

مثلاث

۲۱۸	درس اول: واحدهای اندازه‌گیری زاویه	۱۰
۲۳۵	درس دوم: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی	۱۱
۲۴۴	درس سوم: توابع مثلثاتی	۱۲
۵۳۶	پاسخ‌های تشریحی	

توابع نمایی و لگاریتمی

۲۵۲	درس اول: تابع نمایی و ویژگی‌های آن	۱۳
۲۶۱	درس دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن	۱۴
۲۸۳	درس سوم: نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی	۱۵
۵۵۷	پاسخ‌های تشریحی	

حد و پیوستگی

۲۹۰	درس اول: فرایندهای حدی	۱۶
۲۹۹	درس دوم: محاسبه حد توابع	۱۷
۳۲۳	درس سوم: پیوستگی	۱۸
۵۹۴	پاسخ‌های تشریحی	

آمار و احتمال

۳۳۶	درس اول: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل	۱۹
۳۵۲	درس دوم: آمار توصیفی	۲۰
۶۲۴	پاسخ‌های تشریحی	

۶۵۴	کنکورهای ۱۴۰۳	
-----	---------------	--

فهرست

هندسه تحلیلی و جبر

۶	درس اول: هندسه تحلیلی	۱
۴۴	درس دوم: معادله درجه دوم و تابع درجه ۲	۲
۷۲	درس سوم: معادلات گویا و معادلات رادیکالی	۳
۳۷۲	پاسخ‌های تشریحی	

هندسه

۸۴	درس اول: ترسیم‌های هندسی	۴
۹۳	درس دوم: استدلال و قضیه تالس	۵
۱۲۷	درس سوم: تشابه مثلث‌ها	۶
۴۳۹	پاسخ‌های تشریحی	

تابع

۱۵۸	درس اول: آشنایی با برخی از انواع توابع	۷
۱۸۹	درس دوم: وارون یک تابع و تابع یک به یک	۸
۲۰۶	درس سوم: اعمال جبری روی توابع	۹
۴۹۳	پاسخ‌های تشریحی	

فصل اول.

ریاضی تجربی یازدهم
ہندسہ تحلیلی
و جبر

iq

Chapter One
Analytic
Geometry
and Algebra



John Napier

فصل اول

درس اول: هندسه تحلیلی (قسمت اول)

CHAPTER 1

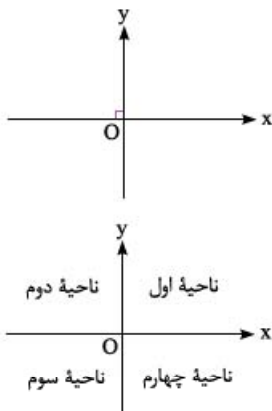
دستگاه مختصات و نقطه



اول بریم با دستگاه مختصات و نقطه آشنا بشیم.

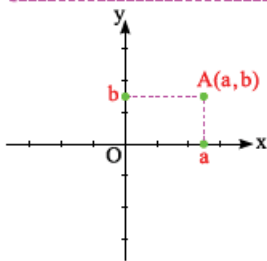
دستگاه مختصات: از دو محور افقی و قائم تشکیل شده است (وقتی دو محور، افقی و قائم هستند تا بلون که بر هم عمودن). که در نقطه O متقاطع اند. به محور افقی، محور x ها، به محور قائم، محور y ها و به نقطه O (محل برخورد محور x ها و محور y ها)، مبدأ مختصات می گویند.

نواحی مختصات: محورهای مختصات، صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می کنند که به آن ها ناحیه اول، ناحیه دوم، ناحیه سوم و ناحیه چهارم می گویند که ترتیب قرار گرفتن آن ها به صورت مقابل است. (بعضیاً به ناحیه اول، ناحیه دوم و ... میگویند ربع اول، ربع دوم و ...)



نکته محورهای مختصات، یعنی محور x ها و محور y ها، جزو هیچ کدام از نواحی چهارگانه نیستند. (فقط فوردشون اسم دارن دیگه. محور x ها، محور y ها و نیازی نیست برن تو ناحیه ها و جزو ناحیه ها بشن.)

نقطه در دستگاه مختصات: هر نقطه در دستگاه مختصات با یک زوج مرتب مانند (a, b) نمایش داده می شود که به a ، طول نقطه و به b ، عرض نقطه می گویند. نقطه ها را با حروف بزرگ انگلیسی (A, B, C, \dots) نام گذاری می کنند. مثلاً اگر اسم نقطه با مختصات (a, b) را A بنامیم A را کنار (a, b) می نویسیم و به صورت $A(a, b)$ نمایش می دهیم و این یعنی، نقطه A که طول آن برابر a و عرض آن برابر b است. (بعضیاً میگویند مختصات نقطه A برابر (a, b) هستش.)

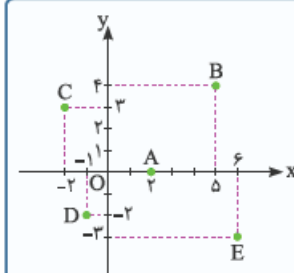


$A(a, b)$
عرض نقطه A ← طول نقطه A

توجه گاهی اوقات به محور x ها، محور طول ها و به محور y ها، محور عرض ها هم می گویند. (دلیلش قومیدی دیگه؟ چون طول نقاط رو روی محور x ها و عرض نقاط رو روی محور y ها نشون می دهیم.)

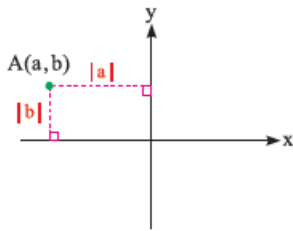
نقاط $A(2, 0)$ ، $B(5, 4)$ ، $C(-2, 3)$ ، $D(-1, -2)$ و $E(6, -3)$ را در یک دستگاه مختصات مشخص کنید.

کافی است طول هر نقطه را روی محور x ها و عرض آن را روی محور y ها مشخص کرده و از نقاط مشخص شده خطوطی به موازات محورها رسم کنیم. نقطه تلاقی دو خط، جایگاه نقطه را در دستگاه مختصات مشخص می کند.



فاصله نقطه از محورهای مختصات: به شکل زیر نگاه کنید. فاصله نقطه $A(a, b)$ از محور x ها برابر $|b|$ و از محور y ها برابر $|a|$ است.

(هی دونیم فاصله به عدد نامنفیه. به قاطر همین قمر مطلق میزاریم تا از نامنفی بودن فاصلهها مطمئن بشیم.)



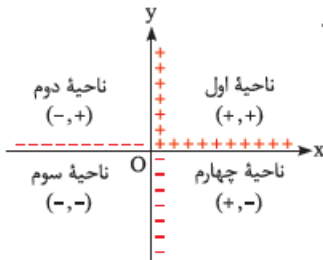
مجموع فواصل نقطه $A(m-1, -2)$ از محورهای مختصات برابر ۷ است. مجموع مقادیر m کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) -۱ (۳) -۴ (۴)

گزینه ۱) فاصله نقطه A از محور x ها برابر $|-2| = 2$ و از محور y ها برابر $|m-1|$ است؛ پس:

$$2 + |m-1| = 7 \Rightarrow |m-1| = 5 \Rightarrow \begin{cases} m-1 = 5 \Rightarrow m = 6 \\ m-1 = -5 \Rightarrow m = -4 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع مقادیر } m = 6 + (-4) = 2$$

علامت طول و عرض نقطه در ناحیهها: علامت طول و عرض نقطه، در نواحی چهارگانه به صورت مقابل است.



نقطه $M(a, b)$ در ناحیه دوم دستگاه مختصات است. کدام نقطه در ناحیه سوم دستگاه مختصات قرار دارد؟

- $A(b, a)$ (۱) $B(b-a, a^2)$ (۲)
 $C(\frac{a}{b}, b-a)$ (۳) $D(ab, a-b)$ (۴)

چون نقطه $M(a, b)$ در ناحیه دوم دستگاه مختصات قرار دارد، پس $a < 0$ و $b > 0$ می باشد. حال تک تک گزینهها را بررسی می کنیم:

۱) $A(b, a) \Rightarrow (+, -) \Rightarrow$ نقطه A در ناحیه چهارم است **x**

۲) $B(b-a, a^2) \Rightarrow \begin{cases} a < 0, b > 0 \Rightarrow b-a > 0 \\ a^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (+, +) \Rightarrow$ نقطه B در ناحیه اول است **x**

۳) $C(\frac{a}{b}, b-a) \Rightarrow \begin{cases} a < 0, b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} < 0 \\ a < 0, b > 0 \Rightarrow b-a > 0 \end{cases} \Rightarrow (-, +) \Rightarrow$ نقطه C در ناحیه دوم است **x**

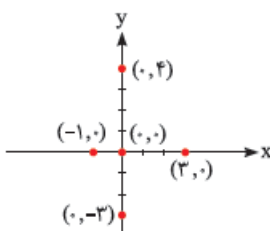
۴) $D(ab, a-b) \Rightarrow \begin{cases} a < 0, b > 0 \Rightarrow ab < 0 \\ a < 0, b > 0 \Rightarrow a-b < 0 \end{cases} \Rightarrow (-, -) \Rightarrow$ نقطه D در ناحیه سوم است **✓**

نقطه روی محورهای مختصات: اگر نقطه ای روی محور x ها باشد، مقدار عرض آن صفر و مختصات آن

به صورت $(a, 0)$ و اگر نقطه ای روی محور y ها باشد، مقدار طول آن صفر و مختصات آن به صورت $(0, b)$ است.

در ضمن مقدار طول و عرض مبدأ مختصات هر دو برابر صفر است یعنی مختصات مبدأ مختصات $(0, 0)$

می باشد. (توجه!) به شکل مقابل دقت کنید.



نقطه $A(m+2, 2m-6)$ روی محور x ها و نقطه $B(2n+1, n+3)$ روی محور y ها می باشند. نقطه $C(m+n, 2-m)$ در کدام ناحیه دستگاه مختصات قرار دارد؟

اول (۱) دوم (۲) سوم (۳) چهارم (۴)

گزینه ۴ چون نقطه $A(m+2, 2m-6)$ روی محور x ها قرار دارد، پس عرض آن صفر است:
 $2m-6=0 \Rightarrow 2m=6 \Rightarrow m=3$

هم چنین چون نقطه $B(2n+1, n+3)$ روی محور y ها قرار دارد، پس طول آن صفر می باشد:
 $2n+1=0 \Rightarrow 2n=-1 \Rightarrow n=-\frac{1}{2}$

بنابراین مختصات نقطه C به صورت مقابل است:
 نقطه C در ناحیه چهارم است $\Rightarrow C(\frac{5}{2}, -1)$

$$\begin{cases} m+n=3+(-\frac{1}{2})=\frac{5}{2} \\ 2-m=2-3=-1 \end{cases} \Rightarrow C(\frac{5}{2}, -1)$$

فاصله دو نقطه: فاصله دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ یا همان طول پاره خط AB از رابطه زیر به دست می آید:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(\text{تفاضل } x \text{ ها})^2 + (\text{تفاضل } y \text{ ها})^2}$$

فاصله دو نقطه A و B همون طول پاره خط AB هستش.

نقاط $A(4, 3)$ ، $B(-8, -2)$ ، $C(-2, 3)$ و $D(2, 0)$ مفروض اند. طول پاره خط AB چند واحد از طول پاره خط CD بیش تر است؟

۱۳ (۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) ۵ (۴)

گزینه ۳ طول پاره خط های AB و CD را به دست می آوریم و داریم:

کم کم این مرحله رو تو ذهنتون انباشتید

$$AB = \sqrt{(-8-4)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$$

$$CD = \sqrt{(2-(-2))^2 + (0-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\Rightarrow AB - CD = 13 - 5 = 8$$

میشه فاصله دو نقطه رو با مفاهیم هندسه هم ترکیب کرد. چند تا تمرین ببینین.

دایره ای به مرکز $O(-1, 3)$ از نقطه $A(3, 0)$ می گذرد. مساحت دایره کدام است؟

۱۷π (۱) ۲۱π (۲) ۲۵π (۳) ۳۶π (۴)

گزینه ۳ با توجه به شکل مقابل OA برابر طول شعاع دایره است، پس:

قرارمون یادت نره

$$r = OA = \sqrt{(3-(-1))^2 + (0-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

می دانیم مساحت دایره با شعاع r برابر $S = \pi r^2$ است؛ پس $S = \pi(5)^2 = 25\pi$ می باشد.

نقاط $A(2, -1)$ و $B(-2, 3)$ دو سر قطر یک مربع هستند. محیط مربع کدام است؟

۱۲ (۱) ۱۲√۲ (۲) ۱۶√۲ (۳) ۱۶ (۴)

گزینه ۴ می دانیم طول قطر مربع $\sqrt{2}$ برابر طول ضلع آن است. (یه فیثاغورس بزنی تو یکی از مثلث ها) بنابراین AB یعنی طول قطر مربع را به دست می آوریم:

$$AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow a\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow a = 4$$

پس محیط مربع برابر $4a = 4 \times 4 = 16$ می باشد.

توجه در حالت های خاص، فرمول فاصله دو نقطه به صورت های زیر ساده می شود:

$$OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \sqrt{(A \text{ طول})^2 + (A \text{ عرض})^2}$$

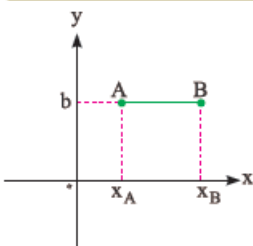
الف) فاصله نقطه $A(x_A, y_A)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

ب) مقدمات مبدأ مختصات، $O(0, 0)$ هستش. تفاضل x ها می شه $x_A - 0 = x_A$ و تفاضل y ها هم می شه $y_A - 0 = y_A$.

پ) اگر عرض نقاط A و B یکسان باشد (دو نقطه A و B هم عرض باشن)، یعنی مختصات آن ها $A(x_A, b)$ و

$B(x_B, b)$ باشند، آن گاه فاصله دو نقطه A و B برابر است با:

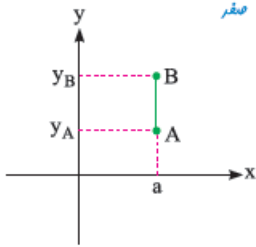
$$AB = |x_B - x_A|$$



آنگه فاصله تپاشه و از فرمول اصلی بری $y_B - y_A$ برابر صفر می شه و همین نتیجه بهرست میاد:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2} = |x_B - x_A|$$

این رو هم که یادت هست $\sqrt{x^2} = |x|$ میشه.



به طور مشابه اگر طول نقاط A و B یکسان باشد (دو نقطه A و B هم طول باشن)، یعنی مختصات آن ها $A(a, y_A)$ و $B(a, y_B)$ باشند، آنگاه فاصله دو نقطه A و B برابر است با:

$$AB = |y_B - y_A|$$

(قبوله ریگه؟)

دو نقطه M و M' به طول ۵- به فاصله ۵ از نقطه $A(-2, 10)$ قرار دارند. فاصله دو نقطه M و M' کدام است؟

- ۴ (۴) ۱۰ (۳) ۸ (۲) ۶ (۱)

گزینه ۲ فرض می کنیم $M(-5, b)$ باشد، پس:

$$MA = 5 \Rightarrow \sqrt{(-2 - (-5))^2 + (10 - b)^2} = 5 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 9 + (10 - b)^2 = 25 \Rightarrow (10 - b)^2 = 16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10 - b = 4 \Rightarrow b = 6 \\ 10 - b = -4 \Rightarrow b = 14 \end{cases}$$

بنابراین $M(-5, 6)$ و $M'(-5, 14)$ است و فاصله M و M' برابر $14 - 6 = 8$ است. (M و M' هم طول هستن).

یه کم بریم تو فاز مثلث. ببینیم تا اینجای کار آنگه مختصات سه رأس مثلث رو داشته باشیم چه کارهایی میشه باهاشون انجام داد.

مثلث با داشتن مختصات سه رأس آن

۱ تشخیص نوع مثلث: اگر مختصات رئوس مثلث ABC را داشته باشیم با محاسبه طول اضلاع AB، AC و BC، می توانیم نوع مثلث (قائم الزاویه

بودن، متساوی الاضلاع بودن و ...) را تشخیص دهیم که معمولاً با یکی از حالات زیر مواجه می شویم:

الف) اگر طول هر سه ضلع با هم برابر باشند، نوع مثلث، متساوی الاضلاع است.

ب) اگر طول فقط دو ضلع برابر باشد، نوع مثلث، متساوی الساقین است.

پ) اگر طول سه ضلع در رابطه فیثاغورس صدق کند (مربع ضلع بزرگ تر برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر باشه). نوع مثلث، قائم الزاویه است.

نکته ممکن است یک مثلث علاوه بر متساوی الساقین بودن، قائم الزاویه نیز باشد، بنابراین اگر در گزینه ها، نوع «قائم الزاویه و متساوی الساقین» وجود داشت، بعد از این که فهمیدیم مثلث، متساوی الساقین است باید رابطه فیثاغورس را نیز چک کنیم.

نقاط $A(2, 0)$ ، $B(5, 4)$ و $C(-2, 3)$ سه رأس مثلث ABC هستند. نوع مثلث کدام است؟

- ۱) متساوی الاضلاع ۲) فقط متساوی الساقین ۳) فقط قائم الزاویه ۴) قائم الزاویه و متساوی الساقین

گزینه ۴ طول اضلاع مثلث را به دست می آوریم:

$$AB = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$AC = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$BC = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50}$$

متساوی الساقین بودن مثلث که قطعی است، اما چون $(\sqrt{50})^2 = 5^2 + 5^2$ می باشد، پس قائم الزاویه نیز می باشد.

۲ به دست آوردن محیط مثلث: اگر مختصات رئوس مثلث ABC را داشته باشیم، برای به دست آوردن محیط مثلث کافی است طول اضلاع AB،

$$\text{محیط} = AB + AC + BC$$

AC و BC را به دست آوریم محیط مثلث ABC برابر است با:

نقاط $A(0, 4)$ ، $B(-3, 0)$ و $C(-6, 4)$ مفروض اند. محیط مثلث ABC کدام است؟

- ۱۸ (۴) ۱۶ (۳) ۱۵ (۲) ۱۴ (۱)

گزینه ۳ طول اضلاع AB، AC و BC را به دست می آوریم:

$$AB = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$AC = |-6 - 0| = 6$$

$$BC = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

فاصله بود که نقاط A و C هم عرض بودن.

بنابراین محیط مثلث ABC برابر $5 + 6 + 5 = 16$ می باشد.

۳ به دست آوردن مساحت مثلث: اگر مختصات رئوس A، B، و C از مثلث ABC را داشته باشیم، مساحت مثلث ABC از الگوی زیر به دست می‌آید.

$$\begin{array}{r|l} x_A y_B & x_A y_A \\ + x_B y_C & x_B y_B \\ + x_C y_A & x_C y_C \\ \hline M & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} y_A x_B & y_A x_A \\ + y_B x_C & y_B x_B \\ + y_C x_A & y_C x_C \\ \hline N & \end{array} \Rightarrow S = \frac{1}{2} |M - N|$$

نقاط (۳، -۲) A، (۱، ۵) B و (-۲، -۶) C مفروض‌اند. مساحت مثلث ABC کدام است؟

۲۲/۵ (۴)	۲۲ (۳)	۲۱/۵ (۲)	۲۱ (۱)
----------	--------	----------	--------

گزینه ۲ مطابق الگوی گفته شده داریم:

$$\begin{array}{r|l} 3 \times 5 & 3 \times (-2) \\ + 1 \times (-6) & 1 \times 5 \\ (-2) \times (-2) & (-2) \times (-2) \\ \hline 13 & -30 \end{array} \Rightarrow S = \frac{1}{2} |13 - (-30)| = \frac{1}{2} \times 43 = 21.5$$

نکته اگر مختصات رئوس چهارضلعی ABCD را بدهند و مساحت آن را بخواهند، می‌توانیم یکی از دو کار زیر را انجام بدهیم:

الف) با رسم یکی از قطرهای چهارضلعی، آن را به دو مثلث تبدیل کنیم و مساحت هریک از مثلث‌ها را به دست آورده و سپس با هم جمع کنیم.

ب) از الگویی شبیه الگوی مساحت مثلث استفاده کنیم و مساحت چهارضلعی را به‌طور مستقیم به دست آوریم:

$$\begin{array}{r|l} x_A y_B & x_A y_A \\ + x_B y_C & x_B y_B \\ + x_C y_D & x_C y_C \\ + x_D y_A & x_D y_D \\ \hline M & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} y_A x_B & y_A x_A \\ + y_B x_C & y_B x_B \\ + y_C x_D & y_C x_C \\ + y_D x_A & y_D x_A \\ \hline N & \end{array} \Rightarrow S = \frac{1}{2} |M - N|$$

نقاط (۵، ۰) A، (۸، ۲) B، (۶، ۴) C و (۰، ۷) D مفروضند. مساحت چهارضلعی ABCD کدام است؟

گزینه ۲ روش اول: با توجه به شکل مقابل، با رسم قطر AC، مساحت مثلث‌های ADC و ABC را به دست آورده و سپس آن‌ها را جمع می‌کنیم.

۱۸/۵ (۴)	۱۸ (۳)	۱۶/۵ (۲)	۱۶ (۱)
----------	--------	----------	--------

$$\Rightarrow S_{ADC} = \frac{1}{2} |35 - 62| = \frac{27}{2} = 13.5$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} |42 - 32| = \frac{10}{2} = 5$$

بنابراین مساحت چهارضلعی ABCD برابر $13.5 + 5 = 18.5$ می‌باشد.

روش دوم: به کمک الگوی مساحت چهارضلعی داریم:

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} |84 - 47| = \frac{37}{2} = 18.5$$

مختصات وسط پاره خط: مختصات نقطه M وسط پاره خط AB به صورت زیر به دست می‌آید:

$$M = \frac{A+B}{2} \Rightarrow M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

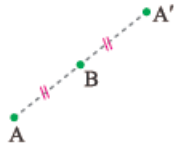
نقطه C(-۱، b) وسط پاره خط AB است که در آن A(-۹، ۸) و B(a، ۱۴) می‌باشند. مقدار a + b کدام است؟

۲۱ (۴)	۲۰ (۳)	۱۸ (۲)	۱۶ (۱)
--------	--------	--------	--------

گزینه ۲ می‌دانیم $x_C = \frac{x_A + x_B}{2}$ و $y_C = \frac{y_A + y_B}{2}$ است، پس:

$$\begin{cases} \frac{-9+a}{2} = -1 \Rightarrow -9+a = -2 \Rightarrow a = 7 \\ b = \frac{8+14}{2} \Rightarrow b = 11 \end{cases} \Rightarrow a+b = 7+11 = 18$$

کاربردهای نقطه وسط پاره خط



قرینه نقطه نسبت به نقطه: برای به دست آوردن قرینه نقطه A نسبت به نقطه B کافی است از A به B وصل کرده و به اندازه AB از طرف دیگر امتداد دهیم تا نقطه A' به دست آید. بنابراین نقطه B وسط پاره خط AA' است و داریم:

$$\Rightarrow B = \frac{A+A'}{2} \Rightarrow 2B = A+A' \Rightarrow A' = 2B - A$$

شفق کردن تساوی آخر خیلی فشرده. ممکنه در به سوال ازتون بفران B رو نسبت به A قرینه کنین اونوقت قطعاً قاطبی می‌کنین. بهتره هتماً شکل بکشین و از اول شروع کنین و به رابطه آخر برسین.

فاصله قرینه نقطه B(4, -5) نسبت به نقطه A(-2, 4) از مبدأ مختصات کدام است؟

1) $\sqrt{233}$
 2) $\sqrt{245}$
 3) $\sqrt{238}$
 4) $\sqrt{253}$

گزینه 1 قرینه نقطه B نسبت به نقطه A را به دست می‌آوریم: (از رسم شکل شروع کن.)

$$\Rightarrow A = \frac{B+B'}{2} \Rightarrow B' = 2A - B \Rightarrow B' = 2(-2, 4) - (4, -5) = (-4, 8) - (4, -5) = (-8, 13)$$

بنابراین فاصله B'(-8, 13) از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OB' = \sqrt{64+169} = \sqrt{233}$$

نکته قرینه نقطه A نسبت به نقطه B را می‌توان به کمک فلش‌زنی نیز به دست آورد: (خیلی باهاله و بیین که فقیر راحت‌تره.)

قرینه نقطه نسبت به محورها و مبدأ مختصات

- قرینه نقطه A(a, b) نسبت به محور xها نقطه B(a, -b) است. (کافی‌ه عرض نقطه رو قرینه کنی.)
- قرینه نقطه A(a, b) نسبت به محور yها نقطه C(-a, b) است. (کافی‌ه طول نقطه رو قرینه کنی.)
- قرینه نقطه A(a, b) نسبت به مبدأ مختصات نقطه D(-a, -b) است. (کافی‌ه طول و عرض نقطه رو قرینه کنی. انگار می‌شوی هم نسبت به محور xها و هم نسبت به محور yها قرینه کنی.)

نقطه A(2, -3) نسبت به محور xها قرینه کرده و آن را B می‌نامیم. اگر قرینه نقطه A نسبت به مبدأ مختصات نقطه C باشد، فاصله وسط پاره خط BC از مبدأ مختصات کدام است؟

1) 2
 2) 3
 3) 4
 4) 5

گزینه 2 با توجه به صورت سؤال داریم:

$$A(2, -3) \xrightarrow{y \rightarrow -y} B(2, 3) \quad A(2, -3) \xrightarrow{x \rightarrow -x, y \rightarrow -y} C(-2, 3)$$

بنابراین مختصات وسط پاره خط BC برابر است با:

$$M = \frac{B+C}{2} = \frac{(2, 3) + (-2, 3)}{2} = (0, 3) \Rightarrow \text{فاصله } M(0, 3) \text{ از مبدأ مختصات برابر 3 است.}$$

به دست آوردن طول میانه مثلث: می‌دانیم هر میانه در مثلث (مثلث سه تا میانه داره.) از رأس بر وسط ضلع مقابل وارد می‌شود. بنابراین برای به دست آوردن طول هر میانه باید فاصله رأس مثلث تا وسط ضلع مقابل را به دست آوریم.

در مثلث ABC با رئوس A(2, 7), B(-2, 1), C(1, 7) طول میانه وارد بر ضلع AB کدام است؟

1) $2\sqrt{2}$
 2) 3
 3) $\sqrt{10}$
 4) $2\sqrt{3}$

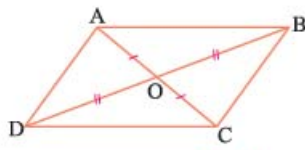
گزینه 3 به شکل زیر توجه کنید. باید مختصات وسط پاره خط AB را به دست آوریم:

$$M = \frac{A+B}{2} \Rightarrow M = \frac{(2, 7) + (-2, 1)}{2} = (0, 4)$$

حال طول میانه CM را به دست می‌آوریم:

$$CM = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

۳ شرط متوازی الاضلاع بودن یک چهارضلعی: می‌دانیم قطرهای متوازی الاضلاع همدیگر را نصف می‌کنند، پس اگر چهارضلعی ABCD



متوازی الاضلاع باشد آن‌گاه وسط قطر AC بر وسط قطر BD منطبق است. بنابراین داریم:

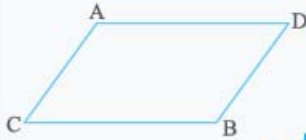
$$\begin{cases} O = \frac{A+C}{2} \\ O = \frac{B+D}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{A+C}{2} = \frac{B+D}{2} \Rightarrow A+C = B+D$$

تا گذاری رأس‌ها ساعتگرد یا پادساعتگرد. آنگاه می‌توانی ز رنگ بازی در بیاری رأس‌ها رو یکی در میون با هم جمع کن. مثلاً اگر چهارضلعی ABCD متوازی الاضلاع باشه، باید $A+B$ با $C+D$ برابر باشه.

نتیجه داستان مستطیل بودن، مربع بودن و لوزی بودن چهارضلعی ABCD هم مانند متوازی الاضلاع است چون در این چهارضلعی‌ها هم قطرهای همدیگر را نصف می‌کنند.

۴ نقاط $A(2, -1)$ ، $B(7, -2)$ و $C(1, 4)$ رأس‌های متوازی الاضلاع ABCD هستند. مجموع طول و عرض رأس D کدام است؟

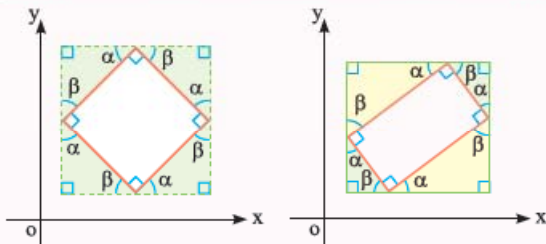
- ۱ (۳) ۲ (۲) ۳ (۱) ۴ (صفر)



گزینه ۳ در متوازی الاضلاع ABCD قطرهای AB و CD هستند، پس:

$$\begin{aligned} A+B &= C+D \Rightarrow (2, -1) + (7, -2) = (1, 4) + D \\ \Rightarrow (9, -3) &= (1, 4) + D \Rightarrow D = (9, -3) - (1, 4) = (8, -7) \end{aligned}$$

بنابراین مجموع طول و عرض رأس D برابر $8 + (-7) = 1$ است. (این‌توری هم می‌شه فهمید که AB و CD قطرن ABCD).

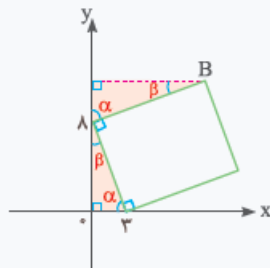
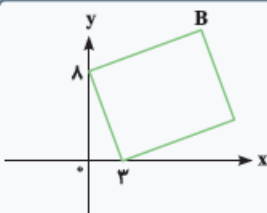


مثلث‌های هم‌رنگ، هم‌نهشت و مثلث‌های
مثلث‌های رنگی هم‌نهشت‌اند.
ناهم‌رنگ، متشابه هستند.

نکته گاهی مختصات دو رأس یک مربع یا یک ضلع آن را می‌دهند (طول ضلع ممکنه غیرمستقیم داده بشه در قالب محیط مربع یا مساحت اون) و مختصات رأس دیگر آن را می‌خواهند، در این مسائل، بهترین کار، استفاده از هم‌نهشتی مثلث‌هایی است که می‌توان کنار اضلاع مربع تشکیل داد می‌باشد. اگر چهارضلعی مستطیل باشد، تشابه و هم‌نهشتی مثلث‌های کنار اضلاع کارساز است.

۵ در شکل مقابل، چهارضلعی مربع است. مجموع مؤلفه‌های نقطه B کدام است؟

- ۱۹ (۱)
۱۸ (۲)
۱۷ (۳)
۱۶ (۴)



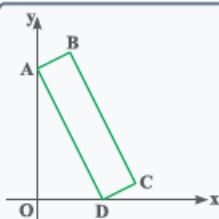
گزینه ۱ از رأس B بر محور yها عمود می‌کنیم. دو مثلث رنگی با حالت تساوی دو زاویه و برابری ضلع بین آن‌ها هم‌نهشت هستند پس اضلاع نظیر دو مثلث برابرند و داریم:

$$\begin{cases} x_B = 8 \\ y_B = 8 + 3 = 11 \end{cases} \Rightarrow B(8, 11)$$

بنابراین مجموع مؤلفه‌های نقطه B برابر $8 + 11 = 19$ می‌باشد.

۶ در مستطیل شکل مقابل $B(2, 9)$ و $D(4, 0)$ است. اگر $AB < BC$ باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

- ۲۰ (۱)
۲۴ (۲)
 $18\sqrt{2}$ (۳)
 $15\sqrt{3}$ (۴)



گزینه ۱۱ از B بر محور yها عمود می‌کنیم. دو مثلث رنگی با دو زاویه برابر متشابه‌اند، پس:

$$\frac{2}{y_A} = \frac{9 - y_A}{4} \Rightarrow 8 = 9y_A - y_A^2$$

$$\Rightarrow y_A^2 - 9y_A + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_A = 1 \\ y_A = 8 \end{cases}$$

واضح است که $y_A = 8$ بوده و داریم:

$$AB = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$AD = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

بنابراین مساحت مستطیل برابر $S = 4\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 20$ می‌باشد.

یه کوچولو بریم قارچ از کتاب درسی و یه چیز مفید یاد بگیریم که بعدها ممکنه به دردتون بفره.

تقسیم پاره خط به نسبت معین: اگر نقطه C روی پاره خط واصل نقاط A و B، آن را به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم کند، آن‌گاه مختصات نقطه C به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{m}{n} \Rightarrow C = \frac{n \times A + m \times B}{n + m}$$

می‌توانی شش‌ش کنی برای صورت کسر مثل طرفین وسطین کردن فکر کن و مخرج هم میشه $n + m$.

مواست باشه رابطه نقطه وسط پاره خط هم نتیجه همین رابطه هست.

$$\frac{AM}{BM} = \frac{1}{1} \Rightarrow M = \frac{1 \times A + 1 \times B}{1 + 1} = \frac{A + B}{2}$$

گزینه ۱۲ نقطه C روی پاره خط AB که در آن $A(-1, 5)$ و $B(19, -5)$ به گونه‌ای قرار دارد که $2AC = 3BC$ می‌باشد. مجموع طول و عرض نقطه C کدام است؟

۱۱ (۴) ۱۰ (۳) ۹ (۲) ۸ (۱)

گزینه ۱۳ چون $2AC = 3BC$ می‌باشد پس $\frac{AC}{BC} = \frac{3}{2}$ است و داریم:

$$C\left(\frac{2 \times (-1) + 3 \times 19}{2 + 3}, \frac{2 \times 5 + 3 \times (-5)}{2 + 3}\right) = C(11, -1) \Rightarrow \text{مجموع طول و عرض} = 11 + (-1) = 10$$

نکته مختصات نقطه C را به کمک فلش زنی هم می‌توان به دست آورد. نگاه کنید.

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta k_1 = 20 \Rightarrow k_1 = 4 \Rightarrow 3k_1 = 12 \Rightarrow x_C = -1 + 12 = 11 \\ \Delta k_2 = -10 \Rightarrow k_2 = -2 \Rightarrow 3k_2 = -6 \Rightarrow y_C = 5 + (-6) = -1 \end{cases}$$

نقطه همرسی میانه‌های مثلث: میانه‌های مثلث در نقطه‌ای داخل مثلث هم‌رس‌اند و همدیگر را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کنند. پس اگر A، B و C سه رأس مثلث ABC باشند، داریم:

$$\frac{AG}{MG} = \frac{2}{1} \Rightarrow G = \frac{1 \times A + 2 \times M}{1 + 2} \xrightarrow{M = \frac{B+C}{2}} G = \frac{A + 2\left(\frac{B+C}{2}\right)}{3} \Rightarrow G = \frac{A + B + C}{3}$$

گزینه ۱۴ نقاط $A(x, 4)$ ، $B(-1, y)$ و $C(8, 3)$ رئوس مثلث ABC هستند. اگر نقطه همرسی میانه‌های مثلث (۴، ۳) باشد، مقدار $x + y$ کدام است؟

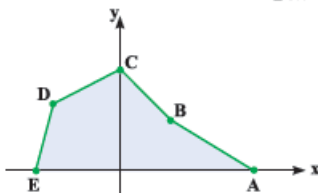
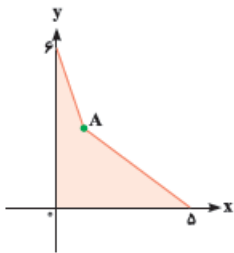
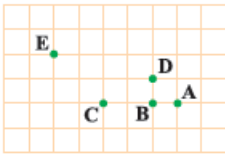
۸ (۴) ۷ (۳) ۶ (۲) ۵ (۱)

گزینه ۱۵ می‌دانیم اگر نقطه همرسی میانه‌های مثلث ABC باشد، داریم:

$$G = \frac{A + B + C}{3} \Rightarrow (4, 3) = \left(\frac{x + (-1) + 8}{3}, \frac{4 + y + 3}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x + 7}{3} = 4 \Rightarrow x + 7 = 12 \Rightarrow x = 5 \\ \frac{y + 7}{3} = 3 \Rightarrow y + 7 = 9 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

بنابراین $x + y$ برابر $5 + 2 = 7$ می‌باشد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

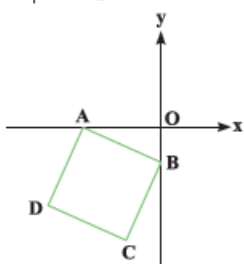
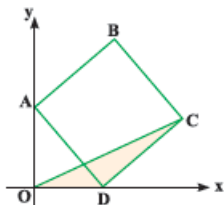


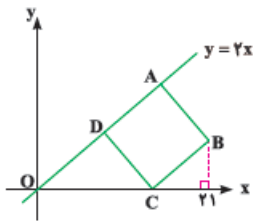
۱. در صفحه شطرنجی شکل مقابل، $E(-4, 2)$ است. کدام نقطه، مبدأ مختصات می‌باشد؟
 A (۱) B (۲) C (۳) D (۴)
۲. در شکل مقابل $A(1, 3)$ می‌باشد. مساحت قسمت رنگی کدام است؟
 ۹ (۱) ۹/۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۰/۵ (۴)
۳. در شکل مقابل $A(8, 0)$ ، $B(3, 3)$ ، $C(0, 6)$ ، $D(-4, 4)$ و $E(-5, 0)$ هستند. مساحت پنج‌ضلعی رنگی کدام است؟
 ۳۹ (۱) ۴۱ (۲) ۴۳ (۳) ۴۵ (۴)
۴. مجموع فواصل نقطه $A(\Delta, m-2)$ از محورهای مختصات برابر ۸ است. کدام نقطه زیر می‌تواند روی محور y ها قرار گیرد؟
 (۱) $(m-3, m-5)$ (۲) (m^2+3m+2, m^2+m-2)
 (۳) (m^2+m-2, m^2-3m+2) (۴) $(m^2-5m+6, 2m)$
۵. طول نقطه A از دو برابر عرض آن، ۶ واحد بیشتر است. اگر رأس مستطیلی با محیط ۲۴ باشد که اضلاع آن بر محورهای مختصات منطبق است، کم‌ترین مساحت مستطیل مفروض کدام است؟
 ۳۶ (۱) ۲۴ (۲) ۲۰ (۳) ۱۸ (۴)
۶. نقطه $A(2m-5, m^2-16)$ در ناحیه سوم دستگاه مختصات قرار دارد. مجموع مقادیر صحیح m کدام است؟
 ۲ (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴)
۷. نقطه $A(a, b)$ در ناحیه چهارم دستگاه مختصات قرار دارد. کدام نقطه حتماً در ناحیه اول دستگاه مختصات است؟
 (۱) $(b-a, -b)$ (۲) $(\frac{a}{b}, -b)$ (۳) $(a+b, -b)$ (۴) $(a-b, b^2)$
۸. نقطه $A(ab, b-c)$ در ناحیه دوم و نقطه $B(c+d, d^2-a)$ در ناحیه چهارم دستگاه مختصات قرار دارند اگر a, b, c, d اعداد صحیح باشند، نقطه $C(|a| - |d|, |c| - |b|)$ در کدام ناحیه قرار دارد؟
 ۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم
۹. نقطه $A(a-1, b+1)$ روی محور x ها و نقطه $B(a+3, b-5)$ روی محور y ها قرار دارد. نقطه $C(a+b, -b)$ کجای دستگاه مختصات قرار دارد؟
 ۱) ناحیه اول (۲) ناحیه دوم (۳) ناحیه سوم (۴) ناحیه چهارم
۱۰. نقاط $A(1, 2)$ ، $B(-1, -3)$ ، $C(7, 5)$ و $D(3, -6)$ مفروض‌اند. محیط مثلث ABC چه قدر از طول پاره خط AD بیش‌تر است؟
 ۱۳ (۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) $18 + 5\sqrt{2}$ (۴)
۱۱. طول پاره خط واصل نقاط $A(1, -2)$ و $B(a, 6)$ برابر ۱۰ است. مجموع مقادیر a کدام است؟
 ۲ (۱) ۳ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴)
۱۲. نقاط $A(5, 1)$ ، $B(2, -3)$ و $C(-1, b)$ مفروض‌اند. اگر $AB = BC$ باشد، بیشترین طول پاره خط AC کدام است؟
 ۴ (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴)
۱۳. نقطه $A(a, 2)$ از دو نقطه $B(-2, 0)$ و $C(3, -a)$ به یک فاصله است. طول بزرگ‌ترین پاره خط AB کدام است؟
 $\sqrt{13}$ (۱) $\sqrt{29}$ (۲) $\sqrt{43}$ (۳) $\sqrt{53}$ (۴)
۱۴. نقاط $A(1, 3)$ ، $B(-2, -1)$ و $C(-7, -3)$ سه رأس مثلث ABC هستند. میانه وارد بر ضلع BC آن را به دو مثلث تقسیم می‌کند. اختلاف محیط‌های دو مثلث کدام است؟
 ۴ (۱) ۵ (۲) $4 + \sqrt{2}$ (۳) $4 + 2\sqrt{2}$ (۴)

۱۵. اگر طول پاره خط واصل بین نقاط $A(m, 3m+4)$ و $B(1-m, m+3)$ برابر $3\sqrt{2}$ باشد، میانگین مقادیر m کدام است؟
 ۱ (۱) $1/5$ (۲) 2 (۳) 3 (۴) $5/2$
۱۶. نقطه A روی محور x ها به گونه ای قرار دارد که فاصله آن از نقاط $B(1, 2)$ و $C(2, -3)$ برابر L است. مقدار L کدام است؟
 ۱ (۱) $\sqrt{13}$ (۲) $\sqrt{11}$ (۳) 3 (۴) $\sqrt{7}$
۱۷. نقطه $(a, 2a)$ مرکز دایره گذرنده بر دو نقطه $(2, 1)$ و $(-1, 4)$ است. شعاع دایره کدام است؟
 ۱ (۱) 3 (۲) 4 (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $3\sqrt{2}$
۱۸. فاصله نقطه $A(a, b)$ از نقاط $B(3, -2)$ و $C(5, 1)$ برابر است. مقدار $4a+6b$ کدام است؟
 ۱ (۱) 7 (۲) 13 (۳) -11 (۴) -7
۱۹. نقطه $(9-m^2+m-6, m^2-m-6)$ با بیشترین فاصله از مبدأ مختصات روی یکی از محورهای مختصات قرار دارد. فاصله نقطه $B(m-6, 5-2m)$ از نقطه A کدام است؟
 ۱ (۱) $2\sqrt{19}$ (۲) $\sqrt{82}$ (۳) $2\sqrt{21}$ (۴) $\sqrt{86}$
۲۰. نقاط $A(2, 8)$ و $B(8, 0)$ دو رأس مربع $ABCD$ هستند. مساحت مثلث ACD کدام است؟
 ۱ (۱) 40 (۲) 50 (۳) 60 (۴) 70
۲۱. رأس های دو مربع بر نقاط $A(3, 2)$ و $B(1, 4)$ منطبق اند. بیشترین مساحت ناحیه مشترک دو مربع کدام است؟
 ۱ (۱) $\sqrt{2}$ (۲) 2 (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{3}$
۲۲. نقاط $A(3, 7)$ ، $B(7, -1)$ و $C(1, 6)$ رأس های مثلث ABC هستند. نوع مثلث کدام است؟
 ۱ (۱) متساوی الاضلاع (۲) مختلف الاضلاع (۳) فقط قائم الزاویه (۴) قائم الزاویه و متساوی الساقین
۲۳. نقاط $A(4, 2)$ ، $B(2, 4)$ و $C(2, -2)$ رأس های مثلث ABC هستند. مساحت مثلث ABC کدام است؟
 ۱ (۱) 8 (۲) 6 (۳) 12 (۴) 14
۲۴. مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(2, 5)$ ، $B(3, 0)$ و $C(0, 2)$ کدام است؟
 ۱ (۱) 6 (۲) $6/5$ (۳) 7 (۴) $7/5$
۲۵. نقاط $A(-1, 3)$ ، $B(2, -2)$ و $C(a, 4)$ رئوس مثلث ABC با مساحت 3 هستند. میانگین مقادیر ممکن برای a کدام است؟
 ۱ (۱) $-2/4$ (۲) $1/2$ (۳) $2/8$ (۴) $-1/6$
۲۶. نقاط $A(0, 5)$ ، $B(8, 2)$ ، $C(4, -4)$ و $D(-6, -1)$ رئوس چهارضلعی $ABCD$ هستند. مساحت چهارضلعی کدام است؟
 ۱ (۱) 69 (۲) 68 (۳) 64 (۴) 62
۲۷. نقاط $A(-3, 0)$ ، $B(-5, 4)$ و $C(0, 8)$ و مبدأ مختصات رئوس چهارضلعی $ABCO$ هستند. مساحت چهارضلعی کدام است؟
 ۱ (۱) 24 (۲) 25 (۳) 26 (۴) 27
۲۸. نقاط $C(6, 0)$ و $D(0, 4)$ رئوس مستطیل $ABCD$ هستند. اگر نقطه $M(4, 6)$ روی ضلع AB باشد، مساحت مستطیل $ABCD$ کدام است؟
 ۱ (۱) 24 (۲) 26 (۳) 28 (۴) 32
۲۹. نقاط $A(-3, -2)$ ، $B(1, 2)$ و $C(2, 6)$ رئوس متوازی الاضلاع $ABCD$ هستند. مساحت متوازی الاضلاع کدام است؟
 ۱ (۱) 6 (۲) 8 (۳) 12 (۴) 16
۳۰. نقاط $A(1, 2)$ ، $B(1, 1)$ و $C(1, 7)$ سه رأس مثلث ABC هستند. نوع و محیط آن کدام است؟
 ۱ (۱) متساوی الاضلاع - ۲۶ (۲) متساوی الساقین - ۲۶ (۳) قائم الزاویه - ۲۴ (۴) نامشخص - ۲۴
۳۱. نقاط $A(a, 2)$ ، $B(a, 8)$ ، $C(0, 12)$ و $O(0, 0)$ رئوس چهارضلعی با مساحت 63 واحد مربع هستند. مقدار a کدام می تواند باشد؟
 ۱ (۱) -7 (۲) -1 (۳) -12 (۴) -14
۳۲. فاصله وسط پاره خط واصل نقاط $A(2, -6)$ و $B(4, -2)$ از مبدأ مختصات کدام است؟
 ۱ (۱) $2\sqrt{6}$ (۲) 5 (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{7}$
۳۳. در مثلث ABC با رئوس $A(1, 8)$ ، $B(3, 2)$ و $C(5, 6)$ ، فاصله وسط اضلاع AB و BC از هم کدام است؟
 ۱ (۱) 3 (۲) 4 (۳) $\sqrt{10}$ (۴) $2\sqrt{3}$
۳۴. فاصله نقطه وسط پاره خط واصل نقاط $A(n+3, 4)$ و $B(9, 3n-2)$ از محورهای مختصات برابر است. مجموع مقادیر n کدام است؟
 ۱ (۱) 1 (۲) $1/5$ (۳) 2 (۴) $2/5$
۳۵. قرینه نقطه $B(2, -3)$ نسبت به نقطه $A(1, 2)$ نقطه B' است. فاصله B' از مبدأ مختصات کدام است؟
 ۱ (۱) 4 (۲) 6 (۳) 7 (۴) 8
۳۶. نقاط $A(2a-3, b+1)$ و $B(7, b-3)$ نسبت به نقطه $C(5, -4)$ قرینه یکدیگرند. مقدار $a-b$ کدام است؟
 ۱ (۱) 2 (۲) 6 (۳) -1 (۴) 3

- ۳۷.** نقاط $A(2a+3b, 1)$ و $B(4, a+2b)$ نسبت به مبدأ مختصات قرینه‌اند. طول پاره خط AB کدام است؟
 (۱) $2\sqrt{11}$ (۲) $3\sqrt{7}$ (۳) $2\sqrt{17}$ (۴) $3\sqrt{13}$
- ۳۸.** قرینه نقطه $A(2, 4)$ نسبت به نقطه $B(3-2a, a+1)$ در ناحیه سوم واقع است. حدود a کدام است؟
 (۱) $1 < a < 2$ (۲) $a > 1$ (۳) $-1 < a < 3$ (۴) نشدنی
- ۳۹.** قرینه نقطه A نسبت به نقطه $B(-3, 5)$ نقطه $C(-1, b)$ است که وسط پاره خط واصل نقاط $D(4, 6)$ و $E(-6, 4)$ قرار دارد. طول پاره خط AC کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸
- ۴۰.** قرینه نقطه $A(-1, 4)$ نسبت به محور y ها را نسبت به نقطه $(4, 6)$ قرینه می‌کنیم. فاصله نقطه حاصل از مبدأ مختصات کدام است؟
 (۱) $\sqrt{97}$ (۲) $\sqrt{103}$ (۳) $\sqrt{113}$ (۴) $\sqrt{121}$
- ۴۱.** قرینه نقطه $A(-4, 2)$ نسبت به نقطه $B(k-3, 4)$ روی محور y ها است. قرینه نقطه $(k+1, 2k)$ نسبت به نقطه A کدام است؟
 (۱) $(-8, 4)$ (۲) $(-10, 2)$ (۳) $(-6, 10)$ (۴) $(4, -10)$
- ۴۲.** نقاط $A(a, b)$ ، $B(-a, b+1)$ و $C(3, 2-a)$ مفروض‌اند. اگر $AB = \sqrt{17}$ و $BC = 5\sqrt{2}$ و نقطه A در ناحیه چهارم دستگاه مختصات باشد، فاصله قرینه نقطه A نسبت به نقطه B از نقطه C کدام است؟
 (۱) $\sqrt{101}$ (۲) $\sqrt{97}$ (۳) $\sqrt{90}$ (۴) $\sqrt{107}$
- ۴۳.** قرینه نقطه $A(a^2-1, 3b-7)$ نسبت به محور x ها نقطه B و قرینه نقطه B نسبت به نقطه $E(-1, 2)$ نقطه $C(-5, 6)$ است. بیشترین مقدار $a+b$ چقدر از کم‌ترین مقدار آن بیشتر است؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
- ۴۴.** نقاط $A(4, 1)$ ، $B(-2, 2)$ و $C(-4, -2)$ سه رأس مثلث ABC هستند. طول میانه وارد بر ضلع BC کدام است؟
 (۱) $4\sqrt{3}$ (۲) $4\sqrt{2}$ (۳) $5\sqrt{3}$ (۴) $5\sqrt{2}$
- ۴۵.** نقاط $A(-1, 4)$ ، $B(5, 3)$ و $C(-3, 7)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. طول ضلع BC چند برابر طول میانه وارد بر آن است؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶
- ۴۶.** نقاط $A(a-1, b+2)$ ، $B(5, 4)$ ، $C(a+5, a+2)$ و $D(-7, 2)$ رئوس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. طول قطر AC کدام است؟
 (۱) ۱۰ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴) ۷
- ۴۷.** نقاط $A(1, -2)$ ، $B(7, -2)$ ، $C(a, 2)$ و $D(4, b)$ رئوس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. محیط متوازی‌الاضلاع کدام است؟
 (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۲۲
- ۴۸.** نقاط $A(-1, 3)$ ، $C(5, -2)$ و $D(2, -3)$ رئوس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. طول بزرگ‌ترین قطر متوازی‌الاضلاع کدام است؟
 (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) $\sqrt{59}$ (۴) $\sqrt{61}$
- ۴۹.** در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، $B(5, 3)$ و $D(-2, 3)$ است. اگر $M(4, 1)$ وسط ضلع AB باشد، فاصله رأس C از مبدأ مختصات کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴) $4\sqrt{3}$
- ۵۰.** نقاط $A(2, 5)$ ، $D(8, 3)$ رئوس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. اگر نقطه تلاقی قطرهای آن باشد، مجموع طول و عرض رئوس B و C کدام است؟
 (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۴
- ۵۱.** نقاط $A(3, -2)$ ، $B(2, 5)$ و $C(-3, 1)$ سه رأس یک متوازی‌الاضلاع هستند. مختصات رأس D کدام نمی‌تواند باشد؟
 (۱) $(8, 2)$ (۲) $(-2, -6)$ (۳) $(6, 3)$ (۴) $(-4, 8)$
- ۵۲.** نقاط $A(0, 4)$ ، $D(3, 0)$ رئوس مربع $ABCD$ هستند. اگر رأس C در ناحیه اول دستگاه مختصات باشد، فاصله رأس C از مبدأ مختصات کدام است؟
 (۱) $2\sqrt{13}$ (۲) $\sqrt{58}$ (۳) $2\sqrt{15}$ (۴) ۸
- ۵۳.** نقاط $C(4, -1)$ و $D(-2, 3)$ رئوس مربع $ABCD$ هستند. اگر رأس B در ناحیه اول مختصات باشد، فاصله B تا مبدأ مختصات کدام است؟
 (۱) $\sqrt{59}$ (۲) $\sqrt{69}$ (۳) $\sqrt{79}$ (۴) $\sqrt{89}$
- ۵۴.** نقاط $A(0, 1)$ و $B(4, -2)$ دو رأس مجاور مربع $ABCD$ هستند. طول مختصات نقطه D در ربع سوم کدام است؟
 (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴
- ۵۵.** در شکل مقابل $ABCD$ مربع است. اگر $D(2, 0)$ باشد، مساحت مثلث رنگی کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۵۶.** در شکل مقابل چهارضلعی $ABCD$ مربع است. اگر $B(0, -2)$ و مساحت مربع 40 باشد، مجموع طول و عرض نقطه C کدام است؟
 (۱) -۸ (۲) -۹ (۳) -۱۰ (۴) -۱۲

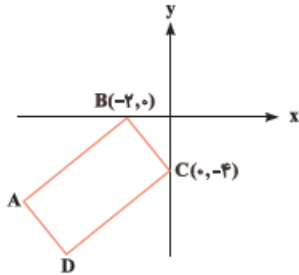
(ریاضی نوبت اول ۱۴۰۲)





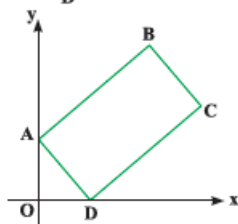
۵۷ در شکل مقابل مساحت مربع ABCD کدام است؟

- ۱) ۱۵۰
- ۲) ۱۶۹
- ۳) ۱۸۰
- ۴) ۱۹۶



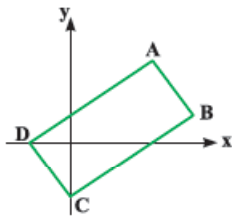
۵۸ در شکل مقابل مساحت مستطیل ABCD برابر ۴۰ واحد مربع است. عرض رأس D کدام است؟

- ۱) -۶
- ۲) -۷
- ۳) -۸
- ۴) -۱۰



۵۹ در شکل مقابل محیط مستطیل ۳۰ است. اگر $A(0, 4)$ و $D(3, 0)$ باشند، عرض رأس C کدام است؟

- ۱) ۴
- ۲) ۵
- ۳) ۶
- ۴) ۷



۶۰ در شکل مقابل ABCD مستطیل است. اگر $A(5, 6)$ و $C(0, -4)$ باشند، طول رأس B کدام است؟

- ۱) ۶
- ۲) ۷
- ۳) ۸
- ۴) ۹

۶۱ نقطه B روی پاره خط واصل بین نقاط $A(6, -3)$ و $C(0, 6)$ به گونه ای قرار دارد که $AB = 2BC$ می باشد. مجموع طول و عرض نقطه B کدام است؟

- ۱) ۳
- ۲) ۵
- ۳) -۲
- ۴) -۱

۶۲ نقاط $A(-2, 4)$ ، $B(0, 6)$ و $C(5, 1)$ مفروض اند. اگر پاره خط های AD و BC در نقطه E متقاطع و $3EB = 2EC$ و $3AE = ED$ باشند، تفاضل طول و عرض نقطه D کدام است؟

- ۱) ۱۰
- ۲) ۸
- ۳) ۶
- ۴) ۴

۶۳ قرینه نقطه $C(5, 3)$ نسبت به نقطه $E(3, 5)$ نقطه D روی پاره خط AB است. اگر $B(-4, 3)$ و $AD = 2DB$ باشد، مجموع طول و عرض نقطه A کدام است؟

- ۱) ۲۴
- ۲) ۲۶
- ۳) ۲۸
- ۴) ۳۰

۶۴ نقاط $A(-1, 6)$ ، $B(1, 7)$ ، $C(5, -1)$ و $D(-4, -3)$ رئوس چهارضلعی ABCD هستند. اگر نقاط E و F به ترتیب روی اضلاع AD و BC به گونه ای باشند که $DE = 2AE$ و $BF = 3CF$ ، طول پاره خط EF کدام است؟

- ۱) $2\sqrt{10}$
- ۲) $3\sqrt{5}$
- ۳) $4\sqrt{3}$
- ۴) $5\sqrt{2}$

۶۵ نقاط $A(-1, 2)$ و $B(3, -4)$ مفروض اند. نقطه C روی خط گذرنده از نقاط A و B به گونه ای قرار دارد که $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{5}$ می باشد. کم ترین فاصله نقطه C از مبدأ مختصات کدام است؟

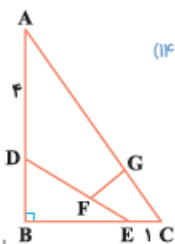
- ۱) $\sqrt{50}$
- ۲) $4\sqrt{10}$
- ۳) $\sqrt{170}$
- ۴) $6\sqrt{5}$

۶۶ نقاط $A(-3, 7)$ و $C(5, -3)$ رئوس مثلث ABC هستند. اگر نقطه همرسی میانه های مثلث باشد، طول میانه BN کدام است؟

- ۱) $3\sqrt{2}$
- ۲) $8\sqrt{5}$
- ۳) $6\sqrt{2}$
- ۴) $6\sqrt{5}$

۶۷ قرینه نقطه $A(1, 1)$ نسبت به نقاط $(-1, 2)$ و $(3, 2)$ را به ترتیب B و C می نامیم. نقطه تلاقی میانه های مثلث ABC کدام است؟

- ۱) $(-1, \frac{1}{3})$
- ۲) $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
- ۳) $(1, \frac{1}{3})$
- ۴) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$



(ریاضی نوبت اول ۱۴۰۲)

۶۸ در شکل مقابل اگر $\frac{AC}{CG} = \frac{DE}{EF} = 4$ باشد، اندازه FG کدام است؟

- ۱) ۱
- ۲) $\frac{1}{25}$
- ۳) $\frac{1}{5}$
- ۴) $\frac{1}{75}$

فصل آخر.

ریاضی تجربی یازدهم
پاسخ‌های
تشریحی

iq

Descriptive
Answers

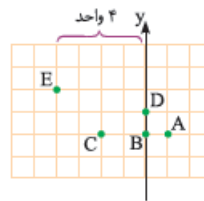


Paul Dirac

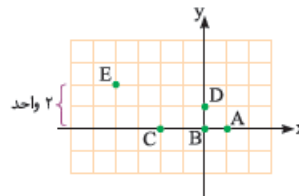
فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

۲ ۱

چون طول نقطه E برابر ۴- می باشد، پس محور yها چهار واحد سمت راست نقطه E است.

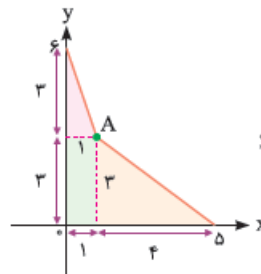


از طرفی چون عرض نقطه E برابر ۲ می باشد، پس محور xها دو واحد پایین تر از نقطه E می باشد. با توجه به شکل مقابل نقطه B مبدأ مختصات است.



۴ ۲

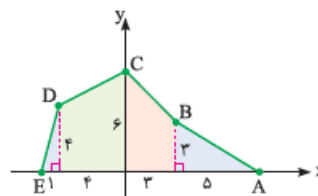
با توجه به این که طول نقطه A برابر ۱ و عرض آن برابر ۳ است داریم:



$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 + \frac{1}{2} \times 3 \times 3 + \frac{1}{2} \times 1 \times 3 = 10.5$$

۳ ۳

با رسم پاره خط های زیر، شکل به دو مثلث و دو ذوزنقه تبدیل می شود. با توجه به طول و عرض نقاط، طول قاعده اشکال و ارتفاع آن ها معلوم می شود، پس:



$$S = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 + \frac{1}{2} (1+3) \times 4 + \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 2 + 20 + 13/5 + 7/5 = 43$$

۲ ۴

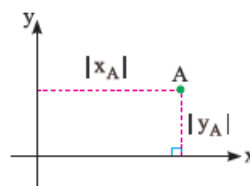
فاصله نقطه A از محور xها برابر ۵ و از محور yها برابر |m-2| است. پس:

$$|m-2| + 5 = 8 \Rightarrow |m-2| = 3 \Rightarrow \begin{cases} m-2 = 3 \Rightarrow m = 5 \\ m-2 = -3 \Rightarrow m = -1 \end{cases}$$

نقطه ای روی محور yها قرار دارد که طول آن صفر باشد، در گزینه (۲) طول نقطه، یعنی $m^2 + 3m + 2$ به ازای $m = -1$ برابر صفر می شود، پس این نقطه روی محور yها قرار دارد.

۳ ۵

با توجه به توضیحات سؤال با توجه $A(2a+6, a)$ می باشد. با توجه به شکل زیر داریم:



$$2(|2a+6| + |a|) = 24 \Rightarrow |2a+6| + |a| = 12$$

حال داریم:

$$a \leq -3 \Rightarrow -2a - 6 - a = 12 \Rightarrow -3a = 18 \Rightarrow a = -6$$

$$-3 < a < 0 \Rightarrow 2a + 6 - a = 12 \Rightarrow a = 6$$

$$a \geq 0 \Rightarrow 2a + 6 + a = 12 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین $A(-6, -6)$ یا $A(1, 2)$ است که کمترین مقدار مساحت مستطیل به ازای $A(1, 2)$ به دست می آید که برابر $S = 10 \times 2 = 20$ می باشد.

۲ ۶

چون نقطه A در ناحیه سوم دستگاه مختصات است، باید طول نقطه منفی و عرض آن نیز منفی باشد:

$$\begin{cases} 2m - 5 < 0 \Rightarrow 2m < 5 \Rightarrow m < \frac{5}{2} \\ m^2 - 16 < 0 \Rightarrow m^2 < 16 \Rightarrow -4 < m < 4 \end{cases}$$

از اشتراک مقادیر به دست آمده برای m داریم:

$$-4 < m < \frac{5}{2} \Rightarrow m = -3, -2, -1, 0, 1, 2$$

بنابراین مجموع مقادیر صحیح m برابر ۳- است.

۴ ۷

چون نقطه $A(a, b)$ در ناحیه چهارم است، پس $a > 0$ و $b < 0$ می باشد. حال تک تک گزینه ها را بررسی می کنیم:

$$1) (b-a, -b) \Rightarrow \begin{cases} a > 0, b < 0 \Rightarrow b-a < 0 \\ b < 0 \Rightarrow -b > 0 \end{cases} \Rightarrow (-, +) \Rightarrow \text{ناحیه دوم}$$

البته بعد از این که دربریم طول نقطه منفی می فهمیم که تو نایه اول نیست و نیاز به بررسی عرض نقطه نیست.

$$2) \left(\frac{a}{b}, -b\right) \Rightarrow \begin{cases} a > 0, b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} < 0 \\ \dots \end{cases}$$

$\Rightarrow (-, \dots) \Rightarrow$ در ناحیه اول نیست.

$$3) \begin{cases} a > 0, b < 0 \\ \dots \end{cases}$$

لزوماً در ناحیه اول نیست. \Rightarrow علامت $a+b$ معلوم نیست.

$$4) \begin{cases} a > 0, b < 0 \Rightarrow a-b > 0 \\ b < 0 \Rightarrow b^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (+, +) \Rightarrow \text{در ناحیه اول است.}$$

۱ ۸

چون $A(ab, b-c)$ در ناحیه دوم است، پس:

$$b-c > 0 \Rightarrow b > c$$

از طرفی چون $B(c+d, d^2-a)$ در ناحیه چهارم می باشد، پس:

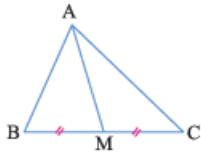
$$\begin{cases} c+d > 0 \\ d^2-a < 0 \Rightarrow a > d^2 \end{cases}$$

چون a عددی مثبت و $ab < 0$ است، پس b منفی می باشد. با توجه به نامساوی $b > c$ داریم:

فرض کن $b = -2$ و $c = -5$ هستن، پس $|b| = 2$ و $|c| = 5$ بوده و $|c| - |b| > 0$ میشه.

از نامساوی $a > d^2$ هم نتیجه می شود که $a > d$ است و چون $c+d > 0$ و $c < 0$ است، پس حتماً $d > 0$ می باشد و این یعنی $|a| > |d|$ بزرگ تر بوده و $|a| - |d| > 0$ خواهد بود. پس طول نقطه C مثبت و عرض آن نیز مثبت می باشد و این یعنی C در ناحیه اول است.

۲ ۱۴



به شکل زیر دقت کنید. واضح است که اختلاف محیط‌های دو مثلث برابر اختلاف طول اضلاع AB و AC است. پس:

$$\begin{cases} AB = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \\ AC = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10 \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف محیط‌ها} = 10 - 5 = 5$$

۴ ۱۵

طول پاره خط AB را برابر $3\sqrt{2}$ قرار می‌دهیم تا مقادیر m به دست آید:

$$\begin{aligned} \sqrt{(1-2m)^2 + (-2m+1)^2} &= 3\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2 \times (-2m+1)^2} = 3\sqrt{2} \\ \Rightarrow |-2m+1| \sqrt{2} &= 3\sqrt{2} \Rightarrow |-2m+1| = 3 \\ \Rightarrow \begin{cases} -2m+1 = 3 \Rightarrow -2m = 2 \Rightarrow m = -1 \\ -2m+1 = -3 \Rightarrow -2m = -4 \Rightarrow m = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین میانگین مقادیر به دست آمده برای m برابر $\frac{2+(-1)}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$ می‌باشد.

۱ ۱۶

چون نقطه A روی محور xها است، فرض می‌کنیم مختصات آن $A(a, 0)$ باشد، پس:

$$\begin{aligned} \sqrt{(a-1)^2 + 4} &= \sqrt{(a-2)^2 + 9} \\ \Rightarrow a^2 - 2a + 1 + 4 &= a^2 - 4a + 4 + 9 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4 \end{aligned}$$

بنابراین به ازای $a = 4$ داریم: $L = \sqrt{(4-1)^2 + 4} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

۱ ۱۷

فاصله مرکز دایره تا هر یک از نقاط برابر شعاع دایره است، پس:

$$\begin{aligned} \sqrt{(a-2)^2 + (2a-1)^2} &= \sqrt{(a+1)^2 + (2a-4)^2} \\ \Rightarrow a^2 - 4a + 4 + 4a^2 - 4a + 1 &= a^2 + 2a + 1 + 4a^2 - 16a + 16 \\ \Rightarrow -8a + 5 &= -14a + 17 \Rightarrow 6a = 12 \Rightarrow a = 2 \end{aligned}$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$r = \sqrt{(2-2)^2 + (2(2)-1)^2} = \sqrt{0+9} = 3$$

۲ ۱۸

باید $AB = AC$ باشد، پس:

$$\begin{aligned} \sqrt{(a-3)^2 + (b+2)^2} &= \sqrt{(a-5)^2 + (b-1)^2} \\ \Rightarrow a^2 - 6a + 9 + b^2 + 4b + 4 &= a^2 - 10a + 25 + b^2 - 2b + 1 \\ \Rightarrow -6a + 4b + 13 &= -10a - 2b + 26 \Rightarrow 4a + 6b = 13 \end{aligned}$$

۲ ۱۹

برای آن که نقطه A روی یکی از محورهای مختصات باشد، باید طول یا عرض نقطه A صفر باشد، پس:

$$m^2 + m - 6 = 0 \Rightarrow (m+3)(m-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -3 \Rightarrow A(0, 0) \\ m = 2 \Rightarrow A(0, -5) \end{cases}$$

$$m^2 - 9 = 0 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \Rightarrow A(6, 0) \\ m = -3 \Rightarrow A(0, 0) \end{cases}$$

واضح است $A(6, 0)$ بیشترین فاصله را تا مبدأ مختصات دارد. پس $m = 3$ قابل قبول است. حال داریم:

$$\begin{cases} A(6, 0) \\ m = 3 \Rightarrow B(-3, -1) \end{cases} \Rightarrow AB = \sqrt{81+1} = \sqrt{82}$$

۲ ۹

چون نقطه $A(a-1, b+1)$ روی محور xها است، پس:

$$b+1=0 \Rightarrow b=-1$$

هم چنین چون نقطه $B(a+3, b-5)$ روی محور yها می‌باشد داریم:

$$a+3=0 \Rightarrow a=-3$$

بنابراین مختصات نقطه C به صورت زیر است که در ناحیه دوم قرار دارد.

$$C(a+b, -b) \xrightarrow[\begin{smallmatrix} a=-3 \\ b=-1 \end{smallmatrix}]{b=-1} C(-4, 1)$$

۳ ۱۰

طول اضلاع AB، AC، BC و همچنین طول پاره خط AD را به دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{44+25} = \sqrt{69} = 13$$

$$AC = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$BC = \sqrt{64+64} = \sqrt{64 \times 2} = 8\sqrt{2}$$

$$AD = \sqrt{64+64} = \sqrt{64 \times 2} = 8\sqrt{2}$$

بنابراین محیط مثلث ABC برابر $13+5+8\sqrt{2}$ است که $13+5=18$ واحد از طول پاره خط AD بیش تر است.

۱ ۱۱

فاصله نقاط $A(1, -2)$ و $B(a, 6)$ را برابر ۱۰ قرار می‌دهیم و داریم:

$$\sqrt{(a-1)^2 + 64} = 10 \Rightarrow (a-1)^2 + 64 = 100 \Rightarrow$$

$$(a-1)^2 = 36 \Rightarrow \begin{cases} a-1 = 6 \Rightarrow a = 7 \\ a-1 = -6 \Rightarrow a = -5 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع مقادیر } a = 2$$

۴ ۱۲

چون $AB = BC$ است داریم:

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{9+(-3-b)^2} \Rightarrow (-3-b)^2 = 16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3-b = 4 \Rightarrow b = -7 \\ -3-b = -4 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

حال با توجه به مقادیر به دست آمده برای b طول پاره خط AC را به دست می‌آوریم:

$$b = -7 \Rightarrow C(-1, -7) \Rightarrow AC = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

$$b = 1 \Rightarrow C(-1, 1) \Rightarrow AC = |5 - (-1)| = |6| = 6$$

بنابراین بیشترین طول پاره خط AC برابر ۱۰ است.

۴ ۱۳

باید $AB = AC$ باشد، پس:

$$\sqrt{(a+2)^2 + 4} = \sqrt{(a-3)^2 + (2+a)^2}$$

$$\Rightarrow a^2 + 4a + 4 + 4 = a^2 - 6a + 9 + 4 + 4a + a^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 6a + 5 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}} a = 1, a = 5$$

به ازای aهای به دست آمده طول AB را به دست می‌آوریم:

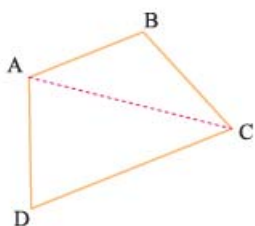
$$a = 1 \Rightarrow AB = \sqrt{(1+2)^2 + 4} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$a = 5 \Rightarrow AB = \sqrt{(5+2)^2 + 4} = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$$

بنابراین بیشترین طول پاره خط AB برابر $\sqrt{53}$ است.

۲۶ ۱

روش اول) به شکل مقابل دقت کنید. کافی است مساحت مثلث‌های ABC و ADC را محاسبه کرده و با هم جمع کنیم:



$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |-12 - 48| = \frac{1}{2} |-60| = 30$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} |44 - (-34)| = \frac{1}{2} |78| = 39$$

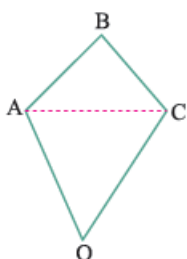
بنابراین مساحت چهارضلعی ABCD برابر ۳۰ + ۳۹ = ۶۹ است.

روش دوم) می‌توان از روشی که برای محاسبه مساحت مثلث استفاده کردیم، مساحت چهارضلعی را نیز به دست آوریم:

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} |-66 - 72| = \frac{138}{2} = 69$$

۲۷ ۳

روش اول) با توجه به شکل مقابل، مساحت مثلث‌های ABC و AOC را به دست می‌آوریم:



$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |-52 - (-24)| = \frac{1}{2} |-28| = 14$$

$$\Rightarrow S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} |-24 - 0| = \frac{1}{2} |-24| = 12$$

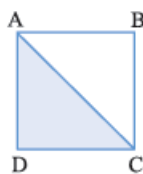
بنابراین مساحت چهارضلعی برابر ۱۴ + ۱۲ = ۲۶ می‌باشد.

روش دوم) مساحت چهارضلعی ABCO برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} |-52 - 0| = \frac{52}{2} = 26$$

۲۰ ۲

با توجه به شکل زیر، مساحت مثلث ACD نصف مساحت مربع است، پس:

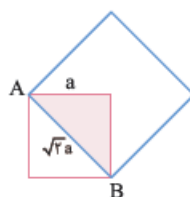


$$AB = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \times 10^2 = 50$$

۲۱ ۲

بیشترین مساحت ناحیه مشترک زمانی اتفاق می‌افتد که نقاط $A(3, 2)$ و $B(1, 4)$ به صورت زیر رأس‌های دو مربع باشند. بنابراین داریم:



$$AB = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}a = 2\sqrt{2} \Rightarrow a = 2$$

پس مساحت ناحیه رنگی برابر $S = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$ می‌باشد.

۲۲ ۳

طول اضلاع AB، AC، BC را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} AB = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} \\ AC = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \\ BC = \sqrt{36 + 49} = \sqrt{85} \end{cases}$$

مثلث قائم‌الزاویه $\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$

۲۳ ۲

مساحت مثلث را مطابق الگوی گفته شده به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} |16 - 4| = \frac{12}{2} = 6$$

۲۴ ۲

با توجه به رابطه گفته شده داریم:

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} |6 - 19| = \frac{13}{2} = 6.5$$

۲۵ ۴

با توجه به الگوی گفته شده داریم:

$$\Rightarrow 3 = \frac{1}{2} |(10 + 3a) - (2 - 2a)|$$

$$\Rightarrow 6 = |10 + 5a| \Rightarrow \begin{cases} 5a + 10 = 6 \Rightarrow a = -\frac{4}{5} \\ 5a + 10 = -6 \Rightarrow a = -\frac{16}{5} \end{cases}$$

بنابراین میانگین مقادیر ممکن برای a برابر

$$\frac{(-\frac{4}{5}) + (-\frac{16}{5})}{2} = \frac{-20}{10} = -2$$

۳ ۲۳

مختصات وسط ضلع AB را به دست می آوریم:

$$M = \frac{A+B}{2} \Rightarrow M\left(\frac{11+3}{2}, \frac{8+2}{2}\right) \Rightarrow M(7, 5)$$

حال مختصات وسط ضلع BC را به دست می آوریم:

$$N = \frac{B+C}{2} \Rightarrow N\left(\frac{3+5}{2}, \frac{2+6}{2}\right) \Rightarrow N(4, 4)$$

$$MN = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

بنابراین فاصله M و N برابر است با:

بعد از این که در فصل دو قشیه تالس رو قوندریم، می تونی یکی طول MN نصف طول AC هستش و بری طول AC رو حساب کنی و نصفش کنی.

$$AC = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \Rightarrow MN = \sqrt{10}$$

۲ ۲۴

ابتدا مختصات نقطه وسط پاره خط AB را به دست می آوریم:

$$M = \frac{A+B}{2} \Rightarrow M = \frac{(n+3, 4) + (9, 3n-2)}{2} = \left(\frac{n}{2} + 6, \frac{3n}{2} + 1\right)$$

چون فاصله $M\left(\frac{n}{2} + 6, \frac{3n}{2} + 1\right)$ از محورهای مختصات برابر است داریم:

$$\left|\frac{n}{2} + 6\right| = \left|\frac{3n}{2} + 1\right| \Rightarrow \begin{cases} \frac{n}{2} + 6 = \frac{3n}{2} + 1 \Rightarrow n = 5 \\ \frac{n}{2} + 6 = -\frac{3n}{2} - 1 \Rightarrow 2n = -7 \Rightarrow n = -3/2 \end{cases}$$

بنابراین مجموع مقادیر n برابر $1/5 = 5 + (-3/5)$ است.

۳ ۲۵

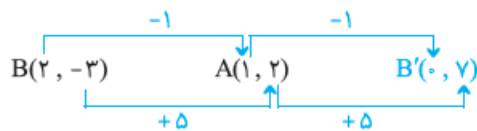
روش اول وقتی نقطه B نسبت به نقطه A قرینه می شود تا نقطه B' حاصل شود، A وسط پاره خط BB' است. پس:

$$A = \frac{B+B'}{2} \Rightarrow B' = 2A - B \Rightarrow B' = 2(1, 2) - (2, -3)$$

$$= (2, 4) - (2, -3) \Rightarrow B'(0, 7)$$

واضح است که فاصله B' از مبدأ مختصات برابر 7 می باشد.

روش دوم به کمک فلش زنی داریم:



بنابراین فاصله B' از مبدأ مختصات برابر 7 می باشد.

۲ ۲۶

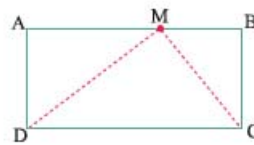
وقتی نقاط A و B نسبت به نقطه C قرینه اند یعنی نقطه C وسط پاره خط AB است. پس:

$$C = \frac{A+B}{2} \Rightarrow (5, -4) = \frac{(2a-3, b+1) + (7, b-3)}{2}$$

$$\Rightarrow (5, -4) = (a+2, b-1) \Rightarrow \begin{cases} a+2 = 5 \Rightarrow a = 3 \\ b-1 = -4 \Rightarrow b = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a-b = 3 - (-3) = 6$$

۳ ۲۸

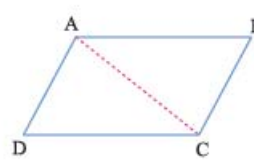


به شکل زیر توجه کنید. واضح است که مساحت مثلث DMC نصف مساحت مستطیل ABCD می باشد. پس:

$$\Rightarrow S_{\Delta DMC} = \frac{1}{2} |24 - 52| = \frac{1}{2} \times 28 = 14$$

بنابراین مساحت مستطیل ABCD برابر $28 = 2 \times 14$ است.

۳ ۲۹



به شکل زیر دقت کنید. می دانیم هر قطر متوازی الاضلاع آن را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می کند. پس مساحت مثلث ABC را به دست می آوریم:

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |-4 - (-16)| = \frac{1}{2} \times 12 = 6$$

بنابراین مساحت متوازی الاضلاع ABCD برابر $12 = 2 \times 6$ است.

۳ ۳۰

طول اضلاع مثلث را به دست می آوریم:

$$AB = 8 \text{ (هم طول هستن.)}$$

$$BC = 6 \text{ (هم عرض هستن.)}$$

$$AC = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

چون $10^2 = 8^2 + 6^2$ بنابراین مثلث ABC قائم الزاویه است و محیط آن برابر $24 = 8 + 6 + 10$ است.

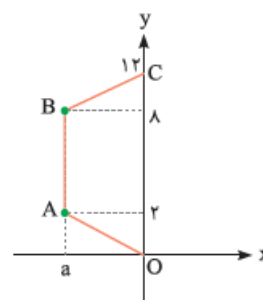
۱ ۳۱

به شکل مقابل دقت کنید. واضح است که $AB = 6$ و $OC = 12$ می باشد.

چهارضلعی ABCO دوزنقه با ارتفاع |a| است، پس:

$$63 = \frac{1}{2} (6+12) \times |a| \Rightarrow$$

$$63 = 9|a| \Rightarrow |a| = 7 \Rightarrow a = -7$$



۲ ۳۲

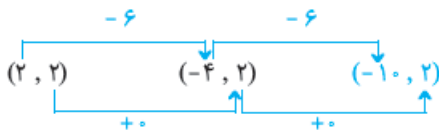
ابتدا مختصات وسط پاره خط AB را به دست می آوریم:

$$M = \frac{A+B}{2} \Rightarrow M = \frac{(2, -6) + (4, -2)}{2} = (3, -4)$$

حال فاصله نقطه M از مبدأ مختصات به دست می آوریم:

$$OM = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

حال باید قرینه نقطه $(2, 2) = (k+1, 2k)$ را نسبت به نقطه $(-4, 2)$ به دست آوریم:



قرینه‌یابی رو به‌بار از فلش‌زنی و به‌بار از راه اصلی رفتیم که هر دو روش را ببینیم.

۴۲ ۲

چون $AB = \sqrt{17}$ است، پس:

$$\sqrt{17} = \sqrt{(2a)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4a^2 + 1} \Rightarrow 4a^2 + 1 = 17$$

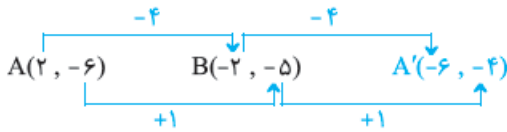
$$\Rightarrow 4a^2 = 16 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

چون نقطه A در ناحیه چهارم است، پس $a = 2$ می‌باشد. از طرفی $BC = 5\sqrt{2}$ است، پس:

$$\begin{cases} B(-2, b+1) \\ C(3, 0) \end{cases} \Rightarrow 5\sqrt{2} = \sqrt{25 + (b+1)^2} \Rightarrow (b+1)^2 = 25$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+1 = 5 \Rightarrow b = 4 \\ b+1 = -5 \Rightarrow b = -6 \end{cases}$$

با توجه به این‌که نقطه A در ناحیه چهارم است، پس $b = -6$ می‌باشد. حال قرینه نقطه $A(2, -6)$ را نسبت به نقطه $B(-2, -5)$ به دست می‌آوریم:

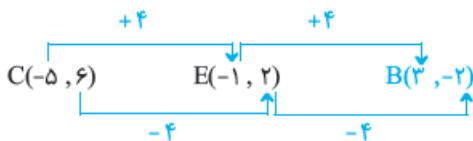


بنابراین فاصله $A'(-6, -4)$ از نقطه $C(3, 0)$ برابر است با:

$$A'C = \sqrt{81 + 16} = \sqrt{97}$$

۴۳ ۳

چون قرینه نقطه B نسبت به نقطه $E(-1, 2)$ نقطه $C(-5, 6)$ است، پس قرینه نقطه C نسبت به نقطه $E(-1, 2)$ نیز نقطه B می‌باشد. بنابراین داریم:



حال به طریق مشابه چون قرینه A نسبت به محور x ها نقطه B است، پس قرینه نقطه $B(3, -2)$ نسبت به محور x ها نقطه A می‌باشد. پس $A(3, 2)$ بوده و داریم:

$$\begin{cases} a^2 - 1 = 3 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \\ 3b - 7 = 2 \Rightarrow 3b = 9 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

بنابراین بیشترین مقدار $a+b$ برابر ۵ و کمترین مقدار آن برابر ۱ بوده و اختلاف آن‌ها برابر ۴ است.

۴۴ ۴

ابتدا نقطه M وسط ضلع BC را به دست می‌آوریم:

$$M = \frac{B+C}{2} \Rightarrow M = \left(\frac{-2+(-4)}{2}, \frac{-2+2}{2} \right) \Rightarrow M(-3, 0)$$

حال طول میانه AM را به دست می‌آوریم:

$$AM = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

۳۷ ۳

چون نقاط A و B نسبت به مبدأ مختصات قرینه‌اند، پس مبدأ مختصات وسط پاره خط AB است. بنابراین داریم:

$$(0, 0) = \left(\frac{4+2a+3b}{2}, \frac{a+2b+1}{2} \right) \Rightarrow \begin{cases} 2+a+\frac{3}{2}b = 0 \\ \frac{a}{2}+b+\frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+\frac{3}{2}b = -2 \\ \frac{a}{2}+b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\frac{3}{2}b = -2 \\ -a-2b = 1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2}b = -1$$

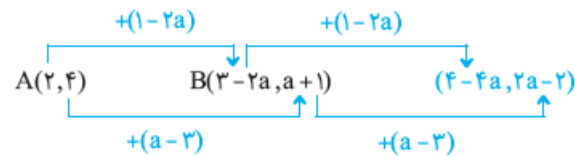
$$\Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = -5$$

بنابراین $A(-4, 1)$ و $B(4, -1)$ می‌باشند و داریم:

$$AB = \sqrt{64+4} = 2\sqrt{17} = 2\sqrt{17}$$

۴۸ ۴

قرینه نقطه A نسبت به نقطه B را به دست می‌آوریم:



چون $(4-4a, 2a-2)$ در ناحیه سوم است، پس:

$$\begin{cases} 4-4a < 0 \Rightarrow 4a > 4 \Rightarrow a > 1 \\ 2a-2 < 0 \Rightarrow 2a < 2 \Rightarrow a < 1 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

بنابراین قرینه نقطه A نسبت به نقطه B نمی‌تواند در ناحیه سوم باشد.

۳۹ ۲

طبق گفته سؤال نقطه C وسط پاره خط DE است، پس:

$$C = \frac{D+E}{2} \Rightarrow (-1, b) = \frac{(4, 6) + (-6, 4)}{2}$$

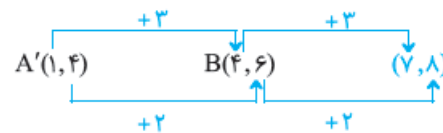
$$\Rightarrow (-1, b) = (-1, 5) \Rightarrow b = 5$$

واضح است طول پاره خط AC دو برابر طول پاره خط BC است. پس:

$$BC = -1 - (-3) = 2 \Rightarrow AC = 4$$

۴۰ ۳

قرینه نقطه $A(-1, 4)$ نسبت به محور y ها نقطه $A'(1, 4)$ است. حال داریم:



بنابراین فاصله نقطه $(7, 8)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

$$\sqrt{49+64} = \sqrt{113}$$

۴۱ ۲

قرینه نقطه A را نسبت به نقطه B به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow B = \frac{A+A'}{2} \Rightarrow A' = 2B - A$$

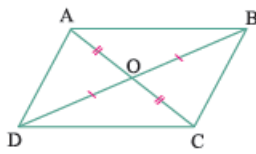
$$\Rightarrow A' = 2(k-3, 4) - (-4, 2)$$

$$= (2k-6, 8) - (-4, 2) \Rightarrow A'(2k-2, 6)$$

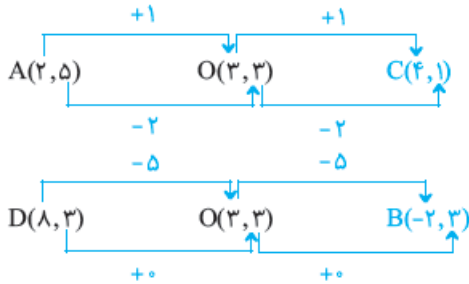
چون نقطه A' روی محور y ها است، پس طول آن صفر می‌باشد:

$$2k-2 = 0 \Rightarrow k = 1$$

۲ ۵۰



می‌دانیم قطرهای متوازی‌الاضلاع همدیگر را نصف می‌کنند. با توجه به شکل زیر اگر رئوس A و D را نسبت به نقطه O قرینه کنیم به ترتیب مختصات رئوس B و C به دست می‌آید:



بنابراین مجموع طول و عرض رئوس B و C برابر $4 + 1 + (-2) + 3 = 6$ می‌باشد.

۳ ۵۱

با توجه به نام‌گذاری رئوس متوازی‌الاضلاع یکی از حالات زیر اتفاق می‌افتد:

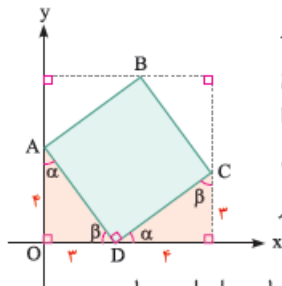
$$\begin{aligned} \Rightarrow A + C &= B + D \\ \Rightarrow (3, -2) + (-3, 1) &= (2, 5) + D \\ \Rightarrow (0, -1) &= (2, 5) + D \Rightarrow D(-2, -6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A + B &= C + D \\ \Rightarrow (3, -2) + (2, 5) &= (-3, 1) + D \\ \Rightarrow (5, 3) &= (-3, 1) + D \Rightarrow D(8, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A + D &= B + C \\ \Rightarrow (3, -2) + D &= (2, 5) + (-3, 1) \\ \Rightarrow (3, -2) + D &= (-1, 6) \Rightarrow D(-4, 8) \end{aligned}$$

بنابراین مختصات رأس D نمی‌تواند $(6, 3)$ باشد.

۲ ۵۲

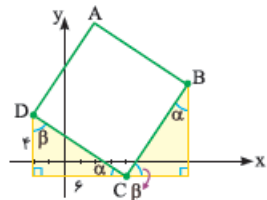


با توجه به این‌که رأس C در مربع ABCD در ناحیه اول دستگاه مختصات است، مربع را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. با توجه به شکل مثلث‌های رنگی همنهشت هستند بنابراین مختصات رأس C برابر $(3 + 4, 0 + 3)$ می‌باشد.

حال فاصله رأس C $(7, 3)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OC = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58}$$

۴ ۵۳



با توجه به مختصات رئوس C و D و این‌که رأس B در ناحیه اول است، شکل مسئله به صورت زیر است.

مثلث‌های رنگی همنهشت هستند، پس با توجه به مختصات نقطه C می‌توان مختصات نقطه B را به دست آورد:

$$B(4 + 4, -1 + 6) = (8, 5)$$

بنابراین فاصله B تا مبدأ مختصات برابر است با: $OB = \sqrt{64 + 25} = \sqrt{89}$

۲ ۴۵

ابتدا طول ضلع BC را به دست می‌آوریم: $BC = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80}$
حال طول میانه وارد بر BC را به دست می‌آوریم:

$$M = \frac{B+C}{2} \Rightarrow M = \frac{(5, 3) + (-3, 7)}{2} = (1, 5)$$

$$AM = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

بنابراین طول ضلع BC چهار برابر طول میانه AM است. نگاه کنید:

$$\frac{BC}{AM} = \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} = \sqrt{16} = 4$$

۱ ۴۶

چون ABCD متوازی‌الاضلاع است داریم:

$$A + C = B + D \Rightarrow (a - 1, b + 2) + (a + 5, a + 2) = (5, 4) + (-7, 2)$$

$$\Rightarrow (2a + 4, a + b + 4) = (-2, 6) \Rightarrow \begin{cases} 2a + 4 = -2 \Rightarrow a = -3 \\ a + b + 4 = 6 \Rightarrow b = 5 \end{cases}$$

بنابراین $A(-4, 7)$ و $C(2, -1)$ هستند و داریم:

$$AC = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

۴ ۴۷

چون در متوازی‌الاضلاع ABCD رئوس A و B هم‌عرض هستند پس حتماً نقاط C و D هم‌عرض می‌باشند، پس $b = 2$ می‌باشد. حال داریم:

$$\begin{cases} AB = 7 - 1 = 6 \\ AD = \sqrt{9 + 16} = 5 \end{cases} \Rightarrow \text{محیط} = 2(5 + 6) = 22$$

۴ ۴۸

ابتدا مختصات رأس D را به دست می‌آوریم: $A + C = B + D$
 $\Rightarrow (-1, 3) + (5, -2) = B + (2, -3)$
 $\Rightarrow (4, 1) = B + (2, -3) \Rightarrow B(2, 4)$

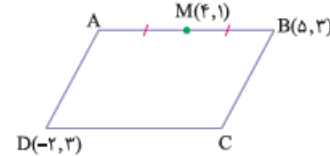
حال طول قطرهای متوازی‌الاضلاع را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} AC = \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61} \\ BD = 4 - (-3) = 7 \end{cases} \Rightarrow AC > BD$$

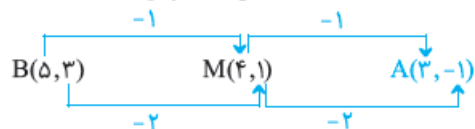
بنابراین طول بزرگ‌ترین قطر متوازی‌الاضلاع برابر $\sqrt{61}$ است.

۲ ۴۹

به شکل مقابل نگاه کنید.



قرینه نقطه B نسبت به نقطه M، نقطه A می‌باشد. پس:



حال چون چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است داریم:

$$A + C = B + D \Rightarrow (3, -1) + C = (5, 3) + (-2, 3)$$

$$\Rightarrow (3, -1) + C = (3, 6) \Rightarrow C(0, 7)$$

بنابراین فاصله رأس C از مبدأ مختصات برابر 7 می‌باشد.