فصل ۱ ماتریس و کاربردها

(ابتدا درسنامه مربوط به این فصل را در بخش درسنامه مطالعه نمایید.)

قسمت اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

تساوی، جمع و تفاضل ماتریس‌ها

ماتریس اگر خوب مطالعه شود، بهترین نتیجه را در این بخش خواهید گرفت و همهٔ تست‌های آن را به درستی در کنکور جواب خواهید داد.

☆۱. ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ با فرض $a_{ij}=\begin{cases} i-j & i\geq j \\ j & j>i \end{cases}$ تعریف می‌شود، مجموع درایه‌های آن کدام است؟

۱) ۱۰　۲) ۱۱　۳) ۱۲　۴) ۱۳

۲. اگر $A=[ij]_{3\times2}$ و $B=[(i-j)^2]_{2\times2}$، آن‌گاه مقدار $a_{11}b_{22}+b_{21}a_{32}$ کدام است؟

۱) ۱　۲) ۵　۳) ۶　۴) ۷

☆۳. اگر $A=\begin{bmatrix} x-2y & 1 \\ z^3 & -4 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -3 & x+2y \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$ در صورتی‌که $A=B$ باشد، آن‌گاه $x+y+z$ کدام است؟

۱) ۲-　۲) ۱　۳) ۲　۴) ۰

۴. اگر $A=\begin{bmatrix} x-3y & x \\ 1 & y \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} 2 & 6-y \\ 1 & 6-x \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ با فرض $A=B$ حاصل $2B+C$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$　۲) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$　۳) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$　۴) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

☆۵. اگر برای ماتریس‌های A و B داشته باشیم $A+B=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $A-B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ آن‌گاه درایهٔ واقع بر سطر اول و ستون دوم ماتریس A کدام است؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۱-　۴) ۲-

★۶. اگر $A=[a_{ij}]_{2\times2}$، $a_{ij}=\begin{cases} 3i+4j & i\leq j \\ 2i-j & i>j \end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix} 2x+y & 4a+b-7 \\ a-b+1 & 3x+5y \end{bmatrix}$ باشد آن‌گاه با فرض $A=B$ حاصل $(3x+2y-3a)^b$ کدام است؟

۱) ۱　۲) ۴　۳) ۹　۴) ۲۵

★۷. اگر $A=[a_{ij}]_{3\times3}$، $a_{ij}=\begin{cases} i+j & i=j \\ i-j & i\neq j \end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه با فرض این‌که مجموع درایه‌های قطر اصلی و فرعی ماتریس $xA+yB$ برابر باشند، حاصل $\frac{x}{y}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$　۲) $-\frac{3}{4}$　۳) $\frac{3}{8}$　۴) $-\frac{3}{8}$

☆۸. اگر $\begin{bmatrix} x^2 & y^2 \\ z^4 & 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 2y \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$، آن‌گاه بیش‌ترین مقدار xyz کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$　۲) $-\frac{1}{2}$　۳) ۱-　۴) صفر

☆۹. اگر $A=\begin{bmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ و ماتریس B چنان باشد که $A+B=I$، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی B کدام است؟

۱) ۴-　۲) ۲-　۳) ۳-　۴) ۵-

دانش‌آموزان عزیز! در صورت کمبود وقت حتماً به تست‌های دارای علامت ☆ پاسخ دهید. تست‌های دارای علامت ★ کمی دشوارتر هستند.

۱۰. ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ با شرط $a_{ij}=\begin{cases}3 & i=j\\ \sin\pi(i+j) & i\neq j\end{cases}$ کدام است؟

۱) ماتریس صفر ۲) ماتریس همانی ۳) ماتریس سطری ۴) ماتریس اسکالر

۱۱. اگر $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ و $xA+yB=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ آن‌گاه مقدار $x+y$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ x و y به‌دست نمی‌آید.

۱۲. اگر $A=\begin{bmatrix}b & 1\\ -1 & 3\\ a & 2\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}3 & a\\ 2 & b\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ و $C=A+B$ باشد و $c_{11}=2c_{22}$ ، $c_{12}=c_{31}-2$ آن‌گاه $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۳ ۴) -2

۱۳. اگر $C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}$، $D=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & k\end{bmatrix}$ و $C+2D=3I$، آن‌گاه مقدار k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) -2

۱۴. اگر $A=\begin{bmatrix}0 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $B=A+2A+3A+\cdots+nA$ (n عددی طبیعی است) کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $n(n+1)$ ۴) $\frac{n}{2}(n+1)$

۱۵. ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ با شرط $a_{ij}=\begin{cases}3-a_{ij} & i\neq j\\ -a_{ij} & i=j\end{cases}$ مفروض است. مجموع درایه‌های ماتریس $A-\frac{1}{2}I$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۷/۵ ۴) ۸/۵

۱۶. ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ با شرط $a_{ij}=\begin{cases}2i-a_{ji} & i<j\\ 6-a_{ji} & i=j\end{cases}$ مفروض است. مجموع درایه‌های آن کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۳۰ ۳) ۱۷ ۴) ۲۴

ضرب ماتریس‌ها، ماتریس‌های تعویض پذیر

درست نوشتن درایه‌های ماتریس و تسلط بر محاسبات ریاضی در این‌جا بسیار مهم است. با کمی دقت اغلب سؤال‌های این بخش را پاسخ خواهید داد.

۱۷. اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ b & 5\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}3 & -2a\\ c & 1\end{bmatrix}$ و $AB=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ -1 & -6\end{bmatrix}$، آن‌گاه abc کدام است؟

۱) -4 ۲) -8 ۳) -16 ۴) -2

۱۸. اگر $A=\begin{bmatrix}x & x\\ y & y\end{bmatrix}$ و $A^2=A$، آن‌گاه $x+y$ کدام است؟ $(xy\neq 0)$

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹. اگر $A=[a_{ij}]_{3\times 4}$، $a_{ij}=i-j$ و $B=[b_{ij}]_{4\times 6}$، $b_{ij}=2i+3j$ آن‌گاه با فرض $C=AB$، c_{34} کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۶ ۴) ۳۰

۲۰. اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & a^2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ a\end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ و $AC=B$ باشد، آن‌گاه مجموع مقادیر a کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) ۱ ۴) صفر

۲۱. اگر $B=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$ و $A\times B=C$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۲. اگر $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}-9 & 3\\ 12 & 6\\ 15 & 0\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}5 & -1 & 4\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$، آن‌گاه با فرض $D=(2A-\frac{1}{3}B)C$، d_{22} کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۲ ۳) -6 ۴) -2

۲۳. اگر $A=\begin{bmatrix}1&-2\\1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&2\\-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$، آن‌گاه ماتریس A^2B+BAB کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}6&2\\0&0\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}2&6\\0&0\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}3&1\\-\frac{3}{2}&\frac{7}{4}\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-3&-1\\-\frac{3}{2}&-\frac{7}{4}\end{bmatrix}$

۲۴. با توجه به تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix}a&b\\-b&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\beta&\sin\beta\\-\sin\beta&\cos\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}$، مقدار b کدام است؟

۱) $\cos(\alpha-\beta)$ ۲) $\sin(\alpha-\beta)$ ۳) $\sin(\beta-\alpha)$ ۴) $\sin(\alpha+\beta)$

۲۵. جواب‌های معادلهٔ $[x\quad 1]\begin{bmatrix}-1&0\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}=0$ کدام‌اند؟

۱) $-1,-3$ ۲) $1,-3$ ۳) $-1,3$ ۴) $1,3$

۲۶. اگر ماتریس $A_{2\times2}$ چنان باشد که $A\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-b\\-a\end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $A^2\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}$

۲۷. کدام گزینه می‌تواند $A\times B-B\times A$ باشد؟

۱) $\begin{bmatrix}2&3\\4&7\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-2&0\\0&1\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}3&0\\3&-3\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}5&0\\1&4\end{bmatrix}$

۲۸. ماتریس $\begin{bmatrix}1&0\\7&1\end{bmatrix}\times\cdots\times\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}1&0\\28&1\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}1&0\\21&1\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}1&0\\36&1\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}1&0\\25&1\end{bmatrix}$

۲۹. اگر $A+I=\begin{bmatrix}3&-1\\4&2\end{bmatrix}$ و $B+2I=\begin{bmatrix}2&1\\-1&1\end{bmatrix}$ آن‌گاه حاصل $AB+2A+B+2I$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}7&2\\6&6\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-7&-2\\-6&6\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}7&-2\\-6&6\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-7&2\\6&-6\end{bmatrix}$

۳۰. ماتریس $A=[a_{ij}]_{2\times2}$ را با فرض $a_{ij}=\begin{cases}i & i>j\\ j & i\le j\end{cases}$ در نظر می‌گیریم. مجموع درایه‌های ماتریس A^2 چقدر بیش‌تر از مجموع درایه‌های ماتریس A است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹

۳۱. اگر $AB=\begin{bmatrix}6&-1\\0&1\end{bmatrix}$، $BC=\begin{bmatrix}-1&0\\2&-2\end{bmatrix}$ و $CA=\begin{bmatrix}2&1\\5&4\end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $(ABC)^2$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}-7&-2\\4&-4\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-3&-4\\3&-8\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}0&-2\\18&-11\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-12&1\\-36&0\end{bmatrix}$

۳۲. اگر $A=\begin{bmatrix}5&a\\b&-2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&-2\\3&1\end{bmatrix}$ و ماتریس $A\times B$ قطری باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۳. به ازای کدام مقدار x, y ماتریس $\begin{bmatrix}x&-1&4\\2&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-2\\1&0\\y&1\end{bmatrix}$، یک ماتریس قطری است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۸)

۱) $x=1, y=-7$ ۲) $x=2, y=-7$ ۳) $x=2, y=-5$ ۴) $x=1, y=-5$

۳۴. اگر $A=\begin{bmatrix}-4&p&-2\\4&2&q\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}q&-4\\2&2q\\4p&6\end{bmatrix}$ و AB یک ماتریس قطری باشد، آن‌گاه $q-p$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۵. اگر $A=\begin{bmatrix}-1&1\\4&2\end{bmatrix}$ و $A^2=\alpha A+\beta I$ باشد، آن‌گاه زوج‌مرتب (α,β) کدام است؟

۱) $(-1,6)$ ۲) $(1,-6)$ ۳) $(-1,-6)$ ۴) $(1,6)$

۳۶. اگر $A=\begin{bmatrix}x&-۱&-x\\ ۰&۰&۴\\ y&z&z\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۲z&\frac{۱}{۲}&۲\\ ۲z&۰&-۴y\\ ۰&\frac{۱}{۲}&۰\end{bmatrix}$ و ماتریس AB به ازای $y\in\mathbb{Z}$ ماتریس اسکالر باشد، مقدار xy کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۱۴۰۱)

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲

۳۷. اگر $\begin{bmatrix}x&۰&۰\\ y&t&۰\\ z&u&r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&y&z\\ ۰&t&u\\ ۰&۰&r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۲&۱\\ a&۴&۲\\ b&c&۴\end{bmatrix}$ و همهٔ پارامترها مثبت باشند، آن‌گاه r کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۳۸. از رابطهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix}x&۲x&-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&-۱&۱\\ ۴&۰&-۲\\ ۱&۲&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۲x\\ -۱\end{bmatrix}=۰$ عدد غیرصفر x، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۸)

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۳۹. حاصل $\begin{bmatrix}۰&۰&۱\\ ۱&۱&۲\\ ۲&۲&۳\\ ۳&۳&۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱&-۱\\ ۲&۲\\ ۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴\\ ۱\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۵\\ ۱۵\\ ۲۵\\ ۳۵\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۵\\ ۱۰\\ ۲۰\\ ۳۰\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۵\\ ۱۵\\ ۲۵\\ ۳۰\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۵\\ ۱۰\\ ۱۵\\ ۲۰\end{bmatrix}$

۴۰. اگر $A+B=\begin{bmatrix}۲&-۲&۲\\ ۲&۱&۱\\ ۲&۰&۲\end{bmatrix}$ و $AB+BA=\begin{bmatrix}۲&-۳&۳\\ ۵&-۷&۵\\ ۴&۱&۳\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A^۲+B^۲$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰

۴۱. ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به‌صورت $a_{ij}=\begin{cases}۱ & i=j\\ ۲ & i\neq j\end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های $A^۲-۴A$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۶)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۲

۴۲. اگر $A=\begin{bmatrix}۱&x&۰\\ ۰&۰&y\\ ۰&۰&z\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\ x&۰&۰\\ ۰&y&z\end{bmatrix}$ و ستون سوم ماتریس $A^۲B$ برابر $\begin{bmatrix}-۶\\ ۲\\ -۱\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه $x+y+z$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) ۴ ۳) -۴ ۴) ۵

۴۳. اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۰&a\\ ۰&b&۰\\ ۰&c&۰\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\ ۰&b&c\\ a&۰&۰\end{bmatrix}$ و ستون دوم ماتریس $A^۲-B$ برابر $\begin{bmatrix}۳\\ ۲\\ ۶\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۴. اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۳&۵\\ ۷&۲۲&۳۶\\ ۱۰&۳۱&۵۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱۰&۱۷&۱۵\\ ۴&۲۰&۱۷\\ ۳۰۲&۱۵۳&-۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲۸&-۱&-۲\\ -۴&۲&-۱\\ -۳&-۱&۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی A کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۶ ۳) ۲۴ ۴) ۲۸

۴۵. اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\ ۲&۳&۲\\ ۳&۳&۴\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۶&-۱&-۱\\ -۲&۱&۰\\ -۳&۰&۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های $A^۲B^۳$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱ ۳) ۱۹ ۴) ۲

۴۶. اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۲&۲\\ -۱&-۲&-۱\\ ۱&۱&۰\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۳&۶&-۲\\ -۲&-۴&۱\\ -۲&-۳&۰\end{bmatrix}$، p و q دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه ماتریس $pA^۲+qB^۲$ همواره کدام است؟

۱) ماتریس صفر ۲) ماتریس ستونی ۳) ماتریس اسکالر ۴) ماتریس همانی

۴۷. اگر $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\a&2&0\\b&c&4\end{bmatrix}$ و $AB=I$، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A+B$ کدام است؟

۱) ۸/۵ ۲) ۸/۷۵ ۳) ۸/۲۵ ۴) ۸

۴۸. اگر $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&3\\1&0&1\end{bmatrix}$ و $AB=I$، آن‌گاه درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس B کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۳-

۴۹. اگر $A=\begin{bmatrix}1&3&6&24\\\frac{1}{3}&1&2&8\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&1&4\\\frac{1}{24}&\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&1\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C^2 کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴ (سراسری ریاضی- ۹۷)

۵۰. فرض کنید $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$. مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس A، کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۷ ۳) ۱۹ ۴) ۲۱ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۱۴۰۰)

۵۱. فرض کنید $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس A، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۱۴۰۰)

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۵۲. اگر برای دو ماتریس مربعی هم‌مرتبهٔ A و B رابطهٔ $A\times B=-2B\times A$ برقرار باشد، ماتریس $(A+B)^2$ کدام است؟

۱) $A^2+A\times B+B^2$ ۲) $A^2-B\times A+B^2$ ۳) $A^2-A\times B+B^2$ ۴) A^2+B^2

۵۳. اگر $A=\begin{bmatrix}-1&3\\1&-1\end{bmatrix}$، چند ماتریس مانند $B=\begin{bmatrix}1&a\\2&b\end{bmatrix}$ وجود دارد که A با B تعویض‌پذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

۵۴. اگر $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&-2\\0&-1&1\end{bmatrix}$، $X=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ و $AX=3X$، آن‌گاه حاصل $\frac{a-b+c}{c}$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۳

۵۵. اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}2&-1\\3&1\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}a&1\\c&5\end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشند، آن‌گاه $a+c$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

۵۶. اگر $(A+I)^2=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$ و $(A-I)^2=-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی $A_{2\times 2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\sqrt{2}$

۵۷. اگر A و B دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند و $AB=\begin{bmatrix}5&1\\1&5\end{bmatrix}$ آن‌گاه A^2B^2 کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}25&5\\5&25\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}26&10\\10&26\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}10&26\\26&10\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}5&25\\25&5\end{bmatrix}$

۵۸. اگر $A=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}2&b&a\\3&a&2\\a&-2&b\end{bmatrix}$ و $B=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}2&3&a\\b&a&-2\\a&2&b\end{bmatrix}$ و $AB=I$، آن‌گاه مقادیر a و b به ترتیب کدامند؟

۱) ۶ و ۳ ۲) ۶ و ۳- ۳) ۶- و ۳- ۴) ۶- و ۳

۵۹. اگر $A^2=-A-I$، آن‌گاه حاصل $A(A+2I)$ کدام است؟

۱) $A-I$ ۲) $A+I$ ۳) $-A+I$ ۴) $2A-I$

۶۰.★ اگر $A=\begin{bmatrix} a-۲ & ۴ & -۷ \\ b & ۰ & b+۲ \\ ۷ & a & ۰ \end{bmatrix}$ و به ازای هر i و j رابطه $a_{ij}=-a_{ji}$ باشد. آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی $A^۲$ کدام است؟

۱) ۱۲۰- ۲) ۱۳۰- ۳) ۱۳۸- ۴) ۲۰۰-

۶۱.☆ اگر A، B و C ماتریس‌های مربع باشد به طوری‌که $A+B=I$ و $A=BC$، آن‌گاه $AC-C$ کدام است؟

۱) $-B$ ۲) $-C$ ۳) $-A$ ۴) $-I$

۶۲. اگر A، B و C ماتریس‌های مربع باشد به طوری‌که $A+B=I$ و $A=BC=CB$، آن‌گاه حاصل $AC-CA$ کدام است؟

۱) I ۲) B ۳) $\bar{O}$ ۴) A

۶۳.★ اگر برای ماتریس A داشته باشیم $A^۲+۳A+I=\bar{O}$ و ماتریس‌های B و C چنان باشند که $۲A=B^۳+C^۳$، آن‌گاه $B-C$ کدام است؟

۱) A ۲) $۲A$ ۳) $A+۲I$ ۴) $A-۲I$

۶۴.★ اگر A و B دو ماتریس ۲×۲ و $AB=B$ و $BA=A$ باشد آن‌گاه $(A+B)^۳$ کدام است؟

۱) $۸A$ ۲) $۲A+۶B$ ۳) $۸B$ ۴) $۴(A+B)$

۶۵.☆ اگر برای ماتریس ۲×۲، A داشته باشیم $A^۲=I-A$ آن‌گاه حاصل $A^۲(A+I)^۲$ کدام است؟

۱) I ۲) A ۳) $\bar{O}$ ۴) $-A$

۶۶. اگر برای ماتریس ۲×۲، A داشته باشیم $A^۲=\bar{O}$، آن‌گاه $A(I-A)^۳$ کدام است؟

۱) A ۲) $-A$ ۳) $\bar{O}$ ۴) I

۶۷.☆ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}$ و $A^۳=mA+nI$ آن‌گاه n^m کدام است؟

۱) ۱- ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۲-

۶۸.☆ اگر A و B ماتریس‌های مربعی ۲×۲ باشند به طوری‌که $A+B=۲AB$، آن‌گاه حاصل $A^۲+B^۲+AB+BA$ کدام است؟

۱) $(AB)^۲$ ۲) $۴(AB)^۲$ ۳) $(BA)^۲$ ۴) $۴(BA)^۲$

۶۹.★ اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، به طوری‌که $A+B+AB=\bar{O}$ آن‌گاه $(A+I)(B+I)$ کدام است؟

۱) $۲AB$ ۲) $۲BA$ ۳) O ۴) I

۷۰.☆ اگر A ماتریس مربعی باشد، به طوری‌که $A^۲-A-۲I=\bar{O}$ آن‌گاه حاصل $A^۳+I$ کدام است؟

۱) $۳A+۳I$ ۲) $۲A+۲I$ ۳) $۳A-۳I$ ۴) $۲A-۲I$

۷۱. اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۶ & ۱ \end{bmatrix}$ آن‌گاه حاصل $A^۳-۷A^۲+۲A+۴I$ کدام است؟

۱) $۴I$ ۲) $۳I$ ۳) $۵I$ ۴) $۶I$

۷۲.☆ اگر $A^۲=A$ باشد و $AB=I$، آن‌گاه حاصل $A^۳B^۲$ کدام است؟

۱) I ۲) A ۳) B ۴) $\bar{O}$

۷۳.★ اگر A و B ماتریس‌های مربعی ۲×۲ باشند، به طوری‌که $AB+BA=I$ آن‌گاه حاصل $A^۲B-BA^۲$ کدام است؟

۱) I ۲) $\bar{O}$ ۳) A ۴) B

۷۴.★ A یک ماتریس ۲×۲ است، به طوری‌که $A^۲+۳A-I=O$ می‌باشد و اگر $AU=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ به طوری‌که $U=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ در این‌صورت $A^۳U$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۵ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۵ \\ ۳ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۷ \\ ۱۰ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۷ \\ -۱۰ \end{bmatrix}$

۷۵.☆ اگر $AB=\lambda BA$، آن‌گاه حاصل $(AB)^۲-A^۲B^۲$ کدام است؟

۱) $\lambda A^۲B^۲$ ۲) $\frac{\lambda-۱}{\lambda}A^۲B^۲$ ۳) $\frac{۱-\lambda}{\lambda}A^۲B^۲$ ۴) $\bar{O}$

۷۶. اگر $AB-BA=۲I$، آن‌گاه حاصل $(A+I)(B-I)-(B-I)(A+I)$ کدام است؟

۱) $۲I$ ۲) $-۲I$ ۳) I ۴) $\bar{O}$

توان ماتریس‌ها

در این مبحث با توجه به خواص ضرب ماتریس‌ها و نتیجه‌گیری صحیح استقرایی می‌توانیم بدون دردسر زیاد، توان‌های بالای ماتریس‌ها را به‌دست آوریم.

۷۷. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های $A^۵$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۶۴ ۳) ۱۲۸ ۴) ۱۶

۷۸. اگر $A=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^{۱۰۰}$ کدام است؟

۱) A ۲) $\frac{۱}{۲^{۱۰۰}}A$ ۳) $۲^{۱۰۰}A$ ۴) I

۷۹. اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه کم‌ترین مقدار n که به ازای آن $A^n=I$ است، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۸۰. اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$ آن‌گاه کم‌ترین مقدار n که به ازای آن $\frac{۱}{۲^{۸-n}}(A-A^۲)^n$ برابر I باشد، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۱. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & a\\ a & ۰\end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی A^n کدام است؟

۱) a^n ۲) $۲a^n$ ۳) na^n ۴) صفر

۸۲. اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۷ & ۰\end{bmatrix}$ و $B=A^{۵۰}$ آن‌گاه $b_{۱۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۷^{۵۰}-۱}{۳}$ ۲) $\frac{۷^{۵۰}-۲}{۳}$ ۳) $\frac{۷^{۵۰}+۱}{۳}$ ۴) $\frac{۷^{۵۰}+۲}{۴}$

۸۳. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$ و $B=A+A^۲+A^۳+\cdots+A^{۲۰۲۲}$ آن‌گاه B کدام است؟

۱) I ۲) A ۳) $۲۰۲۲A$ ۴) $A-I$

۸۴. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$ آن‌گاه $A^{۲۰۱۰}$ کدام است؟

۱) I ۲) A ۳) $\overline{O}$ ۴) $-I$

۸۵. اگر $M=\begin{bmatrix}\sin ۲\theta & ۲\cos^۲\theta\\ ۲\sin^۲\theta & \sin ۲\theta\end{bmatrix}$، آن‌گاه $M^۳$ کدام است؟

۱) M ۲) $۲M$ ۳) $۳M$ ۴) $۴M$

۸۶. اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$، آن‌گاه ماتریس $A^۸\times B^۹$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۸ & ۱\\ ۷ & ۹\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۸ & ۱\\ ۷۱ & ۹\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۸ & ۱\\ ۷۲ & ۹\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۹ & ۱\\ ۷۳ & ۸\end{bmatrix}$

۸۷. اگر A ماتریس مربعی ۲×۲ و $A^۲-A+I=\overline{O}$ باشد، آن‌گاه ماتریس $A^{۳۰}$ کدام است؟

۱) I ۲) $-I$ ۳) A ۴) $-A$

۸۸. اگر $A^۲=B^۲=I$، $AB=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$ و $BA=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $((A+B)(A-B))^{۱۴۰۱}$ کدام است؟

۱) I ۲) $-I$ ۳) $\overline{O}$ ۴) $۲I$

۸۹. اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۱\\ ۱ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه درایهٔ نظیر سطر سوم و ستون اول $A^۳$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۹۰. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}b & a\\ d & c\end{bmatrix}=(A+I)^۶$، آن‌گاه $a-b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۶ ۳) ۱ ۴) ۳۶

۹۱. اگر $A^{۲} = \overline{O}$، حاصل $(I - A)^{۴}(I + A)^{۵}$ کدام است؟

۱) $I + A$ ۲) $I - A$ ۳) $۲۰A$ ۴) O

۹۲. اگر $A^{۲} = A$ باشد، آن‌گاه حاصل $(I + A)^{۴}$ کدام است؟

۱) $۱۵A$ ۲) $۱۶A$ ۳) $I + ۱۵A$ ۴) $I + ۱۶A$

۹۳. اگر $A = \begin{bmatrix} -۱ & \sqrt{۳} \\ -\sqrt{۳} & -۱ \end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^{۴۰}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۲^{۴۰} & ۰ \\ ۰ & ۲^{۴۰} \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۲^{۳۹} & ۲^{۳۹}\sqrt{۳} \\ -۲^{۳۹}\sqrt{۳} & ۲^{۳۹} \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -۲^{۳۹} & ۲^{۳۹}\sqrt{۳} \\ -۲^{۳۹}\sqrt{۳} & -۲^{۳۹} \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۲^{۳۹}\sqrt{۳} & -۲^{۳۹} \\ ۲^{۳۹} & ۲^{۳۹}\sqrt{۳} \end{bmatrix}$

۹۴. اگر A و B دو ماتریس ۲×۲ و $AB = A$ و $BA = B$ باشد حاصل $A + A^{۲} + A^{۳} + \cdots + A^{۱۴۰۱}$ کدام است؟

۱) $۱۴۰۰A$ ۲) $۱۴۰۱A$ ۳) $۱۴۰۰B$ ۴) $۱۴۰۱A$

۹۵. اگر $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}$ و $C = AB$، آن‌گاه مجموع درایه‌های $C^{n} + A^{۲}$ کدام است؟ (n عدد طبیعی)

۱) صفر ۲) $۲ + ۲(-۱)^{n}$ ۳) $(-۱)^{n} + ۱$ ۴) $۲(-۱)^{n} + ۳$

۹۶. اگر داشته باشیم $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & -۱ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۴} \end{bmatrix}$ و ماتریس B چنان باشد که درایه‌های زیر قطر اصلی آن صفر باشد و $AB = I$ باشد آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس B کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۰ ۳) ۱۸ ۴) ۱۵

۹۷. اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی A^{n} برابر ۲۴۴ باشد آن‌گاه n کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۴

۹۸. اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس A^{n} کدام است؟

۱) $-n$ ۲) صفر ۳) $۲ - n$ ۴) $۱ - n$

۹۹. اگر $A^{۲} = ۲A - I$ آن‌گاه $A^{۱۰} = aA + bI$. زوج مرتب $(a\ ,b)$ کدام است؟

۱) $(۱۰ ,-۹)$ ۲) $(۱۰ ,۹)$ ۳) $(۹ ,-۱۰)$ ۴) $(۹ ,۱۰)$

۱۰۰. اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = A + A^{۲} + A^{۳} + \cdots + A^{n}$ (n عدد طبیعی) آن‌گاه مجموع درایه‌های B کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}(n - n^{۲})$ ۲) $۲n - ۲n^{۲}$ ۳) $۲n - n^{۲}$ ۴) $n - n^{۲}$

۱۰۱. اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $B = A + A^{۲} + A^{۳} + \cdots + A^{۲۰۰}$ کدام است؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۴۰۰ ۳) ۳۹۸ ۴) ۳۹۹

۱۰۲. اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & \sqrt[۵]{۲} & ۰ \\ \sqrt[۵]{۸} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sqrt[۵]{۴} \end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی $A^{۱۰}$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۴۸ ۳) ۱۴۴ ۴) ۱۹۲

۱۰۳. اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ و I ماتریس همانی مرتبهٔ ۳ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۳} - ۲A^{۲} + ۵I$ کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

۱۰۴. اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۷ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی $A^{۴}$ کدام است؟

۱) ۹۶ ۲) ۹۷ ۳) ۹۹ ۴) ۹۸

☆۱۰۵. اگر $A=\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس A^4، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۹)

۱) $\begin{bmatrix}0&1&0\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}1&0&1\end{bmatrix}$

☆۱۰۶. اگر $A=\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}$، ماتریس A^4 کدام می‌باشد؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۲)

۱) درایه‌های زیر قطر اصلی آن صفر است. ۲) درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر است.
۳) قطری غیرهمانی ۴) همانی

☆۱۰۷. اگر $A=\begin{bmatrix}2&1&5\\-3&0&4\\1&0&2\end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول A^3، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۹)

۱) $\begin{bmatrix}30&6&64\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}30&6&78\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}24&8&86\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}30&6&86\end{bmatrix}$

☆۱۰۸. اگر $A=\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۱۴۰۱)

۱) $\begin{bmatrix}1&-1&0\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}9&12&16\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}1&0&-2\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}9&5&-7\end{bmatrix}$

۱۰۹. اگر $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های A^{11} از مجموع درایه‌های قطر اصلی چقدر بیش‌تر است؟

۱) 2^9 ۲) 2^{10} ۳) 2^{11} ۴) 2^{12}

☆۱۱۰. اگر $A=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ آن‌گاه $A^{42}+A^{55}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$

۱۱۱. اگر $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ آن‌گاه A^{100} کدام است؟

۱) A ۲) $-A$ ۳) I ۴) $3I$

☆۱۱۲. اگر $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$، $a_{ij}=|i-j|+j-i$ آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $B=A+A^2+A^3+\cdots+A^{1401}$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴۰۱

۱۱۳. اگر $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\3&0&0\end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $\frac{1}{36}A^{40}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳۶ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{36}$

☆۱۱۴. اگر $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&0&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$ و $A^{100}=2^K A^2$ باشد آن‌گاه K کدام است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۹۹ ۳) ۹۸ ۴) ۱۰۱

☆۱۱۵. اگر $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس A^{n+1} (n عدد طبیعی) کدام است؟

۱) $2^{n+1}+1$ ۲) $2^{n+2}+1$ ۳) 2^n-1 ۴) $2^{n-1}+1$

☆۱۱۶. اگر $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$ و $A^{49}=\begin{bmatrix}1&0&0\\49&1&0\\x&49&1\end{bmatrix}$، آن‌گاه x کدام است؟

۱) ۱۲۳۵ ۲) ۱۲۲۵ ۳) ۱۱۲۵ ۴) ۱۲۷۵

★۱۱۷. اگر $A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $2I+A+A^2+\cdots+A^{24}+A^{25}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۸. اگر $A=\begin{bmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{bmatrix}$، آن‌گاه $(A^2+2A)^{10}$ کدام است؟

۱) I ۲) $-I$ ۳) A ۴) $-A$

★۱۱۹. اگر $A=\begin{bmatrix}5&-4&2\\2&-1&1\\-4&4&-1\end{bmatrix}$، آن‌گاه $(A^2-2A+2I)^6$ کدام است؟

۱) I ۲) $\overline{O}$ ۳) A ۴) $-I$

۱۲۰. اگر $A=\begin{bmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{bmatrix}$، آن‌گاه $(A^3+3I)^4$ کدام است؟

۱) $27I$ ۲) $81I$ ۳) $16I$ ۴) $64I$

☆۱۲۱. اگر $A=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\-1&0&-2\\1&1&3\end{bmatrix}$، با فرض $(A-kI)^n=\overline{O}$، آن‌گاه کم‌ترین مقدار $k+n$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☆۱۲۲. اگر $4A^2=3A$، آن‌گاه ماتریس A^4 کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}A$ ۲) $\frac{9}{16}A$ ۳) $\frac{27}{64}A$ ۴) $\frac{81}{256}A$

۱۲۳. اگر $A^2=A$ باشد، آن‌گاه حاصل $(A-\frac{I}{2})^6$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{64}I$ ۲) $\frac{1}{32}I$ ۳) $\frac{1}{32}A$ ۴) $\frac{1}{64}A$

★۱۲۴. اگر $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های $(2I-A)^{100}$ کدام است؟

۱) ۳۰۱ ۲) ۳۰۲ ۳) ۳۰۰ ۴) ۳۰۳

★۱۲۵. اگر $A=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$، آن‌گاه $(ABC)^n=I$. کم‌ترین مقدار n کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

قسمت دوم: وارون ماتریس و دترمینان

دترمینان ۲×۲

محاسبهٔ دترمینان ۲ × ۲ ساده می‌باشد. در این مبحث دانستن خواص دترمینان و دقت در محاسبه بسیار مهم است.

☆۱۲۶. اگر $\begin{vmatrix}a&-b\\2&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a&b\\6&-5\end{vmatrix}=32$ آن‌گاه $\begin{vmatrix}4a&b\\-4&1\end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

☆۱۲۷. اگر $A=\begin{bmatrix}3&1\\1&1\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}4&2\\0&3\end{bmatrix}$ آن‌گاه حاصل $\frac{|A^2+AB|}{|B^2+BA|}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۲۸. اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=A+A^۳+A^۵+\cdots+A^{۲n-۱}$ (n عدد طبیعی) آن‌گاه $|B|$ کدام است؟

۱) $n^۲$ ۲) $-n^۲$ ۳) $-(۲n-۱)^۲$ ۴) $(۲n-۱)^۲$

۱۲۹. اگر A و B ماتریس‌های ۲×۲ باشند، به طوری‌که $A+۲B=\begin{bmatrix} -۳ & ۵ \\ -۳ & ۰ \end{bmatrix}$ و $۲A-B=\begin{bmatrix} -۱۱ & ۵ \\ ۴ & -۵ \end{bmatrix}$، آن‌گاه $|A|+|B|$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۷ ۳) ۷- ۴) ۱۰-

۱۳۰. اگر A یک ماتریس ۲×۲ باشد، به طوری‌که $|A|=۳$، آن‌گاه حاصل $|A+I|+|A-I|$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۸ ۴) ۴

۱۳۱. دترمینان ماتریس ۲×۲، A را Δ و مجموع درایه‌های قطر اصلی $A^۲$ را T می‌نامیم. مربع مجموع درایه‌های قطر اصلی A کدام است؟

۱) $T+\Delta$ ۲) $T^۲+۲\Delta$ ۳) $۲\Delta+T$ ۴) $\Delta+۲T$

۱۳۲. اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$، $a_{ij}=\begin{cases} ۲i-j & i<j \\ i & i\geq j \end{cases}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times۲}$، $b_{ij}=\begin{cases} i+۲j & i\leq j \\ ۲+j & i>j \end{cases}$. آن‌گاه با فرض $AX=B$ حاصل $|X|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

۱۳۳. اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times۳}$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times۲}$ به طوری‌که $a_{ij}=(-۱)^i-j$ و $b_{ij}=(-۱)^j+i$، آن‌گاه دترمینان ماتریس $A\times B$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۴- ۳) ۲۰ ۴) ۲۰-

۱۳۴. اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=A+A^۲+A^۳+\cdots+A^{۲۰۲۲}$ آن‌گاه دترمینان ماتریس B کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۱-

۱۳۵. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^۲-۴x+۱=۰$ باشد آن‌گاه دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} \alpha+\beta & \alpha+\beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۲۵

۱۳۶. اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & -a \\ a & ۰ \end{bmatrix}$ و دترمینان ماتریس $A^{۴n}+A^{۴n+۱}$ برابر $a^{n+۳۵}+a^{n+۳۷}$ باشد، آن‌گاه n کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۳

۱۳۷. اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix}$ و $B=A+I$ آن‌گاه دترمینان ماتریس $A^{۲۰۲۲}+B$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۲۰۲۱- ۳) ۲۰۲۱ ۴) ۱

۱۳۸. اگر $۲A=\begin{bmatrix} |A| & -۲ \\ ۲ & |A| \end{bmatrix}$ آن‌گاه حاصل دترمینان $A|A|$ کدام است؟

۱) ۸- ۲) ۴- ۳) ۸ ۴) ۴

۱۳۹. اگر $۲A+۳I=\begin{bmatrix} ۹ & ۴ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$ آن‌گاه دترمینان ماتریس $A^۲-۳A$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴- ۳) ۲ ۴) ۲-

۱۴۰. اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۲ \\ a & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & a \\ -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $C=A\times B$، آن‌گاه به ازای کدام مجموعه مقادیر a، حاصل دترمینان C منفی است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۶، با کمی تغییر)

۱) $\varnothing$ ۲) $\{a:a<۱\}$ ۳) $\{a:a>۱\}$ ۴) $\mathbb{R}$

۱۴۱. اگر A و B ماتریس‌های مربعی از مرتبهٔ ۲ بوده و $A\times B=\begin{bmatrix} ۸ & ۷ \\ ۱۰ & ۷ \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه ماتریس $B\times A$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱۵ & ۲ \\ ۸ & ۲ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -۱۵ & -۲ \\ -۸ & ۲ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱۵ & ۲ \\ ۸ & -۲ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -۱۵ & ۲ \\ -۸ & -۲ \end{bmatrix}$

۱۴۲. فرض کنید $A=\begin{bmatrix} ۱ & a & ۳ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ a & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ و $ACB=۵۲I$، اگر $|B|=۱۰۴$ باشد آن‌گاه مجموع مقادیر ممکن برای a، کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۱۴۰۰، با کمی تغییر)

۱) ۲- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ فصل ۱ ماتریس و کاربردها

۱ ۱ ۲ **۳** ۴

درایه‌های ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به‌صورت زیر مشخص می‌شود:

$$a_{ij}=\begin{cases} i-j & i\ge j\\ j & j>i\end{cases}\Rightarrow a_{۱۱}=۱-۱=۰,\ a_{۲۲}=۲-۲=۰,\ a_{۳۳}=۳-۳=۰$$

$$a_{۱۲}=۲\ ,\ a_{۱۳}=۳\ ,\ a_{۲۱}=۲-۱=۱\ ,\ a_{۲۳}=۳$$

$$,\ a_{۳۱}=۳-۱=۲, a_{۳۲}=۳-۲=۱$$

$$A=\begin{bmatrix}۰&۲&۳\\۱&۰&۳\\۲&۱&۰\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}}۱+۲+۱+۲+۳+۳=۱۲$$

۲ ۱ ۲ **۳** ۴

$$A=[ij]_{۳\times۳}\Rightarrow a_{۱۱}=۱\ ,\ a_{۳۲}=۳\times۲=۶$$

$$B=[(i-j)^۲]_{۲\times۳}\Rightarrow b_{۲۲}=(۲-۲)^۲=۰,\ b_{۲۱}=(۲-۱)^۲=۱$$

$$a_{۱۱}b_{۲۲}+b_{۲۱}a_{۳۲}=۱\times۰+۱\times۶=۶$$

۳ **۱** ۲ ۳ ۴

نکته: دو ماتریس A و B برابرند، هرگاه مرتبهٔ آن‌ها یکی باشد و درایه‌های نظیر آن‌ها برابر باشند.

$$A=B\Rightarrow\begin{bmatrix}-۳&x+۲y\\-۸&-۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-۲y&۱\\z^۳&-۴\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x-۲y=-۳\\x+۲y=۱\\z^۳=-۸\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-۱\\y=۱\\z=-۲\end{cases}\Rightarrow x+y+z=-۱+۱-۲=-۲$$

۴ **۱** ۲ ۳ ۴

$$A=B\Rightarrow\begin{bmatrix}x-۳y&x\\۱&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۶-y\\۱&۶-x\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x-۳y=۲\\x=۶-y\\y=۶-x\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-۳y=۲\\x+y=۶\end{cases}\Rightarrow x-۳y+۳x+۳y=۲+۱۸\Rightarrow ۴x=۲۰$$

$$\Rightarrow x=۵\ ,\ y=۶-۵=۱$$

$$۲B+C=۲\begin{bmatrix}۲&۶-۱\\۱&۶-۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۴&-۸\\۲&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۱۰\\۲&۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۴&-۸\\۲&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۲\\۴&۵\end{bmatrix}$$

۵ ۱ ۲ **۳** ۴

$$(A+B)+(A-B)=\begin{bmatrix}۳&-۲\\۱&۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱&۰\\۳&۲\end{bmatrix}\Rightarrow ۲A=\begin{bmatrix}۴&-۲\\۴&۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۲&۱\end{bmatrix}\Rightarrow a_{۱۲}=-۱$$

۶ **۱** ۲ ۳ ۴

$$a_{ij}=\begin{cases}۳i+۴j & i\le j\\ ۲i-j & i>j\end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}a_{۱۱}&a_{۱۲}\\a_{۲۱}&a_{۲۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷&۱۱\\۳&۱۴\end{bmatrix}$$

$$B=A\Rightarrow\begin{bmatrix}۲x+y&۴a+b-۷\\a-b+۱&۳x+۵y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷&۱۱\\۳&۱۴\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲x+y=۷\\۳x+۵y=۱۴\end{cases},\ \begin{cases}۴a+b-۷=۱۱\\a-b+۱=۳\end{cases}$$

از حل دو دستگاه نتیجه می‌شود $x=۳$، $y=۱$، $a=۴$ و $b=۲$ و نهایتاً داریم:

$$(۳x+۲y-۳a)^b=(۳\times۳+۲\times۱-۳\times۴)^۲=(۱۱-۱۲)^۲=۱$$

۷ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$a_{ij}=\begin{cases}i+j & i=j\\ i-j & i\ne j\end{cases}\Rightarrow A=[a_{ij}]_{۳\times۳}=\begin{bmatrix}۲&-۱&-۲\\۱&۴&-۱\\۲&۱&۶\end{bmatrix}$$

$$xA+yB=x\begin{bmatrix}۲&-۱&-۲\\۱&۴&-۱\\۲&۱&۶\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}۲&-۱&۰\\۱&۲&۳\\۱&۱&۲\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۲x+۲y&-x-y&-۲x\\x+y&۴x+۲y&-x+۳y\\۲x+y&x+y&۶x+۲y\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های قطر فرعی = مجموع درایه‌های قطر اصلی

$$\Rightarrow ۲x+۲y+۴x+۲y+۶x+۲y=۲x+y+۴x+۲y-۲x$$

$$\Rightarrow ۳y=-۸x\Rightarrow\frac{x}{y}=-\frac{۳}{۸}$$

۸ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\begin{bmatrix}x^۲&y^۲\\z^۴&۴\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x&۱\\-۲&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۴}&۲y\\-۱&۵\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x^۲+x&y^۲+۱\\z^۴-۲&۵\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۴}&۲y\\-۱&۵\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x^۲+x=-\frac{۱}{۴}\\y^۲+۱=۲y\\z^۴-۲=-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x+\frac{۱}{۲})^۲=۰\\(y-۱)^۲=۰\\z^۴=۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲},\ y=۱,\ z=\pm۱$$

$$\max(xyz)=-\frac{۱}{۲}\times۱\times(-۱)=\frac{۱}{۲}$$

۹ (**۱** ۲ ۳ ۴)

B مجموع درایه‌های قطر اصلی =

مجموع درایه‌های قطر اصلی A − مجموع درایه‌های قطر اصلی I

با توجه به اینکه $A=\begin{bmatrix} ۵ & ۸ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۵ \\ ۷ & ۶ & ۰ \end{bmatrix}$ و $I=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ داریم:

B مجموع درایه‌های قطر اصلی $= ۳-(۵+۲+۰)=۳-۷=-۴$

۱۰ (۱ ۲ ۳ **۴**)

نکته: اگر k یک عدد صحیح باشد، آن‌گاه $\sin k\pi = ۰$

$$a_{ij}=\begin{cases} ۳ & i=j \\ \sin \pi(i+j) & i\neq j \end{cases} \Rightarrow a_{۱۱}=a_{۲۲}=a_{۳۳}=۳$$

$$,a_{۱۲}=a_{۱۳}=a_{۲۱}=a_{۲۳}=a_{۳۱}=a_{۳۲}=۰$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow$$ A یک ماتریس اسکالر است.

۱۱ (۱ ۲ ۳ **۴**)

$$xA+yB=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow x\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۰ & -x \\ -x & ۰ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} y & ۰ \\ y & y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y & -x \\ y-x & y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

تساوی فوق امکان‌پذیر نیست؛ زیرا به ازای $y=۱$ یا $y=۳$ همهٔ درایه‌های نظیر برابر نیستند؛ پس x و y ای وجود ندارد که داشته باشیم $xA+yB=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$

۱۲ (۱ **۲** ۳ ۴)

$$C=A+B=\begin{bmatrix} ۱ & b \\ ۳ & -۱ \\ ۲ & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & ۳ \\ b & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+۱ & b+۳ \\ b+۳ & ۱ \\ ۳ & a+۱ \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &c_{۱۱}=۲c_{۲۲} \Rightarrow a+۱=۲\times ۱ \Rightarrow a=۱ \\ &c_{۳۱}-۲=c_{۱۲} \Rightarrow ۳-۲=b+۳ \Rightarrow b=-۲ \end{aligned}\right\} \Rightarrow a+b=۱-۲=-۱$$

۱۳ (۱ ۲ ۳ **۴**)

$$C+۲D=۳I \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ k & ۲ \end{bmatrix}=۳\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۴+۲k & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow ۴+۲k=۰ \Rightarrow k=-۲$$

۱۴ (**۱** ۲ ۳ ۴)

$$B=A+۲A+۳A+\cdots+nA=(۱+۲+۳+\cdots+n)A$$

$$=\frac{n(n+۱)}{۲}\begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۴ & -۲ \end{bmatrix} \Rightarrow B=\begin{bmatrix} -n(n+۱) & ۰ \\ ۲n(n+۱) & -n(n+۱) \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}} ۲n(n+۱)-۲n(n+۱)=۰$$

۱۵ (۱ ۲ **۳** ۴)

$$a_{ij}=\begin{cases} ۳-a_{ij} & i\neq j \\ -a_{ij} & i=j \end{cases} \Rightarrow a_{۱۱}=-a_{۱۱} \Rightarrow a_{۱۱}=۰$$

$$\xrightarrow{\text{به طریق مشابه}} a_{۲۲}=a_{۳۳}=۰$$

$$a_{۱۲}=۳-a_{۱۲} \Rightarrow a_{۱۲}=\frac{۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{به طریق مشابه}} a_{۱۳}=a_{۲۱}=a_{۲۳}=a_{۳۱}=a_{۳۲}=\frac{۳}{۲}$$

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & \frac{۳}{۲} & \frac{۳}{۲} \\ \frac{۳}{۲} & ۰ & \frac{۳}{۲} \\ \frac{۳}{۲} & \frac{۳}{۲} & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow A-\frac{۱}{۲}I=\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} & \frac{۳}{۲} \\ \frac{۳}{۲} & -\frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \\ \frac{۳}{۲} & \frac{۳}{۲} & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}} ۶\times\frac{۳}{۲}-\frac{۳}{۲}=\frac{۱۵}{۲}=۷/۵$$

۱۶ (۱ ۲ **۳** ۴)

$$a_{ij}=\begin{cases} ۲i-a_{ji} & i<j \\ ۶-a_{ji} & i=j \end{cases} \Rightarrow a_{۱۱}=۶-a_{۱۱} \Rightarrow a_{۱۱}=۳$$

$$\xrightarrow{\text{به طریق مشابه}} a_{۲۲}=a_{۳۳}=۳$$

$$a_{۱۲}=۲-a_{۲۱} \Rightarrow a_{۱۲}+a_{۲۱}=۲\ ,\ a_{۱۳}=۲-a_{۳۱} \Rightarrow a_{۱۳}+a_{۳۱}=۲$$

$$a_{۲۳}=۴-a_{۳۲} \Rightarrow a_{۲۳}+a_{۳۲}=۴$$

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & ۳ & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & ۳ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}}$$

$$۹+(a_{۱۲}+a_{۲۱})+(a_{۱۳}+a_{۳۱})+(a_{۲۳}+a_{۳۲})=۹+۲+۲+۴=۱۷$$

۱۷ (۱ ۲ **۳** ۴)

$$AB=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۵ & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۲a & ۳ \\ ۱ & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲a+۲ & ۳+۲c \\ b-۱۰a & ۱۵+bc \end{bmatrix}$$

$$\text{(فرض)}\ AB=\begin{bmatrix} ۰ & -۵ \\ -۶ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -۲a+۲ & ۳+۲c \\ b-۱۰a & ۱۵+bc \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & -۵ \\ -۶ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۲a+۲=۰ \\ ۳+۲c=-۵ \\ b-۱۰a=-۶ \\ ۱۵+bc=-۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=۱,\ c=-۴\ ,b=۴ \Rightarrow abc=۱\times ۴\times(-۴)=-۱۶$$

۱۸ (**۱** ۲ ۳ ۴)

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} x & x \\ y & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ y & y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x^{۲}+xy & x^{۲}+xy \\ yx+y^{۲} & yx+y^{۲} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(فرض)}\ A^{۲}=A} \begin{bmatrix} x^{۲}+xy & x^{۲}+xy \\ yx+y^{۲} & yx+y^{۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & x \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{۲}+xy=x \\ yx+y^{۲}=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=۱ \\ x+y=۱ \end{cases}$$

۱۹ ۱ **۲** ۳ ۴

بنا به فرض $a_{ij}=i-j$ و $b_{ij}=۲i+۳j$ داریم:

$$C_{۳\times ۶}=A_{۳\times ۴}\times B_{۴\times ۶}\Rightarrow c_{۳۴}=(\text{سطرسوم }A)\times(\text{ستون‌چهارم }B)$$

$$\Rightarrow c_{۳۴}=\begin{bmatrix}۳-۱ & ۳-۲ & ۳-۳ & ۳-۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲+۱۲\\ ۴+۱۲\\ ۶+۱۲\\ ۸+۱۲\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۰ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱۴\\ ۱۶\\ ۱۸\\ ۲۰\end{bmatrix}=۲۸+۱۶-۲۰=۲۴$$

۲۰ ۱ **۲** ۳ ۴

$$AC=B\Rightarrow\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ a^۲ & ۱\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\ ۱\\ a\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x+y\\ a^۲x+y\\ x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\ ۱\\ a\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+y=۲\\ x-y=a\\ a^۲x+y=۱\end{cases}\Rightarrow x=\frac{a+۲}{۲},y=\frac{۲-a}{۲}$$

$$\xrightarrow{a^۲x+y=۱}a^۲\times\frac{a+۲}{۲}+\frac{۲-a}{۲}=۱$$

$$\Rightarrow a^۳+۲a^۲+۲-a=۲\Rightarrow a(a^۲+۲a-۱)=۰$$

$$\Rightarrow a=۰ \text{ یا } a^۲+۲a-۱=۰\xrightarrow{a_۲+a_۳=-۲}a_۱+a_۲+a_۳$$

$$=۰-۲=-۲$$

۲۱ ۱ ۲ **۳** ۴

بنا به فرض $B=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۱\end{bmatrix}_{۳\times ۳}$ و $C=\begin{bmatrix}۱ & -۳ & ۲\\ ۰ & -۱ & ۱\end{bmatrix}_{۲\times ۳}$ با توجه به تساوی $A\times B=C$ ماتریس A نیز ۲×۳ می‌باشد. فرض کنیم $A=\begin{bmatrix}x & y & z\\ t & u & v\end{bmatrix}_{۲\times ۳}$ در این صورت داریم:

$$\begin{bmatrix}x & y & z\\ t & u & v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & -۳ & ۲\\ ۰ & -۱ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x & -x+y-z & z\\ t & -t+u-v & v\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۱ & -۳ & ۲\\ ۰ & -۱ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow x=۱,\ z=۲,\ t=۰, v=۱, -x+y-z=-۳$$

$$,\ -t+u-v=-۱\Rightarrow y=۰,\ u=۰$$

$$x+y+z+t+u+v=۱+۰+۲+۰+۰+۱=۴$$

۲۲ ۱ ۲ **۳** ۴

بنـا بـه فـرض $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۴ & ۲\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۳ & -۹\\ ۶ & ۱۲\\ ۰ & ۱۵\end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix}۴ & -۱ & ۵\\ ۲ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$ و $D=(۲A-\frac{۱}{۳}B)C$ می‌باشد.

$$d_{۲۲}=(۲A-\frac{۱}{۳}B)\text{ سطر دوم}\times C\text{ ستون دوم}$$

$$=\begin{bmatrix}۲\times ۴-\frac{۱}{۳}\times ۶ & ۲\times ۲-\frac{۱}{۳}\times ۱۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱\\ ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱\\ ۱\end{bmatrix}=-۶$$

۲۳ **۱** ۲ ۳ ۴

در این‌جا محاسبهٔ ماتریس‌های BAB و $A^۲B$ وقتگیر است؛ بـه همـین جهت به کمـک خـواص ضـرب ماتریس‌هـا عبـارت داده‌شـده را به‌صـورت زیر می‌نویسیم:

$$A^۲B+BAB=A(AB)+B(AB)=(A+B)AB$$

$$A=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۱ & -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

$$,AB=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۱ & -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ \frac{۳}{۲} & \frac{۷}{۴}\end{bmatrix}$$

$$A^۲B+BAB=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ \frac{۳}{۲} & \frac{۷}{۴}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶ & ۲\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

۲۴ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta\\ \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\cos(\alpha-\beta) & \sin(\beta-\alpha)\\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow b=\sin(\beta-\alpha)$$

۲۵ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\begin{bmatrix}x & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۱\end{bmatrix}=۰\Rightarrow\begin{bmatrix}-x+۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۱\end{bmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-x^۲+۲x+۳\end{bmatrix}=۰\Rightarrow -x^۲+۲x+۳=۰\Rightarrow -(x+۱)(x-۳)=۰$$

$$\Rightarrow x=-۱ \text{ یا } x=۳$$

۲۶ ۱ ۲ **۳** ۴

روش اول: بنابه فرض، ماتریس $A_{۲\times ۲}$ چنان است که $A\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-b\\ -a\end{bmatrix}$ داریم:

$$A^۲\begin{bmatrix}-۱\\ -۲\end{bmatrix}=A(A\begin{bmatrix}-۱\\ -۲\end{bmatrix})=A\begin{bmatrix}-(-۲)\\ -(-۱)\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱\\ -۲\end{bmatrix}$$

روش دوم: یکی از ماتریس‌های A که در تسـاوی $A\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-b\\ -a\end{bmatrix}$ صـدق می‌کند، $A=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$ است. داریم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$,A^۲\begin{bmatrix}-۱\\ -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱\\ -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱\\ -۲\end{bmatrix}$$

۲۷ ۱ ۲ **۳** ۴

نکته: اگر A و B دو مـاتریس ۲×۲ باشـند، آن‌گـاه درایـه‌های قطـر اصلی ماتریس $A\times B-B\times A$ قرینهٔ یکدیگرند.

بنابراین از بین گزینه‌ها تنها ماتریس $\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۳ & -۳\end{bmatrix}$ می‌تواند $A\times B-B\times A$ باشد.

۲۸ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1+2&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&0\\1+2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1+2+3&1\end{bmatrix}$$

و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}1&0\\7&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1+2+\cdots+7&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\\frac{7(7+1)}{2}&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\28&1\end{bmatrix}$$

۲۹ **۱** ۲ ۳ ۴

$$AB+2A+B+2I=AB+B+2A+2I$$

$$=(A+I)B+(A+I)(2I)=(A+I)(B+2I)$$

$$=\begin{bmatrix}3&-1\\4&2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&1\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&2\\6&6\end{bmatrix}$$

۳۰ ۱ ۲ **۳** ۴

$$a_{ij}=\begin{cases}i & i>j\\ j & i\le j\end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1&2\\2&2\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}1&2\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&6\\6&8\end{bmatrix}$$

(مجموع درایه‌های ماتریس A^2) − (مجموع درایه‌های ماتریس A)

$$=(5+6+6+8)-(1+2+2+2)=25-7=18$$

۳۱ ۱ **۲** ۳ ۴

به کمک خواص ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$(ABC)^2=(ABC)(ABC)=(AB)C(ABC)$$

$$=(AB)(CA)(BC)$$

$$(ABC)^2=\begin{bmatrix}6&-1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\5&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&2\\5&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\2&-2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-3&-4\\3&-8\end{bmatrix}$$

۳۲ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$A\times B=\begin{bmatrix}5&a\\b&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a+5&a-10\\b-6&-2b-2\end{bmatrix}$$

برای این‌که ماتریس $A\times B$ قطری باشد، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}a-10=0\\b-6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=10\\b=6\end{cases}\Rightarrow a-b=10-6=4$$

۳۳ ۱ **۲** ۳ ۴

حاصل‌ضرب زیر یک ماتریس 2×2 است.

$$\begin{bmatrix}x&-1&4\\2&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-2\\1&0\\y&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-1+4y&-2x+4\\4+3+y&-4+1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2x+4y-1&-2x+4\\y+7&-3\end{bmatrix}$$

برای این‌که ماتریس فوق قطری باشد باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}-2x+4=0\\y+7=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=-7\end{cases}$$

۳۴ ۱ ۲ **۳** ۴

$$AB=\begin{bmatrix}-4&p&-2\\4&2&q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q&-4\\2&2q\\4p&6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-4q+2p-8p&16+2pq-12\\4q+4+4pq&-16+4q+6q\end{bmatrix}$$

برای این‌که AB قطری باشد باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}16+2pq-12=0\\4q+4+4pq=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}pq=-2\\q+1+pq=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow q+1-2=0\Rightarrow q=1,\ p=-2$$

$$q-p=1-(-2)=3$$

۳۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

روش اول:

$$A^2=\begin{bmatrix}-1&1\\4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&1\\4&8\end{bmatrix},\ A^2=\alpha A+\beta I$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}5&1\\4&8\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}-1&1\\4&2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}5&1\\4&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta-\alpha&\alpha\\4\alpha&2\alpha+\beta\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\beta-\alpha=5\\2\alpha+\beta=8\\\alpha=1\end{cases}$$

با قرار دادن $\alpha=1$ در دو معادلهٔ دیگر مقدار $\beta=6$ می‌شود؛ پس $(\alpha,\beta)=(1,6)$

روش دوم:

> **نکته:** اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$، آن‌گاه داریم: $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I=\bar{O}$

$$A=\begin{bmatrix}-1&1\\4&2\end{bmatrix}\Rightarrow A^2-(-1+2)A+(-2-4)I=\bar{O}$$

$$\Rightarrow A^2-A-6I=\bar{O}\Rightarrow A^2=A+6I=\alpha A+\beta I$$

$$\Rightarrow(\alpha,\beta)=(1,6)$$

۳۶ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$AB=\begin{bmatrix}x&-1&-x\\0&0&4\\y&z&z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2z&\frac{1}{2}&2\\2z&0&-4z\\0&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2xz-2z&0&2x+4z\\0&2&0\\2yz+2z^2&\frac{y}{2}+\frac{z}{2}&2y-4z^2\end{bmatrix}$$

برای این‌که AB ماتریس اسکالر باشد باید درایه‌های غیر از قطر اصلی صفر و درایه‌های قطر اصلی برابر باشند. z نمی‌تواند صفر باشد زیرا درایه سطر اول و ستون اول صفر می‌شود.

$$\begin{cases}2x+4z=0\\2yz+2z^2=0\\\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2z\\y=-z\end{cases},\ \begin{cases}2xz-2z=2\\2y-4z^2=2\end{cases}$$

با قرار دادن $x=-۲z$ و $y=-z$ در دستگاه سمت چپ داریم:

$$\begin{cases}-۴z^۲-۲z=۲\\-۲z-۴z^۲=۲\end{cases}\Rightarrow ۲z^۲+z-۱=۰\Rightarrow z=-۱ \text{ یا } z=-\frac{۱}{۲}$$

چون بنا به فرض y عددی صحیح است پس $z=-\frac{۱}{۲}$ قابل قبول نیست

و نهایتاً داریم: $xy=(-۲z)(-z)=۲z^۲=۲(-۱)^۲=۲$

۳۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{bmatrix}x&۰&۰\\y&t&۰\\z&u&r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&y&z\\۰&t&u\\۰&۰&r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۲&۱\\a&۴&۲\\b&c&۴\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x^۲&xy&xz\\xy&y^۲+t^۲&yz+tu\\zx&zy+ut&z^۲+u^۲+r^۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۲&۱\\a&۴&۲\\b&c&۴\end{bmatrix}$$

$$x^۲=۴\Rightarrow x=۲\,,\ xy=۲\Rightarrow y=۱\,,\ xz=۱\Rightarrow z=\frac{۱}{۲}$$

$$a=xy=۲\,,\ b=zx=۱\,,\ y^۲+t^۲=۴\Rightarrow ۱+t^۲=۴\Rightarrow t=\sqrt{۳}$$

$$yz+tu=c=۲\Rightarrow ۱\times\frac{۱}{۲}+\sqrt{۳}\times u=۲\Rightarrow u=\frac{۳}{۲\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$z^۲+u^۲+r^۲=۴\Rightarrow\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}+r^۲=۴\Rightarrow r^۲=۴-۱=۳\Rightarrow r=\sqrt{۳}$$

۳۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{bmatrix}x&۲x&-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&-۱&۱\\۴&۰&-۲\\۱&۲&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\۲x\\-۱\end{bmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}۳x+۸x-۱&-x-۲&x-۴x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\۲x\\-۱\end{bmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}۱۱x-۱&-x-۲&-۳x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\۲x\\-۱\end{bmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow x(۱۱x-۱)-۲x(x+۲)+۳x=۰\xrightarrow{x\neq ۰}$$

$$۱۱x-۱-۲x-۴+۳=۰\Rightarrow ۹x=۲\Rightarrow x=\frac{۲}{۹}$$

۳۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{bmatrix}۰&۰&۱\\۱&۱&۲\\۲&۲&۳\\۳&۳&۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱&-۱\\۲&۲\\۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۱\\۳&۳\\۵&۵\\۷&۷\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵\\۱۵\\۲۵\\۳۵\end{bmatrix}$$

۴۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$(A+B)^۲=(A+B)(A+B)=(A+B)A+(A+B)B$$

$$=A^۲+BA+AB+B^۲$$

$$(A+B)^۲=\begin{bmatrix}۲&-۲&۲\\۲&۱&۱\\۲&۰&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&-۲&۲\\۲&۱&۱\\۲&۰&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&-۶&۶\\۸&-۳&۷\\۸&-۴&۸\end{bmatrix}$$

$$A^۲+B^۲=(A+B)^۲-(AB+BA)=\begin{bmatrix}۴&-۶&۶\\۸&-۳&۷\\۸&-۴&۸\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲&-۳&۳\\۵&-۷&۵\\۴&۱&۳\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۲&\bigcirc&\bigcirc\\\bigcirc&۴&\bigcirc\\\bigcirc&\bigcirc&۵\end{bmatrix}$$

$A^۲+B^۲$ مجموع درایه‌های قطر اصلی $=۲+۴+۵=۱۱$

۴۱ ۱ ۲ ۳ ۴

بنا به فرض $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ و $a_{ij}=\begin{cases}۱ & i=j\\۲ & i\neq j\end{cases}$، پس درایه‌های ماتریس A به‌صورت زیر می‌باشد:

$$A=\begin{bmatrix}۱&۲&۲\\۲&۱&۲\\۲&۲&۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲=\begin{bmatrix}۱&۲&۲\\۲&۱&۲\\۲&۲&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۲&۲\\۲&۱&۲\\۲&۲&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۹&۸&۸\\۸&۹&۸\\۸&۸&۹\end{bmatrix}$$

$$A^۲-۴A=\begin{bmatrix}۹&۸&۸\\۸&۹&۸\\۸&۸&۹\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۴&۸&۸\\۸&۴&۸\\۸&۸&۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵&۰&۰\\۰&۵&۰\\۰&۰&۵\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}}۱۵$$

۴۲ ۱ ۲ ۳ ۴

نکته: اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$، آن‌گاه داریم:

(ستون jام B) × (ماتریس A) = ستون jام $(A\times B)$

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱&x&۰\\۰&۰&y\\۰&۰&z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&x&۰\\۰&۰&y\\۰&۰&z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&x&xy\\۰&۰&yz\\۰&۰&z^۲\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\x&۰&۰\\۰&y&z\end{bmatrix}$$

$A^۲B$ ستون سوم ماتریس $=\begin{bmatrix}۱&x&xy\\۰&۰&yz\\۰&۰&z^۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\۰\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xyz\\yz^۲\\z^۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۶\\۲\\-۱\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{cases}xyz=-۶\\yz^۲=۲\\z^۳=-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xyz=-۶\\yz^۲=۲\\z=-۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow y=۲, x=۳, x+y+z=۳+۲-۱=۴$$

۴۳ ۱ ۲ ۳ ۴

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱&۰&a\\۰&b&۰\\۰&c&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰&a\\۰&b&۰\\۰&c&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&ac&a\\۰&b^۲&۰\\۰&bc&۰\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&b&c\\a&۰&۰\end{bmatrix}$$

$(A^۲-B)$ ستون دوم ماتریس $=\begin{bmatrix}ac\\b^۲\\bc\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۰\\b\\۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ac\\b^۲-b\\bc\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\۲\\۶\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{cases}ac=۳\\b^۲-b=۲\Rightarrow b^۲-b-۲=۰\Rightarrow(b+۱)(b-۲)=۰\\bc=۶\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b=-۱\,,\ c=-۶\,,\ a=-\frac{۱}{۲}\\b=۲\,,\ c=۳\,,\ a=۱\end{cases}$$

پس برای $a+b+c$ دو مقدار ۶ و ۷/۵- به‌دست می‌آید.

۴۴ ۱ ۲ ۳ ۴

نکته: برای هر دو ماتریس مربعی و هم مرتبه A و B، حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی $A\times B$ با حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی $B\times A$ برابر است.

اگر فرض کنیم $B=\begin{bmatrix}1&3&5\\7&22&36\\10&31&52\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10&17&15\\4&20&17\\302&153&-2\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}28&-1&-2\\-4&2&-1\\-3&-1&1\end{bmatrix}$ در این صورت $A=BC$ و می‌توان گفت مجموع درایه‌های قطر اصلی BC با مجموع درایه‌های قطر اصلی CB است.

$$\text{مجموع درایه‌های قطر اصلی } A=\begin{bmatrix}28&-1&-2\\-4&2&-1\\-3&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&5\\7&22&36\\10&31&52\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}10&17&15\\4&120&17\\302&153&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10&17&15\\4&20&17\\302&153&-2\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی A برابر $28=2-20+10$ است.

۴۵ ۱ ۲ ۳ ۴

$$AB=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&3&2\\3&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&-1&-1\\-2&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

$$A^2B^3=A(AB)B^2=AIB^2=AB^2=(AB)B=IB=B$$

$$=\begin{bmatrix}6&-1&-1\\-2&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس A^2B^3 برابر مجموع درایه‌های ماتریس B می‌باشد یعنی عدد یک.

۴۶ ۱ ۲ ۳ ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}1&2&2\\-1&-2&-1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\-1&-2&-1\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

$$B^2=\begin{bmatrix}3&6&-2\\-2&-4&1\\-2&-3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&6&-2\\-2&-4&1\\-2&-3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

$$M=pA^2+qB^2=pI+qI=(p+q)I$$

پس M یک ماتریس اسکالر است.

۴۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$$AB=I\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\a&2&0\\b&c&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m&n&p\\q&r&s\\t&u&v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

از تساوی فوق بلافاصله نتیجه می‌شود $n=p=s=0$ و داریم:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\a&2&0\\b&c&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m&0&0\\q&r&0\\t&u&v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}m&0&0\\\bigcirc&2r&0\\\bigcirc&\bigcirc&4v\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow m=1,\ r=\frac{1}{2},\ v=\frac{1}{4}$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی $(A+B)$ = مجموع درایه‌های قطر اصلی A
+ مجموع درایه‌های قطر اصلی B =

$$1+2+4+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=8+\frac{3}{4}=\frac{35}{4}=8/75$$

۴۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$AB=I\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&3\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

از تساوی فوق بلافاصله نتیجه می‌شود $a=1$، $b=0$ و $c=0$ و در ادامه داریم:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&3\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\\bigcirc&\bigcirc&f+3i\\\bigcirc&\bigcirc&i\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow f+3i=0,\ i=1\Rightarrow f=-3i=-3$$

پس درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس B برابر ۳- است.

۴۹ ۱ ۲ ۳ ۴

با فرض $A=\begin{bmatrix}1&3&6&24\\\frac{1}{3}&1&2&8\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&1&4\\\frac{1}{24}&\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&1\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$، داریم:

$$D=C^2=\begin{bmatrix}1&3&6&24\\\frac{1}{3}&1&2&8\\\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&1&4\\\frac{1}{24}&\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&6&24\\\frac{1}{3}&1&2&8\\\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&1&4\\\frac{1}{24}&\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&1\end{bmatrix}$$

لزومی به محاسبهٔ همهٔ درایه‌های C^2 نیست چون درایه‌های قطر اصلی C^2 را می‌خواهیم:

$$D_{11}=1\times1+3\times\frac{1}{3}+6\times\frac{1}{6}+24\times\frac{1}{24}=1+1+1+1=4$$

$$D_{22}=\frac{1}{3}\times3+1\times1+2\times\frac{1}{2}\times8\times\frac{1}{8}=1+1+1+1=4$$

$$D_{33}=\frac{1}{6}\times6+\frac{1}{2}\times2+1\times1+4\times\frac{1}{4}=1+1+1+1=4$$

$$D_{44}=\frac{1}{24}\times24+\frac{1}{8}\times8+\frac{1}{4}\times4+1\times1=1+1+1+1=4$$

$$D_{11}+D_{22}+D_{33}+D_{44}=4+4+4+4=16$$

۵۰ ۱ ۲ ۳ ۴

روش اول:

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\text{درایهٔ سطر اول و ستون اول } A=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6&9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=9$$

$$\text{درایهٔ سطر دوم و ستون دوم } A=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7&8&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=7$$

$$A \text{ درایهٔ سطر سوم و ستون سوم } = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 8 & 4\\3 & 2 & 5\\6 & 9 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=5$$

مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس A = $9+7+5=21$

روش دوم:

$$A=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}}_{B}\begin{bmatrix}7 & 8 & 4\\3 & 2 & 5\\6 & 9 & 3\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{C}$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی BC با مجموع درایه‌های قطر اصلی CB فرقی نمی‌کند بنابراین داریم:

مجموع درایه‌های قطر اصلی A = مجموع درایه‌های قطر اصلی CB

$$CB=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 8 & 4\\3 & 2 & 5\\6 & 9 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 8 & 4\\3 & 2 & 5\\6 & 9 & 3\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی CB = $(7+0+0)+(0+0+9)+(0+5+0)=21$

۵۱

نکته: سطر iام ماتریس ABC برابر است با: $(\text{سطر } i\text{ام } A)\times B\times C$

$$A \text{ سطر سوم ماتریس } = \begin{bmatrix}0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 8 & 4\\3 & 2 & 5\\6 & 9 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 7 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7 & 1 & -5\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}}7+1-5=3$$

۵۲

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=(A+B)A+(A+B)B$$
$$=A^2+B\times A+A\times B+B^2$$

بنابه فرض $A\times B=-2B\times A$ است؛ پس نتیجه می‌شود:

$$(A+B)^2=A^2+B\times A-2B\times A+B^2$$
$$=A^2-B\times A+B^2$$

۵۳

برای این‌که ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\1 & -1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & a\\2 & b\end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشند، باید داشته باشیم:

$$A\times B=B\times A\Rightarrow\begin{bmatrix}-1 & 3\\1 & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & a\\2 & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & a\\2 & b\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1 & 3\\1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}5 & 3b-a\\-1 & a-b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-1 & 3-a\\b-2 & 6-b\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a-1=5\\3b-a=3-a\\b-2=-1\\a-b=6-b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=6\\b=1\end{cases}$$

بنابراین ماتریس $B=\begin{bmatrix}1 & 6\\2 & 1\end{bmatrix}$ با ماتریس A تعویض‌پذیر است.

۵۴

$$AX=3X\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 2 & -2\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a+2c\\2b-2c\\-b+c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a\\3b\\3c\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+2c=3a\\2b-2c=3b\\-b+c=3c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=a\\b=-2c\\b=-2c\end{cases}\Rightarrow\frac{a-b+c}{c}=\frac{c+2c+c}{c}=4$$

۵۵

$$A\times B=B\times A\Rightarrow\begin{bmatrix}2 & -1\\3 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a & 1\\c & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & 1\\c & 5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & -1\\3 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}2a-c & -3\\3a+c & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a+3 & -a+1\\2c+15 & -c+5\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2a-c=2a+3\\-3=-a+1\\3a+c=2c+15\\8=-c+5\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}c=-3\\a=4\\c+15=3a\\c=-3\end{cases}$$

مقادیر $a=4$ و $c=-3$ در تساوی $c+15=3a$ صدق می‌کنند پس دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\3 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}4 & 1\\-3 & 5\end{bmatrix}$ تعویض‌پذیرند و $a+c=4-3=1$ است.

۵۶

نکته: ماتریس‌های مربعی و هم‌مرتبهٔ A و I همواره تعویض‌پذیرند و اتحادهای جبری برای آن‌ها برقرار است.

$$(A+I)^2-(A-I)^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow(A^2+2A+I)-(A^2-2A+I)=\begin{bmatrix}2 & 2\\0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 4A=\begin{bmatrix}2 & 2\\0 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

و مجموع درایه‌های قطر اصلی A برابر است با $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

۵۷

$$(AB)^2=(AB)(AB)=A(BA)B\xrightarrow{AB=BA}$$
$$(AB)^2=A(AB)B=(A^2B)B=A^2B^2$$
$$\Rightarrow A^2B^2=\begin{bmatrix}5 & 1\\1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 1\\1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}26 & 10\\10 & 26\end{bmatrix}$$

۵۸

$$AB=I\Rightarrow\frac{1}{7}\begin{bmatrix}2 & b & a\\3 & a & 2\\a & -2 & b\end{bmatrix}\times\frac{1}{7}\begin{bmatrix}2 & 3 & a\\b & a & -2\\a & 2 & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}4+b^2+a^2 & ab+2a+6 & 2a-2b+ab\\6+ab+2a & 13+a^2 & a+2b\\2a-2b+ab & a+2b & a^2+b^2+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}49 & 0 & 0\\0 & 49 & 0\\0 & 0 & 49\end{bmatrix}$$

$$۱۳+a^۲=۴۹ \Rightarrow a^۲=۳۶ \Rightarrow a=\pm ۶$$

$$\Rightarrow ۴+b^۲+a^۲=۴۹ \Rightarrow b^۲=۴۹-۴-۳۶=۹ \Rightarrow b=\pm ۳$$

چون $a+۲b=۰$ پس a و b مختلف العلامت هستند.

اگر $a=۶$ و $b=-۳$ باشند در تساوی‌های $۶+ab+۲a=۰$ و $۲a-۲b+ab=۰$ صدق می‌کنند. اما $a=-۶$ و $b=۳$ در تساوی‌های فوق صدق نمی‌کنند پس تنها جواب قابل قبول $a=۶$ و $b=-۳$ است.

۵۹ (**۱**) (۲) (۳) (۴)

$$A(A+۲I)=A^۲+۲AI=A^۲+۲A \xrightarrow{A^۲=-A-I\ (\text{فرض})}$$

$$A(A+۲I)=-A-I+۲A=A-I$$

۶۰ (۱) (۲) (**۳**) (۴)

بنا به فرض در ماتریس $A=\begin{bmatrix} a-۲ & ۴ & -۷ \\ b & ۰ & b+۲ \\ ۷ & a & ۰ \end{bmatrix}$ برای هر i و j داریم $a_{ij}=-a_{ji}$ پس نتیجه می‌شود:

$$a_{۱۱}=-a_{۱۱} \Rightarrow a_{۱۱}=۰,\ a_{۲۲}=-a_{۲۲} \Rightarrow a_{۲۲}=۰,\ a_{۳۳}=-a_{۳۳}$$

$$\Rightarrow a_{۳۳}=۰$$

بنابراین $a-۲$ باید صفر باشد که نتیجه می‌دهد $a=۲$ و در ادامه داریم:

$$a_{۱۲}=-a_{۲۱} \Rightarrow ۴=-b \Rightarrow b=-۴$$

$$a_{۲۳}=-a_{۳۲} \Rightarrow b+۲=-a \Rightarrow b=-۲-۲=۴$$

بنابراین $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۴ & -۷ \\ -۴ & ۰ & -۲ \\ ۷ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ و داریم:

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix} ۰ & ۴ & -۷ \\ -۴ & ۰ & -۲ \\ ۷ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۴ & -۷ \\ -۴ & ۰ & -۲ \\ ۷ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۶۵ & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & -۲۰ & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & -۵۳ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌های قطر اصلی } A^۲} -۶۵-۲۰-۵۳=-۱۳۸$$

۶۱ (۱) (۲) (**۳**) (۴)

بنا به فرض $A+B=I$ و $A=BC$ می‌باشد. داریم:

$$AC-C=(A-I)C=(I-B-I)C=-BC=-A$$

۶۲ (۱) (۲) (**۳**) (۴)

بنا به فرض $A+B=I$ و $A=BC=CB$ می‌باشد. داریم:

$$AC-CA=CBC-CA=C(BC-A)=C(BC-BC)$$

$$=C\times \bar{O}=\bar{O}$$

۶۳ (۱) (۲) (**۳**) (۴)

$$A^۲+۲A+I=\bar{O} \xrightarrow{\times A} A^۳+۲A^۲+IA=\bar{O}$$

$$\Rightarrow A^۳+۲A^۲+A=\bar{O} \Rightarrow A^۳+۳A^۲+۳A+I=۲A+I$$

$$\Rightarrow (A+I)^۳=۲A+I \Rightarrow (A+I)^۳-I=۲A$$

$$\Rightarrow (A+I)^۳+(-I)^۳=۲A$$

با فرض $B=A+I$ و $C=-I$ داریم $B^۳+C^۳=۲A$ در نتیجه:

$$B-C=A+I-(-I)=A+I+I=A+۲I$$

۶۴ (۱) (۲) (۳) (**۴**)

$$(\text{فرض})\ BA=A \xrightarrow{A\times} ABA=A^۲ \xrightarrow{AB=B\ (\text{فرض})} BA=A^۲$$

$$\xrightarrow{BA=A} A^۲=A$$

$$(\text{فرض})\ AB=B \xrightarrow{B\times} BAB=B^۲ \xrightarrow{BA=A\ (\text{فرض})} AB=B^۲$$

$$\xrightarrow{AB=B} B^۲=B$$

$$(A+B)^۲=(A+B)(A+B)=A^۲+BA+AB+B^۲$$

$$=A+A+B+B=۲(A+B)$$

$$(A+B)^۳=(A+B)^۲(A+B)=۲(A+B)(A+B)$$

$$=۲(A+B)^۲=۲\times ۲(A+B)=۴(A+B)$$

۶۵ (**۱**) (۲) (۳) (۴)

بنا به فرض $A^۲=I-A$ داریم:

$$A^۲(A+I)^۲=(I-A)(A^۲+۲A+I)=(I-A)(I-A+۲A+I)$$

$$=(I-A)(۲I+A)=۲I-A-A^۲=۲I-A-(I-A)=I$$

۶۶ (**۱**) (۲) (۳) (۴)

چون $A^۲=\bar{O}$ پس $A^۳=\bar{O}$ و می‌توان نوشت:

$$A(I-A)^۳=A(I-۳A+۳A^۲-A^۳)=A(I-۳A+\bar{O}-\bar{O})$$

$$=AI-۳A^۲=A-\bar{O}=A$$

۶۷ (۱) (**۲**) (۳) (۴)

> **نکته:** اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، آن‌گاه داریم $A^۲-(a+d)A+(ad-bc)I=\bar{O}$

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۲ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow A^۲-(۱+۰)A+(۱\times ۰-(-۲)\times ۱)I=\bar{O}$$

$$\Rightarrow A^۲=A-۲I \Rightarrow A\times A^۲=A\times(A-۲I) \Rightarrow A^۳=A^۲-۲A$$

$$\xrightarrow{A^۲=A-۲I} A^۳=A-۲I-۲A \Rightarrow A^۳=-A-۲I$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=-۱ \\ n=-۲ \end{cases} \Rightarrow n^m=(-۲)^{-۱}=-\frac{۱}{۲}$$

۶۸ (۱) (**۲**) (۳) (۴)

$$A^۲+B^۲+AB+BA=A^۲+AB+B^۲+BA$$
$$=A(A+B)+B(B+A)$$

$$=A(A+B)+B(A+B)=(A+B)(A+B)=(A+B)^۲$$

$$\xrightarrow{A+B=۲AB} A^۲+B^۲+AB+BA=(۲AB)^۲=۴(AB)^۲$$

۶۹ (۱) (۲) (۳) (**۴**)

$$M=(A+I)(B+I)=(A+I)B+(A+I)I=AB+IB+AI+I^۲$$

$$=AB+B+A+I \xrightarrow{A+B+AB=\bar{O}\ (\text{فرض})} M=\bar{O}+I=I$$

۷۰ (**۱**) (۲) (۳) (۴)

$$A^۳+I=A^۳+I^۳=(A+I)(A^۲-AI+I^۲)$$

$$=(A+I)(A^۲-A+I) \qquad (۱)$$

$$(\text{فرض})\ A^۲-A-۲I=\bar{O} \Rightarrow A^۲-A=۲I \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow A^۳+I=(A+I)(۲I+I)=۳AI+۳I^۲=۳A+۳I$$

۷۱ (۱)

نکته: اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، آن‌گاه داریم:
$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)I=\bar{O}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2-(1+6)A+(6\times1-4\times1)I=\bar{O} \Rightarrow A^2=7A-2I$$
$$\Rightarrow A\times A^2=A\times(7A-2I) \Rightarrow A^3=7A^2-2A$$

با قرار دادن A^3 در عبارت داده‌شده داریم:
$$A^3-7A^2+2A+4I=7A^2-2A-7A^2+2A+4I=4I$$

۷۲ (۳)

بنابه فرض $A^2=A$ و $AB=I$ است. داریم:
$$A^3B^2=A(A^2B^2)\xrightarrow{A^2=A}A^3B^2=A(AB^2)$$
$$=A^2B^2=AB^2=(AB)B=IB=B$$

۷۳ (۲)

$$(\text{فرض})\ AB+BA=I \Rightarrow A\times(AB+BA)=A\times I$$
$$\Rightarrow A^2B+ABA=A$$
$$(\text{فرض})\ AB+BA=I \Rightarrow (AB+BA)\times A=I\times A$$
$$\Rightarrow ABA+BA^2=A$$

از تفاضل دو تساوی فوق نتیجه می‌شود:
$$A^2B-BA^2=A-A=\bar{O}$$

۷۴ (۳)

$$(\text{فرض})\ A^2+3A-I=0 \Rightarrow A^2=-3A+I \xrightarrow[\text{از راست}]{\text{ضرب در } U=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}$$
$$A^2U=(-3A+I)U=-3AU+U \xrightarrow{\text{ضرب در } A \text{ از چپ}} A^3U$$
$$=A(-3AU+U)=-3A^2U+AU$$
$$\xrightarrow{A^2U=-3AU+U} A^3U=-3(-3AU+U)+AU$$
$$\Rightarrow A^3U=10AU-3U \xrightarrow{U=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\,AU=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}} A^3U=10\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\10\end{bmatrix}$$

۷۵ (۳)

$$(AB)^2=(AB)(AB)=A(BA)B\xrightarrow{AB=\lambda BA\ (\text{فرض})}$$
$$(AB)^2=A(\frac{AB}{\lambda})B \Rightarrow (AB)^2=\frac{1}{\lambda}(A^2B)B=\frac{1}{\lambda}A^2B^2$$
$$\Rightarrow (AB)^2-A^2B^2=\frac{1}{\lambda}A^2B^2-A^2B^2$$
$$\Rightarrow (AB)^2-A^2B^2=(\frac{1}{\lambda}-1)A^2B^2=\frac{1-\lambda}{\lambda}A^2B^2$$

۷۶ (۱)

$$(A+I)(B-I)-(B-I)(A+I)$$
$$=(A+I)B-(A+I)I-(B-I)A-(B-I)I$$
$$=AB+IB-AI-I^2-BA+IA-BI+I^2$$
$$=AB+B-A-I-BA+A-B+I=AB-BA$$

اما بنابه فرض، $AB-BA=2I$ است؛ پس نتیجه می‌شود:
$$(A+I)(B-I)-(B-I)(A+I)=2I$$

۷۷ (۲)

$$A^2=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=2A$$
$$A^3=A^2\times A=2A\times A=2A^2$$
$$\Rightarrow A^3=2(2A)=4A\ ,\ A^4=A^3\times A=4A\times A$$
$$=4A^2=4(2A)=8A\ ,\ A^5=A^4\times A=8A\times A$$
$$=8A^2=8(2A)=16A$$

پس جمع درایه‌های A^5 برابر $64=(1+1+1+1)16$ است.

۷۸ (۱)

نکته: اگر $A^2=\lambda A$ باشد، آن‌گاه $A^k=\lambda^{k-1}A$ است. (k عدد طبیعی است)

$$A^2=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{4}+\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=A$$
$$A^3=A^2\times A=A\times A=A^2=A\xrightarrow{\text{به طور استقرایی}}A^n=A$$

پس $A^{100}=A$ می‌باشد.

۷۹ (۳)

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=-I$$
$$A^4=A^3\times A=(-I)\times A=-A\ ,\ A^5=A^4\times A=(-A)\times A=-A^2$$
$$A^6=A^5\times A=(-A^2)\times A=-A^3=-(-I)=I$$

پس کم‌ترین مقدار n که به ازای آن $A^n=I$ است، $n=6$ می‌باشد.

۸۰ (۴)

$$A^2=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$
$$A-A^2=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=2I$$
$$B=\frac{1}{2^{8-n}}(A-A^2)^n=\frac{1}{2^{8-n}}(2I)^n=\frac{2^n}{2^{8-n}}I^n=\frac{2^n}{2^{8-n}}I$$

برای این‌که ماتریس B برابر I باشد باید داشته باشیم:
$$\frac{2^n}{2^{8-n}}=1 \Rightarrow 2^n=2^{8-n} \Rightarrow n=8-n \Rightarrow 2n=8 \Rightarrow n=4$$

۸۱ (۲)

$$A^2=\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$$
$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{bmatrix}$$
$$A^4=A^3\times A=\begin{bmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{bmatrix}$$

و به طور استقرایی نتیجه می‌شود:

$$A^n=\begin{bmatrix}a^n & 4a^{n-1}\\ 0 & a^n\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌های قطر اصلی}} a^n+a^n=2a^n$$

۸۲ — **۱** ۲ ۳ ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}1&2\\0&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&16\\0&49\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow A^2$ درایهٔ سطر اول و ستون دوم $=16=\frac{7^2-1}{3}$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&16\\0&49\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&114\\0&\bigcirc\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow A^3$ درایهٔ سطر اول و ستون دوم $=114=\frac{7^3-1}{3}$

و با استدلال استقرایی نتیجه می‌شود:

$$B=A^{50}=\begin{bmatrix}1&b_{12}\\0&\bigcirc\end{bmatrix}\Rightarrow b_{12}=\frac{7^{50}-1}{3}$$

۸۳ — ۱ ۲ ۳ **۴**

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I$$

$$A^3=A^2\times A=-I\times A=-A\ ,\ A^4=A^2\times A^2=(-I)^2=I$$

$$A^5=A^4\times A=I\times A=A\ ,\ A^6=A^5\times A=A\times A=A^2=-I$$

بنابراین به طور استقرایی نتیجه می‌شود توان‌های A با دوره تناوب ۴ تکرار می‌شود:

$$(A+A^2+A^3+A^4)+(A^5+A^6+A^7+A^8)+\cdots$$
$$+(A^{2017}+A^{2018}+A^{2019}+A^{2020})+A^{2021}+A^{2022}$$
$$=\underbrace{(A-I-A+I)}_{\bar O}+\underbrace{(A-I-A+I)}_{\bar O}+\cdots+\underbrace{(A-I-A+I)}_{\bar O}$$
$$+A+(-I)=A-I$$

۸۴ — **۱** ۲ ۳ ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}\ ,\ A^3=\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

$$A^{2010}=(A^3)^{670}=I^{670}=I$$

۸۵ — ۱ ۲ ۳ **۴**

$$M^2=M\times M=\begin{bmatrix}2\cos^2\theta&\sin2\theta\\ \sin2\theta&2\sin^2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\cos^2\theta&\sin2\theta\\ \sin2\theta&2\sin^2\theta\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M^2=\begin{bmatrix}4\cos^4\theta+\sin^2 2\theta & 2\cos^2\theta\sin2\theta+2\sin^2\theta\sin2\theta\\ 2\cos^2\theta\sin2\theta+2\sin^2\theta\sin2\theta & \sin^2 2\theta+4\sin^4\theta\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta}$$

$$\begin{bmatrix}4\cos^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta) & 2\sin2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\\ 2\sin2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta) & 4\sin^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\end{bmatrix}$$

$$=2\begin{bmatrix}2\cos^2\theta&\sin2\theta\\ \sin2\theta&2\sin^2\theta\end{bmatrix}=2M$$

$$M^3=M^2\times M=(2M)M=2M^2=2(2M)=4M$$

۸۶ — ۱ ۲ ۳ **۴**

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix},A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}$$

و به طور استقرایی نتیجه می‌شود $A^8=\begin{bmatrix}1&0\\8&1\end{bmatrix}$

$$B^2=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}, B^3=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}$$

و مجدداً به طریق استقرایی نتیجه می‌شود $B^9=\begin{bmatrix}1&9\\0&1\end{bmatrix}$، پس می‌توان نوشت:

$$A^8\times B^9=\begin{bmatrix}1&0\\8&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&9\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&9\\8&73\end{bmatrix}$$

۸۷ — **۱** ۲ ۳ ۴

$$A^2-A+I=\bar O\Rightarrow A^2=A-I\Rightarrow AA^2=A(A-I)$$
$$\Rightarrow A^3=A^2-AI=A^2-A$$

با قرار دادن $A^2=A-I$ در تساوی اخیر نتیجه می‌شود:

$$A^3=(A-I)-A=-I$$
$$A^{30}=(A^3)^{10}=(-I)^{10}=(-1)^{10}I^{10}=I$$

۸۸ — ۱ ۲ **۳** ۴

نکته: اگر $C^k=\bar O$ باشد، آن‌گاه $C^n=\bar O\ (n\ge k)$

$$C=(A+B)(A-B)=(A+B)A-(A+B)B$$
$$=A^2+BA-AB-B^2$$

بنابه فرض $A^2=B^2=I$، $AB=\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\end{bmatrix}$ و $BA=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}$ می‌باشد. پس داریم:

$$C=(A+B)(A-B)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\-2&-2\end{bmatrix}$$

$$C^2=C\times C=\begin{bmatrix}2&2\\-2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2\\-2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\bar O\Rightarrow C^{1401}=\bar O$$

۸۹ — ۱ **۲** ۳ ۴

بنابه فرض $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\1&0&0\end{bmatrix}$ می‌باشد. داریم:

نکته: اگر $(A\times B)\times C=[d_{ij}]$ آن‌گاه:
$d_{ij}=$ (سطر i ام A) (ماتریس B) (ستون j ام C)

A^3 درایهٔ نظیر سطر سوم و ستون اول = (سطر سوم A)(ماتریس A)(ستون اول A)

$$=[1\ 0\ 0]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

A^3 درایهٔ نظیر سطر سوم و ستون اول $=[1\ 0\ 0]\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=1\times1+0\times0+0\times1=1$

۹۰ — ۱ ۲ **۳** ۴

$$A+I=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$$

$$(A+I)^2=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}$$

$$(A+I)^6=(A+I)^2(A+I)^2(A+I)^2$$

$a=(A+I)^6$ درایهٔ سطر اول و ستون اول

$=((A+I)^2$ سطر اول$)((A+I)^2$ ماتریس$)((A+I)^2$ ستون اول$)$

$$=\begin{bmatrix}5&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$$

$$a=\begin{bmatrix}41&40\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}=41\times5+4\times40=205+160=365$$

$b=(A+I)^6$ درایهٔ سطر اول و ستون دوم

$=((A+I)^2$ سطر اول$)((A+I)^2$ ماتریس$)((A+I)^2$ ستون اول$)$

$$=\begin{bmatrix}5&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$$

$$b=\begin{bmatrix}41&40\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}=4\times41+5\times40=164+200=364$$

بنابراین $a-b=365-364=1$ می‌باشد.

۹۱ — $\boxed{1}$ ۲ ۳ ۴

نکته:

$$(I+A)^n=\binom{n}{0}I+\binom{n}{1}A+\binom{n}{2}A^2+\cdots+\binom{n}{n}A^n$$

نتیجه: اگر $A^n=O\ (n\ge2)$ آن‌گاه: $(I+A)^n=I+nA$

بنابه فرض، $A^2=O$ است. پس می‌توان نوشت:

$$(I-A)^4(I+A)^5=(I-4A)(I+5A)$$
$$=I^2+5A-4A-20A^2=I+A-20A^2=I+A$$

۹۲ — ۱ ۲ $\boxed{3}$ ۴

$$(I+A)^4=\binom{4}{0}I+\binom{4}{1}A+\binom{4}{2}A^2+\binom{4}{3}A^3+\binom{4}{4}A^4$$
$$\Rightarrow(I+A)^4=I+4A+6A^2+4A^3+A^4$$

(فرض) $A^2=A\Rightarrow A^3=A^2=A\Rightarrow A^4=A^2=A$

نکته: اگر ماتریس A چنان باشد که $A^2=A$، آن‌گاه: $A^n=A\ (n\ge2)$

$$(I+A)^4=I+4A+6A+4A+A=I+15A$$

۹۳ — ۱ ۲ $\boxed{3}$ ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}-1&\sqrt3\\-\sqrt3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&\sqrt3\\-\sqrt3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-3&-2\sqrt3\\2\sqrt3&-3+1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-2&-2\sqrt3\\2\sqrt3&-2\end{bmatrix}$$
$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}-2&-2\sqrt3\\2\sqrt3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&\sqrt3\\-\sqrt3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&0\\0&8\end{bmatrix}=8I$$
$$A^{40}=(A^3)^{13}A=(8I)^{13}A=2^{39}I^{13}A=2^{39}IA$$
$$=2^{39}A=\begin{bmatrix}-2^{39}&2^{39}\sqrt3\\-2^{39}\sqrt3&-2^{39}\end{bmatrix}$$

۹۴ — ۱ $\boxed{2}$ ۳ ۴

$$(\text{فرض})\ AB=A\xrightarrow{\times A}ABA=A^2\xrightarrow{BA=B\ (\text{فرض})}AB=A^2$$
$$\Rightarrow A=A^2$$

در نتیجه $A^n=A\ (n\ge2)$ و می‌توان نوشت:

$$A+A^2+A^3+\cdots+A^{1401}=\underbrace{A+A+A+\cdots+A}_{1401\ \text{مرتبه}}=1401A$$

۹۵ — ۱ $\boxed{2}$ ۳ ۴

$$C=AB=\begin{bmatrix}-1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1\\0&0\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow C^2=\begin{bmatrix}-1&-1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow C^2=-C\Rightarrow C^3=C^2\times C=-C\times C=-C^2=C$$
$$\Rightarrow C^4=C^3\times C=C^2=-C$$

و به‌صورت استقرایی نتیجه می‌شود $C^n=(-1)^{n-1}C$ و در ادامه داریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}-1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$
$$C^n+A^2=(-1)^{n-1}\begin{bmatrix}-1&-1\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}(-1)^n&(-1)^n\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1)^n+1&(-1)^n\\0&1\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس C^n+A^2 برابر است با $2+2(-1)^n$.

۹۶ — $\boxed{1}$ ۲ ۳ ۴

$$AB=I\Rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&\frac12&-1\\0&0&\frac14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b&c\\0&d&e\\0&0&f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}a&b-d&c-e+f\\0&\frac12d&\frac12e-f\\0&0&\frac14f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow a=1,d=2,f=4$$
$$\Rightarrow b-d=0\Rightarrow b=d=2,\ \frac12e-f=0\Rightarrow e=2\times4=8$$
$$c-e+f=0\Rightarrow c-8+4=0\Rightarrow c=4$$

بنابراین $B=\begin{bmatrix}1&2&4\\0&2&8\\0&0&4\end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های ماتریس B برابر است با:

$$4+4+2+2+8+1=21$$

۹۷ — ۱ ۲ $\boxed{3}$ ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&8\\0&9\end{bmatrix},\ A^3=A^2\times A$$
$$=\begin{bmatrix}1&8\\0&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&26\\0&27\end{bmatrix}$$
$$A^4=A^3\times A=\begin{bmatrix}1&26\\0&27\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&80\\0&81\end{bmatrix}$$

بنابراین به‌صورت استقرایی نتیجه می‌شود $A^n=\begin{bmatrix}1 & \bigcirc\\ 0 & 3^n\end{bmatrix}$. بنا به فرض مجموع درایه‌های قطر اصلی برابر ۲۴۴ است. داریم:

$$3^n+1=244 \Rightarrow 3^n=243=3^5 \Rightarrow n=5$$

۹۸ ۱ ۲ **۳** ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-3&1\end{bmatrix}$$

$$A^4=A^3\times A=\begin{bmatrix}1&0\\-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-4&1\end{bmatrix}$$

و به‌صورت استقرایی نتیجه می‌شود $A^n=\begin{bmatrix}1&0\\-n&1\end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های A^n برابر $2-n$ است.

۹۹ **۱** ۲ ۳ ۴

$$A^3=A^2\times A=(2A-I)\times A=2A^2-A$$
$$=2(2A-I)-A=3A-2I$$
$$A^4=A^3\times A=(3A-2I)A=3A^2-2A$$
$$=3(2A-I)-2A=4A-3I$$
$$A^5=A^4\times A=(4A-3I)A=4A^2-3A$$
$$=4(2A-I)-3A=5A-4I$$

و به‌صورت استقرایی نتیجه می‌شود $A^{10}=10A-9I$ لذا $a=10$ و $b=-9$ و $(a,b)=(10,-9)$.

۱۰۰ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$A^2=\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-4\\0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&-4\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-6\\0&1\end{bmatrix}$$

$$A^4=\begin{bmatrix}1&-6\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-8\\0&1\end{bmatrix}$$

و به‌صورت استقرایی نتیجه می‌شود $A^n=\begin{bmatrix}1&-2n\\0&1\end{bmatrix}$ و در ادامه داریم:

$$B=A+A^2+A^3+\cdots+A^n$$
$$=\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-4\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-6\\0&1\end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix}1&-2n\\0&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}n&-2-4-6-\cdots-2n\\0&n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n&-n(n+1)\\0&n\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}} 2n-n^2-n=n-n^2$$

۱۰۱ ۱ **۲** ۳ ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I \Rightarrow A^3=A^2A=IA=A$$
$$A^4=A^2A^2=I\times I=I$$
$$A^5=A^4A=IA=A$$

بنابراین به‌صورت استقرایی نتیجه می‌شود:

$$A^n=\begin{cases}A & \text{فرد } n\\ I & \text{زوج } n\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$A+A^2+A^3+\cdots+A^{200}=A+I+A+I+\cdots+I$$
$$=100A+100I=\begin{bmatrix}0&100\\100&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}100&0\\0&100\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}100&100\\100&100\end{bmatrix}$$

۱۰۲ ۱ **۲** ۳ ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}0&\sqrt[5]{2}&0\\\sqrt[5]{8}&0&0\\0&0&\sqrt[5]{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\sqrt[5]{2}&0\\\sqrt[5]{8}&0&0\\0&0&\sqrt[5]{4}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\sqrt[5]{16}&0&0\\0&\sqrt[5]{16}&0\\0&0&\sqrt[5]{16}\end{bmatrix}=\sqrt[5]{16}\,I$$
$$A^{10}=(A^2)^5=(\sqrt[5]{16}\,I)^5=16I^5=16I$$

پس مجموع درایه‌های قطر اصلی A^{10} برابر $16+16+16=48$ است.

۱۰۳ ۱ ۲ **۳** ۴

نکته: اگر $A=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^n=\begin{bmatrix}a^n&0&0\\0&b^n&0\\0&0&c^n\end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&9\end{bmatrix}\Rightarrow A^3=\begin{bmatrix}8&0&0\\0&-1&0\\0&0&27\end{bmatrix}$$

$$A^3-2A^2+5I=\begin{bmatrix}8&0&0\\0&-1&0\\0&0&27\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8&0&0\\0&2&0\\0&0&18\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&2&0\\0&0&14\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌ها برابر ۲۱ است.

۱۰۴ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$A^2=\begin{bmatrix}1&5&1\\0&2&7\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&5&1\\0&2&7\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1^2&15&39\\0&2^2&35\\0&0&3^2\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}1^2&15&39\\0&2^2&35\\0&0&3^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&5&1\\0&2&7\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1^3&\bigcirc&\bigcirc\\0&2^3&\bigcirc\\0&0&3^3\end{bmatrix}$$

پس ملاحظه می‌کنیم برای محاسبهٔ درایه‌های قطرهای اصلی نیازی به محاسبهٔ درایه‌های بالای قطر اصلی نیست و داریم:

$$A^4=\begin{bmatrix}1^4&\bigcirc&\bigcirc\\0&2^4&\bigcirc\\0&0&3^4\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{قطر اصلی}]{\text{مجموع درایه‌های}}1^4+2^4+3^4=1+16+81=98$$

نکته: اگر $A=\begin{bmatrix} a & x & y \\ ۰ & b & z \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^n=\begin{bmatrix} a^n & \bigcirc & \bigcirc \\ ۰ & b^n & \bigcirc \\ ۰ & ۰ & c^n \end{bmatrix}$

۱۰۵ (۱) (**۲**) (۳) (۴)

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

$A^۴$ سطر اول $=$ ($A^۲$ سطر اول) $\times A^۲$

$$=[۳\ \ -۴\ \ ۴]\begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}=[۱\ \ ۰\ \ ۰]$$

۱۰۶ (۱) (۲) (۳) (**۴**)

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۹-۶ & -۹+۹-۴ & ۱۲-۱۲+۴ \\ ۶-۶ & -۶+۹-۴ & ۸-۱۲+۴ \\ -۲ & ۳-۱ & -۴+۱ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$A^۴=A^۲A^۲=\begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۹-۸ & -۱۲+۴+۸ & ۱۲-۱۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۶+۶ & ۸-۲-۶ & -۸+۹ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=I$$

۱۰۷ (۱) (۲) (۳) (**۴**)

سطراول $A^۳=$(سطراول A)$\times A\times A=[۲\ \ ۱\ \ ۵]\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \\ -۳ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \\ -۳ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$

$$=[۶\ \ ۲\ \ ۲۴]\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \\ -۳ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}=[۳۰\ \ ۶\ \ ۸۶]$$

۱۰۸ (**۱**) (۲) (۳) (۴)

$A=\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A^۳$ درایه سطر اول ماتریس $=$ (سطراول A) $\times A\times A$

$\Rightarrow A^۳$ درایه سطر اول ماتریس $=[۳\ \ -۳\ \ ۴]\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$

$$=[۳\ \ -۴\ \ ۴]\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}=[۱\ \ -۱\ \ ۰]$$

۱۰۹ (۱) (۲) (**۳**) (۴)

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$A^۳=A^۲A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$A^۴=A^۳A=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۸ & ۰ & ۸ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۸ & ۰ & ۸ \end{bmatrix}$$

و با استدلال استقرایی نتیجه می‌شود:

$$A^{۱۱}=\begin{bmatrix} ۲^{۱۰} & ۰ & ۲^{۱۰} \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲^{۱۰} & ۰ & ۲^{۱۰} \end{bmatrix}$$

(مجموع درایه‌های $A^{۱۱}$) − (مجموع درایه‌های قطر اصلی)

$$=(۴\times۲^{۱۰}+۱)-(۲\times۲^{۱۰}+۱)=۲\times۲^{۱۰}=۲^{۱۱}$$

۱۱۰ (۱) (**۲**) (۳) (۴)

$$A^۲=\begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^۳=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=A$$

بنابراین $A^{۲k+۱}=A$ (k عدد طبیعی) و داریم:

$$A^{۴۲}+A^{۵۵}=A^{۴۱}\times A+A^{۲\times۲۷+۱}=A\times A+A=A^۲+A$$

$$=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

۱۱۱ (**۱**) (۲) (۳) (۴)

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^۳=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=I$$

$$A^{۱۰۰}=(A^۳)^{۳۳}\times A=I^{۳۳}\times A=I\times A=A$$

۱۱۲ (۱) (۲) (**۳**) (۴)

$$a_{ij}=|i-j|+j-i\Rightarrow A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$A^۳=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\bar{O}\Rightarrow A^k=\bar{O}\ (k\geq۳)$$

$$B=A+A^۲+A^۳+\cdots+A^{۱۴۰۱}=A+A^۲+\bar{O}+\cdots+\bar{O}$$

$$=A+A^۲=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۸ \\ ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}}۸+۲+۲=۱۲$$

۱۱۳ ۱ **۲** ۳ ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\3&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\3&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&2\\6&0&0\\0&3&0\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}0&0&2\\6&0&0\\0&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\3&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{bmatrix}=6I$$

$$A^{40}=(A^3)^{13}A=(6I)^{13}A=6^{13}I^{13}A=6^{13}IA=6^{13}A$$

$$\frac{1}{36^6}A^{40}=\frac{6^{13}}{36^6}A=\frac{6^{13}}{6^{12}}A=6A=\begin{bmatrix}0&6&0\\0&0&12\\18&0&0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ مجموع درایه‌ها $=36$

۱۱۴ ۱ ۲ **۳** ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&0&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&0&0\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-2&2\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}2&-2&2\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&0&0\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-4&4\\-2&2&-2\\2&-2&2\end{bmatrix}=2A^2$$

$$A^4=A^3\times A=2A^2\times A=2A^3=2\times 2A^2=4A^2$$

$$A^5=A^4\times A=4A^2\times A=4A^3=4\times 2A^2=8A^2$$

$\vdots$

$$A^n=2^{n-2}A^2\ (n\geq 2)\Rightarrow A^{100}=2^{98}A^2=2^kA^2\Rightarrow k=98$$

۱۱۵ ۱ **۲** ۳ ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&4\\0&1&0\\4&0&4\end{bmatrix}$$

$\vdots$

$$A^{n+1}=\begin{bmatrix}2^n&0&2^n\\0&1&0\\2^n&0&2^n\end{bmatrix}(n\geq 1)$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}}4\times 2^n+1=2^{n+2}+1$$

۱۱۶ ۱ **۲** ۳ ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1+2&2&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\1+2+3&3&1\end{bmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\1+2+3&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\1+2+3+4&4&1\end{bmatrix}$$

و با استدلال استقرایی نتیجه می‌شود:

$$A^{49}=\begin{bmatrix}1&0&0\\49&1&0\\1+2+3+\cdots+49&49&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x=1+2+3+\cdots+49=\frac{49(49+1)}{2}=49\times 25=1225$$

۱۱۷ ۱ ۲ **۳** ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1\\1&0\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}-1&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I$$

$$A^4=A^3A=(-I)A=-A\ ,\ A^5=A^4A=-A^2\ ,$$

$$A^6=A^5A=(-A^2)A=-A^3=I$$

بنابراین:

$$A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6=A+A^2+A^3-A-A^2-A^3=O$$

و به طور تناوبی نتیجه می‌شود:

$$A^7+A^8+A^9+A^{10}+A^{11}+A^{12}$$
$$=A^{13}+A^{14}+A^{15}+A^{16}+A^{17}+A^{18}$$
$$=A^{19}+A^{20}+A^{21}+A^{22}+A^{23}+A^{24}=O$$
$$2I+A+A^2+\cdots+A^{24}+A^{25}=2I+O+A^{25}$$
$$=2I+(A^3)^8A=2I+(-I)^8A=2I-A$$
$$=2\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\-1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع درایه‌ها}}2+1-1+1=3$$

۱۱۸ **۱** ۲ ۳ ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&0&-16\\-6&1&-12\\4&0&9\end{bmatrix}$$

$$A^2+2A=\begin{bmatrix}-7&0&-16\\-6&1&-12\\4&0&9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&0&16\\6&-2&12\\-4&0&-10\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=-I$$

$$(A^2+2A)^{10}=(-I)^{10}=I^{10}=I$$

۱۱۹ **۱** ۲ ۳ ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}5&-4&2\\2&-1&1\\-4&4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-4&2\\2&-1&1\\-4&4&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&-8&4\\4&-3&2\\-8&8&-3\end{bmatrix}$$

$$A^2-2A=\begin{bmatrix}9&-8&4\\4&-3&2\\-8&8&-3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}10&-8&4\\4&-2&2\\-8&8&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=-I$$

$$(A^2-2A+2I)^6=(-I+2I)^6=I^6=I$$

۱۲۰ ۱ ۲ **۳** ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&4&4\\-1&-3&-3\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&4&4\\-1&-3&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=-I$$

$$(A^3+3I)^4=(-I+3I)^4=(2I)^4=16I^4=16I$$

۱۲۱ ۱ ۲ **۳** ۴

$$A-kI=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\-1&0&-2\\1&1&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}k&0&0\\0&k&0\\0&0&k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k&-1&-2\\-1&-k&-2\\1&1&3-k\end{bmatrix}$$

$$(A-kI)^2=\begin{bmatrix}-k&-1&-2\\-1&-k&-2\\1&1&3-k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-k&-1&-2\\-1&-k&-2\\1&1&3-k\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}k^2-1&2k-2&4k-4\\2k-2&k^2-1&4k-4\\2-2k&2-2k&k^2-6k+5\end{bmatrix}$$

به ازای $k=1$ داریم $(A-I)^2=\bar{O}$، پس کم‌ترین مقدار $n+k$ برابر $3=1+2$ است.

۱۲۲ ۱ ۲ **۳** ۴

$$4A^2=3A\Rightarrow A^2=\frac{3}{4}A\Rightarrow A^2\times A=\frac{3}{4}A\times A\Rightarrow A^3=\frac{3}{4}A^2$$

$$=\frac{3}{4}(\frac{3}{4}A)=\frac{9}{16}A\,,\ A^4=A^3A=(\frac{9}{16}A)A$$

$$=\frac{9}{16}A^2=\frac{9}{16}(\frac{3}{4}A)=\frac{27}{64}A$$

۱۲۳ **۱** ۲ ۳ ۴

$$A^2=A\Rightarrow 4A^2=4A\Rightarrow 4A^2-4A+I=I\Rightarrow(2A-I)^2=I$$

$$\Rightarrow 2^2(A-\frac{I}{2})^2=I\Rightarrow(A-\frac{I}{2})^2=\frac{I}{4}$$

$$\Rightarrow(A-\frac{I}{2})^6=(\frac{I}{4})^3=\frac{I^3}{64}=\frac{1}{64}I$$

۱۲۴ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$2I-A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

$$(2I-A)^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}$$

$$(2I-A)^3=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\6&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}$$

و با استدلال استقرایی نتیجه می‌شود:

$$(2I-A)^{100}=\begin{bmatrix}1&0&0\\200&1&0\\100&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}}303$$

۱۲۵ ۱ ۲ **۳** ۴

$$ABC=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$(ABC)^2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$(ABC)^3=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

بنابراین کم‌ترین مقدار n برابر ۳ است.

۱۲۶ ۱ **۲** ۳ ۴

نکته: دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ برابر $|A|=ad-bc$ است.

$$\begin{vmatrix}a&-b\\2&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a&b\\6&-5\end{vmatrix}=32\Rightarrow 3a+2b-(-5a-6b)=32$$

$$\Rightarrow 8b+8a=32\Rightarrow a+b=4\,,\ \begin{vmatrix}4a&b\\-4&1\end{vmatrix}=4a+4b$$

$$=4(a+b)=4\times4=16$$

۱۲۷ ۱ ۲ **۳** ۴

نکته: اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند آن‌گاه $|AB|=|A||B|$.

$$A=\begin{bmatrix}3&1\\1&1\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=3\times1-1\times1=2$$

$$B=\begin{bmatrix}4&2\\0&3\end{bmatrix}\Rightarrow|B|=4\times3-0\times2=12$$

$$\frac{|A^2+AB|}{|B^2+BA|}=\frac{|A(A+B)|}{|B(B+A)|}=\frac{|A||A+B|}{|B||B+A|}$$

$$=\frac{|A|}{|B|}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

۱۲۸ ۱ **۲** ۳ ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}2&3\\-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\-1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I\Rightarrow A^3=A^2A=IA=A$$

$$A^4=(A^2)^2=I^2=I\,,\ A^5=A^4A=IA=A,\cdots,A^{2n-1}=A$$

$$B=A+A^3+A^5+\cdots+A^{2n-1}=\underbrace{A+A+A+\cdots+A}_{\text{مرتبه } n}=nA$$

$$\Rightarrow|B|=|nA|=n^2|A|=n^2\begin{vmatrix}2&3\\-1&-2\end{vmatrix}=n^2(-4+3)=-n^2$$

۱۲۹ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$$A+۲B=\begin{bmatrix}۵ & -۳\\ ۰ & -۳\end{bmatrix},\ ۲A-B=\begin{bmatrix}۵ & -۱۱\\ -۵ & ۴\end{bmatrix}$$

$$(A+۲B)+۲(۲A-B)=\begin{bmatrix}۵ & -۳\\ ۰ & -۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱۰ & -۲۲\\ -۱۰ & ۸\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۱۵ & -۲۵\\ -۱۰ & ۵\end{bmatrix}\Rightarrow ۵A=\begin{bmatrix}۱۵ & -۲۵\\ -۱۰ & ۵\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۳ & -۵\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A|=۳-۱۰=-۷$$

$$B=۲A-\begin{bmatrix}۵ & -۱۱\\ -۵ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶ & -۱۰\\ -۴ & ۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۵ & -۱۱\\ -۵ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |B|=-۲-۱=-۳\ ,\ \ |A|+|B|=-۷-۳=-۱۰$$

۱۳۰ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\ ,\ |A|=۳\Rightarrow ad-bc=۳$$

$$A+I=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+۱ & b\\ c & d+۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A+I|=(a+۱)(d+۱)-bc$$

$$A-I=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-۱ & b\\ c & d-۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A-I|=(a-۱)(d-۱)-bc$$

$$|A+I|+|A-I|=ad+a+d+۱-bc+ad-a-d+۱-bc$$

$$=۲(ad-bc)+۲\Rightarrow |A+I|+|A-I|=۲\times۳+۲=۸$$

۱۳۱ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$A^۲=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^۲+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^۲\end{bmatrix}$$

(فرض) $|A|=\Delta\Rightarrow ad-bc=\Delta\Rightarrow ad=bc+\Delta$ (۱)

(فرض) $(a^۲+bc)+(bc+d^۲)=T\Rightarrow a^۲+d^۲+۲bc=T$

$\Rightarrow a^۲+d^۲=T-۲bc$ (۲)

مربع مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A $=(a+d)^۲=a^۲+d^۲+۲ad$

با قرار دادن (۱) و (۲) در تساوی فوق داریم:

$$=T-۲bc+۲(bc+\Delta)=T+۲\Delta$$

۱۳۲ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$a_{ij}=\begin{cases}۲i-j & i<j\\ i & i\geq j\end{cases}\Rightarrow A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۲ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=۲$$

$$b_{ij}=\begin{cases}i+۲j & i\leq j\\ ۲+j & i>j\end{cases}\Rightarrow B=[b_{ij}]=\begin{bmatrix}۳ & ۵\\ ۳ & ۶\end{bmatrix}\Rightarrow |B|=۱۸-۱۵=۳$$

$$AX=B\Rightarrow |AX|=|B|\Rightarrow |A||X|=|B|\Rightarrow |X|=\frac{۳}{۲}$$

۱۳۳ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$A=[a_{ij}]_{۲\times۳}=[(-۱)^i-j]_{۲\times۳}=\begin{bmatrix}-۲ & -۳ & -۴\\ ۰ & -۱ & -۲\end{bmatrix}$$

$$B=[b_{ij}]_{۳\times۲}=[(-۱)^j+i]_{۳\times۲}=\begin{bmatrix}۰ & ۲\\ ۱ & ۳\\ ۲ & ۴\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}-۲ & -۳ & -۴\\ ۰ & -۱ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۲\\ ۱ & ۳\\ ۲ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۱ & -۲۹\\ -۵ & -۱۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A\times B|=(-۱۱)(-۱۱)-(-۵)(-۲۹)=۱۲۱-۱۴۵=-۲۴$$

۱۳۴ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$A^۲=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}=-I$$

$$A^۳=A^۲A=(-I)A=-A$$

$$A^۴=(A^۲)^۲=(-I)^۲=I\ ,A^۵=A^۴A=IA=A\ ,$$

$$A+A^۲+A^۳+A^۴=A-I-A+I=\bar{O}$$

توان‌های A با تناوب ۴ تکرار می‌شود. پس می‌توان نوشت:

$$B=\underbrace{(A+A^۲+A^۳+A^۴)}_{\bar{O}}+\underbrace{(A^۵+A^۶+A^۷+A^۸)}_{\bar{O}}+\cdots$$

$$+\underbrace{(A^{۲۰۱۷}+A^{۲۰۱۸}+A^{۲۰۱۹}+A^{۲۰۲۰})}_{\bar{O}}+A^{۲۰۲۱}+A^{۲۰۲۲}=A-I$$

$$=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ -۱ & -۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |B|=(-۱)(-۱)-(-۱)(۱)=۱+۱=۲$$

۱۳۵ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$x^۲-۴x+۱=۰\Rightarrow \alpha+\beta=-\frac{-۴}{۱}=۴\ ,\ \alpha\beta=\frac{۱}{۱}=۱$$

$$|A|=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha+\beta\\ -\beta & \alpha\end{vmatrix}=\alpha(\alpha+\beta)+\beta(\alpha+\beta)$$

$$=(\alpha+\beta)^۲=۴^۲=۱۶$$

۱۳۶ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

نکته: اگر A یک ماتریس ۲×۲ باشد آن‌گاه $|KA|=K^۲|A|$ (K عدد حقیقی)

$$A^۲=\begin{bmatrix}۰ & -a\\ a & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & -a\\ a & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a^۲ & ۰\\ ۰ & -a^۲\end{bmatrix}=-a^۲I$$

$$A^{۴n}=(A^۲)^{۲n}=(-a^۲I)^{۲n}=a^{۴n}I^{۲n}=a^{۴n}I$$

$$A^{۴n+۱}=A^{۴n}\times A=a^{۴n}I\times A=a^{۴n}A$$

$$A^{۴n}+A^{۴n+۱}=a^{۴n}I+a^{۴n}A=a^{۴n}(I+A)=a^{۴n}$$

$$\left(\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰ & -a\\ a & ۰\end{bmatrix}\right)=a^{۴n}\begin{bmatrix}۱ & -a\\ a & ۱\end{bmatrix}$$

$$|A^{۴n}+A^{۴n+۱}|=a^{۸n}\begin{vmatrix}۱ & -a\\ a & ۱\end{vmatrix}=a^{۸n}(۱+a^۲)$$

بنا به فرض دترمینان فوق برابر $a^{n+۳۵}+a^{n+۳۷}$ می‌باشد در نتیجه داریم:

$$a^{۸n}(۱+a^۲)=a^{n+۳۵}(۱+a^۲)\Rightarrow a^{۸n}=a^{n+۳۵}\Rightarrow ۸n=n+۳۵$$

$$\Rightarrow ۷n=۳۵\Rightarrow n=۵$$

۱۳۷ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ -۲ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ -۲ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & -۱\\ ۲ & ۲\end{bmatrix}=-A$$

نکته: به طور کلی اگر $A^۲=\lambda A$ آن‌گاه $A^n=\lambda^{n-۱}A$.

$$A^{۲۰۲۲}=(-۱)^{۲۰۲۱}A=-A$$

بنابه فرض $B=A+I$ در نتیجه:

$$A^{۲۰۲۲}+B=-A+A+I=I\Rightarrow |A^{۲۰۲۲}+B|=|I|=۱$$

۱۳۸ ۱ ۲ **۳** ۴

$$2A=\begin{bmatrix}|A| & -2\\ 2 & |A|\end{bmatrix}\Rightarrow |2A|=\begin{vmatrix}|A| & -2\\ 2 & |A|\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 2^2|A|=|A|^2+4\Rightarrow |A|^2-4|A|+4=0$$

$$\Rightarrow (|A|-2)^2=0\Rightarrow |A|=2\Rightarrow ||A|A|=|A|^2|A|=2^2\times 2=8$$

۱۳۹ **۱** ۲ ۳ ۴

$$2A+3I=\begin{bmatrix}9&4\\-2&3\end{bmatrix}\Rightarrow A=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}9&4\\-2&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3&2\\-1&0\end{bmatrix}$$

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)I=\bar{O}$$

$$\Rightarrow A^2-(3+0)A+(3\times 0-2(-1))I=\bar{O}$$

$$\Rightarrow A^2-3A+2I=O\Rightarrow A^2-3A=-2I$$

$$|A^2-3A|=|-2I|=(-2)^2=4$$

۱۴۰ **۱** ۲ ۳ ۴

$$C=A\times B=\begin{bmatrix}3&-1&2\\a&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&a\\-1&2\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14&3a\\3a&a^2+5\end{bmatrix}$$

$$|C|=14(a^2+5)-3a\times 3a=14a^2-9a^2+70=5a^2+70$$

پس به ازای هر a حقیقی، $|C|$ همواره مثبت است.

۱۴۱ **۱** ۲ ۳ ۴

نکته: اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه $|AB|=|BA|=|A||B|$

$$A\times B=\begin{bmatrix}7&8\\7&10\end{bmatrix}\Rightarrow |A\times B|=7\times 10-7\times 8=70-56=14$$

چون دترمینان ماتریس $B\times A$ با دترمینان ماتریس $A\times B$ برابر است، پس از بین گزینه‌ها تنها ماتریس $\begin{bmatrix}15&2\\8&2\end{bmatrix}$ برابر $B\times A$ می‌تواند باشد.

۱۴۲ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$AC=\begin{bmatrix}1&a&3\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\a&1\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2+10&a+2\\a+2&3\end{bmatrix}$$

(فرض) $ACB=52I\Rightarrow |ACB|=52^2\Rightarrow |AC||B|=52^2$

$$\Rightarrow ((3a^2+30)-(a+2)^2)\times 104=52^2$$

$$\Rightarrow 3a^2+30-a^2-4a-4=26$$

$\Rightarrow 2a^2-4a=0\Rightarrow a=0$ یا $a=2\xrightarrow{\text{مجموع}}2$

۱۴۳ ۱ **۲** ۳ ۴

یادآوری: اگر $a>0$ و مخالف ۱ باشد $(a\neq 1)$ آن‌گاه برای هر x و y مثبت داریم:

الف) $\log_a x+\log_a y=\log_a xy$

ب) $\log_a x-\log_a y=\log_a \frac{x}{y}$

$$A=\begin{bmatrix}\log 5&\log 2\\\log 2&\log 5\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=(\log 5)^2-(\log 2)^2$$

$$=(\log 5-\log 2)(\log 5+\log 2)$$

$$\Rightarrow |A|=\log\frac{5}{2}\times\log 10=\log 2/5\times 1=\log 2/5$$

۱۴۴ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\begin{vmatrix}10000^{\log x}&100^{\log x}\\4&1\end{vmatrix}=-4\Rightarrow 10000^{\log x}-4\times 100^{\log x}=-4$$

$$\Rightarrow (100^2)^{\log x}-4\times 100^{\log x}+4=0$$

$$\Rightarrow (100^{\log x})^2-4\times 100^{\log x}+4=0$$

$$\xrightarrow{100^{\log x}=t}t^2-4t+4=0\Rightarrow (t-2)^2=0$$

$$\Rightarrow t=2\Rightarrow 100^{\log x}=2\Rightarrow \log 100^{\log x}=\log 2$$

$$\Rightarrow \log x\times\log 10^2=\log 2\Rightarrow \log x=\frac{1}{2}\log 2=\log\sqrt{2}\Rightarrow x=\sqrt{2}$$

۱۴۵ ۱ ۲ **۳** ۴

نکته: ۱- اگر A یک ماتریس 2×2 یا 3×3 باشد، آن‌گاه $|A^n|=|A|^n$ (n عدد طبیعی است)

۲- اگر A یک ماتریس 2×2 و k یک عدد حقیقی باشد، آن‌گاه $|kA|=k^2|A|$

۳- اگر A یک ماتریس 3×3 و k یک عدد حقیقی باشد، آن‌گاه $|kA|=k^3|A|$

$$\left|\frac{1}{2}A^3\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^2|A^3|=\frac{1}{4}|A|^3=\frac{1}{4}\times 2^3=\frac{8}{4}=2$$

۱۴۶ ۱ ۲ ۳ **۴**

با توجه نکته تست قبل (شماره ۳) داریم:

$$||A|A|=|A|^3|A|=|A|^4=4^4=256$$

۱۴۷ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\begin{vmatrix}\tan\theta&\frac{1}{\cos\theta}\\ \tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}&\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\end{vmatrix}$$

$$=\tan\theta\left(\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)-\frac{1}{\cos\theta}\left(\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)$$

$$=\left(\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(\tan\theta-\frac{1}{\cos\theta}\right)=\tan^2\theta-\frac{1}{\cos^2\theta}$$

با استفاده از اتحاد $\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{vmatrix}\tan\theta&\frac{1}{\cos\theta}\\ \tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}&\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\end{vmatrix}=\tan^2\theta-(1+\tan^2\theta)=-1$$

۱۴۸ ۱ **۲** ۳ ۴

$$|A|^2-5|A|+6=0\Rightarrow (|A|-2)(|A|-3)=0$$

$\Rightarrow |A|=2$ یا $|A|=3$

چون درایه‌های ماتریس A اعداد طبیعی هستند، پس درایه‌های A به‌صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix}3&1\\1&1\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=3\times 1-1\times 1=3-1=2$$

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=4-1=3$$

پس کم‌ترین مقدار مجموع درایه‌ها برابر ۶ = ۱ + ۱ + ۲ + ۲ (۳ + ۱ + ۱ + ۱ = ۶) است.