعد، سن پدر ۷ برابر اختلاف سن دو فرزند خواهد بود. سن فعلی پدر کدام است؟

- (۱) ۲۸ (۲) ۳۵ (۳) ۳۶ (۴) ۴۲

۲۰. آرش سه برابر امیر پول دارد و پول محمد از پول امیر ۴۰ هزار تومان بیش تر است. اگر مجموع پول سه نفر ۸۴۰ هزار تومان باشد، پول محمد چند تومان است؟

- (۱) ۱۶۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۲۰۰ (۴) ۲۲۰

۲۱. یک عدد ۴ برابر عدد دیگر است. اگر مجموع آن‌ها ۶۵ باشد، حاصل ضرب آن‌ها کدام است؟

- (۱) ۶۸۹ (۲) ۵۷۴ (۳) ۵۸۲ (۴) ۶۷۶

۲۲. ۷ عدد طبیعی متوالی را در نظر بگیرید. اگر مجموع چهار عدد ابتدایی با مجموع سه عدد انتهایی برابر باشد، مجموع دو عدد بزرگتر کدام است؟

- (۱) ۲۷ (۲) ۲۹ (۳) ۳۱ (۴) ۳۳

۲۳. یک شرکت دارای ۲ مدیر، ۳ مهندس و ۷ کارمند است. حقوق هر مهندس  $\frac{2}{3}$  حقوق هر مدیر و ۳ برابر حقوق هر کارمند می‌باشد. اگر حقوق

ماهانه شرکت ۱۵۰ میلیون تومان باشد، حقوق یک مدیر چند میلیون تومان است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۵ (۳) ۲۷ (۴) ۳۲

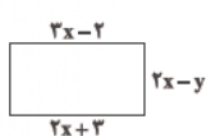
۲۴. شخصی  $\frac{1}{3}$  مسیری را با سرعت آرام و  $\frac{1}{4}$  باقی مانده مسیر را با سرعت بیش تری طی می‌کند. پس از آن به مدت نیم ساعت ۵۴۰۰ متر با سرعت

زیاد ادامه داده تا به ۲۰۰ متری پایان مسیر می‌رسد. طول مسیر چند متر است؟

- (۱) ۱۰۸۰۰ (۲) ۱۱۲۰۰ (۳) ۱۱۶۰۰ (۴) ۱۲۴۰۰

۲۵. مساحت مستطیل شکل مقابل ۹۱ واحد مربع است. مقدار  $y$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵



۲۶. طول یک مستطیل از سه برابر عرض آن دو واحد کم تر است. روی طول این مستطیل، مثلث متساوی الاضلاعی بنا می‌کنیم. اگر محیط پنج ضلعی

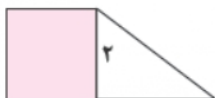
حاصل ۱۶ باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۱۶

این شما و این معادله درجه اول که تو کنکور اومده. معادله درجه اول رو پدی بگیرین.

۲۷. در شکل زیر، مساحت مربع از  $\frac{1}{3}$  مساحت مثلث به اندازه ۳ واحد مربع بیش تر است. مساحت ذوزنقه کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۵/۵ (۳) ۶/۵ (۴) ۷



پایه دهم

فصل اول

# درس دوم: حل معادله درجه ۲ و کاربردها

معادله درجه دوم



**معادله درجه دوم:** هر معادله به شکل  $ax^2 + bx + c = 0$  با شرط  $a \neq 0$  را معادله درجه دوم می‌نامیم. ( $a$  نمی‌تونه صفر باشه، چون آگه  $a = 0$  باشه، معادله ریکه درجه دوم نیست، اما در معادله درجه دوم  $b$  و  $c$  می‌تونن صفر باشن). به  $a$ ،  $b$  و  $c$  ضرایب معادله می‌گوییم که اعداد حقیقی هستند. ضریب  $x^2$ ،  $b$  ضریب  $x$  و  $c$  عدد ثابت معادله است. مثلاً هر یک از معادلات  $2x^2 + 3x + 5 = 0$ ،  $x^2 + 3x = 0$  و  $2x^2 - 8 = 0$  معادله درجه دوم هستند.

**حل معادله درجه دوم:** برای حل معادله درجه دوم یعنی به دست آوردن  $x$ هایی که در تساوی صدق کنند، روش‌های مختلفی وجود دارد که در ادامه با آنها آشنا می‌شوید. این‌که کدام روش را برای حل معادله انتخاب کنیم، بستگی به ضرایب معادله دارد که کم‌کم با حل مثال‌های متنوع، بر انتخاب روش حل مسلط می‌شوید.

**۱ ضرایب خاص:** برای حل معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  در قدم اول به ضرایب معادله توجه می‌کنیم. به این صورت که:

الف) اگر  $a + c + b = 0$  باشد، یکی از جواب‌ها ۱ و دیگری  $\frac{c}{a}$  است. مثلاً داریم:

$$2x^2 + 5x - 7 = 0 \xrightarrow{2+(-7)+5=0} x = 1, x = \frac{-7}{2}$$

ب) اگر  $a + c = b$  باشد، یکی از جواب‌ها -۱ و دیگری  $-\frac{c}{a}$  است. مثلاً داریم:

$$5x^2 + 12x + 7 = 0 \xrightarrow{5+7=12} x = -1, x = -\frac{7}{5}$$

پس ممکنه ضرایب معادله، خاص باشن و قبلی سریع و بی‌درسر بتونیم جوابشو پیدا کنیم. اول مجموع  $a$  و  $c$ ، یعنی مجموع ضرایب  $x^2$  و عدد ثابت رو به دست می‌ایم. آگه با  $b$ ، یعنی ضریب  $x$  مساوی بشه یا جمعش با اون صفر بشه، معادله یک معادله فاصله و سریع می‌تونید جوابشو درس بنزید.

۹ ریشه بزرگ‌تر معادله  $\sqrt{3}x^2 + 2 - (2 + \sqrt{3})x = 0$  کدام است؟

۱۰. ۱۱. ۱۲. ۱۳. ۱۴.

۱۵.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  ۱۶.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  ۱۷.  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$  ۱۸.  $\frac{2}{\sqrt{3}}$

۱۹. اگر به معادله دقت کنید  $a = \sqrt{3}$ ،  $b = -(2 + \sqrt{3})$  و  $c = 2$  است. واضح است که  $a + c + b = 0$  می‌باشد، پس یک ریشه آن  $x = 1$  است. و ریشه دیگر  $x = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$  است. (تقریباً  $1.15$  است. پس  $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{1.17}$ ، تماماً از یک بزرگ‌تره) بنابراین ریشه بزرگ‌تر معادله  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  است. که گویا شده آن در گزینه (۱۸) وجود دارد. بیفتید:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ب) ممکن است در معادله درجه دوم  $b$  یا  $c$  یا هر دو صفر باشند که در این صورت به آن معادله درجه دوم ناقص می‌گوییم. در این حالات نیز حل معادله درجه دوم کار آسانی است.

۱۱) اگر  $c = 0$  باشد آن‌گاه معادله به فرم  $ax^2 + bx = 0$  خواهد بود. با فاکتورگیری می‌توان آن را به فرم  $x(ax + b) = 0$  در آورد. می‌دانیم اگر ضرب دو عبارت صفر باشد، حداقل یکی از آن‌ها صفر است. ( $AB = 0 \Rightarrow A = 0$  یا  $B = 0$ ) پس:

$$x(ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

مثلاً جواب‌های معادله  $x^2 + 6x = 0$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(x + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6 \end{cases}$$



❓ اگر صفر و ۴ ریشه‌های معادله  $x^2 - ax + x + b = 0$  باشند، مقدار  $a + b$  کدام است؟

- ۳(۱) ۴(۲) ۵(۳) ۶(۴)

👉 گزینه ۳ چون یک ریشه معادله صفر است، پس حتماً عدد ثابت معادله، یعنی  $b$  برابر صفر می‌باشد. از طرفی داریم:

$$b = 0 \Rightarrow x^2 - ax + x = 0 \Rightarrow x^2 + (-a+1)x = 0 \Rightarrow x(x + (-a+1)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - a + 1 = 0 \Rightarrow x = a - 1 \end{cases}$$

بنابراین  $a - 1 = 4$  می‌باشد، پس  $a = 5$  و  $b = 0$  پس  $a + b = 5 + 0 = 5$ .

(البته می‌توانستیم ریشه‌های معادله رو تو معادله بای‌گذاری کنیم تا مقادیر  $a$  و  $b$  به دست بیان.)

۲) اگر  $b = 0$  باشد، معادله به صورت  $ax^2 + c = 0$  درمی‌آید. اگر  $a$  و  $c$  هم علامت نباشند (یکی مثبت باشد و یکی منفی) معادله دو ریشه قرینه  $\sqrt{\frac{-c}{a}}$  و  $-\sqrt{\frac{-c}{a}}$  دارد. (اگر  $a$  و  $c$  هم علامت باشن، معادله جواب ندارد) مثلاً معادله‌های زیر را ببینید:

$$2x^2 - 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$$

$$2x^2 + 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 = -6 \Rightarrow x^2 = -\frac{6}{2} = -3 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد.}$$

توجه دقت کنید  $x^2$  هیچ‌گاه منفی نمی‌شود. پس معادله  $x^2 = -3$  جواب ندارد. در ضمن می‌دانیم اگر  $\square^2 = \square$  باشد،  $\square = \pm 0$  خواهد بود، پس از تساوی  $x^2 = 3$  نتیجه می‌شود  $x = \sqrt{3}$  و  $x = -\sqrt{3}$  است. به این روش، روش ریشه‌گیری می‌گوییم.

۳) اگر  $b = c = 0$  باشد، معادله دارای ریشه مضاعف صفر است. (ریشه مضاعف ریشه ۰)  $ax^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

■ ریشه مضاعف: در یک معادله درجه دوم، اگر دو ریشه با هم برابر باشند، اصطلاحاً می‌گوییم معادله، ریشه مضاعف دارد. مثلاً  $x = 3$  ریشه مضاعف معادله  $(x - 3)^2 = 0$  است. نگاه کنید:

$$(x - 3)^2 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 3, x = 3 \Rightarrow x = 3 \text{ ریشه مضاعف است.}$$

۲ روش تجزیه: در دوره اول دبیرستان با چند اتحاد جبری آشنا شدید. تعدادی از این اتحادها را می‌توان در حل معادله درجه دوم به کار برد. قبل از هر چیز، یک‌بار این اتحادها را ببینیم.

$(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$ $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	اتحاد مربع دو جمله‌ای
$9x^2 - 4 = (3x - 2)(3x + 2)$	$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$	اتحاد مزدوج
$(x + 2)(x - 5) = x^2 - 3x - 10$	$(x + a)(x + b) = x^2 + (x + b)x + ab$	اتحاد جمله مشترک

❓ به کمک اتحادها، جاهای خالی را کامل کنید.

الف)  $(2x + \frac{1}{4})^2 = \square + \square + \frac{1}{4}$     ب)  $(x - 2y)(\square + \square) = x^2 - 4y^2$     پ)  $x^2 - \square + 12 = (x - 6)(x - 2)$

👉 الف) به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم:

$$(2x + \frac{1}{4})^2 = \underbrace{\square}_{\substack{\text{دومی به توان ۲} \\ \text{دو برابر اولی در دومی}}} + \underbrace{\square}_{\substack{\text{اولی به توان ۲}}} + \frac{1}{4}$$

ب) اتحاد مزدوج به ما کمک می‌کند. کافی است پراتز دوم مجموع  $x$  و  $2y$  باشد. پس:

$$(x - 2y)(\square + \square) = x^2 - 4y^2 \Rightarrow x \quad , \quad 2y$$

پ) با توجه به اتحاد جمله مشترک داریم:

$$x^2 - \square + 12 = (x - 6)(x - 2) \Rightarrow 8x$$

جمع غیرمشترکها در مشترک

حالا بریم سراغ روش تجزیه در حل معادله درجه دوم. آماده‌اید؟

بعد از این‌که ضرایب معادله، برای حل آن، کاری برای ما نکردند، سراغ تجزیه می‌رویم. در بسیاری از مواقع اتحاد جمله مشترک کارساز است. اگر ضریب  $x^2$  برابر یک بود، معادله  $x^2 + bx + c = 0$  را به صورت  $(x + \dots)(x + \dots) = 0$  نوشته و جاهای خالی را با دو عددی پر می‌کنیم که حاصل ضرب آن‌ها برابر  $c$  و حاصل جمع آن‌ها برابر  $b$  شود. حال

چون ضرب دو پراتز صفر شده است، پس تک تک آن‌ها صفر می‌باشند.

$$x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x + \square)(x + \square) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + \square = 0 \Rightarrow x = -\square \\ x + \square = 0 \Rightarrow x = -\square \end{cases}$$

دو عددی که ضریبشان  $c$  و جمعشان  $b$  است.

به طور مثال؛ حل معادلات زیر را به روش تجزیه ببینید:

الف)  $x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x + \dots)(x + \dots) = 0 \xrightarrow{\text{پاره ۵ و -۳ پفوره؟}} (x + 5)(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5 \\ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$   
 معشان ۲ و شریشان ۱۵- است.

ب)  $x^2 + 10x + 21 = 0 \Rightarrow (x + \dots)(x + \dots) = 0 \xrightarrow{\text{پاره ۷ و ۳ پفوره؟}} (x + 3)(x + 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \\ x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7 \end{cases}$   
 معشان ۱۰ و شریشان ۲۱ است.

پ)  $x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x + \dots)(x + \dots) = 0 \xrightarrow{\text{پاره -۲ و -۴ پفوره؟}} (x - 2)(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$   
 معشان -۴ و شریشان ۸ است.

**نکته** اگر ضرب  $x^2$  در یک معادله درجه دوم یک نباشد و ما اصرار به حل معادله به روش تجزیه داشته باشیم، می‌توانیم این‌گونه عمل کنیم که ضرب  $x^2$  رو برداریم و در عدد ثابت معادله ضرب کنیم و سپس ریشه‌های معادله جدید را به دست آوریم. (وقتی ضرب  $x^2$  رو برمی‌داریم، ضرب  $x^2$  برابر یک میشه. حالا می‌تونن تجزیه کنن یا شاید معادله با ضرایب خاص بشه) در انتها ریشه‌های به دست آمده را بر ضرب  $x^2$  تقسیم می‌کنیم تا ریشه‌های معادله اصلی به دست آید.

به طور مثال؛ حل معادله  $6x^2 + x - 15 = 0$  را ببینید:

$6x^2 + x - 15 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 9 = 0 \Rightarrow (x + \dots)(x + \dots) = 0 \xrightarrow{\text{پاره ۱۰ و -۹ موافق؟}} (x + 10)(x - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 10 = 0 \Rightarrow x = -10 \\ x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9 \end{cases}$   
 معشان ۱ و شریشان -۹۰ است.

حال کافی است برای به دست آوردن ریشه‌های معادله اصلی،  $-10$  و  $9$  را بر ضرب  $x^2$  یعنی  $6$  تقسیم کنیم، پس  $x = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$  و  $x = \frac{-10}{6} = \frac{-5}{3}$  ریشه‌های معادله  $6x^2 + x - 15 = 0$  هستند. یک مثال دیگر ببینید. می‌خواهیم معادله  $2x^2 - 7x + 3 = 0$  را حل کنیم:

$2x^2 - 7x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \xrightarrow{\text{خاص شر ۱+۶-۷}} x = 1, x = \frac{6}{1} = 6$

حال باید ریشه‌های به دست آمده را بر ضرب  $x^2$ ، یعنی  $2$  تقسیم کنیم، پس ریشه‌های معادله  $2x^2 - 7x + 3 = 0$  برابر  $\frac{1}{2}$  و  $x = \frac{6}{2} = 3$  هستند.

**نکته** گاهی اوقات فرم معادله به گونه‌ای است که می‌توانیم از اتحاد مزدوج برای حل معادله استفاده کنیم.

۱) ریشه کوچک‌تر معادله  $4x^2 - (2-x)^2 = 0$  کدام است؟  
 ۱) -۲      ۲) -۳      ۳)  $\frac{3}{2}$       ۴)  $\frac{4}{3}$

۲) معادله به فرم  $ax^2 + bx + c = 0$  است. اتحاد مزدوج خیلی به ما کمک می‌کند.

$4x^2 - (2-x)^2 = 0 \Rightarrow (2x)^2 - (2-x)^2 = 0 \Rightarrow (2x - (2-x))(2x + (2-x)) = 0 \Rightarrow (2x - 2 + x)(2x + 2 - x) = 0$

بنابراین ریشه کوچک‌تر معادله  $x = -2$  است.

$\Rightarrow (3x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2 = 0 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$

**نکته** اگر در معادله درجه دوم عبارت‌های یکسان در طرفین تساوی وجود داشت، می‌توانیم آن‌ها را با هم ساده کنیم اما ریشه عبارت ساده شده را باید جزو جواب‌های معادله در نظر بگیریم. (این کار برای معادله با هر درجه‌ای همیشه انجام داد.)

۱) مجموع جواب‌های معادله  $(x-2)(x-4) = x-2$  کدام است؟  
 ۱) ۵      ۲) ۶      ۳) ۷      ۴) ۸

۲) در طرفین معادله  $(x-2)$  وجود دارد. آن را از طرفین معادله حذف می‌کنیم، اما باید ریشه آن، یعنی  $x = 2$  را جزو جواب‌های معادله در نظر بگیریم. حال جواب دیگر معادله را به دست آوریم:  
 $(x-2)(x-4) = x-2 \Rightarrow x-4 = 1 \Rightarrow x = 1+4 = 5$   
 بنابراین  $x = 2$  و  $x = 5$  ریشه‌های معادله‌اند، پس مجموع ریشه‌ها  $2+5 = 7$  است.

**روش دلتا:** اگر معادله درجه دوم در حالات خاص نبود و تجزیه کردن آن هم مشکل یا امکان پذیر نبود، سراغ روش دلتا ( $\Delta$ ) می‌رویم. در معادله

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

توجه) به  $\Delta$  مثبتین معادله درجه دوم نیز می‌گویند.

مثلاً حل معادله  $4x^2 + 7x - 2 = 0$  را با روش  $\Delta$  ببینید، واضح است که در این معادله  $a = 4$ ،  $b = 7$  و  $c = -2$  است، پس:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 49 - 4(4)(-2) = 49 + 32 = 81$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-7 + \sqrt{81}}{8} = \frac{-7 + 9}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-7 - \sqrt{81}}{8} = \frac{-7 - 9}{8} = \frac{-16}{8} = -2$$

یک دقیقه با من باش. شما می‌تونید معادله  $4x^2 + 7x - 2 = 0$  رو به روش تجزیه هم حل کنید. نگاه کنید:

$$4x^2 + 7x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 7x - 1 = 0 \Rightarrow (x + \dots)(x + \dots) = 0 \xrightarrow{\text{حاله } -1 \text{ و } 1} (x + 1)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

هم‌عشون ۷ و ضریبون -۱ باشه. بنابراین جوابای معادله  $4x^2 + 7x - 2 = 0$  برابر  $\frac{1}{4}$  و  $-\frac{1}{4}$  هستن.

**پرسش ۱)** ریشه کوچک‌تر معادله  $2x^2 + 7x + 3 = 0$  چند برابر ریشه بزرگ‌تر آن است؟

۴(۱)      ۶(۲)      ۲(۳)      ۱(۴)

گزینه ۲) ریشه‌های معادله را به روش دلتا به دست می‌آوریم. توجه کنید  $a = 2$ ،  $b = 7$  و  $c = 3$  است، پس:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 49 - 4(2)(3) = 49 - 24 = 25$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-7 + \sqrt{25}}{4} = \frac{-7 + 5}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-7 - \sqrt{25}}{4} = \frac{-7 - 5}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

بنابراین ریشه بزرگ‌تر  $-\frac{1}{2}$  و ریشه کوچک‌تر  $-3$  است، پس  $\frac{-3}{-\frac{1}{2}} = 6$  می‌باشد. (خواست. هست. تو اعداد منفی، هر چه به سمت صفر میریم، عدد بزرگ‌تر می‌شه؟  $-\frac{1}{2}$  به صفر نزدیک‌تره، پس بزرگ‌تر از  $-3$  هستش. اول فکر کردی چون پرر شده ریشه کوچک‌تر هند برابر ریشه بزرگ‌تره. عموماً کوچک‌تر از یک همیشه و گفتمی همیشه  $\frac{1}{m}$  سستی. تو این سؤال می‌تونستی معادله رو از روش تجزیه هم حل کنی.)

**روش مربع کامل کردن:** اتحاد مربع کامل دوجمله‌ای را یادتان هست؟  $((a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2)$ . می‌توان معادله درجه دوم را به کمک این

اتحاد به شکل  $(x + m)^2 = n$  تبدیل کرد، سپس با ریشه‌گیری، ریشه‌های معادله را به دست آورد. برای حل معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  به روش مربع کامل گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

- ۱) اگر  $a \neq 1$  باشد، طرفین معادله را بر  $a$  تقسیم می‌کنیم تا ضریب  $x^2$  برابر ۱ شود.
- ۲) عدد ثابت را به طرف دیگر تساوی می‌بریم:
- ۳) نصف ضریب  $x$  را به توان ۲ می‌رسانیم و به طرفین معادله اضافه می‌کنیم:
- ۴) حال سمت چپ تساوی مربع کامل است و می‌توانیم آن را به فرم  $(x + m)^2 = n$  بنویسیم.
- ۵) با ریشه‌گیری، ریشه‌های معادله به دست می‌آیند.

**نکته** روش  $\Delta$ ، نتیجه روش مربع کامل کردن است. توصیه می‌کنم زمانی از روش مربع کامل کردن، معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  را حل کنید که عددی زوج باشد تا نصف ضریب  $x$  کسری نشود و در محاسبات دچار اشتباه نشوید.

**پرسش ۲)** حل معادله  $3x^2 + 2x - 4 = 0$  به روش مربع کامل منجر به معادله  $(x + m)^2 = n$  شده است. مقدار  $n$  کدام است؟

۱(۱)      ۲(۲)      ۳(۳)      ۴(۴)

گزینه ۴) ابتدا طرفین معادله را بر ۳ تقسیم می‌کنیم تا ضریب  $x^2$  برابر ۱ شود. حال به طرفین معادله، توان دوم نصف ضریب  $x$  را اضافه می‌کنیم و داریم:

$$3x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{4}{3} \Rightarrow x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \frac{4}{3} + \frac{1}{9} \Rightarrow (x + \frac{1}{3})^2 = \frac{13}{9}$$

همان  $(x + m)^2 = n$  است.

$$\Rightarrow (x + \frac{1}{3})^2 = \frac{13}{9} \Rightarrow \begin{cases} n = \frac{13}{9} \\ m = \frac{1}{3} \end{cases}$$

■ **معادلات قابل تبدیل به معادله درجه دوم:** بعضی معادلات درجه دوم نیستند اما می توان با یک تغییر متغیر مناسب، آن ها را به یک معادله درجه دوم تبدیل کرد. (مثلاً معادله  $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$  درجه دوم نیست اما اگر  $t = x^2$  باشد، اونوقت معادله به صورت  $t^2 - 2t - 3 = 0$  درمی آید که یک معادله درجه دومه). حال معادله درجه دوم حاصل که بر حسب متغیر جدید مثلاً  $t$  هست را حل می کنیم تا  $t$  به دست آید. سپس عبارتی که مساوی با  $t$  قرار داده بودیم را مساوی  $t$  های به دست آمده قرار می دهیم تا  $x$  معلوم شود. مثلاً حل معادله  $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$  را ببینید:

$$x^2 = t \Rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \xrightarrow[\text{فاصله شر}]{\Delta = (-2)^2 - 4(-3) = 16} t = -1, t = 3$$

حال  $x^2$  را برابر  $t$  های به دست آمده قرار می دهیم تا مقادیر  $x$  یعنی جواب های معادله  $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$  به دست آید:

$$\begin{cases} t = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \\ t = 3 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

؟ مجموع ریشه های بزرگ تر و کوچک تر معادله  $(x^2 - 3x) - (x^2 - 3x) - 6 = 0$  کدام است؟

۱) ۲      ۲) ۳      ۳) ۴      ۴) ۵

✓ گزینه ۲ اگر فرض کنیم  $t = x^2 - 3x = 6$  باشد، معادله به صورت  $t^2 - 6t = 0$  می شود. حال ریشه های معادله درجه دوم حاصل را به دست می آوریم:

$$t^2 - 6t = 0 \Rightarrow (t-3)(t-0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t-3=0 \Rightarrow t=3 \\ t-0=0 \Rightarrow t=0 \end{cases}$$

سپس  $x^2 - 3x = 6$  را برابر  $t$  های به دست آمده قرار می دهیم:

$$\begin{aligned} t=3 \Rightarrow x^2 - 3x = 3 \Rightarrow x^2 - 3x - 3 = 0 &\xrightarrow[\Delta = 9 - 4(1)(-3) = 21]{\text{فاصله شر}} x = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}, x = \frac{3 - \sqrt{21}}{2} \\ t=0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 0 = 0 &\xrightarrow[\Delta = 9 - 4(1)(0) = 9]{\text{فاصله شر}} x = 1, x = 2 \end{aligned}$$

واضح است که ریشه بزرگ تر معادله  $\frac{3 + \sqrt{21}}{2}$  و ریشه کوچک تر آن  $\frac{3 - \sqrt{21}}{2}$  است، پس مجموع آن ها برابر است با:

$$\frac{3 + \sqrt{21}}{2} + \frac{3 - \sqrt{21}}{2} = \frac{3 + \sqrt{21} + 3 - \sqrt{21}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

نکته گاهی اوقات در یک معادله درجه دوم، یک عبارت بر حسب  $x$  تکرار می شود. در این جا هم می توانیم آن عبارت تکرار شونده را  $t$  فرض کنیم و ریشه های معادله جدید، یعنی  $t$  را به دست آوریم. در آخر عبارتی که مساوی با  $t$  قرار داده بودیم را مساوی  $t$  های به دست آمده می گذاریم تا  $x$  به دست آید.

؟ ریشه کوچک تر معادله  $(3x+1)^2 + 9(3x+1) + 14 = 0$  کدام است؟

۱) ۱      ۲) -۱      ۳)  $-\frac{5}{3}$       ۴)  $-\frac{1}{3}$

✓ گزینه ۳ عبارت  $3x+1$  در معادله تکرار می شود. با فرض  $t = 3x+1$  معادله به صورت زیر ساده می شود و داریم:

$$t^2 + 9t + 14 = 0 \Rightarrow (t+2)(t+7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t+2=0 \Rightarrow t=-2 \\ t+7=0 \Rightarrow t=-7 \end{cases}$$

حال  $3x+1$  را برابر  $t$  های به دست آمده قرار می دهیم تا  $x$  معلوم شود:

$$t = -2 \Rightarrow 3x + 1 = -2 \Rightarrow 3x = -2 - 1 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1$$

$$t = -7 \Rightarrow 3x + 1 = -7 \Rightarrow 3x = -7 - 1 \Rightarrow 3x = -8 \Rightarrow x = -\frac{8}{3}$$

بنابراین ریشه کوچک تر معادله  $x = -\frac{8}{3}$  است.

توجه کن این معادله درجه دومه، اما چون  $3x+1$  تو معادله تکرار میشه،  $3x+1$  رو  $t$  گرفتیم و معادله رو حل کردیم. می تونستیم معادله رو به فرم  $ax^2 + bx + c = 0$  در بیاریم و حل کنیم که کمی وقت گیره.

$$(3x+1)^2 + 9(3x+1) + 14 = 0 \Rightarrow 9x^2 + 6x + 1 + 27x + 9 + 14 = 0 \Rightarrow 9x^2 + 33x + 24 = 0 \xrightarrow[\Delta = 33^2 - 4(9)(24) = 9(121 - 96) = 9(25) = 150]{a+c-b} x = -1, x = -\frac{8}{3}$$

تعداد جواب‌های معادله درجه دوم: همان طور که دیدیم برای به دست آوردن ریشه‌های معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  به روش دلتا،  $\Delta$  زیررادیکال قرار می‌گیرد. می‌دانیم اعداد منفی زیررادیکال نمی‌روند (مثلاً  $\sqrt{-2}$  ریزی؟). پس علامت  $\Delta$  تعیین‌کننده تعداد ریشه‌های معادله می‌باشد، به جدول زیر توجه کنید:

علامت $\Delta$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
تعداد ریشه‌ها	معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.	معادله یک ریشه مضاعف دارد.	معادله ریشه حقیقی ندارد.
ریشه‌ها	$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$	-

**نکته** اگر در معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  ضرایب  $a$  و  $c$  مختلف‌العلامت باشند (یکی مثبت باشد، یکی منفی) حتماً  $\Delta > 0$  است و معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.

؟ کدام معادله زیرریشه حقیقی ندارد؟

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad (2)$$

$$3x^2 + x - 4 = 0 \quad (1)$$

$$(x-2)(x+1) + 5 = 0 \quad (4)$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \quad (3)$$

☑ **گزینه ۴** در گزینه (۱) که  $a$  و  $c$  مختلف‌العلامت هستند (یکی  $+3$ ، یکی  $-4$ ) حتماً  $\Delta > 0$  است، پس دو ریشه حقیقی متمایز دارد. در گزینه‌های (۲) و (۳) مقدار  $\Delta$  را به دست می‌آوریم:

$$2) \Delta = (-4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} \text{ریشه مضاعف دارد.}$$

$$3) \Delta = (-4)^2 - 4(1)(1) = 16 - 4 = 12 \xrightarrow{\Delta>0} \text{دو ریشه حقیقی متمایز دارد.}$$

بنابراین گزینه (۴) یعنی معادله  $(x-2)(x+1) + 5 = 0$  ریشه حقیقی ندارد. برای تمرین بیشتر دلتای آن را به دست آوریم. ابتدا باید معادله را به فرم  $ax^2 + bx + c = 0$  در آوریم:

$$(x-2)(x+1) + 5 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 + 5 = 0 \Rightarrow x^2 - x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(1)(3) = 1 - 12 = -11 \xrightarrow{\Delta<0} \text{ریشه حقیقی ندارد.}$$

انتظار جمله مشترک.

؟ معادله  $x^2 + (m+1)x + 4 = 0$  ریشه مضاعف دارد. بزرگ‌ترین مقدار  $m$  کدام است؟

$$-5 \quad (4)$$

$$-4 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

☑ **گزینه ۲** باید دلتای معادله صفر شود. واضح است که  $a = 1$ ،  $b = m+1$  و  $c = 4$  است، پس:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (m+1)^2 - 4(1)(4) = 0 \Rightarrow (m+1)^2 - 16 = 0 \Rightarrow (m+1)^2 = 16 \xrightarrow{\text{ریشه گیری}} \begin{cases} m+1 = 4 \Rightarrow m = 3 \\ m+1 = -4 \Rightarrow m = -5 \end{cases}$$

بنابراین بزرگ‌ترین مقدار  $m$  برابر ۳ است.

**نکته** گاهی اوقات به جای آن که بگویند فلان معادله ریشه مضاعف دارد، می‌گویند تفاضل دو ریشه معادله صفر است.

؟ در معادله درجه دوم  $4x^2 - 20x + m = 0$  تفاضل دو ریشه برابر صفر است. یکی از ریشه‌های معادله کدام است؟

$$3/5 \quad (4)$$

$$2/5 \quad (3)$$

$$2/25 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

☑ **گزینه ۳** چون تفاضل دو ریشه معادله صفر است، یعنی معادله ریشه مضاعف دارد. می‌دانیم ریشه مضاعف معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  برابر  $-\frac{b}{2a}$  است، پس:

$$4x^2 - 20x + m = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-20)}{2 \times 4} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2/5$$

مواست بود که چون از ما ریشه مضاعف معادله رو خواسته، نیازی به به دست آوردن  $m$  نبود. اما اگر  $m$  رو می‌خواست باید دلتای معادله رو برابر صفر قرار می‌دادیم تا  $m$  به دست می‌ومد.

**نکته** وقتی گفته می‌شود معادله دو ریشه حقیقی دارد، یعنی معادله می‌تواند دو ریشه حقیقی متمایز یا مساوی داشته باشد، پس باید  $\Delta \geq 0$  باشد.

؟ به ازای چند مقدار طبیعی برای  $a$ ، معادله  $x^2 + 4x + a - 1 = 0$  دارای دو ریشه حقیقی است؟

۴ (۱)      ۵ (۲)      ۴ (۳)      ۳ (۴)

✓ **گزینه ۲** چون معادله دارای دو ریشه حقیقی است، پس باید  $\Delta \geq 0$  باشد:

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow 4^2 - 4(1)(a-1) \geq 0 \Rightarrow 16 - 4(a-1) \geq 0 \Rightarrow 16 - 4a + 4 \geq 0 \Rightarrow 20 - 4a \geq 0 \Rightarrow 4a \leq 20 \Rightarrow a \leq \frac{20}{4} \Rightarrow a \leq 5$$

بنابراین  $a$  می‌تواند مقادیر طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را بپذیرد که ۵ مقدار است.

**روابط بین ریشه‌های معادله با ضرایب معادله:** اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  باشند، می‌توان مجموع ریشه‌ها

( $S = x_1 + x_2$ )، حاصل ضرب ریشه‌ها ( $P = x_1 x_2$ ) و قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها ( $D = |x_1 - x_2|$ ) را بدون نیاز به حل معادله و با استفاده از ضرایب

معادله به دست آورد که در زیر می‌بینید:

$$x_1 + x_2 = S = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = P = \frac{c}{a} \quad |x_1 - x_2| = D = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

(همتا بارت هست که ریشه‌های معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  با روش دلتا،  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  و  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  هستند، حالا می‌تونی به کمک اونا تمامی روابط بالا رو فوراً اثبات کنی.)

؟ اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x^2 + 3x - 2 = 0$  باشند، حاصل  $\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}$  کدام است؟

۲ (۱)      ۳ (۲)      ۴ (۳)      ۳ (۴)

✓ **گزینه ۱** ضرایب معادله  $a = 1$ ،  $b = 3$  و  $c = -2$  هستند،  $x_1 + x_2$  و  $x_1 x_2$  را می‌توانیم بر حسب ضرایب معادله به دست آوریم، پس:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{3}{1} = -3 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{-2}{1} = -2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

عبارت	نحوه محاسبه بر حسب $P$ و $S$ و $D$
$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$	$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = P \times S$
$x_1^2 + x_2^2$	$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = S^2 - 2P$
$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$	$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{S}{P}$
$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$	$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{S^2 - 2P}{P}$ ( $x_1^2 + x_2^2$ بالا مناسبه شده بور )
$x_1^2 + x_2^2$	$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 (x_1 + x_2) = S^2 - 2PS$

**نکته** گاهی اوقات  $x_1 + x_2$ ،  $x_1 x_2$  و  $|x_1 - x_2|$  یعنی  $S$ ،  $P$  و  $D$  در دل یک عبارت وجود دارند. در این موارد باید با استفاده از اتحادهای جبری، تجزیه کردن، فاکتورگیری و مخرج مشترک‌گیری، به توان رساندن و ... عبارت را بر حسب  $S$ ،  $P$  و  $D$  نوشت. چند نمونه در جدول مقابل ببینید و نحوه به دست آوردن آن‌ها را تمرین کنید.

**توجه** از جدول فوق، روابط  $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$  و  $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2PS$  را حفظ کنید.

؟ اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x^2 + 3x - 2 = 0$  باشند، حاصل  $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$  کدام است؟

۲۶ (۱)      -۲۶ (۲)      ۱۳ (۳)      -۱۳ (۴)

✓ **گزینه ۲** سعی می‌کنیم رابطه  $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$  را بر حسب  $x_1 + x_2$  و  $x_1 x_2$  بنویسیم:

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) = P(S^2 - 2P) = \left(\frac{c}{a}\right) \left( \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right) \right) = -2((-3)^2 - 2(-2)) = -2(9 + 4) = -2 \times 13 = -26$$

۱ اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $5x^2 - 8x - 4 = 0$  باشند، مقدار  $|x_1^2 - x_2^2|$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{84}{25}$       ۲)  $\frac{90}{25}$       ۳)  $\frac{96}{25}$       ۴)  $\frac{102}{25}$

✔ **توجه:** به کمک اتحاد مزدوج می‌توان  $x_1^2 - x_2^2$  را به صورت  $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$  نوشت، پس:

$$|(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)| = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \times \left(-\frac{b}{a}\right) \right| = \left| \frac{\sqrt{64 - 4(5)(-4)}}{5} \times \left(-\frac{-8}{5}\right) \right| = \left| \frac{\sqrt{64 + 80}}{5} \times \frac{8}{5} \right| = \left| \frac{\sqrt{144}}{5} \times \frac{8}{5} \right| = \left| \frac{12}{5} \times \frac{8}{5} \right| = \left| \frac{96}{25} \right| = \frac{96}{25}$$

توجه بعضی اوقات ممکن است عبارات را به صورت فارسی بیان کنند. چند نمونه ببینید:

بیان فارسی	مجموع مربعات ریشه‌ها	مجموع مکعبات ریشه‌ها	قدر مطلق تفاضل مربعات ریشه‌ها	مجموع معکوس ریشه‌ها	مجموع جذر ریشه‌ها	مجموع معکوس مربع ریشه‌ها
عبارت ریاضی	$x_1^2 + x_2^2$	$x_1^3 + x_2^3$	$ x_1^2 - x_2^2 $	$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$	$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$	$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

### دو حالت خاص:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0$$

۱ اگر معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  دو ریشه قرینه داشته باشد، حتماً مجموع ریشه‌ها صفر است، پس  $b$  حتماً صفر است.

(این مطلب رو در حالت خاص معادله درجه دوم دیده بودیم. این هم از یک زاویه دیگر)

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow a = c$$

۲ اگر ریشه‌های معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  معکوس هم باشند، حتماً حاصل ضرب آن‌ها یک است، پس حتماً  $a = c$  می‌باشد.

۳ ریشه‌های معادله  $mx^2 - 4x + 2m - 1 = 0$  معکوس یکدیگرند. مجموع ریشه‌ها کدام است؟

- ۱) ۳      ۲) ۴      ۳) ۵      ۴) ۶

✔ **توجه:** چون ریشه‌ها معکوس یکدیگرند، پس  $\frac{c}{a} = 1$  و در نتیجه  $a = c$  می‌باشد.  $a = c \Rightarrow m = 2m - 1 \Rightarrow 1 = 2m - m \Rightarrow m = 1$ . به ازای  $m = 1$  معادله به صورت  $x^2 - 4x + 1 = 0$  می‌شود، بنابراین مجموع ریشه‌ها برابر  $4 = -\left(-\frac{4}{1}\right) = \frac{b}{a}$  است.

**نکته:** گاهی در بعضی تست‌ها یک رابطه بر حسب دو ریشه معادله داده می‌شود و باید پارامتر موجود در معادله را تعیین کنیم. در این‌گونه مسائل نوشتن حاصل ضرب یا حاصل جمع ریشه‌ها یا هر دو و قرار دادن آن‌ها با رابطه داده شده در یک دستگاه (رستگانه هیه؟) کلید حل مسأله است.

■ **دستگاه معادلات خطی:** دو معادله داریم که هر کدام دو مجهول دارند، مثل  $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$ ، یکی از راه‌های حل کردن آن، حذف کردن یکی از

مجهولات در بین دو معادله است. تا به یک معادله یک مجهولی برسیم. نام این روش حل، روش حذفی است. حل دستگاه  $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$  را ببینید.

$$(-2) \times \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -2x + 4y = 2 \end{cases} \Rightarrow 7y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{7} = 1 \xrightarrow{\text{بای‌گذاری در یکی از معادلات}} 2x + 3(1) = 5 \Rightarrow 2x = 5 - 3 = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{2} = 1$$

۴ اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 + 2x + 2m + 1 = 0$  باشند، به ازای کدام مقدار  $m$  رابطه  $\alpha + 2\beta = -5$  برقرار است؟

- ۱) -۱      ۲) ۱      ۳) ۲      ۴) -۲

✔ **توجه:** با توجه به این‌که ضریب  $x^2$  و ضریب  $x$  پارامتر ندارند، پس می‌توانیم مجموع ریشه‌ها یعنی  $\alpha + \beta$  را به دست آوریم. می‌دانیم

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -2 \\ \alpha + 2\beta = -5 \end{cases} \xrightarrow{\text{دو معادله را}} \beta = -3 \xrightarrow{\alpha + \beta = -2} \alpha = 1$$

پس:  $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2$

حال برای به دست آوردن  $m$  از حاصل ضرب ریشه‌ها کمک می‌گیریم:

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{2m+1}{1} \Rightarrow 1 \times (-3) = 2m+1 \Rightarrow 2m+1 = -3 \Rightarrow 2m = -3-1 \Rightarrow 2m = -4 \Rightarrow m = \frac{-4}{2} = -2$$

**نکته** گاهی اوقات قسمتی از عبارتی که بر حسب ریشه‌ها می‌خواهند، شبیه خود معادله است. در این موارد جمله معروف «ریشه معادله، در معادله صدق می‌کند.» کلید حل سؤال است.

۱ اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 3x - 5 = 0$  باشند، مقدار  $\alpha^2 + 3\beta - 5$  کدام است؟

۱۸۱) ۱۵) ۲) ۹) ۴) ۱۲) ۳)

✔ **گزینه ۴)** یک بار عبارت خواسته شده را به صورت  $\alpha^2 - 5 + 3\beta$  ببینید. موافقید که  $\alpha^2 - 5$  شبیه قسمتی از معادله  $x^2 - 3x - 5 = 0$  است. می‌دانیم  $x = \alpha$  در معادله صدق می‌کند، پس:

$$\alpha^2 - 3\alpha - 5 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 5 = 3\alpha$$

بنابراین عبارت  $\alpha^2 - 5 + 3\beta$  برابر  $3\alpha + 3\beta$  است. حال داریم:

$$3\alpha + 3\beta = 3(\alpha + \beta) = 3\left(-\frac{-3}{1}\right) = 3 \times 3 = 9$$

**تعیین علامت ریشه‌ها از روی ضرایب معادله:** در معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  با فرض آن که معادله دو ریشه دارد، از روی علامت جمع و ضرب ریشه‌ها، یعنی علامت S و P، می‌توان اطلاعاتی راجع به علامت ریشه‌ها و ... به دست آورد. به جدول زیر توجه کنید:

$ax^2 + bx + c = 0$ , $S = \alpha + \beta$ , $P = \alpha\beta$			
$P < 0$		$P > 0$	
معادله دو ریشه مختلف‌العلامت دارد.		معادله دو ریشه هم‌علامت دارد.	
$S < 0$	$S > 0$	$S < 0$	$S > 0$
قدرمطلق ریشه منفی، بزرگ‌تر است.	قدرمطلق ریشه مثبت، بزرگ‌تر است.	دو ریشه منفی دارد.	دو ریشه مثبت دارد.

۲ اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های یک معادله و  $0 < \alpha < \beta$  است. معادله کدام می‌تواند باشد؟

۱)  $x^2 + x + 4 = 0$  ۲)  $x^2 + 5x - 10 = 0$  ۳)  $x^2 - 7x + 3 = 0$  ۴)  $x^2 + 8x + 2 = 0$

✔ **گزینه ۴)** اولاً باید دلتای معادله مثبت باشد. در گزینه (۱) دلتای معادله منفی است. در ضمن باید ضرب ریشه‌ها مثبت باشد که در گزینه‌های (۳) و (۴) این چنین است. در ضمن باید جمع ریشه‌ها منفی باشد که فقط در معادله  $x^2 + 8x + 2 = 0$  مجموع ریشه‌ها منفی می‌باشد.

$$\Delta = 8^2 - 4(1)(2) = 56$$

$$x^2 + 8x + 2 = 0 \Rightarrow P = \frac{2}{1} = 2$$

$$S = -\frac{8}{1} = -8$$

**کاربرد معادله درجه دوم در حل مسائل اقتصادی:** در هر بنگاه اقتصادی، سه مؤلفه هزینه، درآمد حاصل از فروش و سود وجود دارد که به صورت زیر تعریف می‌شوند: (از این به بعد درآمد حاصل از فروش رو به طور فاصله درآمد می‌گیریم).

- هزینه:** هزینه تولید  $x$  واحد کالا که شامل هزینه اولیه (راه‌اندازی، تجهیزات، تبلیغات و ...) و هزینه تولید است که با  $C(x)$  نمایش می‌دهند.
- درآمد:** اگر  $N$  واحد کالا با قیمت هر واحد  $P$ ، به فروش برسد،  $N \times P$  درآمد حاصل از فروش است که آن را با  $R(x)$  نشان می‌دهند.
- سود:** اگر هزینه‌ها را از درآمد حاصل از فروش  $x$  واحد کالا، کم کنیم، آن چه باقی می‌ماند سود حاصل از فروش  $x$  واحد کالا است که آن را با  $P(x)$  نشان می‌دهند.

بنابراین در یک بنگاه اقتصادی رابطه زیر بین هزینه، درآمد و سود برقرار است:

$$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow \text{هزینه} - \text{درآمد} = \text{سود}$$

۱ تابع درآمد شرکتی به ازای تولید  $x$  واحد از یک کالا به صورت  $R(x) = -x^2 + 12x$  و تابع هزینه آن به صورت  $C(x) = 98 - 9x$  است. درآمد شرکت پس از تولید حداقل چند کالا برابر ۱۴ واحد می‌شود؟

۱۱) ۱) ۲) ۱۰) ۳) ۹) ۴) ۸)

✔ **گزینه ۲)** ابتدا تابع سود را به دست می‌آوریم تا ببینیم با تولید چند واحد کالا سود برابر ۱۴ می‌شود:

$$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow P(x) = -x^2 + 12x - (98 - 9x) \Rightarrow P(x) = -x^2 + 12x - 98 + 9x \Rightarrow P(x) = -x^2 + 21x - 98$$

حال معادله  $P(x) = 14$  را حل می‌کنیم:

$$P(x) = 14 \Rightarrow -x^2 + 21x - 98 = 14 \Rightarrow x^2 - 21x + 112 + 98 = 0 \Rightarrow x^2 - 21x + 110 = 0 \Rightarrow (x - 10)(x - 11) = 0 \Rightarrow x = 10, x = 11$$

بنابراین شرکت پس از تولید حداقل ۱۰ واحد کالا سود ۱۴ واحدی می‌کند. (معنی حداقل رو هم که می‌دونی.)



■ **نقطه سر به سر:** تعداد تولید یک بنگاه اقتصادی که به ازای آن هزینه و درآمد برابر می شود (سور شرکت صفر همیشه) و بنگاه نه سود می کند نه ضرر را نقطه سر به سر می گوئیم.

نکته برای به دست آوردن نقطه سر به سر می توانیم به جای حل معادله «سود = ۰» معادله «درآمد = هزینه» را حل کنیم.

۲ تابع درآمد شرکتی به ازای تولید  $x$  واحد کالا به صورت  $R(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x$  و تابع هزینه آن  $C(x) = 25 - \frac{13}{4}x$  است. این شرکت دومین باری که به نقطه سر به سر خود می رسد، به ازای تولید چند واحد کالا است؟

۵(۱) ..... ۱۵(۲) ..... ۲۰(۳) ..... ۲۵(۴)

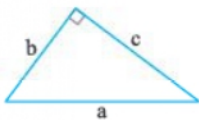
گزینه ۳: نقطه سر به سر نقطه ای است که هزینه = درآمد شود. بنابراین داریم:

$$R(x) = C(x) \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 3x = 25 - \frac{13}{4}x \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 25 + \frac{13}{4}x = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + \frac{25}{4}x - 25 = 0$$

$$\xrightarrow{x(-4)} x^2 - 25x + 100 = 0 \Rightarrow (x-5)(x-20) = 0 \Rightarrow x=5, x=20$$

بنابراین شرکت برای اولین بار به ازای تولید ۵ کالا و برای دومین بار به ازای تولید ۲۰ کالا به نقطه سر به سر می رسد.

■ **کاربرد معادله درجه دوم در حل مسائل توصیفی:** حل بعضی از مسائل توصیفی منجر به حل یک معادله درجه دوم می شود. در این گونه مسائل، دو جواب برای مجهول پیدا می شود که معمولاً یکی از آن ها، با توجه به شرایط سؤال قابل قبول نیست. مثلاً اگر سن فردی، عدد منفی شود، طول یک ضلع شکل هندسی منفی شود و ... آن ها جواب های غیر قابل قبول مسأله هستند. علاوه بر مفاهیم هندسی که در درسنامه معادله درجه اول دیدیم، باید مطالب زیر را هم بدانیم:



$$a^2 = b^2 + c^2$$

۱ قضیه فیثاغورس: در هر مثلث قائم الزاویه، مربع وتر برابر مجموع مربعات دو ضلع قائم است.

نتیجه به کمک قضیه فیثاغورس می توان طول قطر مستطیل، مربع، دوزنقه قائم الزاویه و ... را نیز به دست آورد. کافی است در هر یک از مثلث های قائم الزاویه رنگی از قضیه فیثاغورس استفاده کنید.

$$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d = \sqrt{2}a$$

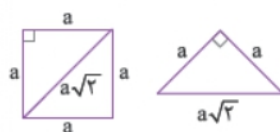
$$d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$d^2 = a^2 + h^2 \Rightarrow d = \sqrt{a^2 + h^2}$$

$$d^2 = b^2 + h^2 \Rightarrow d = \sqrt{b^2 + h^2}$$

توجه این دو مورد را حفظ کنید. در مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین با اضلاع قائم  $a$ ، طول وتر

$a\sqrt{2}$  و در مربع به ضلع  $a$ ، طول قطر  $a\sqrt{2}$  می باشد.



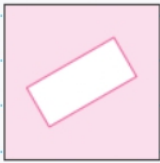
۲ حاصل ضرب دو عدد زوج متوالی، از ۹ برابر عدد کوچک تر، ۸ واحد بیش تر است. عدد کوچک تر بر کدام عدد بخش پذیر است؟

۴(۱) ..... ۵(۲) ..... ۶(۳) ..... ۷(۴)

گزینه ۱: فرض می کنیم  $x$  و  $x+2$  دو عدد زوج متوالی هستند. طبق صورت سؤال  $x(x+2) = 9x+8$  است، پس:

$$x(x+2) = 9x+8 \Rightarrow x^2+2x = 9x+8 \Rightarrow x^2+2x-9x-8 = 0 \Rightarrow x^2-7x-8 = 0 \xrightarrow{a+c=b} x = -1, x = 8$$

واضح است که ۱- زوج نیست، پس غیر قابل قبول است و ۸- جواب مسأله می باشد که با توجه به گزینه ها بر ۴ بخش پذیر است.



۱. در شکل مقابل، مستطیلی که طول آن ۱۰ واحد بیش تر از عرض آن است را از درون مربعی به ضلع ۴۰ برداشته ایم. اگر مساحت قسمت رنگی ۱۵۲۵ باشد، طول قطر مستطیل کدام است؟

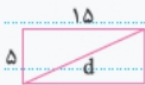
- (۱)  $10\sqrt{5}$
- (۲)  $5\sqrt{10}$
- (۳)  $5\sqrt{4}$
- (۴)  $10\sqrt{4}$

۲. اگر عرض مستطیل را  $x$  فرض کنیم، طول آن  $x+10$  است. بنابراین مساحت قسمت رنگی برابر است با:

$$1525 = 40^2 - x(x+10) \Rightarrow 1525 = 1600 - (x^2 + 10x) \Rightarrow x^2 + 10x = 1600 - 1525$$

$$\Rightarrow x^2 + 10x = 75 \Rightarrow x^2 + 10x - 75 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+15) = 0 \Rightarrow x = 5, x = -15$$

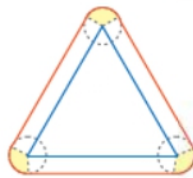
واضح است که  $-15$  نمی تواند عرض مستطیل باشد. پس عرض مستطیل ۵ بوده و طول آن برابر ۱۵ می شود، بنابراین طول قطر مستطیل برابر است با:



$$d^2 = 15^2 + 5^2 \Rightarrow d^2 = 225 + 25 = 250 \Rightarrow d = \sqrt{250} = 5\sqrt{10}$$



چهار قسمت رنگی تشکیل یک دایره می دهند.



سه قسمت رنگی تشکیل یک دایره می دهند.

۲. اگر می خواهید از محیط یک شکل هندسی، فاصله ای به اندازه  $r$  ایجاد کنید، کافی است به موازات اضلاع، خطوطی به فاصله  $r$  و در رأس ها، دایره ای به مرکز رأس و شعاع  $r$  رسم کنید.

## پرسش های چهارگزینه ای

درس ۲

### حل معادله درجه دوم

تو این تست، فقط حل معادله برات مهم نباشه. اینها باید یاد بگیری که درم روش حل، کجا بهتره ...

۲۸. ریشه بزرگ تر معادله  $3x^2 + 4x + 1 = 0$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$
- (۲)  $-1$
- (۳)  $-\frac{1}{3}$
- (۴)  $-\frac{3}{4}$

۲۹. ریشه مثبت معادله  $37x^2 - 16x - 21 = 0$ ، چند واحد از ریشه مثبت معادله  $x^2 - 2x = x$  کم تر است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۳۰. اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه های معادله  $x^2 - (\sqrt{2}-1)x - \sqrt{2} = 0$  باشند، مقدار  $x_1^3 + x_2^3$  کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{2} - 3$
- (۲)  $\sqrt{2} - 3$
- (۳)  $2\sqrt{2} - 1$
- (۴)  $\sqrt{2} - 1$

۳۱. یکی از ریشه های معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  برابر  $-1$  است. اگر  $a = b = 5c$  باشد، ریشه دیگر معادله کدام است؟

- (۱)  $1/2$
- (۲)  $2/1$
- (۳)  $-1/2$
- (۴)  $-2/1$

۳۲. اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه های معادله  $x^2 - x - 3 = 0$  و  $|x_1| = -x_1$  باشد، مقدار  $4x_1 + 3x_2$  کدام است؟

- (۱)  $-2$
- (۲)  $-1$
- (۳)  $1$
- (۴) صفر

۳۳. اگر  $x = 1$  یکی از جواب های معادله درجه دوم  $5x^2 - 3x + k = 0$  باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

- (۱)  $-1/4$
- (۲)  $-1/3$
- (۳)  $1/3$
- (۴)  $1/4$

۳۴. اگر  $x = -5$  یکی از ریشه های معادله  $x^2 + (2m-4)x + m - 9 = 0$  باشد، ریشه دیگر معادله کدام است؟

- (۱) ۲
- (۲)  $-2$
- (۳) ۱
- (۴)  $-1$

۳۵. اگر  $x = m$  ریشه مثبت معادله  $3x^2 - x + 2mx - 4 = 0$  باشد، ریشه دیگر معادله کدام است؟

- (۱)  $-\frac{2}{3}$
- (۲)  $\frac{4}{3}$
- (۳)  $-\frac{3}{2}$
- (۴)  $-\frac{4}{3}$

۳۶. معادله  $x^2 + (m+6)x - m = 15$  دو ریشه قرینه دارد. حاصل ضرب ریشه ها کدام است؟

- (۱)  $-4$
- (۲)  $-9$
- (۳)  $-1$
- (۴)  $-16$

۳۷. به ازای کدام مقدار  $a$  ریشه های معادله  $(a+3)x^2 - (a^2-9)x - 6 = 0$  قرینه یکدیگرند؟

- (۱)  $\{3\}$
- (۲)  $\{ \}$
- (۳)  $\{-3\}$
- (۴)  $\{3, -3\}$

۳۸. کدام معادله با بقیه، هیچ ریشه مشترکی ندارد؟

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \quad (۴) \quad x^2 + x - 12 = 0 \quad (۳) \quad x^2 - 10x + 16 = 0 \quad (۲) \quad x^2 - 8x + 12 = 0 \quad (۱)$$

۳۹. اگر  $x = -3$  یک ریشه معادله  $x^2 - (m-1)x + 4m - 27 = 0$  باشد، ریشه دیگر معادله کدام است؟

$$۷(۴) \quad ۶(۳) \quad ۵(۲) \quad ۴(۱)$$

۴۰. ریشه‌های معادله  $(3x-9)(-3x-9) = (2x-8)(6+2x)$  کدام است؟

$$-۳, ۴(۴) \quad -۴, -۳(۳) \quad -۴, ۳(۲) \quad ۴, ۳(۱)$$

۴۱. ریشه کوچک‌تر معادله  $x^2 - (2-x) = 4x^2$  کدام است؟

$$\frac{2}{3}(۴) \quad -\frac{2}{3}(۳) \quad -۲(۲) \quad -۱(۱)$$

۴۲. مجموع جواب‌های معادله  $x^2(x-1) - 4(x-1) = 0$  کدام است؟

$$۲(۴) \quad ۱(۳) \quad -۱(۲) \quad -۲(۱)$$

۴۳. مجموع جواب‌های معادله  $(x+1)^2(x-3) - 4x(x-3) = 0$  کدام است؟

$$۶(۴) \quad ۵(۳) \quad ۴(۲) \quad ۳(۱)$$

۴۴. ریشه‌های معادله  $(x-2)(4x-5) = 2-x$  چگونه‌اند؟

(۱) یک ریشه مثبت دارد. (۲) دو ریشه مثبت دارد.

(۳) دو ریشه مختلف‌العلامت دارد. (۴) یک ریشه منفی دارد.

۴۵. یکی از ریشه‌های معادله  $x^2 - 4x - 2 = 0$  کدام است؟

$$۴ - \sqrt{6}(۴) \quad ۲ - \sqrt{6}(۳) \quad ۶ - \sqrt{2}(۲) \quad -۲ + \sqrt{6}(۱)$$

۴۶. یکی از ریشه‌های معادله  $x^2 + 4x + 1 = 0$  کدام است؟

$$۲ - 2\sqrt{3}(۴) \quad ۲ + \sqrt{3}(۳) \quad -۲ - \sqrt{3}(۲) \quad ۲ - \sqrt{3}(۱)$$

۴۷. مجموع ریشه بزرگ‌تر معادله  $x^2 - 8x + 13 = 0$  و ریشه کوچک‌تر معادله  $2x^2 - 6 = 0$  کدام است؟

$$۶(۴) \quad ۵(۳) \quad ۴(۲) \quad ۳(۱)$$

۴۸. یکی از ریشه‌های معادله  $x^2 - 5x + 3 = 0$  به صورت  $m + \sqrt{n}$  است. مقدار  $m + n$  کدام است؟

$$\frac{19}{4}(۴) \quad \frac{23}{2}(۳) \quad \frac{19}{2}(۲) \quad \frac{23}{4}(۱)$$

۴۹. اگر  $x_1$  ریشه کوچک‌تر معادله  $x^2 - 4x - 1 = 0$  باشد، مقدار  $x_1^2$  کدام است؟

$$۹ - 4\sqrt{5}(۴) \quad ۸ + 4\sqrt{5}(۳) \quad ۱۲ - 4\sqrt{5}(۲) \quad ۸ - 2\sqrt{5}(۱)$$

۵۰. اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 5x - 2 = 0$  و  $12x^2 - 5x - 2 = 0$  باشد، مقدار  $3x_1 + 4x_2$  کدام است؟

$$-۲(۴) \quad ۲(۳) \quad ۱(۲) \quad -۱(۱)$$

۵۱. ریشه بزرگ معادله  $x^2 - 5x + 3 = 0$  به صورت  $\frac{m + \sqrt{n}}{2}$  است. مقدار  $m + n$  کدام است؟

$$۱۸(۴) \quad ۱۷(۳) \quad ۱۶(۲) \quad ۱۵(۱)$$

۵۲. مجموع ریشه بزرگ‌تر معادله  $x^2 - 2x - 2 = 0$  و ریشه کوچک‌تر معادله  $x^2 - 8x + 13 = 0$  کدام است؟

$$۷(۴) \quad ۶(۳) \quad ۵(۲) \quad ۴(۱)$$

۵۳. اگر  $x = 3$  یک ریشه معادله  $ax^2 - (2a+3)x + a + 1 = 0$  باشد، ریشه دیگر معادله کدام است؟

$$\frac{2}{3}(۴) \quad -\frac{1}{2}(۳) \quad \frac{1}{2}(۲) \quad \frac{1}{3}(۱)$$

۵۴. اگر  $x = n$  ریشه منفی معادله  $5x^2 + nx - 3 = 0$  باشد، ریشه دیگر معادله کدام است؟

$$\frac{3\sqrt{2}}{5}(۴) \quad \frac{2\sqrt{2}}{5}(۳) \quad \frac{\sqrt{2}}{2}(۲) \quad \frac{\sqrt{2}}{4}(۱)$$

۵۵. اگر  $m + 2$  ریشه بزرگ‌تر معادله  $x^2 - mx - m - 7 = 0$  باشد، ریشه کوچک‌تر معادله کدام است؟

$$-۲(۴) \quad -۳(۳) \quad ۳(۲) \quad ۲(۱)$$

۵۶. اگر معادله  $4x^2 - 32x = 5$  را به روش مربع کامل حل کنیم، کدام معادله حاصل می‌شود؟

$$(x-4)^2 = \frac{59}{4}(۴) \quad (x-8)^2 = \frac{69}{4}(۳) \quad (x-4)^2 = \frac{69}{4}(۲) \quad (x-8)^2 = \frac{49}{4}(۱)$$

۵۷. در حل معادله  $0 = 2x^2 + 3x - 5$ ، معادله  $(x+m)^2 = n$  حاصل شده است. مقدار  $m+n$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{49}{16}$  (۲)  $\frac{53}{16}$  (۳)  $\frac{59}{16}$  (۴)  $\frac{61}{16}$

۵۸. در حل معادله  $0 = 2x^2 - 6x - 1$  به معادله  $x^2 + mx = n$  رسیدیم. کدام عدد را به طرفین آن اضافه کنیم تا با روش ریشه‌گیری جواب‌های معادله به دست آید؟

- (۱) ۹ (۲)  $\frac{9}{4}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $\frac{1}{4}$

۵۹. مجموع جواب‌های معادله  $9 = ((2-x)^2 - 2)^2$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳)  $4 + 2\sqrt{5}$  (۴)  $4 + 2\sqrt{3}$

۶۰. ریشه مثبت معادلات  $0 = (3x-2)^2 - 9$  و  $a = (4x-1)^2$  مشترک‌اند. مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{225}{16}$  (۲)  $\frac{289}{9}$  (۳)  $\frac{196}{16}$  (۴)  $\frac{256}{9}$

### معادلات قابل تبدیل به معادله درجه دوم

تغییر متغیر و از این‌ها بهره‌مند شوید...

۶۱. تعداد جواب‌های حقیقی معادله  $0 = x^4 + 10x^2 + 9$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۶۲. ریشه کوچک‌تر معادله  $0 = 6x^2 - 6x + 8$  کدام است؟

- (۱)  $-\sqrt{2}$  (۲) -۲ (۳)  $-\sqrt{3}$  (۴) -۳

۶۳. حاصل ضرب ریشه‌های معادله  $0 = 15x^2 + 54x - 15$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲)  $4\sqrt{2}$  (۳) ۵۴ (۴)  $8\sqrt{2}$

۶۴. اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین ریشه معادله  $0 = 13x^2 - 13x + 36$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۶۵. تعداد ریشه‌های معادله  $0 = 2(x-3)^2 - x^2 + 6x - 10$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) صفر

۶۶. مجموع جواب‌های معادله  $0 = 20x^2 + 80x - 32 = 2(x-2)^2 - 20x^2 + 80x - 32$  کدام است؟

- (۱)  $8 + 2\sqrt{6}$  (۲)  $6 + 2\sqrt{6}$  (۳) ۸ (۴) ۶

۶۷. در معادله درجه دوم  $6 = (x-1)^2 + 2\sqrt{3}(x-1)$  بزرگ‌ترین جواب  $x$  کدام است؟

- (۱)  $4 - \sqrt{3}$  (۲)  $3 - \sqrt{3}$  (۳)  $\sqrt{3}$  (۴)  $2\sqrt{3}$

۶۸. مجموع ریشه‌های مثبت معادله  $0 = 29x^2 + 100 = 29x^2 + 100$  کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۱۱

۶۹. حاصل ضرب ریشه‌های معادله  $0 = 2x^2 + 3 = 2x^2 + 3$  کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{2}$  (۲)  $-2\sqrt{2}$  (۳) ۲ (۴) -۲

۷۰. مجموع جواب‌های معادله  $0 = 5(x-2)^2 - 5(x-2) + 6 = 5(x-2)^2 - 5(x-2) + 6$  کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۱۱

۷۱. مجموع ریشه‌های معادله  $0 = 20x^2 + 64 = 20x^2 + 64$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

### تعداد جواب‌های معادله درجه دوم

تعداد ریشه‌ها و علامت  $\Delta$  ...

۷۲. معادله  $0 = (x-3)^2 + 3 - k$  دارای دو ریشه حقیقی متمایز است. کم‌ترین مقدار صحیح  $k$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۷۳. معادله  $0 = 2x^2 + 6x + 1 - a = 2x^2 + 6x + 1 - a$  دارای دو ریشه حقیقی متمایز است. کم‌ترین مقدار صحیح  $a$  کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) -۴ (۳) -۳ (۴) -۲

- ۷۴.** به ازای کدام مقدار  $a$ ، معادله درجه دوم  $3x^2 + ax - 3 = 0$  دو جواب حقیقی و متمایز دارد؟  
 (۱) هر مقدار  $a$  (۲) هیچ مقدار  $a$  (۳) فقط  $a = \pm 6$  (۴) فقط  $a > 6$
- ۷۵.** به ازای چند عدد طبیعی  $a$ ، معادله  $x^2 - 4x + a = 0$  دارای دو ریشه حقیقی است؟  
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
- ۷۶.** معادله  $(x-1)^2 - k = 6$  ریشه مضاعف دارد. اگر معادله  $x^2 + kx + a + 1 = 0$  دو ریشه حقیقی متمایز داشته باشد، بیشترین مقدار صحیح  $a$  کدام است؟  
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹
- ۷۷.** معادله  $mx^2 - (m-3)x + 1 = 0$  ریشه مضاعف دارد. کمترین مقدار  $m$  کدام است؟  
 (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۸ (۴) ۹
- ۷۸.** معادله  $x^2 + (2-a)x - 2a + 1 = 0$  دو ریشه مساوی دارد. مجموع مقادیر  $a$  کدام است؟  
 (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۴ (۴) -۴
- ۷۹.** به ازای کدام مقدار  $m$  در معادله  $x^2 - 2mx + 5m - 6 = 0$  اختلاف ریشه‌ها برابر صفر است؟  
 (۱) ۳, ۲ (۲) -۴, ۳ (۳) -۳, ۲ (۴) -۳, ۴
- ۸۰.** معادله درجه دوم  $x(2x-5) = a$  به ازای یک مقدار  $a$  ریشه مضاعف دارد. مقدار ریشه مضاعف کدام است؟  
 (۱)  $-\frac{5}{2}$  (۲)  $-\frac{5}{4}$  (۳)  $\frac{5}{4}$  (۴)  $\frac{5}{2}$
- ۸۱.** معادله  $x^2 + (a+1)x + 36 = 0$  یک ریشه مضاعف دارد. این ریشه کدام می‌تواند باشد؟  
 (۱) -۴ (۲) -۸ (۳) ۴ (۴) ۶
- ۸۲.** معادله  $ax^2 + 8x + 1 = 0$  ریشه حقیقی ندارد. حدود  $a$  کدام است؟  
 (۱)  $a > 8$  (۲)  $a > 16$  (۳)  $a < 8$  (۴)  $a < 16$
- ۸۳.** اگر  $x = m$  ریشه معادله  $x^2 - 3mx - 8 + m = 0$  باشد، حاصل ضرب مقادیر  $m$  کدام است؟  
 (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) نشدنی
- ۸۴.** معادله  $(x^2 - 4)^2 (x^2 - 6x - 7) = 0$  چند ریشه متمایز دارد؟  
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶
- ۸۵.** مجموع ریشه‌های معادله  $(x^2 + x + 2)(x^2 + x + 3) = 12$  کدام است؟  
 (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۳
- ۸۶.** معادله  $2 = (x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x)$  چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟  
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(ریاضی داخل ۹۷)

**روابط بین ریشه‌های معادله با ضرایب معادله**

- ۸۷.** معادله  $3x^2 - 6x + m = 0$  دارای دو ریشه حقیقی و متمایز  $x_1$  و  $x_2$  است. کدام نتیجه‌گیری درست است؟  
 (۱)  $x_1 x_2 < 1$  (۲)  $x_1 x_2 > 1$  (۳)  $x_1 x_2 < 3$  (۴)  $x_1 x_2 > 3$
- ۸۸.** اگر  $a + b + ab = 19$  و  $a - b = 1$  باشند، مجموع مقادیر  $a$  کدام است؟  
 (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲
- ۸۹.** اگر  $m$  و  $n$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 2mx + m - n + 15 = 0$  باشند، مقدار  $\Delta$  کدام است؟  
 (۱)  $m^2 + n^2$  (۲)  $m^2 - 4n$  (۳)  $n^2 - 4m$  (۴) صفر
- ۹۰.** اگر  $a + 6$  و  $8 - a$  ریشه‌های معادله  $x^2 + (m-5)x + 2m - 14 = 0$  باشند، میانگین مقادیر  $a$  کدام است؟  
 (۱) ۱ (۲)  $1/5$  (۳) ۲ (۴)  $2/5$
- ۹۱.** اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $2x^2 + 3x - 5 = 0$  باشند، مقدار  $\frac{5x_1 + 5x_2}{x_1 x_2}$  کدام است؟  
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۹۲. چند مورد از گزاره‌های زیر صحیح است؟

الف) معادله درجه دوم  $\frac{7}{17}x^2 + ax - \frac{19}{3} = 0$  فقط در صورتی که  $a > 6$  باشد، دو جواب حقیقی متمایز دارد.

ب) معادله درجه دوم  $x(2x-5) = a$  به ازای  $a = \frac{5}{4}$  ریشه مضاعف دارد.

پ) در معادله درجه دوم  $0 = 2x^2 + (m+1)x - 12$ ، اگر مجموع دو ریشه  $-\frac{5}{4}$  باشد، ریشه مثبت  $\frac{3}{4}$  است.

ت) اگر حاصل ضرب دو ریشه معادله  $0 = 3x^2 + 7x - 2m + 2$  برابر  $-2$  باشد، ریشه بزرگ‌تر  $\frac{2}{3}$  است.

۴(۱) ۳(۲) ۲(۳) ۱(۴)

(داخل ۹۹)

۹۳. به ازای کدام مقدار  $k$  حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم  $0 = (k+3)x^2 - 7x + k$  برابر  $-\frac{1}{4}$  است؟

۱(۱) ۲(۲) ۳(۳) ۴(۴)

۹۴. اگر مجموع ریشه‌های معادله  $0 = mx^2 + nx + p$  برابر  $5$  باشد، مجموع ریشه‌های معادله  $0 = m(x-3)^2 + n(x-3) + p$  کدام است؟

۸(۱) ۱۱(۲) ۵(۳) ۱۴(۴)

۹۵. اگر حاصل ضرب ریشه‌های معادله  $8 = a(x+1)^2 - x + 1$  برابر  $-\frac{2}{5}$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

۱۲(۱)  $\frac{35}{3}$ (۲) ۵(۳)  $\frac{35}{7}$ (۴)

۹۶. اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $0 = x^2 + ax + 16$  باشند و  $8(x_1 + x_2) = 5x_1x_2$ ، مقدار  $a$  کدام است؟

۱۲(۱)  $-10$ (۲)  $-8$ (۳)  $-6$ (۴)

۹۷. مجموع ریشه‌های معادله  $bx^2 - ax - b = 0$  سه برابر حاصل ضرب ریشه‌ها است. در معادله  $0 = x^2 - (2a+b)x + a - b$  مجموع ریشه‌ها

چند برابر حاصل ضرب آن‌ها است؟

۱(۱)  $\frac{1}{5}$ (۲)  $\frac{1}{6}$ (۳)  $\frac{1}{4}$ (۴)

۹۸. اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $0 = x^2 - x - 3$  باشند، حاصل  $x_1^2 + x_1x_2 + x_2$  کدام است؟

۱(۱) ۲(۲)  $-3$ (۳) ۱(۴)

۹۹. اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $0 = 2ax^2 - a + 2 = (a-3)x^2 + 2ax - a + 2$  و  $\frac{x_2}{x_1 - 1} = x_1$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

۲(۱)  $-3$ (۲) ۳(۳)  $-2$ (۴)

۱۰۰. اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $0 = x^2 - (a+3)x + 2a - 1 = 2x_1 = 1 + \frac{x_1}{x_2}$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

۱(۱)  $\frac{1}{4}$ (۲)  $\frac{4}{3}$ (۳)  $\frac{5}{3}$ (۴)

(داخل ۹۷)

۱۰۱. در معادله درجه دوم  $0 = 2x^2 + (m+1)x - 12$  مجموع دو ریشه  $\frac{5}{4}$  می‌باشد. ریشه مثبت کدام است؟

۲(۱) ۳(۲) ۴(۳) ۶(۴)

۱۰۲. در معادله درجه دوم  $0 = 6x^2 + (k+1)x + k$ ، اگر مجموع دو ریشه حقیقی برابر  $\frac{1}{6}$  باشد، ریشه مثبت کدام است؟

۱(۱)  $\frac{1}{3}$ (۲) ۱(۳)  $\frac{4}{3}$ (۴)

(خارج ۹۷)

۱۰۳. در معادله درجه دوم  $0 = 3x^2 + 7x - 2m + 2$ ، حاصل ضرب دو ریشه  $-2$  می‌باشد، ریشه بزرگ‌تر کدام است؟

۱(۱)  $\frac{2}{3}$ (۲) ۱(۳) ۲(۴)

۱۰۴. در معادله درجه دوم  $0 = 2x^2 + kx + 1 - k$ ، اگر حاصل ضرب دو ریشه برابر  $5$  باشد، ریشه بزرگ‌تر کدام است؟

۱(۱)  $\frac{2}{5}$ (۲) ۳(۳) ۵(۴)

۱۰۵. اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $0 = 2x^2 + (m+2)x + 2 = x^2 + (m+2)x + 2$  و  $x_1 + \frac{4}{x_2} = 8$  باشد، مقدار  $m$  کدام است؟

۱(۱)  $-10$ (۲)  $-8$ (۳)  $-6$ (۴)

۱۰۶. اگر  $x = 2$  ریشه مضاعف معادله  $0 = (m+2)x^2 + 3nx + (3-m)$  باشد، مقدار  $m+n$  کدام است؟

۱(۱)  $-\frac{4}{3}$ (۲)  $\frac{3}{4}$ (۳)  $-\frac{1}{3}$ (۴)

۱۰۷. در معادله  $0 = 2ax^2 + bx - 4c = 0$  رابطه  $2a + b = 4c$  برقرار است. کدام عدد ریشه معادله است؟

۱(۱)  $-\frac{a}{c}$ (۲)  $-\frac{c}{a}$ (۳)  $-\frac{c}{b}$ (۴)

۱۰۸.  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x^2 + (3x_1 + 2x_2)x + 2x_1 - 6 = 0$  هستند اگر  $x_1 > -x_2$  باشد، مقدار  $x_2$  کدام است؟

(۱) -۲ (۲) ۲ (۳) -۴ (۴) ۴

۱۰۹. اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - (\alpha - 2)x + 2\beta = 0$  باشند، مقدار  $\alpha + \beta$  کدام است؟

(۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۱۰. ریشه‌های کدام معادله معکوس یکدیگرند؟

(۱)  $x^2 - 5x + 2 = 0$  (۲)  $2x^2 - 8x - 2 = 0$  (۳)  $x^2 + 3x - 10 = 0$  (۴)  $2x^2 - 5x + 2 = 0$

۱۱۱. به ازای کدام مقدار  $m$ ، ریشه‌های حقیقی معادله  $4mx^2 + 9x + m^2 + 3 = 0$  معکوس یکدیگرند؟

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) -۱

(خارج ۹۵)

۱۱۲. به ازای یک مقدار  $m$ ، ریشه‌های معادله  $2x^2 + 3mx + 2m + 6 = 0$  معکوس یکدیگرند. مجموع این دو ریشه کدام است؟

(۱) -۱/۵ (۲) ۱/۵ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۱۳. اختلاف ریشه‌های معادله  $x^2 - x + m = 0$  برابر ۳ است. حاصل ضرب ریشه‌های معادله کدام است؟

(۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) -۳

۱۱۴. اگر  $a$  و  $b$  ریشه‌های معادله  $x^2 + abx - 3 = 0$  باشند، مبین معادله کدام است؟

(۱) ۲۱ (۲) -۳ (۳) -۲۱ (۴) ۳

۱۱۵. اگر  $m$  و  $n$  ریشه‌های معادله  $x^2 - (m-2)x + n - 4 = 0$  باشند، مقدار  $mn$  کدام است؟

(۱) -۴ (۲) -۶ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۱۶. اگر  $m$  و  $n$  ریشه‌های معادله  $x^2 + (m+2)x + 2n = 0$  باشند، مقدار  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{2}{5}$  (۴)  $\frac{1}{3}$

۱۱۷. اگر  $-2$  و  $6$  ریشه‌های معادله  $x^2 + (a-b)x + 3a + 4b - 7 = 0$  باشند، مقدار  $\frac{a}{b}$  کدام است؟

(۱) -۲ (۲) -۳ (۳) -۴ (۴) -۶

بریم پند تا تست از تغییر متغیر و روابط بین ریشه‌ها ببینیم...

۱۱۸. حاصل ضرب ریشه‌های معادله  $(x^2 + x)^2 - 4(x^2 + x) + 3 = 0$  کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۱۹. مجموع ریشه‌های معادله  $(x^2 - x)^2 - 14(x^2 - x) + 24 = 0$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۲۰. اگر  $x^2 - 8xy + 6y^2 = 0$  باشد، مجموع مقادیر  $\frac{y}{x}$  کدام است؟

(۱) ۴ (۲)  $\frac{3}{2}$  (۳)  $\frac{4}{3}$  (۴)  $\frac{5}{4}$

۱۲۱. اگر  $\frac{a^2 - 4ab - b^2}{4} = b^2$  باشد، کدام نتیجه‌گیری می‌تواند درست باشد؟

(۱)  $a = 2b$  (۲)  $a + b = 1$  (۳)  $a = 5b$  (۴)  $a - b = 0$

آفاره‌این که بریم کم‌کم تست کنکور ریاضی رو هم به کنیم؟

۱۲۲. اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله  $x^2 - 5x^2 - 3 = 0$  به ترتیب  $S$  و  $P$  باشند، حاصل عبارت  $S^2 + P^2 - 2SP$  کدام است؟

(۱)  $\frac{31 + 10\sqrt{37}}{2}$  (۲)  $\frac{61 + 5\sqrt{37}}{2}$  (۳)  $\frac{31 + 5\sqrt{37}}{2}$  (۴)  $\frac{61 - 5\sqrt{37}}{2}$

۱۲۳. اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله  $x^2 - 7x^2 - 5 = 0$  به ترتیب  $S$  و  $P$  باشند، حاصل ضرب  $2P^2 - 3SP + 2S$  کدام است؟

(۱)  $59 - 7\sqrt{69}$  (۲)  $7 + \sqrt{69}$  (۳) ۵۰ (۴)  $59 + 7\sqrt{69}$  (ریاضی داخل ۱۴۰۰)

۱۲۴. مجموع ریشه‌های حقیقی معادله  $x(x-2)(x-3)(x-5) = 40$  کدام است؟

(۱) ۱۰ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۴

۱۲۵. اگر  $x = m$  ریشه معادله  $3x^2 - 4mx + 2m - 3 = 0$  باشد، مجموع مقادیر  $m$  کدام است؟

(۱)  $\frac{3}{2}$  (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) نشدنی

۱۲۶. اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $3x^2 - 21x - 14 = 0$  باشند، مقدار  $\frac{6}{x_1} + \frac{6}{x_2}$  کدام است؟

(۱) -۶ (۲) ۱۲ (۳) -۹ (۴) ۱۸

۱۲۷. در معادله  $x^2 + 4x - 3 = 0$  مجموع معکوس ریشه‌ها کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{4}$  (۲)  $\frac{5}{4}$  (۳)  $\frac{4}{3}$  (۴)  $\frac{4}{5}$

۱۲۸. اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x^2 - x - 2 = 0$  باشند، مقدار  $(3x_1 - 2)(3x_2 - 2)$  کدام است؟

- (۱)  $-20$  (۲)  $14$  (۳)  $16$  (۴)  $18$

۱۲۹. در معادله  $2x^2 + 6x - 7 = 0$ ، مجموع مربعات ریشه‌های آن کدام است؟

- (۱)  $12$  (۲)  $16$  (۳)  $20$  (۴)  $24$

۱۳۰. در معادله  $(a+3)x^2 - (2a+4)x + a = 0$  اگر مجموع ریشه‌ها  $-2$  باشد، مجموع مربعات ریشه‌ها کدام است؟

- (۱)  $14$  (۲)  $16$  (۳)  $18$  (۴)  $24$

۱۳۱. مجموع مکعبات ریشه‌های معادله  $3x^2 - 6x - 5 = 0$  کدام است؟

- (۱)  $14$  (۲)  $15$  (۳)  $17$  (۴)  $18$

به کم تیزبازی در بیاری، روتا تست ببری هم راحت حل میشن.

۱۳۲.  $a$  و  $b$  ریشه‌های معادله  $x^2 + 8x + 9 = 0$  هستند. اگر  $b < a < 0$  باشد، حاصل  $a^3 + b^2(b+1)$  کدام است؟

- (۱)  $-163 + 4\sqrt{7}$  (۲)  $-273 + 8\sqrt{7}$  (۳)  $-163 + 8\sqrt{7}$  (۴)  $-273 + 4\sqrt{7}$

۱۳۳.  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $2x^2 + 6x + a = 0$  هستند. اگر  $\beta < \alpha < 0$  و  $\alpha^3 + \beta^3 + \beta^2 = -\frac{21}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{3}$  باشد، مقدار  $a$  چقدر است؟

- (ریاضی آزمون مجدد ۱۴۰۱) (۱)  $\frac{33}{4}$  (۲)  $\frac{11}{3}$  (۳)  $3$  (۴)  $5$

۱۳۴. اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله درجه دوم  $x^2 + x - 1 = 0$  باشند و  $x_2 > x_1$ ، مقدار عبارت  $5x_1^2 + 3x_2^2$  کدام است؟

- (۱)  $12 + \sqrt{5}$  (۲)  $12 - \sqrt{5}$  (۳)  $24 + \sqrt{5}$  (۴)  $24 - \sqrt{5}$

۱۳۵. اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 4x - 6 = 0$  باشند، مقدار  $\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1}$  کدام است؟

- (۱)  $-4$  (۲)  $-5$  (۳)  $-6$  (۴)  $-8$

۱۳۶. اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 6x + 4 = 0$  باشند، مقدار  $(x_1 - \frac{2}{x_2})(x_2 + \frac{2}{x_1})$  کدام است؟

- (۱)  $2$  (۲)  $3$  (۳)  $4$  (۴)  $5$

۱۳۷. در معادله  $x^2 - (m+2)x + 6 = 0$  یک ریشه،  $6$  برابر ریشه دیگر است. مقدار مثبت  $m$  کدام است؟

- (۱)  $5$  (۲)  $4$  (۳)  $3$  (۴)  $2$

۱۳۸. اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x^2 - (2m-1)x + 3m+1 = 0$  و  $(x_1-2)(x_2-2) = 6$  باشد، مقدار  $m$  کدام است؟

- (۱)  $1$  (۲)  $2$  (۳)  $3$  (۴)  $4$

۱۳۹. اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 3x + m = 0$  و  $x_1^2 + x_1x_2 = 6$  باشد، مقدار  $m$  کدام است؟

- (۱)  $1$  (۲)  $2$  (۳)  $-1$  (۴)  $-2$

۱۴۰. اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x^2 + 3x - (m^2 - 1) = 0$  باشند و  $x_1^2x_2 + x_1^2x_2 = 45$ ، مقدار مثبت  $m$  کدام است؟

- (۱)  $2$  (۲)  $3$  (۳)  $4$  (۴)  $6$

۱۴۱.  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $ax^2 - 8x + 4 = 0$  است. اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ای با ریشه‌های  $\alpha\beta^2$  و  $\alpha^2\beta$  برابر باشند،

مقدار مثبت  $a$  کدام است؟

- (۱)  $1$  (۲)  $2$  (۳)  $3$  (۴)  $4$

۱۴۲. در معادله  $x^2 + (m-4)x + 27 = 0$  یک ریشه مربع ریشه دیگر است. مقدار  $m$  کدام است؟

- (۱)  $-6$  (۲)  $-8$  (۳)  $-10$  (۴)  $-12$

۱۴۳. در معادله  $ax^2 + (3a-2)x - a = 0$ ، اگر یکی از ریشه‌ها مربع ریشه دیگر باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{3}{4}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{4}{5}$

۱۴۴. اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x^2 + (a+2)x + 4 = 0$  باشند و  $x_1^2x_2 = 8$ ، مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱)  $4$  (۲)  $-4$  (۳)  $6$  (۴)  $-6$