

## راهنمای استفاده از کتاب

برای کسب بهترین نتیجه در امتحانات مدرسه و کنکور گام‌های زیر را به ترتیب برای هر فصل طی کنید.

### فیلم آموزشی

گام

اول

۱. هر فصل به تعدادی جلسه تقسیم شده است.
۲. برای استفاده از فیلم‌های آموزشی هر جلسه QR-Code های صفحه بعد را اسکن کنید.
۲. در هر جلسه مطالب کتاب درسی درس به درس تدریس شده است.
۳. تمرین‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی به صورت کامل تدریس شده است.

### درسنامه آموزشی

گام

دوم

۱. هر فصل به تعدادی قسمت تقسیم شده است.
۲. در هر قسمت آموزش کاملی به همراه مثال و تست ارائه شده است.
۳. سطح تست‌ها عموماً کمی بالاتر از مثال‌ها است. اگر دانش‌آموز وقت کافی ندارد یا می‌خواهد فقط در سطح امتحانات مدرسه درس بخواند، می‌تواند بدون این‌که مطلبی را از دست دهد از تست‌ها عبور کند.
۴. قسمت‌هایی تحت عنوان ویژه‌علاقمندان آورده شده است که ویژه‌آمادگی برای آزمون‌های تستی و کنکور است و مطالعه آن‌ها برای امتحانات مدارس ضروری نیست.

### پرسش‌های تشریحی

گام

سوم

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام دوم) تقسیم شده است.
۲. سؤالات از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۳. سؤالات دارای پاسخ تشریحی هستند.

### پرسش‌های چهارگزینه‌ای

گام

چهارم

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام دوم و سوم) تقسیم شده است.
۲. هر قسمت نیز دارای ریزطبقه‌بندی است.
۳. تست‌ها از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۴. تمامی تست‌های کنکور داخل و خارج از کشور قابل استفاده و منطبق بر کتاب درسی جدید آورده شده است.
۵. تست‌های فراتر از کتاب درسی با عنوان «ویژه‌علاقمندان» مشخص شده است.
۶. تست‌ها دارای پاسخ تشریحی هستند.

به جای آن‌که چندین کتاب بخوانید، کتاب‌های گاج را چندین بار بخوانید

## درسنامه آموزشی

### فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

- قسمت اول: مجموعه‌ها، بازه‌ها، مجموعه‌های... ۱۰  
قسمت دوم: متمم یک مجموعه، مجموعه‌های جدا از هم... ۱۷  
قسمت سوم: الگو، دنباله و دنباله حسابی ۲۲  
قسمت چهارم: دنباله هندسی ۳۳

### فصل دوم: مثلثات

- قسمت اول: نسبت‌های مثلثاتی ۳۷  
قسمت دوم: دایره مثلثاتی ۴۴  
قسمت سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ۵۱

### فصل سوم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

- قسمت اول: ریشه و توان، ریشه  $n$ ام ۵۵  
قسمت دوم: توان‌های گویا و قواعد رادیکال‌ها ۶۱  
قسمت سوم: اتحاد و تجزیه ۶۸  
قسمت چهارم: عبارت‌های گویا ۷۷

### فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها

- قسمت اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن ۸۲  
قسمت دوم: سهمی ۹۰  
قسمت سوم: تعیین علامت ۹۵

### فصل پنجم: تابع

- قسمت اول: تابع ۱۱۰  
قسمت دوم: دامنه و برد تابع، انواع تابع و انتقال نمودارها ۱۱۹

### فصل ششم: شمارش، بدون شمردن

- قسمت اول: شمارش ۱۳۲  
قسمت دوم: جایگشت ۱۳۶  
قسمت سوم: ترکیب ۱۴۰

### فصل هفتم: آمار و احتمال

- قسمت اول: فضای نمونه‌ای، پیشامد و اعمال روی... ۱۴۸  
قسمت دوم: احتمال رخداد یک پیشامد ۱۵۴  
قسمت سوم: قوانین احتمال ۱۶۰  
قسمت چهارم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه، نمونه، متغیر و... ۱۶۴

## FILM

- جلسه اول: مجموعه‌ها، بازه‌ها، مجموعه‌های... 80 min  
جلسه دوم: متمم یک مجموعه، مجموعه‌های جدا از هم... 88 min  
جلسه سوم: الگو و دنباله 106 min  
جلسه چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی 118 min  
جلسه پنجم: نسبت‌های مثلثاتی 84 min  
جلسه ششم: دایره مثلثاتی 109 min  
جلسه هفتم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی 96 min  
جلسه هشتم: ریشه و توان 72 min  
جلسه نهم: ریشه  $n$ ام 58 min  
جلسه دهم: توان‌های گویا و قواعد رادیکال‌ها 47 min  
جلسه یازدهم: اتحاد و تجزیه، عبارت‌های گویا 146 min  
جلسه دوازدهم: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن 165 min  
جلسه سیزدهم: سهمی 102 min  
جلسه چهاردهم: تعیین علامت 200 min  
جلسه پانزدهم: تابع 58 min  
جلسه شانزدهم: دامنه و برد تابع 100 min  
جلسه هفدهم: انواع تابع 125 min  
جلسه هجدهم: شمارش 74 min  
جلسه نوزدهم: جایگشت 70 min  
جلسه بیستم: ترکیب 90 min  
جلسه بیست و یکم: فضای نمونه‌ای، احتمال رخداد... 104 min  
جلسه بیست و دوم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه 30 min  
جلسه بیست و سوم: متغیر و انواع آن 40 min

## پرسش‌های تشریحی

### فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

- قسمت اول: مجموعه‌ها، بازه‌ها، مجموعه‌های... ۱۷۰  
قسمت دوم: متمم یک مجموعه، مجموعه‌های جدا از هم... ۱۷۱  
قسمت سوم: الگو، دنباله و دنباله حسابی ۱۷۲  
قسمت چهارم: دنباله هندسی ۱۷۳

### فصل دوم: مثلثات

- قسمت اول: نسبت‌های مثلثاتی ۱۸۲  
قسمت دوم: دایره مثلثاتی ۱۸۳  
قسمت سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ۱۸۴

### فصل سوم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

- قسمت اول: ریشه و توان، ریشه  $n$ ام ۱۹۳  
قسمت دوم: توان‌های گویا و قواعد رادیکال‌ها ۱۹۴  
قسمت سوم: اتحاد و تجزیه ۱۹۵  
قسمت چهارم: عبارت‌های گویا ۱۹۷

### فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها

- قسمت اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن ۲۰۸  
قسمت دوم: سهمی ۲۰۹  
قسمت سوم: تعیین علامت ۲۱۰

### فصل پنجم: تابع

- قسمت اول: تابع ۲۲۲  
قسمت دوم: دامنه و برد تابع، انواع تابع و انتقال نمودارها ۲۲۵

### فصل ششم: شمارش، بدون شمردن

- قسمت اول: شمارش ۲۳۷  
قسمت دوم: جایگشت ۲۳۹  
قسمت سوم: ترکیب ۲۴۰

### فصل هفتم: آمار و احتمال

- قسمت اول: فضای نمونه‌ای، پیشامد و اعمال روی... ۲۵۲  
قسمت دوم: احتمال رخداد یک پیشامد ۲۵۳  
قسمت سوم: قوانین احتمال ۲۵۴  
قسمت چهارم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه، نمونه، متغیر و... ۲۵۵

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای

### فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

- قسمت اول: مجموعه‌ها، بازه‌ها، مجموعه‌های... ۲۶۴  
قسمت دوم: متمم یک مجموعه، مجموعه‌های جدا از هم... ۲۶۶  
قسمت سوم: الگو، دنباله و دنباله حسابی ۲۶۸  
قسمت چهارم: دنباله هندسی ۲۷۴

### فصل دوم: مثلثات

- قسمت اول: نسبت‌های مثلثاتی ۲۹۷  
قسمت دوم: دایره مثلثاتی ۳۰۲  
قسمت سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ۳۰۳

### فصل سوم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

- قسمت اول: ریشه و توان، ریشه  $n$ ام ۳۲۴  
قسمت دوم: توان‌های گویا و قواعد رادیکال‌ها ۳۲۶  
قسمت سوم: اتحاد و تجزیه ۳۲۹  
قسمت چهارم: عبارت‌های گویا ۳۳۳

### فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها

- قسمت اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن ۳۵۲  
قسمت دوم: سهمی ۳۵۵  
قسمت سوم: تعیین علامت ۳۵۸

### فصل پنجم: تابع

- قسمت اول: تابع ۳۸۵  
قسمت دوم: دامنه و برد تابع، انواع تابع و انتقال نمودارها ۳۹۰

### فصل ششم: شمارش، بدون شمردن

- قسمت اول: شمارش ۴۰۸  
قسمت دوم: جایگشت ۴۱۰  
قسمت سوم: ترکیب ۴۱۱

### فصل هفتم: آمار و احتمال

- قسمت اول: فضای نمونه‌ای، پیشامد و اعمال روی... ۴۲۶  
قسمت دوم: احتمال رخداد یک پیشامد ۴۲۷  
قسمت سوم: قوانین احتمال ۴۳۲  
قسمت چهارم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه، نمونه، متغیر و... ۴۳۵

## فهرست فصل‌ها

۱ مجموعه، الگو و دنباله ۱۰

۲ مثلثات ۳۷

۳ توان‌های گویا و عبارتهای جبری ۵۵

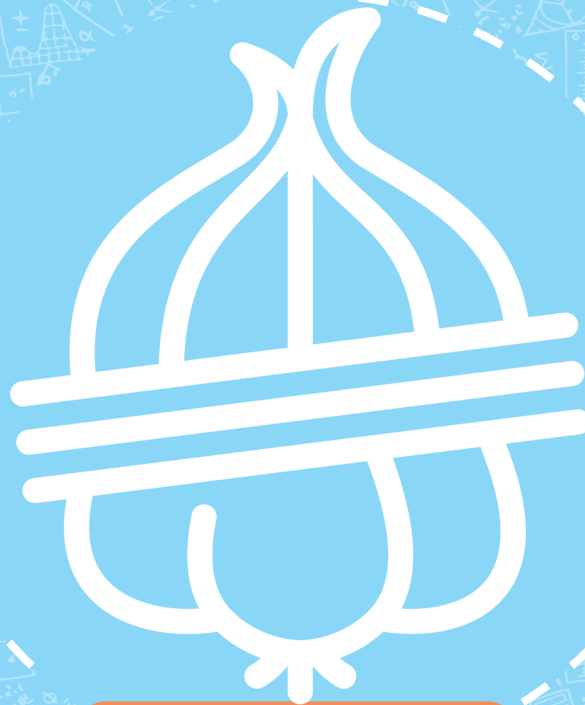
۴ معادله‌ها و نامعادله‌ها ۸۲

۵ تابع ۱۱۰

۶ شمارش، بدون شمارش ۱۳۲

۷ آمار و احتمال ۱۴۸

## بخش اول



# آموزش

۱. هر فصل به تعدادی قسمت تقسیم شده است.
۲. در هر قسمت آموزش کاملی به همراه مثال و تست ارائه شده است.
۳. سطح تست‌ها عموماً کمی بالاتر از مثال‌ها است. اگر دانش‌آموز وقت کافی ندارد یا می‌خواهد فقط در سطح امتحانات مدرسه درس بخواند، می‌تواند بدون این‌که مطلبی را از دست دهد از تست‌ها عبور کند.
۴. قسمت‌هایی تحت عنوان ویژه علاقمندان آورده شده است که ویژه آمادگی برای آزمون‌های تستی و کنکور است و مطالعه آن‌ها برای امتحانات مدارس ضروری نیست.

تست

۱۹۳

مثال

۲۵۵

قسمت اول

Mathematics

فصل

۱

مجموعه‌ها، بازه‌ها،  
مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مفهوم مجموعه

در ابتدای این درس، قصد داریم مطالب و مفاهیمی را در مورد مجموعه‌ها که در سال نهم با آن آشنا شده‌اید، یادآوری کنیم: در ریاضیات برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیای مشخص و دوبه‌دو متمایز (غیرتکراری) از مجموعه استفاده می‌شود. به هر یک از اشیای مجموعه یک عضو مجموعه می‌گوییم.

**قرارداد:** اگر  $A$  یک مجموعه و  $a$  عضوی از آن باشد، می‌نویسیم  $a \in A$  و اگر  $b$  عضوی از مجموعه  $A$  نباشد، می‌نویسیم  $b \notin A$  به‌عنوان مثال، اگر  $A = \{1, 2, 5\}$ ، آن‌گاه  $5 \in A$  و  $3 \notin A$  **مجموعه تهی:** مجموعه‌ای که عضوی نداشته باشد، مجموعه تهی نام دارد و با نماد  $\emptyset$  یا  $\{\}$  نشان داده می‌شود. **تذکر:** مجموعه تهی را نباید با مجموعه‌های  $\{\emptyset\}$  و  $\{\emptyset\}$  که هر کدام دارای یک عضو هستند، اشتباه بگیریم.

**مثال:** اگر  $A = \{-1, 0, \{-1\}, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}$  باشد، کدام یک از عبارتهای زیر درست و کدام یک نادرست است؟

- آ  $\{\{\emptyset\}\} \in A$  (ب) نادرست است.
- ب  $\{-1, 0\} \in A$  (پ) درست است.
- پ  $\{-1\} \notin A$  (ت) نادرست است.
- ت  $\{\emptyset\} \notin A$  (د) درست است.

**پاسخ:**  $A$  یک مجموعه ۵ عضوی است که اعضای آن  $-1$ ،  $0$ ،  $\{-1\}$ ،  $\{\emptyset\}$  و  $\{\{\emptyset\}\}$  می‌باشند، بنابراین:

**دو مجموعه مساوی:** دو مجموعه  $A$  و  $B$  برابرند هرگاه هر عضو  $A$ ، عضوی از  $B$  و هر عضو  $B$ ، عضوی از  $A$  باشد و می‌نویسیم  $A = B$

**نتیجه:** اگر عضوی در  $A$  باشد که در  $B$  نباشد یا عضوی در  $B$  باشد که در  $A$  نباشد، در این صورت مجموعه  $A$  با  $B$  برابر نیست و می‌نویسیم  $A \neq B$

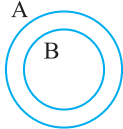
**تست:** دو مجموعه  $\{4, \{x, 2\}\}$  و  $\{y, \{z, 3\}\}$  با هم برابرند. مقدار  $xy + z$  کدام است؟

- ۱) ۸
- ۲) ۱۰
- ۳) ۱۴
- ۴) ۱۶

**پاسخ:** در دو مجموعه مساوی، اعضای آن‌ها یکسان است. بنابراین اگر  $\{4, \{x, 2\}\} = \{y, \{z, 3\}\}$  باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} y = 4 \\ \{x, 2\} = \{z, 3\} \end{cases} \Rightarrow xy + z = 12 + 2 = 14 \Rightarrow \text{گزینه (۳) صحیح است.}$$

**زیرمجموعه:** اگر هر عضو مجموعه  $B$ ، عضوی از مجموعه  $A$  باشد، می‌گوییم مجموعه  $B$  زیرمجموعه  $A$  است و می‌نویسیم  $B \subseteq A$



نمایش  $B \subseteq A$  با نمودار ون به صورت مقابل است:

**تست:** اگر  $A = \{1, 2\}$ ،  $B = \{1, \{1, 2\}\}$  و  $C = \{1, 2, \{1, \{1, 2\}\}\}$  سه مجموعه باشند، کدام گزینه نادرست است؟

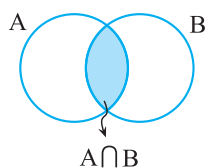
- ۱)  $A \in B$
- ۲)  $A \subseteq C$
- ۳)  $A \subseteq B$
- ۴)  $B \in C$

**پاسخ:** مجموعه  $B$  به صورت  $B = \{1, A\}$  است، پس  $A \in B$  می‌باشد و در نتیجه گزینه (۱) درست است. مجموعه  $B$  دارای دو عضو ۱ و  $A$  است، پس مجموعه  $B$  دارای زیرمجموعه‌های مقابل است:

مشاهده می‌شود که  $A$  زیرمجموعه  $B$  نمی‌باشد و در نتیجه گزینه (۲) نادرست است.

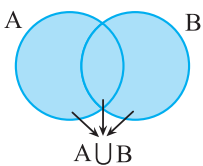
اگر دو عضو ۱ و ۲ از مجموعه  $C$  را در یک مجموعه قرار دهیم، یکی از زیرمجموعه‌های  $C$  به دست می‌آید. این زیرمجموعه، همان مجموعه  $A$  است و در نتیجه گزینه (۳) صحیح است. از طرفی مجموعه  $C$  به صورت  $C = \{1, 2, B\}$  است که درستی گزینه (۴) نتیجه می‌شود. بنابراین گزینه (۲) جواب است.

**نکته** تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $n$  عضوی برابر  $2^n$  می‌باشد. به عنوان مثال، یک مجموعه ۳ عضوی،  $2^3 = 8$  زیرمجموعه دارد.



**اشتراک دو مجموعه:** مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که هم عضو مجموعه  $A$  و هم عضو مجموعه  $B$  هستند. این مجموعه را با نماد  $A \cap B$  نشان می‌دهیم. در نمودار مقابل، قسمت رنگی، اشتراک دو مجموعه را نشان می‌دهد:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$



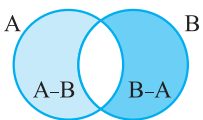
**اجتماع دو مجموعه:** مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که حداقل در یکی از دو مجموعه  $A$  و  $B$  هستند. این مجموعه را با نماد  $A \cup B$  نشان می‌دهیم. در نمودار مقابل، قسمت رنگی، اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$  را نشان می‌دهد:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

**تفاضل دو مجموعه:** مجموعه  $A - B$  (منهای  $B$ ) مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که عضو مجموعه  $A$  هستند ولی عضو مجموعه  $B$  نیستند.

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

**نکته** برای مشخص کردن مجموعه  $A - B$ ، باید اعضای مشترک  $A$  و  $B$  را از  $A$  حذف کنیم و بقیهٔ اعضای  $A$  را بنویسیم.



در نمودار مقابل، مجموعه‌های  $A - B$  و  $B - A$  رنگی هستند:

**مثال:** اگر  $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x \leq 4\}$  و  $B = \{2x \mid x \in A, 0 < x \leq 3\}$ ، مجموعه  $(A \cup B) - (A \cap B)$  را با اعضا مشخص کنید.

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x \leq 4\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{2x \mid x \in A, 0 < x \leq 3\} = \{2, 4, 6\}$$

$$\Rightarrow A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 6\}, \quad A \cap B = \{2, 4\}$$

$$\Rightarrow (A \cup B) - (A \cap B) = \{-1, 0, 1, 3, 6\}$$

**پاسخ:**

**نکته** (قوانین جبر مجموعه‌ها) برای هر سه مجموعه  $A$ ،  $B$  و  $C$  روابط زیر برقرار است:

$$1) \begin{cases} A \cup A = A \\ A \cap A = A \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} A, B \subseteq A \cup B \\ A \cap B \subseteq A, B \end{cases}$$

$$6) A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} A \cup B = B \\ A \cap B = A \end{cases}$$

### مجموعه‌های اعداد

مجموعه‌های اعداد طبیعی، حسابی و صحیح که به ترتیب با  $\mathbb{N}$ ،  $\mathbb{W}$  و  $\mathbb{Z}$  نمایش داده می‌شوند، به صورت زیر می‌باشند:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad \mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \quad \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

مجموعهٔ اعداد گویا را با  $\mathbb{Q}$  نشان می‌دهیم و به صورت روبه‌رو تعریف می‌شود:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

**تذکر** اعداد گویا به دو صورت کسر متعارفی و نماد یا بسط اعشاری، نمایش داده می‌شوند. به طور مثال داریم  $\frac{3}{5} = 0.6$  که در آن کسر متعارفی

و  $0.6$  نماد اعشاری این عدد گویا است.

### نمایش اعشاری عددهای گویا

نمایش اعشاری عددهای گویا به دو صورت است: ۱- مختوم (یا متناهی) ۲- نامتناهی و متناوب

۱) **مختوم (تحقیقی یا پایان پذیر):** این دسته از اعداد گویا، کسرهای متعارفی هستند که پس از ساده شدن، در مخرج آن‌ها فقط عامل ۲ یا ۵ یا هر دو وجود دارد و به هنگام تقسیم صورت بر مخرج، باقی‌مانده به صفر می‌رسد و عمل تقسیم در مرحله‌ای متوقف می‌شود. به طور مثال کسرهای  $\frac{3}{4}$ ،  $\frac{1}{5}$  و  $\frac{9}{20}$  مختوم هستند، زیرا در مخرج این کسرها فقط عامل ۲ یا ۵ وجود دارد و داریم  $\frac{3}{4} = 0.75$ ،  $\frac{1}{5} = 0.2$  و  $\frac{9}{20} = 0.45$

**۲) متناوب (پایان ناپذیر):** این دسته از اعداد گویا، کسرهای متعارفی هستند که پس از ساده شدن، در مخرج آن‌ها حداقل یک شمارنده اول به جز ۲ و ۵ وجود دارد و به هنگام تقسیم صورت بر مخرج، باقی‌مانده هرگز به صفر نمی‌رسد و در خارج قسمت بعد از ممیز یک یا چند رقم به طور متناوب تکرار می‌شود. به طور مثال کسرهای  $\frac{4}{33}$  و  $\frac{7}{6}$  متناوب هستند، زیرا در مخرج این کسرها حداقل یک شمارنده اول به جز ۲ و ۵ وجود دارد و داریم:

$$\frac{4}{33} = 0.121212\dots = 0.\overline{12} \quad , \quad \frac{7}{6} = 1.1666\dots = 1.\overline{16}$$

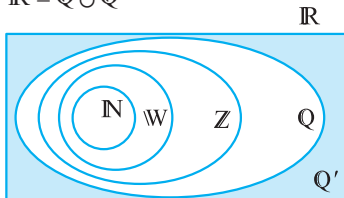
**مجموعه اعداد گنگ:** مجموعه اعدادی را که نتوان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد، مجموعه اعداد گنگ می‌نامیم.

مجموعه اعداد گنگ را با  $Q'$  یا  $Q^c$  نشان می‌دهیم.

**نکته** در نمایش اعشاری عددهای گنگ، تعداد ارقام اعشاری آن‌ها بی‌شمار بوده ولی متناوب نیست. به عنوان مثال، اعداد  $\sqrt{2} = 1.414213\dots$  و  $0.01001000100001\dots$  که نمایش اعشاری آن‌ها بی‌پایان و غیرمتناوب است، اعدادی گنگ هستند.

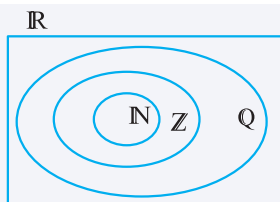
**مجموعه اعداد حقیقی:** اجتماع مجموعه عددهای گویا و عددهای گنگ را مجموعه عددهای حقیقی می‌نامیم و آن را با  $\mathbb{R}$  نمایش می‌دهیم. در واقع داریم:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

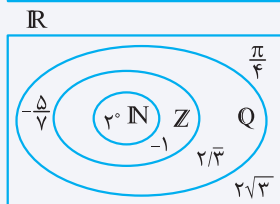


رابطه زیرمجموعه بودن بین این مجموعه‌ها به صورت  $Q' \subseteq \mathbb{R}$  و  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  می‌باشد.

**مثال:** اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب قرار دهید.



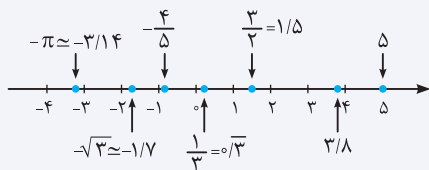
$$2\sqrt{3}, -1, -\frac{5}{7}, \frac{\pi}{4}, 2^0, 2/333\dots$$



**پاسخ:**  $2^0 = 1$  عددی طبیعی،  $-1$  عددی صحیح،  $-\frac{5}{7}$  و  $2/33$  اعدادی گویا و  $2\sqrt{3}$  و  $\frac{\pi}{4}$  اعدادی گنگ هستند. بنابراین:

**نکته** هر عدد دلخواه را می‌توان روی محور اعداد نمایش داد و همچنین هر نقطه روی محور اعداد نشان‌دهنده یک عدد حقیقی مشخص است.

**مثال:** هر یک از اعداد  $\frac{1}{3}$  و  $-\frac{4}{5}$ ،  $-\sqrt{3}$ ،  $5$ ،  $\frac{3}{4}$ ،  $-\pi$ ،  $3/8$  را روی محور مشخص کنید و بگویید کدام یک از آن‌ها گنگ هستند؟



**پاسخ:**

اعداد  $-\sqrt{3}$  و  $-\pi$  گنگ هستند.

**بازه (فاصله)**

زیرمجموعه‌هایی از  $\mathbb{R}$  که مشخص‌کننده یک قطعه یا برشی از محور اعداد حقیقی باشند، «بازه» یا «فاصله» نام دارند. در ادامه به معرفی انواع بازه‌ها می‌پردازیم.

**بازدهای محدود**

مجموعه همه اعداد حقیقی بین  $-1$  و  $2$  به همراه خود این دو عدد، به صورت  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$  است. برای نمایش چنین مجموعه‌هایی از نماد ساده‌تری استفاده می‌کنیم. مجموعه  $A$  که شامل هر دو نقطه انتهایی خود می‌باشد را به صورت  $[-1, 2]$  می‌نویسیم و آن را بازه بسته از  $-1$  تا  $2$  می‌نامیم. حال اگر نقاط ابتدایی و انتهایی این بازه، یعنی  $-1$  و  $2$  را حذف کنیم، آن‌گاه مجموعه‌ای مانند  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$  به دست می‌آید که آن را بازه باز بین  $-1$  و  $2$  می‌نامیم و با نماد  $(-1, 2)$  نمایش می‌دهیم. همچنین بازه‌هایی مثل  $[1, 4) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 4\}$  و  $(2, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 5\}$  که فقط شامل یکی از نقاط انتهایی خود باشد را بازه‌های نیم‌باز (نیم‌بسته) می‌نامیم.



در حالت کلی اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی و  $a < b$  باشد، آن‌گاه انواع بازه‌های محدود، هم‌چنین نماد، نمایش مجموعه‌ای و نمایش هندسی آن‌ها در جدول زیر خلاصه شده است:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	$(a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
بسته	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
نیم‌باز (نیم‌بسته)	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
نیم‌باز (نیم‌بسته)	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	

**مثال:** کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست می‌باشند؟ چرا؟

آ  $\frac{3}{2} \in (\frac{5}{4}, \frac{8}{5})$       ب  $\{-1, 0\} \subseteq (-2, 1)$       پ  $-\sqrt{5} \in [-3, -2)$       ت  $[-1, 1] \subseteq (-1, 1)$

**پاسخ:** آ) درست است، زیرا:  $\frac{5}{4} = 1.25, \frac{8}{5} = 1.6, \frac{3}{2} = 1.5 \Rightarrow \frac{3}{2} \in (\frac{5}{4}, \frac{8}{5})$

ب) درست است، زیرا بازه  $(-2, 1)$  شامل تمام اعداد حقیقی بین  $-2$  و  $1$  می‌باشد، پس بازه  $(-2, 1)$  شامل دو عدد  $-1$  و  $0$  می‌باشد. پس داریم:  $\{-1, 0\} \subseteq (-2, 1)$

پ) درست است، زیرا:  $-\sqrt{5} \approx -2.23 \Rightarrow -\sqrt{5} \in [-3, -2)$

ت) نادرست است، زیرا به‌طور مثال  $1 \in [-1, 1]$  ولی  $1 \notin (-1, 1)$

**نکته** هر بازه یک مجموعه است، پس اجتماع، اشتراک و تفاضل بین بازه‌ها تعریف می‌شود.

**مثال:** اگر  $A = [-2, 3)$  و  $B = (0, 4)$  باشد:

آ) نمایش مجموعه‌های  $A$  و  $B$  را بنویسید.  
 ب) نمایش هندسی هر یک از مجموعه‌های  $A$  و  $B$  را رسم کنید.  
 پ)  $A \cup B, A \cap B$  و  $A - B$  را به صورت بازه نوشته و روی محور اعداد مشخص کنید.

**پاسخ:** آ)  $A = [-2, 3) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 3\}$  ,  $B = (0, 4) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\}$

ب)

پ) مجموعه‌های  $A$  و  $B$  را روی یک محور نمایش می‌دهیم و سپس اجتماع، اشتراک و تفاضل آن‌ها را مشخص می‌کنیم:

$A \cup B = [-2, 4)$        $A \cap B = (0, 3)$   
 $A - B = [-2, 0]$

**تست:** اگر  $A = [-2, 1)$  ,  $B = (-1, 1)$  و  $C = [0, 4)$  باشند، مجموعه  $A - (B \cap C)$  کدام است؟

۱)  $[-2, -1)$       ۲)  $[-2, -1)$       ۳)  $[-2, 0]$       ۴)  $[-2, 0)$

**پاسخ:** گزینه (۴) صحیح است.  $B \cap C = [0, 1] \Rightarrow A - (B \cap C) = [-2, 1) - [0, 1] = [-2, 0)$

**طول و نقطه میانی در بازه‌های محدود**

انتهای بازه + ابتدای بازه = طول نقطه میانی ، ابتدای بازه - انتهای بازه = طول بازه

**تست:** اگر  $A = [-1, 2]$  و  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq -x + 3 \leq 5\}$  باشد، طول بازه  $A \cup B$  کدام است؟

۴ ۷

۲ ۶

۲ ۵

۱ ۴

**پاسخ:** با حل نامعادله  $2 \leq -x + 3 \leq 5$ ، حدود  $x$  و در نتیجه مجموعه  $B$  را مشخص می‌کنیم:

$$2 \leq -x + 3 \leq 5 \xrightarrow{-3} -1 \leq -x \leq 2 \xrightarrow{+(-1)} -2 \leq x \leq 1 \Rightarrow B = [-2, 1]$$

گزینه (۱) صحیح است.  $\Rightarrow 4 = 2 - (-2) = 4$  = ابتدای بازه - انتهای بازه = طول بازه  $A \cup B$   $\Rightarrow A \cup B = [-1, 2] \cup [-2, 1] = [-2, 2]$

### بازه‌های بی‌کران (نامحدود)

مجموعه همه اعداد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی ۲ به صورت  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$  است. از نماد  $[-\infty, 2]$  برای نمایش مجموعه  $A$  استفاده می‌کنیم و آن را بازه نیم‌باز  $-\infty$  (منفی بی‌نهایت) تا ۲ می‌نامیم.

از نمادهای  $+\infty$  (مثبت بی‌نهایت) و  $-\infty$  (منفی بی‌نهایت) برای نمایش بازه‌های نامحدود استفاده می‌کنیم. اگر حداقل در یک طرف بازه یکی از نمادهای  $+\infty$  یا  $-\infty$  به‌کار رفته باشد، آن بازه را بی‌کران (نامحدود) می‌خوانیم.

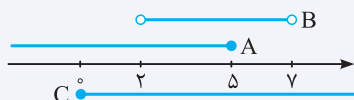
نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
نیم‌باز (نیم‌بسته)	$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
نیم‌باز (نیم‌بسته)	$(-\infty, a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
باز	$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
باز	$(-\infty, a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	

فرض کنیم  $a$  یک عدد حقیقی باشد. انواع بازه‌های نامحدود، نماد، نمایش مجموعه‌ای و نمایش هندسی آن‌ها در جدول مقابل خلاصه شده است:

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

**نکته** بازه  $(-\infty, +\infty)$  شامل تمام اعداد حقیقی است، به عبارت دیگر:

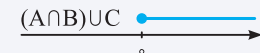
**مثال:** اگر  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$ ،  $B = (2, 7)$  و  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$  باشد، حاصل  $(A \cap B) \cup C$  را به صورت بازه نوشته و روی محور نشان دهید.



**پاسخ:** هر یک از مجموعه‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  را روی یک محور مشخص می‌کنیم و با توجه به آن، مجموعه  $(A \cap B) \cup C$  را به صورت بازه می‌نویسیم:

$$A \cap B = (-\infty, 5] \cap (2, 7) = (2, 5] \Rightarrow (A \cap B) \cup C = (2, 5] \cup [0, +\infty) = [0, +\infty)$$

نمایش هندسی مجموعه  $(A \cap B) \cup C$  به صورت مقابل است:



**تست:** اگر  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 3\}$ ،  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{x}{4} > 1\}$  و  $C = [-4, +\infty)$  باشند، مجموعه  $A \cup (B \cap C)$  چند عدد صحیح را شامل می‌شود؟

۴ ۹

۲ ۸

۲ ۷

۱ ۶

**پاسخ:** مجموعه  $B$  از حل نامعادله  $-\frac{x}{4} > 1$  به دست می‌آید:

$$-\frac{x}{4} > 1 \xrightarrow{\times 2} -x > 2 \xrightarrow{+(-1)} x < -2 \Rightarrow B = (-\infty, -2)$$

$$B \cap C = (-\infty, -2) \cap [-4, +\infty) = [-4, -2), \quad A = (-2, 3] \Rightarrow A \cup (B \cap C) = (-2, 3] \cup [-4, -2) = [-4, 3] - \{-2\}$$

بنابراین مجموعه اعداد صحیح واقع در مجموعه  $A \cup (B \cap C)$  به صورت زیر است:

$$\{-4, -3, -1, 0, 1, 2, 3\} \Rightarrow 7 = \text{تعداد اعداد صحیح} \Rightarrow \text{گزینه (۲) صحیح است.}$$

**تست:** اگر  $A = [-1, 4]$ ،  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{-x+a}{2} \leq 3\}$ ،  $C = [0, 4]$  و  $C = A \cap B$  باشند، مقدار  $a$  کدام است؟

۴ ۲

۳ ۲

۶ ۲

۴ ۱

**پاسخ:** با حل نامعادله  $\frac{-x+a}{2} \leq 3$ ، مجموعه  $B$  به دست می‌آید:

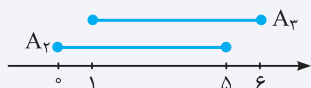
$$\frac{-x+a}{2} \leq 3 \xrightarrow{\times 2} -x+a \leq 6 \Rightarrow -x \leq 6-a \xrightarrow{\times (-1)} x \geq a-6 \Rightarrow B = [a-6, +\infty)$$

از طرفی  $C = A \cap B = [0, 4]$ ، پس  $a-6 = 0$  و از آنجا  $a = 6$ ، پس گزینه (۲) صحیح است.

**مثال:** اگر  $A_n = [n-2, n+3]$  بازه باشد، مجموعه‌های  $A_2$ ،  $A_3$ ،  $A_2 \cap A_3$  و  $A_2 - A_3$  را مشخص کنید.

**پاسخ:** با قرار دادن اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳ و ... به جای  $n$  در رابطه  $A_n = [n-2, n+3]$ ، هر یک از بازه‌های  $A_1$ ،  $A_2$ ،  $A_3$  و ... مشخص می‌شوند:

$$A_2 = [2-2, 2+3] = [0, 5] \quad , \quad A_3 = [3-2, 3+3] = [1, 6]$$



بازه‌های  $A_2$  و  $A_3$  روی محور به صورت روبه‌رو می‌باشند:

$$A_2 \cap A_3 = [0, 5] \cap [1, 6] = [1, 5]$$

$$A_2 - A_3 = [0, 5] - [1, 6] = [0, 1]$$

**تست:** اگر  $n$  یک عدد طبیعی و  $A_n = [(-1)^n n, 2n]$  بازه باشد، مجموعه  $(A_1 \cup A_2) - A_1$ ، شامل چند عدد صحیح است؟

۴ ۱

۳ ۲

۳ ۲

۴ ۱

$$A_1 = [(-1)^1(1), 2(1)] = [-1, 2] \quad , \quad A_2 = [(-1)^2 \times 2, 2(2)] = [2, 4]$$

**پاسخ:**

$$\Rightarrow A_1 \cup A_2 = [-1, 2] \cup [2, 4] = [-1, 4]$$

$$\Rightarrow (A_1 \cup A_2) - A_1 = [-1, 4] - [-1, 2] = (2, 4]$$

مجموعه  $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 4\}$  شامل دو عدد صحیح ۳ و ۴ است و در نتیجه گزینه (۳) صحیح است.

### مجموعه‌های منتهای و نامنتهای

**مجموعه منتهای (باپایان):** مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی باشد مجموعه منتهای می‌نامیم.

**مجموعه نامنتهای (بی‌پایان):** مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن را نتوان با یک عدد حسابی بیان کرد و در واقع تعداد اعضای آن از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ‌تر باشد، مجموعه نامنتهای می‌گوییم. به عبارت دیگر مجموعه‌ای که منتهای نباشد را مجموعه نامنتهای می‌گوییم.

**مثال:** فرض کنید  $A$  مجموعه مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۲ و  $B$  مجموعه مضرب‌های طبیعی ۴ باشد، کدام یک از مجموعه‌های  $A$  و  $B$  منتهای و کدام یک نامنتهای است؟

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \quad , \quad B = \{4, 8, 12, 16, \dots\}$$

**پاسخ:** نمایش اعضای هر یک از مجموعه‌های  $A$  و  $B$  به صورت زیر می‌باشد:

مجموعه  $A$ ، ۶ عضو دارد بنابراین یک مجموعه منتهای است، اما تعداد عضوهای مجموعه  $B$  را نمی‌توان با یک عدد حسابی بیان کرد، پس  $B$  یک مجموعه نامنتهای است.

**قرارداد:** اگر  $A$  یک مجموعه منتهای باشد، آن‌گاه تعداد عضوهای مجموعه  $A$  را با  $n(A)$  نمایش می‌دهیم.

**نکته** مجموعه تهی ( $\emptyset$ ) یک مجموعه منتهای است، زیرا تعداد عضوهای آن صفر است و صفر نیز یک عدد حسابی می‌باشد:  $n(\emptyset) = 0$ ،  $0 \in \mathbb{W}$

**تذکر** تعداد اعضای برخی از مجموعه‌های منتهای ممکن است بسیار زیاد باشد، با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی می‌توان تعداد آن‌ها را به دست آورد.

به عنوان مثال، مجموعه درخت‌های شهر تهران، مجموعه‌ای با تعداد عضوهای زیاد است ولی یک مجموعه منتهای است.

**مثال:** کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی و کدام یک نامتناهی است؟

- آ) مجموعه اعداد مربع کامل دورقمی  
 ب) مجموعه درخت‌های جنگل‌های شمال  
 ج) مجموعه دانش‌آموزان کشور  
 د) مجموعه اعداد گویای بین ۰ و ۱  
 ه)  $\{x \in \mathbb{Z} \mid -5 < x \leq 4\}$   
 ز) مجموعه اعداد طبیعی زوج

**پاسخ:** آ) مجموعه اعداد مربع کامل دورقمی به صورت  $A = \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}$  می‌باشد که یک مجموعه متناهی است.

ب) بین دو عدد ۰ و ۱ بی‌شمار عدد گویا وجود دارد، بنابراین مجموعه اعداد گویای بین ۰ و ۱، یک مجموعه نامتناهی است.

پ) هر چند تعداد درخت‌های جنگل‌های شمال بسیار زیاد است ولی تعداد آن‌ها را می‌توان با یک عدد حسابی بیان کرد، پس این مجموعه یک مجموعه متناهی است.

ت) مجموعه  $\{x \in \mathbb{Z} \mid -5 < x \leq 4\} = \{-4, -3, \dots, 3, 4\}$  یک مجموعه متناهی ۹ عضوی است.

ث) تعداد دانش‌آموزان کشور را می‌توان با یک عدد حسابی بیان کرد، اگر چه مجموعه دانش‌آموزان کشور، مجموعه‌ای با تعداد اعضای بسیار زیاد است ولی متناهی می‌باشد.

ج) مجموعه اعداد طبیعی زوج  $E = \{2, 4, 6, \dots\}$  یک مجموعه نامتناهی است، زیرا تعداد اعضای آن را نمی‌توان با یک عدد حسابی بیان نمود.

**تست:** اگر  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 - x \leq 2x - 1 < 7\}$  و  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{1}{x} < 0\}$ ، در این صورت کدام مجموعه زیر نامتناهی است؟

- ۱)  $A$   
 ۲)  $A - B$   
 ۳)  $A \cap B$   
 ۴)  $B - A$

**پاسخ:** هر یک از مجموعه‌های  $A$  و  $B$  را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$$2 - x \leq 2x - 1 < 7 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 < 7 \Rightarrow 2x < 8 \Rightarrow x < 4 \\ 2 - x \leq 2x - 1 \Rightarrow 3 \leq 3x \Rightarrow 1 \leq x \end{cases} \Rightarrow 1 \leq x < 4 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} A = \{1, 2, 3\}$$

$$\frac{1}{x} < 0 \xrightarrow{x < 0} x < 0 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} B = \{\dots, -3, -2, -1\}$$

مجموعه‌های  $A$ ،  $A - B = A$  و  $A \cap B = \emptyset$  متناهی و مجموعه  $B - A = B$  یک مجموعه نامتناهی است. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

**نکته:** اگر  $A$  مجموعه‌ای متناهی و  $B$  مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه مجموعه‌های  $A \cap B$  و  $A - B$ ، متناهی و مجموعه‌های  $A \cup B$

و  $B - A$ ، نامتناهی هستند.

**نکته:** اگر  $A \subseteq B$  باشد، آن‌گاه:

(۱) اگر  $B$  مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه  $A$  حتماً متناهی است.

(۲) اگر  $B$  مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه  $A$  می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

(۳) اگر  $A$  مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه  $B$  می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

(۴) اگر  $A$  مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه  $B$  حتماً نامتناهی است.



قسمت اول: مجموعه‌ها، بازه‌ها، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۱. درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.
 

پ $-\sqrt{4} \notin \mathbb{Q}$	ب $\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{Q}'$	آ $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$
ج $0 \in \{0, 1\}$	ث $-4 \in \{-5, 1\}$	ت $\pi - 3/14 \in \mathbb{Q}$
خ $\sqrt{3} \in (2, 3)$	ح $\frac{2}{3} \in (0, 1)$	چ $-1 \in (-1, 2]$
ر $\emptyset \subseteq (-\infty, 0]$	ذ $(0, 1] = [0, 1)$	د $(n \in \mathbb{N}) \frac{n}{n+1} \in (0, 1)$
س $(-1, 1) \subseteq \mathbb{Q}$	ز $\{0, 1, 2\} \subseteq [-1, 4)$	ز $[-1, 1] \subseteq [-1, 2)$
ص $\{x \in \mathbb{Q} \mid -1 < x < 0\} = (-1, 0)$	ض $-6 \times 10^{-4} \in (-1, 0)$	ش $6/023 \times 10^{23} \in (100, +\infty)$
۲. یک نمودار ون مناسب رسم کرده و اعداد زیر را روی آن و در محل مناسب قرار دهید.
 
$$-\frac{7}{2}, \sqrt{5}, \frac{\sqrt{16}}{2}, -\frac{\pi}{2}, \sqrt{2} - 1/4, 1/5121212\dots, -1/2 \times 10^4$$
۳. هر یک از بازه‌های زیر را به صورت مجموعه نمایش دهید و نمایش هندسی آن‌ها را رسم کنید.
 

آ $[-1, 4)$	ب $(0, 2]$	پ $(0, 2)$	ت $[-2, -1]$
ث $[-2, +\infty)$	ج $(-\infty, 1]$	چ $(1, +\infty)$	خ $(-\infty, 2)$
۴. هر یک از مجموعه‌های زیر را در صورت امکان به صورت بازه بنویسید.
 

آ $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 2\}$	ب $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$	پ $\{x \in \mathbb{Q} \mid -1 \leq x < 2\}$	ت $\{x \in \mathbb{Q}' \mid x < 1\}$
---	--------------------------------------	---	--------------------------------------
۵. حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آن‌ها روی یک محور به دست آورید.
 

آ $(-2, 5] \cap (-1, 7)$	ب $[-4, 0] \cap [-1, +\infty)$	پ $[-2, 4) \cup (0, 5]$	ت $(-\infty, -1) \cup [-1, +\infty)$
ث $(-\infty, 2) - (0, 3)$	ج $(0, 5] - [2, +\infty)$	چ $(-1, 0] \cap [0, 2)$	خ $(-\infty, -1) \cup (-\infty, 2)$
۶. اگر  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$  و  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$  باشند، بازه‌هایی را که با مجموعه‌های  $A \cup B$  و  $A \cap B$  تعریف شده‌اند مشخص کنید.
۷. اگر  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$ ،  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$ ، و  $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{-x+3}{4} \leq 1\right\}$  باشند، مجموعه‌های زیر را به کمک بازه نمایش دهید.
 

آ $C$	ب $A \cup B$	پ $B \cap C$
ت $A - B$	ث $B - (A \cup C)$	ج $(A \cap B) \cup C$
۸. مجموعه‌های  $\{0\}$ ،  $\mathbb{R}$ ،  $\{-1, 2\}$ ،  $\mathbb{R} - \{3, 4\}$ ،  $[2, 5]$  و  $[0, 1) - [-1, 4]$  را روی محور نشان دهید و سپس هر یک از آن‌ها را به صورت اجتماع چند بازه بنویسید.
۹. اگر  $\frac{2x+1}{3} \in [-2, 1)$  باشد، حدود  $x$  را مشخص کنید.
۱۰. کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی و کدام یک نامتناهی است؟
 

آ مجموعه اعداد صحیح کوچک‌تر از ۲	ب مجموعه اعداد طبیعی عدد ۲۰	پ مجموعه اعداد طبیعی پنج رقمی
ث مجموعه ارقام بعد از ممیز عدد $\sqrt{5}$	ج مجموعه روستاهای ایران	ت مجموعه اعداد گنگ بین ۰ و ۱

- ج مجموعه اعداد اول  
 د مجموعه کسرها با مخرج ۲  
 ر بازه  $(-۱, ۲)$   
 د مجموعه اعداد اول زوج و دو رقمی  
 ر مجموعه مولکول‌های آب در یک مول آب  
 {۱ + (-۱)<sup>n</sup> | n ∈ ℕ}
۱۱. فرض کنید  $U$  مجموعه تمام مضرب‌های طبیعی ۶ باشد.
- آ مجموعه  $U$  را با اعضای آن نمایش دهید.  
 ب  $U$  متناهی است یا نامتناهی؟  
 پ یک زیرمجموعه متناهی و یک زیرمجموعه نامتناهی از  $U$  بنویسید.  
 ت دو زیرمجموعه نامتناهی از  $U$  مانند  $A$  و  $B$  بنویسید که  $A \subseteq B$  باشد.  
 ث دو زیرمجموعه نامتناهی از  $U$  مانند  $C$  و  $D$  بنویسید که  $U = C \cup D$  و  $C \cap D = \emptyset$

۱۲. به سؤالات زیر پاسخ دهید.

- آ مجموعه  $W - \mathbb{N}$  متناهی است یا نامتناهی؟  
 ب دو مجموعه نامتناهی متمایز مثال بزنید که یکی از آن‌ها زیرمجموعه دیگری باشد.  
 پ دو مجموعه نامتناهی  $A$  و  $B$  مثال بزنید که  $A \subseteq B$  و  $B - A$  متناهی باشد.  
 ت دو مجموعه نامتناهی  $A$  و  $B$  مثال بزنید که  $A \subseteq B$  و  $B - A$  نامتناهی باشد.  
 ث اگر  $A \subseteq B$  و  $B$  مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه  $A$  متناهی است یا نامتناهی؟  
 ج اگر  $A \subseteq B$  و  $B$  مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه  $A$  متناهی است یا نامتناهی؟  
 چ اگر  $A \subseteq B$  و  $A$  مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه  $B$  متناهی است یا نامتناهی؟  
 ح اگر  $A \subseteq B$  و  $A$  مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه  $B$  متناهی است یا نامتناهی؟

### قسمت دوم: متمم یک مجموعه، مجموعه‌های جدا از هم، و تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

۱۳. اگر  $U = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$  مجموعه مرجع باشد و  $A = \{۱, ۲, ۴, ۵\}$ ،  $B = \{۲, ۳, ۶\}$  و  $C = \{۱, ۵, ۶\}$ ، هریک از مجموعه‌های زیر را با اعضا نمایش دهید.

آ  $A \cap B'$       ب  $A' \cup C'$       پ  $B \cap (A \cup C)'$       ت  $A' - B'$

۱۴. مجموعه شمارنده‌های طبیعی دو عدد ۲۴ و ۱۵ را به ترتیب  $A$  و  $B$  بنامید. اگر  $U = \{۱, ۲, \dots, ۲۵\}$  باشد، ابتدا هریک از مجموعه‌های زیر را با اعضا نشان دهید و سپس تعداد عضوهای هریک را به دست آورید.

آ  $A'$       ب  $A \cup B$       پ  $B \cap A'$   
 ت  $A' \cup B'$       ث  $A' \cap B'$

۱۵. اگر  $A$  زیرمجموعه‌ای دلخواه از مجموعه مرجع  $U$  باشد، ساده شده عبارت  $(A' \cap \emptyset)' \cup (A' - (A \cap A'))$  را بنویسید.

۱۶.  $\mathbb{R}$  را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید و متمم هریک از مجموعه‌های زیر را به صورت بازه یا اجتماعی از بازه‌ها بنویسید.

آ  $(-۱, ۰]$       ب  $\mathbb{W}$       پ  $(-\infty, ۲)$   
 ت  $(-۱, +\infty)$       ث  $[۰, ۴] - [۱, ۲)$       ج  $(-۱, ۳) \cup (۵, +\infty)$

۱۷.  $Z$  را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.

- آ مجموعه‌ای نامتناهی مثل  $A$  ارائه کنید که  $A'$  هم نامتناهی باشد.  
 ب مجموعه‌ای نامتناهی مثل  $B$  ارائه کنید که  $B'$  متناهی باشد.  
 پ اگر  $C$  مجموعه‌ای نامتناهی باشد،  $C'$  متناهی است یا نامتناهی؟  
 ت اگر  $D$  مجموعه‌ای متناهی باشد،  $D'$  متناهی است یا نامتناهی؟

۱۸. فرض کنیم  $A$  و  $B$  زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع  $U$  باشد به طوری که  $n(U) = ۸۰$ ،  $n(A) = ۲۱$ ،  $n(B) = ۳۵$  و  $n(A \cap B) = ۱۲$ . مطلوب است:

آ  $n(B')$       ب  $n(A \cup B)$       پ  $n(A - B)$       ت  $n(B \cap A')$   
 ث  $n(A' \cup B')$       ج  $n(A' \cap B')$       چ  $n((A - B) \cup (B - A))$

۱۹. اگر  $2n(A) = 2n(B) = 6n(A \cap B)$  باشد، حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

آ  $\frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)}$       ب  $\frac{n(A \cup B) - n(A \cap B)}{n(A - B)}$

۲۰. به وسیله نمودار ون نشان دهید:

آ اگر  $A \subseteq B \subseteq U$ ، آن‌گاه  $B' \subseteq A' \subseteq U$       ب  $A' - B' = B - A$

۲۱. در یک نظرسنجی از ۱۰۰ نفر مشخص شده است که ۵۰ نفر به سریال‌های طنز و ۶۰ نفر به سریال‌های خانوادگی علاقمند هستند. اگر ۸۰ نفر به حداقل یکی از این دو نوع سریال علاقمند باشند، مطلوب است تعداد افرادی که:

آ به هر دو نوع سریال علاقمند باشند.

ب به سریال‌های طنز علاقمندند ولی به سریال‌های خانوادگی علاقمند نیستند.

پ نه به سریال‌های طنز علاقمند هستند و نه به سریال‌های خانوادگی.

۲۲. یک باشگاه ورزشی ۷۰ عضو دارد. ۴۰ نفر عضو تیم فوتبال، ۲۵ نفر عضو تیم والیبال و ۵۵ نفر حداقل در یکی از این دو رشته فعالیت می‌کنند.

آ چند نفر در هر دو رشته فوتبال و والیبال فعالیت می‌کنند.

ب چند نفر در هیچ یک از این دو رشته فعالیت نمی‌کنند.

پ چند نفر فوتبال بازی می‌کنند ولی والیبال بازی نمی‌کنند.

### قسمت سوم: الگو، دنباله و دنباله حسابی



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

۲۳. به تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته در شکل‌های مقابل توجه کنید:

اگر  $a_n$  تعداد چوب کبریت‌های شکل  $n$  ام باشد، آن‌گاه:

آ  $a_1, a_2, a_3, a_4$  را بنویسید.

ب تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته در مرحله  $n$  ام را بر حسب  $n$  بنویسید.

پ در شکل سی‌ام چند چوب کبریت به کار رفته است؟

۲۴. در یک الگوی خطی، جملات پنجم و یازدهم به ترتیب ۳۰ و ۷۲ می‌باشند.

آ جمله عمومی الگو را بنویسید.

ب جمله سی‌ام را مشخص کنید.

پ جمله چندم الگو برابر ۴۱۵ می‌باشد؟

۲۵. پنج دنباله و پنج جمله عمومی به صورت زیر داده شده است. مشخص کنید که هر جمله عمومی مربوطه به کدام دنباله است؟

•  $a_n = \frac{4n}{2n-1}$       •  $b_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$       •  $c_n = n^2 + 2n$       •  $d_n = 2 - n$       •  $t_n = \frac{2 + (-1)^n n^2}{n^2 + 1}$

$1, 0, -1, \dots$        $-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$        $\frac{1}{2}, \frac{6}{5}, -\frac{7}{10}, \dots$        $3, 8, 15, \dots$        $4, \frac{8}{3}, \frac{12}{5}, \dots$

۲۶. در هر قسمت، سه جمله بعدی دنباله را بنویسید. همچنین در سه قسمت اول، جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.

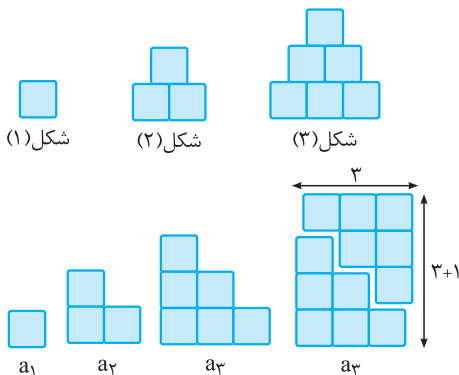
آ  $-1, 3, 7, \dots$       ب  $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots$       پ  $3, 1, \frac{1}{3}, \dots$       ت  $1, 2, 4, 7, \dots$

۲۷. جمله عمومی یک دنباله به صورت  $a_n = \frac{3n+2}{n+4}$  است.

آ چهار جمله اول دنباله را بنویسید.

ب جمله چندم دنباله، برابر  $\frac{5}{3}$  است؟

۲۸. الگوی مقابل را در نظر بگیرید:



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

$a_1$

$a_2$

$a_3$

$a_4$

آ شکل بعدی را رسم و سپس تعداد مربع‌های هر شکل را به صورت یک دنباله تا جمله هفتم آن بنویسید.

ب آیا دنباله حاصل یک دنباله خطی است؟ چرا؟

پ شکل‌های الگوی بالا را به صورت مقابل تبدیل کنید. با توجه به تصویر حاصل،  $a_n$  را بر حسب  $n$  به دست آورید.

ت به کمک قسمت (پ)، حاصل عبارت  $1 + 2 + 3 + \dots + n$  را به دست آورید.

۲۹. جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله اول دنباله را بنویسید و سپس به هریک از آن‌ها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

$a_n = 3n$  (آ)       $b_n = 4n + 2$  (ب)       $c_n = n^2 + 1$  (پ)       $d_n = n^2 + 2n$  (ت)

۳۰. برای دنباله‌های درجه دوم زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله عمومی هر دنباله را بیابید.

$3, 9, 19, \dots$  (آ)       $2, 6, 12, \dots$  (ب)

۳۱. از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و در هریک از آن‌ها قدرنسبت را تعیین کنید.

$3, 8, 13, \dots$  (آ)       $2, 4, 7, 11, \dots$  (ب)       $8, 4, 0, -4, \dots$  (پ)       $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$  (ت)  
 $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \dots$  (ث)       $-1, -1, -1, -1, \dots$  (ج)       $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \dots$  (چ)

۳۲. یک دنباله حسابی مثال بزنید که:

(آ) قدرنسبت آن مثبت و جمله سوم آن ۵ باشد.      (ب) قدرنسبت آن منفی و جمله پنجم آن -۳ باشد.

(پ) فقط سه جمله مثبت داشته باشد.      (ت) فقط چهار جمله منفی داشته باشد.

۳۳. در یک دنباله حسابی، جملات پنجم و دوازدهم به ترتیب ۲ و ۴۴ می‌باشند. جمله سی و یکم دنباله را مشخص کنید.

۳۴. در یک دنباله حسابی، جمله یازدهم، ۱۲ واحد کم‌تر از جمله هفتم آن است. اگر جمله پنجم آن ۱۷- باشد، دنباله را مشخص کنید.

۳۵. در یک دنباله حسابی مجموع چهار جمله اول ۲۶ و جمله هفتم دنباله برابر ۲۹ می‌باشد. جمله نوزدهم دنباله را مشخص کنید.

۳۶. در یک دنباله حسابی مجموع چهار جمله اول ۱۰- و مجموع پنج جمله بعدی ۵۵ می‌باشد. جمله اول و قدرنسبت را مشخص کنید.

۳۷. در دنباله حسابی  $201, 198, 195, \dots$ :

(آ) جمله هفدهم دنباله را مشخص کنید.      (ب) دنباله چند جمله مثبت دارد؟

(پ) چند جمله دنباله، عددی سه رقمی می‌باشد؟

۳۸. در دنباله حسابی  $-107, -100, -93, \dots$ :

(آ) جمله سی و یکم دنباله را مشخص کنید.      (ب) کدام جمله دنباله برابر ۱۴۵ است؟

(پ) دنباله چند جمله منفی دارد؟

۳۹. بین دو عدد ۳- و ۳۳، پنج واسطه حسابی درج کرده‌ایم. واسطه‌ها را مشخص کنید.

۴۰. در دنباله حسابی  $\dots, -10, x+2, 4x, x+2, \dots$  واسطه حسابی جملات بیست و پنجم و چهل و دوم را به دست آورید.

۴۱. در دنباله حسابی با جمله عمومی  $t_n$ ، حاصل  $\frac{-t_7 + 2t_5 - t_1}{t_6 - t_{11}}$  را به دست آورید.

۴۲. پنج عدد که تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند را طوری مشخص کنید که مجموع آن‌ها برابر ۸۰ و بزرگ‌ترین عدد، دو برابر مجموع دو عدد کوچک‌تر باشد.

۴۳. زوایای یک شش ضلعی محدب که اندازه کوچک‌ترین آن‌ها  $80^\circ$  می‌باشد، تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند. اندازه زوایای شش ضلعی را به دست آورید.

### قسمت چهارم: دنباله هندسی

۴۴. کدام یک از دنباله‌های زیر، دنباله هندسی است؟ جمله عمومی دنباله هندسی را مشخص کنید.

$2, -6, 18, -54, \dots$  (آ)       $\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 5\sqrt{3}, 7\sqrt{3}, \dots$  (ب)       $4, 4, 4, 4, \dots$  (پ)

۴۵. در یک دنباله هندسی جمله دوم و پنجم به ترتیب ۳۶ و  $\frac{9}{16}$  می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.

۴۶. جملات دوم و هشتم دنباله حسابی  $5, 12, \dots$  به ترتیب جملات اول و دوم یک دنباله هندسی می‌باشند. جمله عمومی دنباله هندسی را مشخص کنید.

۴۷. در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و دوم برابر ۱۶ و تفاضل جمله دوم از جمله چهارم برابر ۹۶ می‌باشد. دنباله را مشخص کنید.

۴۸. در یک دنباله با جمله عمومی  $t_n$ ،  $t_{n+1} = \frac{1}{3}t_n$  و  $t_2 = 9$  می‌باشند. جمله هفتم دنباله را مشخص کنید.

۴۹. واسطه هندسی بین دو عدد  $3 - \sqrt{5}$  و  $3 + \sqrt{5}$  را به دست آورید.

۵۰. در دنباله هندسی  $x - 3, -x, x + 6, \dots$  جمله پانزدهم چند برابر جمله هفتم آن است؟

۵۱. در دنباله هندسی  $81, \dots, y^2 + 2, 2x + 3, x, 1$ ، اگر همه جملات مثبت باشند، مقادیر  $x$  و  $y$  را به دست آورید.



۵۲. جملات چهارم، دهم و هجدهم یک دنباله حسابی به ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی می‌باشند. قدرنسبت دنباله هندسی را به دست آورید.
۵۳. اگر جمله‌های اول، دوم و ششم از یک دنباله حسابی با سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی برابر باشند، قدرنسبت دنباله هندسی را به دست آورید.
۵۴. در یک دنباله هندسی، حاصل ضرب سه جمله اول ۸ و جمله چهارم آن ۳۲ می‌باشد. دنباله را مشخص کنید.
۵۵. بین دو عدد  $\frac{1}{6}$  و ۲۱۶ سه عدد چنان درج کنید که پنج عدد حاصل، جملات متوالی یک دنباله هندسی شوند.
۵۶. شخصی ده میلیون تومان پول را در یک بانک با نرخ سود مشارکت ۲۰ درصد سرمایه گذاری کرده است.  
 (آ) پول این شخص بعد از ۵ سال چقدر می‌شود؟  
 (ب) سرمایه این شخص بعد از  $n$  سال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟
۵۷. جمعیت شهری ۱۰۰۰۰۰ نفر می‌باشد. اگر هر سال ۴ درصد به جمعیت این شهر اضافه شود، جمعیت شهر بعد از  $n$  سال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟
۵۸. اگر جملات دو دنباله هندسی را نظیر به نظیر در هم ضرب کنیم، آیا دنباله حاصل یک دنباله هندسی خواهد بود؟ چرا؟

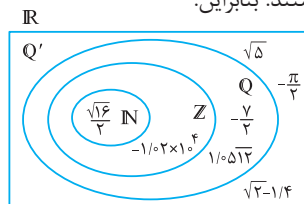
## پاسخ فصل ۱

### مجموعه، الگو و دنباله

- (س) نادرست است، زیرا مجموعه  $(-1, 1)$  شامل تمام اعداد گویا و گنگ بین  $-1$  و  $1$  می‌باشد و اعداد گنگ واقع در این بازه متعلق به  $Q$  نیستند.
- به عنوان مثال  $(-1, 1) \in \frac{\sqrt{2}}{2}$  ولی  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  یک عدد گویا نمی‌باشد.
- (ش) درست است، زیرا  $100 > 100^{23} \times 10^{23}$
- (ص) درست است، زیرا  $-1000000 < -6 \times 10^{-4} < -1$  می‌باشد.
- (ض) نادرست است، زیرا بازه  $(-1, 0)$  شامل تمام اعداد حقیقی بین  $-1$  و  $0$  است، نه فقط شامل اعداد گویای بین  $-1$  و  $0$ .

۲

- عدد  $\frac{4}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$  یک عدد طبیعی، عدد  $-1000000 = -10^6$  و  $-10^4$  یک عدد صحیح منفی، اعداد  $-\frac{7}{2}$  و  $10512$  گویا و اعداد  $\sqrt{5}$ ،  $-\frac{\pi}{2}$  و  $\sqrt{2} - 1/4$  گنگ هستند. بنابراین:



۳

- (آ)  $[-1, 4) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 4\}$
- (ب)  $(0, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 2\}$
- (پ)  $(0, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$
- (ت)  $[-2, -] = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq -1\}$
- (ث)  $[-2, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$
- (ج)  $(-\infty, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$
- (چ)  $(1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
- (ح)  $(-\infty, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

- (آ) درست است، زیرا اجتماع دو مجموعه  $Q$  و  $Q'$  برابر  $\mathbb{R}$  است و هیچ عضو مشترکی ندارند.
- (ب) درست است، زیرا هیچ عدد طبیعی، گنگ نیست. بنابراین هیچ عضوی از مجموعه  $\mathbb{N}$  در  $Q'$  قرار ندارد، پس  $\mathbb{N} \not\subseteq Q'$
- (پ) نادرست است، زیرا  $Q \ni -2 = -\sqrt{4}$
- (ت) نادرست است، زیرا  $\pi$  یک عدد گنگ است و ارقام اعشاری آن بی‌پایان است و داریم:  $Q' \ni \dots 015000 = \pi - 3/14 = \dots 14153/14 \Rightarrow \pi = 3/1415\dots$
- توجه کنید که ارقام اعشاری در عدد  $\dots 015000$  نه متناوب است و نه مختوم.
- (ث) نادرست است، زیرا مجموعه  $\{1, -5\}$  فقط شامل دو عضو  $-5$  و  $1$  است، پس  $\{1, -5\} \not\subseteq -4$
- (ج) درست است.
- (چ) نادرست است، زیرا بازه نیم‌باز  $[-1, 2)$  شامل عدد  $-1$  نمی‌باشد، پس  $[-1, 2) \not\subseteq -1$
- (ح) درست است، زیرا  $0 < \frac{2}{3} < 1$ ، پس  $\frac{2}{3} \in (0, 1)$
- (خ) نادرست است، زیرا  $\sqrt{3} = 1.732\dots$  و در نتیجه  $(2, 3) \ni \sqrt{3}$
- (د) درست است، زیرا به‌ازای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $0 < n < n+1$  و در نتیجه  $0 < \frac{n}{n+1} < 1$ ، پس  $\frac{n}{n+1} \in (0, 1)$
- (ذ) نادرست است، زیرا به‌طور مثال  $1 \in (0, 1)$  ولی  $1 \notin [0, 1)$
- (ر) درست است، زیرا  $\emptyset$  زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است.
- (ز) درست است، زیرا هر عضوی که در مجموعه  $[-1, 1]$  قرار دارد، به مجموعه  $[-1, 2)$  نیز تعلق دارد.
- (ژ) درست است، زیرا مجموعه  $[-1, 4)$  شامل اعداد صحیح  $1$  و  $2$  می‌باشد.

۷

(آ) با حل نامعادله درجه اول  $\frac{-x+3}{2} \leq 1$ ، حدود  $x$  و در نتیجه مجموعه  $C$  را مشخص می‌کنیم:

$$\frac{-x+3}{2} \leq 1 \Rightarrow -x+3 \leq 2 \Rightarrow -x \leq -1 \Rightarrow x \geq 1$$

$$\Rightarrow C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} = [1, +\infty)$$

$$A \cup B = (-\infty, -1] \cup [-2, 3] = (-\infty, 3] \quad (\text{ب})$$

$$B \cap C = [-2, 3] \cap [1, +\infty) = [1, 3] \quad (\text{پ})$$

$$A - B = (-\infty, -1] - [-2, 3] = (-\infty, -2) \quad (\text{ت})$$

$$A \cup C = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \Rightarrow B - (A \cup C) = (-1, 1) \quad (\text{ث})$$

$$A \cap B = (-\infty, -1] \cap [-2, 3] = [-2, -1] \quad (\text{ج})$$

$$\Rightarrow (A \cap B) \cup C = [-2, -1] \cup [1, +\infty)$$

۸

در نمایش هندسی مجموعه  $\mathbb{R} - \{0\}$  باید عدد صفر را از روی محور حذف کنیم:

$$\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

با حذف اعداد  $-1$  و  $2$  از روی محور، مجموعه  $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$  به دست می‌آید:



$$\mathbb{R} - \{-1, 2\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$$

با حذف اعداد  $3$  و  $4$  از بازه  $[2, 5]$ ، مجموعه  $[2, 5] - \{3, 4\}$  به دست می‌آید:



$$[2, 5] - \{3, 4\} = [2, 3) \cup (3, 4) \cup (4, 5]$$

با حذف بازه  $[0, 1]$  از بازه  $[-1, 4]$ ، مجموعه  $[-1, 4] - [0, 1]$  به دست می‌آید:



$$[-1, 4] - [0, 1] = [-1, 0) \cup (1, 4]$$

۹

$$\frac{2x+1}{3} \in [-2, 1) \Rightarrow -2 \leq \frac{2x+1}{3} < 1 \xrightarrow{\times 3} -6 \leq 2x+1 < 3$$

$$\xrightarrow{-1} -7 \leq 2x < 2 \xrightarrow{\div 2} -\frac{7}{2} \leq x < 1 \Rightarrow x \in \left[-\frac{7}{2}, 1\right)$$

۱۰

(آ) مجموعه  $\{1, 0, -1, \dots\}$  بی‌شمار عضو دارد، بنابراین یک مجموعه نامتناهی است.

(ب) مجموعه  $\{10000, 10001, \dots, 99999\}$  یک مجموعه متناهی است.

(پ) مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد  $2^0$ ، یعنی مجموعه  $\{0, 1, 2, 4, 5, 10, 20\}$  یک مجموعه متناهی است.

(ت) بی‌شمار عدد گنگ بین  $0$  و  $1$  مثل  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ،  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ،  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  و ... وجود دارد. بنابراین مجموعه اعداد گنگ بین  $0$  و  $1$  نامتناهی است.

(ث) مجموعه ارقام بعد از ممیز عدد  $\sqrt{5}$ ، زیرمجموعه‌ای از مجموعه  $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$  می‌باشد که یک مجموعه متناهی است. توجه کنیم که تعداد ارقام بعد از ممیز در اعداد گنگ نامتناهی است.

۴

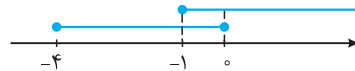
$$(-2, +\infty) \quad (\text{ب}) \quad [-1, 2) \quad (\text{آ})$$

(پ و ت) امکان پذیر نیست. زیرا بازه شامل تمام اعداد گویا و گنگ می‌باشد نه فقط اعداد گویا یا گنگ. توجه کنید که مجموعه (پ) را می‌توان به صورت  $Q \cap [-1, 2)$  و مجموعه (ت) را می‌توان به صورت  $(-\infty, 1) \cap Q'$  نمایش داد اما هیچ یک از این‌ها، یک بازه نیستند.

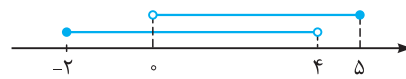
۵



$$(-2, 5] \cap (-1, 7) = (-1, 5] \quad (\text{آ})$$



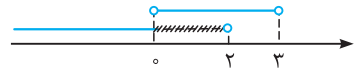
$$[-4, 0] \cap (-1, +\infty) = (-1, 0] \quad (\text{ب})$$



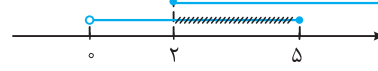
$$[-2, 4] \cup (0, 5) = [-2, 5] \quad (\text{پ})$$



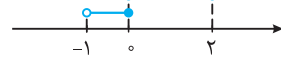
$$(-\infty, -1) \cup [-1, +\infty) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \quad (\text{ت})$$



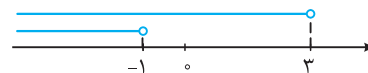
$$(-\infty, 2) - (0, 3) = (-\infty, 0] \quad (\text{ث})$$



$$(0, 5] - [2, +\infty) = (0, 2) \quad (\text{ج})$$

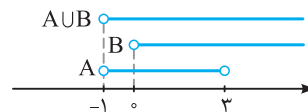


$$(-1, 0] \cap [0, 2) = \{0\} \quad (\text{ج})$$

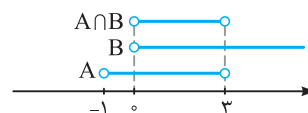


$$(-\infty, -1) \cup (-\infty, 3) = (-\infty, 3) \quad (\text{ج})$$

۶



$$A = (-1, 3), B = (0, +\infty) \Rightarrow A \cup B = (-1, 3) \cup (0, +\infty) = (-1, +\infty)$$



$$A \cap B = (-1, 3) \cap (0, +\infty) = (0, 3) \quad (\text{ج})$$

$$A \cap B' = \{1, 2, 4, 5\} \cap \{1, 4, 5\} = \{1, 4, 5\} \quad (\text{آ})$$

$$A' \cup C' = \{3, 6\} \cup \{2, 3, 4\} = \{2, 3, 4, 6\} \quad (\text{ب})$$

$$A \cup C = \{1, 2, 4, 5, 6\} \Rightarrow (A \cup C)' = U - (A \cup C) = \{3\} \quad (\text{پ})$$

$$\Rightarrow B \cap (A \cup C)' = \{2, 3, 6\} \cap \{3\} = \{3\}$$

$$A' - B' = \{3, 6\} - \{1, 4, 5\} = \{3, 6\} \quad (\text{ت})$$

۱۴

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \text{ : مجموعه شمارنده‌های طبیعی } 24$$

$$B = \{1, 3, 5, 15\} \text{ : مجموعه شمارنده‌های طبیعی } 15$$

$$A' = U - A = \{1, 2, \dots, 25\} - \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \quad (\text{آ})$$

$$= \{5, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25\}$$

$$\Rightarrow n(A') = 17$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 15, 24\} \Rightarrow n(A \cup B) = 10 \quad (\text{ب})$$

$$B \cap A' = \{5, 15\} \Rightarrow n(B \cap A') = 2 \quad (\text{پ})$$

$$A' \cup B' = (A \cap B)' = U - (A \cap B) \quad (\text{ت})$$

$$= U - \{1, 3\} = \{2, 4, 5, 6, \dots, 25\} \Rightarrow n(A' \cup B') = 23$$

$$A' \cap B' = (A \cup B)' = U - (A \cup B) \quad (\text{ث})$$

$$= \{7, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25\}$$

$$\Rightarrow n(A' \cap B') = 15$$

۱۵

می‌دانیم  $\emptyset' = U$  و  $A \cap A' = \emptyset$  پس داریم:

$$(A' \cap \emptyset)' \cup (A' - (A \cap A')) = (A' \cap U)' \cup (A' - \emptyset)$$

$$= (A')' \cup A' = A \cup A' = U$$

۱۶

$$(-1, 3]' = \mathbb{R} - (-1, 3] = (-\infty, -1] \cup (3, +\infty) \quad (\text{آ})$$

$$\quad (\text{ب})$$

$$W' = \mathbb{R} - \{0, 1, 2, 3, \dots\} = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup \dots$$

$$(-\infty, 2)' = \mathbb{R} - (-\infty, 2] = [2, +\infty) \quad (\text{پ})$$

$$(-1, +\infty)' = \mathbb{R} - (-1, +\infty) = (-\infty, -1] \quad (\text{ت})$$

$$[0, 4] - [1, 2) = [0, 1) \cup [2, 4] \quad (\text{ث})$$

$$\Rightarrow ([0, 1) \cup [2, 4])' = (-\infty, 0) \cup [1, 2) \cup (4, +\infty)$$

$$((-1, 3) \cup (5, +\infty))' = (-\infty, -1] \cup [3, 5] \quad (\text{ج})$$

۱۷

(آ) اگر  $A = \mathbb{N}$ ، آن‌گاه  $A' = \{0, -1, -2, \dots\}$  مجموعه‌ای نامتناهی است.

(ب) اگر  $B = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ ، آن‌گاه  $B' = \mathbb{Z} - B = \{0\}$  یک

مجموعه متناهی است.

(پ)  $C'$  می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

$$C = \{\pm 1, \pm 2, \dots\} \Rightarrow C' = \{0\} \text{ (متناهی است.)} \quad (\text{پ})$$

$$C = \mathbb{W} \Rightarrow C' = \{\dots, -2, -1\} \text{ (نامتناهی است.)} \quad (\text{پ})$$

(ت)  $D'$  حتماً نامتناهی است، زیرا  $D$  فقط تعداد محدودی از بی‌شمار

عضو مجموعه  $\mathbb{Z}$  را شامل می‌شود.

(ج) متناهی است، زیرا تعداد روستاهای ایران را می‌توان با یک عدد حسلی بیان کرد.

(چ) نامتناهی است، زیرا بی‌شمار عدد اول وجود دارد.

(ح) نامتناهی است، زیرا بازه‌ها شامل بی‌شمار عدد گویا و گنگ می‌باشند.

(خ) نامتناهی است، زیرا بی‌شمار کسر با مخرج ۲ مثل  $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \dots$  وجود دارد.

(د) متناهی است، زیرا هیچ عدد اول زوج و دو رقمی وجود ندارد. بنابراین

مجموعه اعداد اول زوج و دو رقمی مجموعه تهی است و مجموعه تهی یک مجموعه متناهی است.

(ذ) متناهی است، زیرا تعداد مولکول‌های موجود در یک مول آب

برابر  $6.022 \times 10^{23}$  است که با داشتن امکانات و ابزار لازم و صرف وقت کافی می‌توان آن را شمرد.

(ر) متناهی است، زیرا اگر  $n$  زوج باشد، آن‌گاه  $1 + (-1)^n = 2$  و چنانچه

$n$  فرد باشد، آن‌گاه  $1 + (-1)^n = 0$ . پس  $\{1 + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0, 2\}$

۱۱

$$U = \{6, 12, 18, 24, \dots\} \quad (\text{آ})$$

(ب) مجموعه  $U$  بی‌شمار عضو دارد، پس  $U$  مجموعه‌ای نامتناهی است.

(پ)  $B = \{18, 24, 30, \dots\} \subseteq U$  (نامتناهی) و  $A = \{6, 12\} \subseteq U$  (متناهی)

(ت)  $B = \{6, 18, 24, 30, \dots\} \subseteq U$  و  $A = \{18, 24, 30, \dots\} \subseteq U$

$A \subseteq B$  و  $B$  دو مجموعه نامتناهی اند

(ث) می‌توان مجموعه‌های  $C$  و  $D$  را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$C = \{12, 24, 36, \dots\}, D = \{6, 18, 30, \dots\} \Rightarrow U = C \cup D$$

۱۲

(آ) متناهی است، زیرا:  $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0, \cancel{1}, \cancel{2}, \dots\} - \{1, 2, 3, \dots\} = \{0\}$

(ب)  $\mathbb{N}$  و  $\mathbb{Z}$  دو مجموعه متمایز نامتناهی اند و  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

(پ)  $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{W} \Rightarrow A \subseteq B, B - A = \mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$

(ت)  $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{Z} \Rightarrow A \subseteq B, B - A = \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{\dots, -2, -1, 0\}$

(ث) متناهی است، زیرا  $B$  متناهی است و در نتیجه تعداد عضوهای هر

زیرمجموعه آن که کم‌تر یا مساوی تعداد عضوهای  $B$  است نیز متناهی خواهد بود.

(ج)  $A$  می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. به عنوان مثال اگر  $B = \mathbb{Z}$ ،

آن‌گاه  $A = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$  نامتناهی است و  $A = \{-1, 0, 1\} \subseteq \mathbb{Z}$  متناهی است.

(چ)  $B$  می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. با فرض  $A = \{1, 2\}$ ،

اگر  $B = \{1, 2, 3\}$ ، آن‌گاه  $B$  متناهی و اگر  $B = \mathbb{N}$  باشد،

آن‌گاه  $B$  نامتناهی است.

(ح)  $B$  نامتناهی است، زیرا  $B$ ، تمام بی‌شمار عضو مجموعه  $A$  را دارد.

۱۳

ابتدا متمم هریک از مجموعه‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  را مشخص می‌کنیم:

$$A' = U - A = \{1, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}\} - \{1, 2, 4, 5\} = \{3, 6\}$$

$$B' = U - B = \{1, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}\} - \{2, 3, 6\} = \{1, 4, 5\}$$

$$C' = U - C = \{1, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}\} - \{1, 5, 6\} = \{2, 3, 4\}$$

۲۱

مجموعه تمام افرادی که در نظرسنجی شرکت کرده‌اند را با  $U$ ، مجموعه افرادی که به سریال‌های طنز علاقمند هستند را با  $A$  و مجموعه افرادی که به سریال‌های خانوادگی علاقمندند را با  $B$  نشان می‌دهیم. طبق فرض داریم:

$$n(U) = 100, n(A) = 50, n(B) = 60, n(A \cup B) = 80$$

(آ) تعداد عضوهای مجموعه  $A \cap B$  مطلوب است:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 80 = 50 + 60 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 30$$

(ب) تعداد عضوهای مجموعه  $A - B = A \cap B'$  مطلوب است:

$$n(A \cap B') = n(A) - n(A \cap B) = 50 - 30 = 20$$

(پ) تعداد عضوهای مجموعه  $A' \cap B' = (A \cup B)'$  مطلوب است:

$$n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B) = 100 - 80 = 20$$

۲۲

طبق فرض داریم:  $A \Rightarrow n(A) = 40$  : مجموعه اعضای تیم فوتبال

$B \Rightarrow n(B) = 25$  : مجموعه اعضای تیم والیبال

$$n(A \cup B) = 55$$

(آ) باید  $n(A \cap B)$  را به دست آوریم. داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 55 = 40 + 25 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 10$$

(ب) باید تعداد اعضای مجموعه  $A' \cap B' = (A \cup B)'$  را به دست آوریم:

$$n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B) = 70 - 55 = 15$$

(پ) باید تعداد اعضای مجموعه  $A - B$  را به دست آوریم:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 40 - 10 = 30$$

(ت) طبق نمودار ون روبه‌رو، باید تعداد عضوهای مجموعه رنگی را مشخص کنیم:

تعداد عضوهای مجموعه رنگی برابر است با:

$$n(A \cup B) - n(A \cap B) = 55 - 10 = 45$$



۲۳

$$a_1 = 4, a_2 = 7, a_3 = 10, a_4 = 13 \quad (\text{آ})$$

(ب) هر شکل نسبت به شکل قبل خود، سه چوب کبریت بیشتر دارد، می‌توان جملات الگو را به صورت زیر نوشت:

$$a_1 = 3(1) + 1, a_2 = 3(2) + 1, a_3 = 3(3) + 1, \dots, a_n = 3n + 1$$

(پ) با قرار دادن  $n = 30$  در  $a_n = 3n + 1$ ، تعداد چوب کبریت‌های شکل

$$a_{30} = 3(30) + 1 = 91$$

سی‌ام به دست می‌آید:

۲۴

جمله عمومی الگوی خطی به صورت  $t_n = an + b$  می‌باشد.

(آ) طبق فرض  $t_5 = 30$  و  $t_{11} = 72$  می‌باشد، پس داریم:

$$\begin{cases} t_5 = 5a + b = 30 \\ t_{11} = 11a + b = 72 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5a - b = -30 \\ 11a + b = 72 \end{cases} \Rightarrow 6a = 42 \Rightarrow a = 7$$

$$\xrightarrow{5a+b=30} 5(7) + b = 30 \Rightarrow b = -5 \Rightarrow t_n = 7n - 5$$

۱۸

$$n(B') = n(U) - n(B) = 80 - 35 = 45 \quad (\text{آ})$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 21 + 35 - 12 = 44 \quad (\text{ب})$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 21 - 12 = 9 \quad (\text{پ})$$

$$n(B \cap A') = n(B) - n(A \cap B) = 35 - 12 = 23 \quad (\text{ت})$$

(ث) بنابر قانون دمورگان  $A' \cup B' = (A \cap B)'$  می‌باشد، پس:

$$n(A' \cup B') = n((A \cap B)') = n(U) - n(A \cap B) = 80 - 12 = 68$$

(ج) بنابر قانون دمورگان  $A' \cap B' = (A \cup B)'$  است، پس:

$$n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B) \xrightarrow{\text{قسمت (ب)}} 80 - 44 = 36$$

(چ)  $A - B$  و  $B - A$  دو مجموعه جدا از هم‌اند و در نتیجه داریم:

$$n((A - B) \cup (B - A)) = n(A - B) + n(B - A)$$

$$= (n(A) - n(A \cap B)) + (n(B) - n(A \cap B))$$

$$= (21 - 12) + (35 - 12) = 32$$

۱۹

تعداد عضوهای هر مجموعه را برحسب تعداد عضوهای مجموعه  $A \cap B$  به دست می‌آوریم:

$$3n(A) = 2n(B) = 6n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow n(A) = 2n(A \cap B) \text{ و } n(B) = 3n(A \cap B)$$

$$\frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)} = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(A \cap B)} \quad (\text{آ})$$

$$= \frac{2n(A \cap B) + 3n(A \cap B) - n(A \cap B)}{n(A \cap B)} = \frac{4n(A \cap B)}{n(A \cap B)} = 4$$

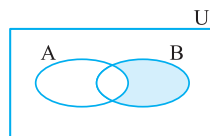
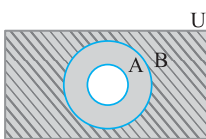
(ب) بنابر قسمت (آ)، داریم:

$$\frac{n(A \cup B) - n(A \cap B)}{n(A - B)} = \frac{4n(A \cap B) - n(A \cap B)}{n(A) - n(A \cap B)}$$

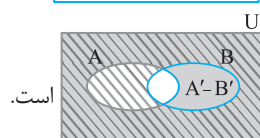
$$= \frac{3n(A \cap B)}{2n(A \cap B) - n(A \cap B)} = \frac{3n(A \cap B)}{n(A \cap B)} = 3$$

۲۰

(آ) فرض کنیم  $A \subseteq B$  باشد، در این صورت اگر  $A'$  را رنگ کرده و  $B'$  را هاشور بزنیم، طبق نمودار ون تمام قسمت‌های هاشورزده جزئی از قسمت‌های رنگی می‌باشد، پس:  $B' \subseteq A'$



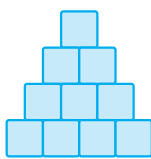
(ب) نمودار ون مجموعه  $B - A$  به صورت



و نمودار ون مجموعه  $A' - B'$  به صورت



باید از قسمت رنگ‌شده ( $A'$ )، قسمت‌های هاشورزده ( $B'$ ) را حذف کنیم.



شکل (۴)

(آ) شکل (۴) و دنباله تا جمله هفتم به صورت مقابل می باشد: ۱, ۳, ۶, ۱۰, ۱۵, ۲۱, ۲۸

(ب) خیر، زیرا اختلاف هر دو جمله متوالی عدد ثابت نیست.

(پ) در الگوی جدید، می توان دو شکل  $n$  ام را طوری کنار هم قرار داد که شکل حاصل یک مستطیل با  $n \times (n+1)$  مربع به دست آید.

بنابراین:  $2a_n = n(n+1) \Rightarrow a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

(ت) حاصل عبارت  $1+2+\dots+n$  تعداد مربع های به کار رفته در شکل  $n$  ام یا همان  $a_n$  است (در ردیف اول،  $n$  مربع، در ردیف دوم،  $n-1$  مربع، ... و در

ردیف  $n$  ام، یک مربع قرار دارند). پس:  $1+2+\dots+n = a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

۲۹

(آ)  $a_n = 3n: 3, 6, 9, 12, \dots$

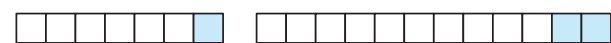


شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

(ب)  $b_n = 4n+2: 6, 10, 14, 18, \dots$



شکل (۱)

شکل (۲)

تعداد کل مربع ها،  $4n+2$  و تعداد مربع های سفید شکل  $n$  ام، برابر  $b_n = 4n+2$  می باشد.

(پ)  $c_n = n^2 + 1: 2, 5, 10, 17, \dots$



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

(ت)  $d_n = n^2 + 2n: 3, 8, 15, 24, \dots$



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

۳۰

(آ) تعداد نقطه ها در الگوی هندسی زیر، جملات دنباله  $3, 9, 19, \dots$  می باشند:



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

جمله عمومی دنباله،  $a_n = 2n^2 + 1$  است.

(ب) تعداد نقطه ها در الگوی هندسی زیر، جملات دنباله  $2, 6, 12, \dots$  می باشند:



جمله عمومی دنباله،  $a_n = n^2 + n$  است.

(ب) با قرار دادن عدد  $3^0$  به جای  $n$  در  $t_n$ ، جمله سی ام دنباله به دست می آید:

$$t_{30} = 7(3^0) - 5 = 21 - 5 = 16$$

(پ) با حل معادله  $t_n = 415$ ، مقدار  $n$  به دست می آید:

$$t_n = 7n - 5 = 415 \Rightarrow 7n = 420 \Rightarrow n = 60$$

بنابراین جمله شصتم الگو برابر ۴۱۵ می باشد.

۲۵

با قرار دادن اعداد ۱، ۲ و ۳ به جای  $n$  در جمله های عمومی داده شده، سه جمله اول هر دنباله را به دست می آوریم. سپس با توجه به دنباله های داده شده، جمله عمومی متناظر با آن را مشخص می کنیم:

$$a_n = \frac{4n}{2n-1}: 4, \frac{8}{3}, \frac{12}{5}, \dots$$

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n+2}: -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$$

$$c_n = n^2 + 2n: 3, 8, 15, \dots$$

$$d_n = 2 - n: 1, 0, -1, \dots$$

$$t_n = \frac{2 + (-1)^n n^2}{n^2 + 1}: \frac{1}{2}, \frac{6}{5}, -\frac{7}{10}, \dots$$

۲۶

(آ)  $-1, 3, 7, 11, 15, 19, \dots \Rightarrow a_n = 4n - 5$

(ب)  $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{25}, -\frac{1}{36}, \dots \Rightarrow a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

(پ)  $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots \Rightarrow a_n = 3^{2-n}$

(ت)  $1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, \dots$   
 $+1 \quad +2 \quad +3 \quad +4 \quad +5 \quad +6$

۲۷

(آ)  $a_1 = \frac{3(1)+2}{1+4} = 1$ ,  $a_2 = \frac{3(2)+2}{2+4} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$a_3 = \frac{3(3)+2}{3+4} = \frac{11}{7}$ ,  $a_4 = \frac{3(4)+2}{4+4} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$

(ب) با حل نامعادله  $a_n < 2$ ، حدود  $n$  را مشخص می کنیم:

$$a_n < 2 \Rightarrow \frac{3n+2}{n+4} < 2 \xrightarrow{\text{مثبت است}} 3n+2 < 2(n+4)$$

$$\Rightarrow 3n - 2n < 8 - 2 \Rightarrow n < 6 \Rightarrow n \leq 5$$

بنابراین به ازای پنج مقدار از  $n$ ،  $a_n < 2$  می باشد، یعنی پنج جمله اول دنباله کوچکتر از ۲ می باشند.

(پ) با حل معادله  $a_n = \frac{5}{2}$ ، مقدار  $n$  به دست می آید:

$$a_n = \frac{5}{2} = \frac{3n+2}{n+4} \Rightarrow 5(n+4) = 2(3n+2)$$

$$\Rightarrow 5n + 20 = 6n + 4 \Rightarrow n = 16$$

پس جمله شانزدهم دنباله برابر  $\frac{5}{2}$  است.

۳۵

جمله عمومی دنباله  $t_n = t_1 + (n-1)d$  است و طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 26 \\ t_5 = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + (t_1 + d) + (t_1 + 2d) + (t_1 + 3d) = 26 \\ t_1 + 4d = 29 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4t_1 + 6d = 26 \\ t_1 + 4d = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t_1 + 6d = 26 \\ -t_1 - 6d = -29 \end{cases} \Rightarrow 3t_1 = -3 \Rightarrow t_1 = -1$$

$$\frac{t_1 + 4d = 29}{t_1 + 6d = 29} \rightarrow -1 + 4d = 29 \Rightarrow 4d = 30 \Rightarrow d = \frac{15}{2}$$

$$t_{19} = t_1 + 18d = -1 + 18 \times \frac{15}{2} = 89$$

۳۶

طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = -10 \\ t_5 + t_6 + t_7 + t_8 + t_9 = 55 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 + (t_1 + d) + (t_1 + 2d) + (t_1 + 3d) = -10 \\ (t_1 + 4d) + (t_1 + 5d) + (t_1 + 6d) + (t_1 + 7d) + (t_1 + 8d) = 55 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4t_1 + 6d = -10 \\ 5t_1 + 3d = 55 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2t_1 - 3d = 5 \\ 5t_1 + 3d = 55 \end{cases} \Rightarrow -15t_1 = 105 \Rightarrow t_1 = \frac{105}{-15} = -7$$

$$\frac{4t_1 + 6d = -10}{4(-7) + 6d = -10} \rightarrow 6d = 18 \Rightarrow d = \frac{18}{6} = 3$$

۳۷

جمله عمومی دنباله را می‌نویسیم:

$$t_n = 201 + (n-1)d = 201 - 3(n-1) = -3n + 204$$

$$t_{17} = -3 \times 17 + 204 = 204 - 51 = 153 \quad (\text{آ})$$

(ب) با حل نامعادله  $t_n > 0$ ، تعداد جملات مثبت دنباله به دست می‌آید:

$$t_n > 0 \Rightarrow -3n + 204 > 0 \Rightarrow 3n < 204 \Rightarrow n < \frac{204}{3} = 68 \Rightarrow n \leq 67$$

بنابراین شصت و هفت جمله دنباله مثبت است.

(پ) با حل نامعادله  $1000 \leq t_n < 10000$  حدود  $n$  و در نتیجه تعداد جملات

سهرقمی دنباله مشخص می‌شود:

$$1000 \leq -3n + 204 < 10000 \xrightarrow{-204} -104 \leq -3n < 9796$$

$$\xrightarrow{\div(-3)} \frac{796}{3} < n \leq \frac{104}{3} \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 \leq n \leq 34$$

بنابراین سی و چهار جمله دنباله، سه رقمی‌اند.

۳۸

جمله عمومی دنباله را با مشخص بودن جمله اول و قدرنسبت به دست

$$t_1 = -107, d = -100 - (-107) = 7 \quad \text{می‌آوریم:}$$

$$t_n = t_1 + (n-1)d = -107 + 7(n-1) = 7n - 114$$

$$t_{31} = 7 \times 31 - 114 = 217 - 114 = 103 \quad (\text{آ})$$

(ب) با حل معادله  $t_n = 145$ ، مقدار  $n$  را به دست می‌آوریم:

$$t_n = 7n - 114 = 145 \Rightarrow 7n = 145 + 114 = 259 \Rightarrow n = \frac{259}{7} = 37$$

پس سی و هفتمین جمله دنباله برابر ۱۴۵ است.

(پ) با حل نامعادله  $t_n < 0$ ، حدود  $n$  را به دست می‌آوریم:

$$t_n = 7n - 114 < 0 \Rightarrow 7n < 114 \Rightarrow n < \frac{114}{7} = 16.28 \dots \Rightarrow n \leq 16$$

بنابراین شانزده جمله اول دنباله منفی است.

۳۱

هر دنباله‌ای که اختلاف هر دو جمله متوالی آن، مقدار ثابتی باشد، یک دنباله حسابی است.

(آ) دنباله  $3, 8, 13, \dots$  دنباله حسابی است، زیرا:

$$8 - 3 = 13 - 8 = \dots = 5 = d$$

(ب) دنباله  $2, 4, 7, 11, \dots$  دنباله حسابی نیست، زیرا:

$$4 - 2 = 2, 7 - 4 = 3$$

(پ) دنباله  $8, 4, 0, -4, \dots$  دنباله حسابی است، زیرا:

$$4 - 8 = 0 - 4 = -4 = \dots = -4 = d$$

(ت) دنباله  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$  دنباله حسابی نیست، زیرا:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}, \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$$

(ث) دنباله  $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \dots$  دنباله حسابی است، زیرا:

$$\frac{2}{7} - \frac{1}{7} = \frac{3}{7} - \frac{2}{7} = \dots = \frac{1}{7} = d$$

(ج) دنباله  $-1, -1, -1, \dots$  دنباله حسابی است، زیرا:

$$-1 - (-1) = -1 - (-1) = \dots = 0 = d$$

(چ) دنباله  $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \dots$  دنباله حسابی است، زیرا:

$$2\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \dots = \sqrt{2} = d$$

۳۲

(آ) با در نظر گرفتن  $d = 4$  و  $t_3 = 5$ ، دو جمله قبل از آن را می‌نویسیم:

$$\begin{array}{c} -4 \quad -4 \\ \curvearrowright \quad \curvearrowright \\ -3, 1, 5, \dots \end{array}$$

(ب) با در نظر گرفتن  $d = -2$  و  $t_5 = -3$ ، چهار جمله قبل از آن را

می‌نویسیم:

$$\begin{array}{c} +2 \quad +2 \quad +2 \quad +2 \\ \curvearrowleft \quad \curvearrowleft \quad \curvearrowleft \quad \curvearrowleft \\ 5, 3, 1, -1, -3 \end{array}$$

(پ)  $7, 4, 1, -2, \dots$ (ت)  $-11, -8, -5, -2, 1, \dots$ 

۳۳

جمله عمومی دنباله حسابی  $t_n = t_1 + (n-1)d$  است و داریم:

$$\begin{cases} t_5 = 2 \\ t_{12} = 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 4d = 2 \\ t_1 + 11d = 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -t_1 - 4d = -2 \\ t_1 + 11d = 44 \end{cases} \Rightarrow 7d = 42$$

$$\Rightarrow d = 6 \xrightarrow{t_1 + 4d = 2} t_1 + 24 = 2 \Rightarrow t_1 = -22$$

$$t_{31} = t_1 + 30d = -22 + 30 \times 6 = 158$$

۳۴

هر دنباله حسابی با جمله اول و قدرنسبت آن مشخص می‌شود. طبق فرض داریم:

$$t_{11} - t_7 = -12 \Rightarrow (t_1 + 10d) - (t_1 + 6d) = 4d = -12 \Rightarrow d = -3$$

$$t_5 = -17 \Rightarrow t_1 + 4d = -17 \Rightarrow t_1 - 12 = -17 \Rightarrow t_1 = -5$$

بنابراین دنباله به صورت مقابل است:  $-5, -8, -11, -14, \dots$

۳۹

اگر بین دو عدد ۳- و ۳۳، پنج عدد قرار دهیم، آن‌گاه:

$$d = \frac{33 - (-3)}{5 + 1} = \frac{36}{6} = 6$$

پنج واسطه حسابی: ۳، ۹، ۱۵، ۲۱، ۲۷

۴۰

اگر  $a$ ،  $b$  و  $c$  سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، آن‌گاه:  $2b = a + c$   
 $4x$ ،  $x + 3$  و  $-10$  سه جمله متوالی یک دنباله حسابی اند، پس:

$$2(x+3) = -10 + 4x \Rightarrow 2x + 6 = -10 + 4x \Rightarrow 2x = 16 \Rightarrow x = 8$$

دنباله:  $32, 11, -10, \dots \Rightarrow t_1 = 32, d = 11 - 32 = -21$ 

واسطه حسابی دو جمله بیست و پنجم و چهل و دوم برابر است با:

$$\frac{t_{25} + t_{42}}{2} = \frac{(t_1 + 24d) + (t_1 + 41d)}{2}$$

$$= \frac{2t_1 + 65d}{2} = \frac{64 - 1365}{2} = \frac{-1301}{2} = -650.5$$

۴۱

فرض کنیم جمله عمومی دنباله حسابی،  $t_n = t_1 + (n-1)d$  باشد. داریم:

$$\frac{-t_1 + 2t_5 - t_9}{t_6 - t_{11}} = \frac{-(t_1 + 6d) + 2(t_1 + 4d) - (t_1 + 9d)}{(t_1 + 5d) - (t_1 + 10d)} = \frac{-7d}{-5d} = \frac{7}{5}$$

۴۲

فرض کنیم کوچک‌ترین عدد  $t_1$  و قدرنسبت دنباله حسابی  $d$  باشد، در این صورت پنج عدد به صورت زیر می‌باشند:

$$t_1, t_1 + d, t_1 + 2d, t_1 + 3d, t_1 + 4d$$

مجموع پنج عدد  $= 80$ 

$$\Rightarrow t_1 + (t_1 + d) + (t_1 + 2d) + (t_1 + 3d) + (t_1 + 4d) = 80$$

$$\Rightarrow 5t_1 + 10d = 80 \xrightarrow{\div 5} t_1 + 2d = 16 \quad (1)$$

از طرفی  $t_1 + 4d$ ، دو برابر مجموع دو عدد  $t_1$  و  $t_1 + d$  می‌باشد، پس داریم:

$$t_1 + 4d = 2(t_1 + (t_1 + d)) \Rightarrow t_1 + 4d = 4t_1 + 2d \Rightarrow 2d = 3t_1 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 2d = 16 \\ 2d = 3t_1 \end{cases} \Rightarrow t_1 + 3t_1 = 16$$

$$\Rightarrow t_1 = 4 \xrightarrow{(1)} 4 + 2d = 16 \Rightarrow 2d = 12 \Rightarrow d = 6$$

بنابراین پنج عدد به صورت روبرو می‌باشند:

$$4, 10, 16, 22, 28$$

۴۳

مجموع زوایای داخلی شش ضلعی محدب برابر  
 $180^\circ \times (n-2) = (6-2) \times 180^\circ = 720^\circ$  است. فرض کنیم  $d$  قدرنسبت دنباله  
اندازه زوایا باشد. در این صورت اندازه زوایای شش ضلعی به صورت زیر است:

$$80^\circ + d, 80^\circ + d, 80^\circ + 2d, 80^\circ + 3d, 80^\circ + 4d, 80^\circ + 5d$$

$$\text{مجموع} = 80^\circ + (80^\circ + d) + \dots + (80^\circ + 5d) = 720^\circ$$

$$\Rightarrow 480^\circ + 15d = 720^\circ \Rightarrow 15d = 240^\circ \Rightarrow d = 16^\circ$$

بنابراین اندازه زوایای شش ضلعی به صورت زیر است:

$$80^\circ, 96^\circ, 112^\circ, 128^\circ, 144^\circ, 160^\circ$$

۴۴

اگر حاصل تقسیم هر دو جمله متوالی برای مقدار ثابتی  
باشد  $(\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \dots = r)$ ، آن‌گاه دنباله، یک دنباله هندسی است.

$$\frac{-6}{2} = \frac{18}{-6} = \frac{-54}{18} = \dots = -3 = r, t_1 = 2 \quad (1)$$

$$\Rightarrow t_n = t_1 \times r^{n-1} = 2 \times (-3)^{n-1}$$

(ب) دنباله هندسی نیست، زیرا:

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3 \neq \frac{5\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{4}{4} = \frac{4}{4} = \dots = 1 = r, t_1 = 4 \Rightarrow t_n = t_1 \times r^{n-1} = 4 \times 1^{n-1} = 4 \quad (پ)$$

۴۵

با به دست آوردن  $r$  و  $t_1$ ، دنباله هندسی مشخص می‌شود.  
فرض می‌کنیم جمله عمومی دنباله هندسی  $t_n = t_1 r^{n-1}$  باشد. طبق فرض  
داریم:

$$t_5 = t_1 r^4 = \frac{9}{16}, t_7 = t_1 \times r = 36$$

$$\Rightarrow \frac{t_5}{t_7} = \frac{t_1 \times r^4}{t_1 \times r} = r^3 = \frac{9}{36 \times 16} = \frac{1}{64} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \Rightarrow r = \frac{1}{4}$$

$$t_7 = t_1 \times r = 36 \Rightarrow \frac{1}{4} t_1 = 36 \Rightarrow t_1 = 4 \times 36 = 144$$

۴۶

جمله عمومی دنباله حسابی  $t_n = t_1 + (n-1)d$  می‌باشد. جمله هشتم  
دنباله حسابی  $5, 12, \dots$  را به دست می‌آوریم:

$$d = 12 - 5 = 7, t_1 = 5, t_8 = t_1 + 7d \Rightarrow t_8 = 5 + 7 \times 7 = 54$$

بنابراین دنباله هندسی به صورت  $5, 54, 12, \dots$  می‌باشد و داریم:

$$r = \frac{54}{5} = \frac{9}{5}, t_1 = 12 \Rightarrow t_n = t_1 \times r^{n-1} = 12 \times \left(\frac{9}{5}\right)^{n-1}$$

۴۷

در دنباله هندسی با جمله عمومی  $t_n = t_1 \times r^{n-1}$ ، داریم:

$$t_1 + t_2 = 16 \Rightarrow t_1 + t_1 \times r = 16 \Rightarrow t_1(1+r) = 16 \quad (1)$$

$$t_4 - t_2 = 96 \Rightarrow t_1 \times r^3 - t_1 \times r = 96 \Rightarrow t_1 r(r^2 - 1) = 96 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{t_1 r(r^2 - 1)}{t_1(1+r)} = \frac{96}{16} \Rightarrow \frac{r(r-1)(r+1)}{r+1} = 6 \Rightarrow r(r-1) = 6$$

$$\Rightarrow r^2 - r - 6 = 0 \Rightarrow (r-3)(r+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r-3=0 \Rightarrow r=3 \\ r+2=0 \Rightarrow r=-2 \end{cases}$$

اگر  $r = -2$  باشد، آن‌گاه:

$$\xrightarrow{(1)} t_1(1-2) = 16 \Rightarrow t_1 = -16$$

جملات دنباله:  $-16, 32, -64, \dots$ اگر  $r = 3$  باشد، آن‌گاه:

$$\xrightarrow{(1)} t_1(1+3) = 16 \Rightarrow t_1 = 4$$

جملات دنباله:  $4, 12, 36, \dots$

بنابراین جملات دنباله هندسی و قدرنسبت آن به صورت زیر می باشد:

$$t_1, 4t_1, 16t_1, \dots \Rightarrow r = \frac{4t_1}{t_1} = 4$$

۵۴

بنابراین جملات دنباله هندسی  $t_1, t_1 r, t_1 r^2, t_1 r^3, \dots$

$$t_1 \times (t_1 r) \times (t_1 r^2) = 8 \Rightarrow t_1^3 r^3 = 8 \Rightarrow (t_1 r)^3 = 2^3 \Rightarrow t_1 r = 2 \quad (*)$$

$$t_1 r^3 = 32 \Rightarrow t_1 r \times r^2 = 32 \xrightarrow{(*)} 2 \times r^2 = 32 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = \pm 4$$

$$r = 4 \xrightarrow{(*)} 4t_1 = 2 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{جملات دنباله}} \frac{1}{2}, 2, 8, \dots$$

$$r = -4 \xrightarrow{(*)} -4t_1 = 2 \Rightarrow t_1 = -\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{جملات دنباله}} -\frac{1}{2}, 2, -8, 32, \dots$$

۵۵

طبق فرض جمله اول  $\frac{1}{6}$  و جمله پنجم دنباله هندسی ۲۱۶ می باشد. پس:

$$t_1 = \frac{1}{6}, t_5 = t_1 r^4 = 216 = 6^3 \Rightarrow \frac{1}{6} \times r^4 = 6^3 \Rightarrow r^4 = 6^4 \Rightarrow r = \pm 6$$

$$t_1 = \frac{1}{6}, r = 6 \Rightarrow \text{جملات دنباله: } \frac{1}{6}, 1, 6, 36, 216$$

$$t_1 = \frac{1}{6}, r = -6 \Rightarrow \text{جملات دنباله: } \frac{1}{6}, -1, 6, -36, 216$$

۵۶

(آ) فرض کنیم  $t_n$  سرمایه شخص بعد از  $n$  سال باشد، داریم:  $(1.000000 = 1.0^y)$

$$t_1 = \text{مقدار پول اولیه} + 0.2 \times \text{مقدار پول اولیه} \\ = 1.0^y + 0.2 \times 1.0^y = 1.2 \times 1.0^y = 1.2 \times 1.0^6 = 1.2 \times 1.000000$$

$$t_2 = t_1 + 0.2t_1 = 1.2t_1 = 1.2 \times (1.2 \times 1.0^6)$$

$$= (1.2)^2 \times 1.0^6 = 1.44 \times 1.0^6 = 1.44 \times 1.000000$$

$$t_3 = t_2 + 0.2t_2 = 1.2t_2 = 1.2 \times (1.2)^2 \times 1.0^6$$

$$= (1.2)^3 \times 1.0^6 = 1.728 \times 1.0^6 = 1.728 \times 1.000000$$

$$t_4 = t_3 + 0.2t_3 = 1.2t_3 = 1.2 \times (1.2)^3 \times 1.0^6 = (1.2)^4 \times 1.0^6 = 2.0736 \times 1.000000$$

$$t_5 = t_4 + 0.2t_4 = 1.2t_4 = 1.2 \times (1.2)^4 \times 1.0^6 = (1.2)^5 \times 1.0^6 = 2.48832 \times 1.000000$$

(ب) با توجه به حل قسمت (آ)، الگوی دنباله به صورت  $t_n = (1.2)^n \times 1.0^y$  می باشد.

۵۷

فرض کنیم جمعیت اولیه  $t_0 = 1.0^6$  باشد، اگر جمعیت بعد از  $n$  سال،

$$t_1 = t_0 + 0.04t_0 = 1.04t_0 \quad \text{در این صورت:}$$

$$\Rightarrow t_2 = t_1 + 0.04t_1 = 1.04t_1 = 1.04 \times 1.04t_0 = (1.04)^2 t_0$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow t_n = (1.04)^n t_0 = (1.04)^n \times 1.0^6$$

۵۸

بله. فرض کنیم  $a_1, a_2, \dots$  یک دنباله هندسی با قدرنسبت  $r$   $\frac{a_n}{a_{n-1}} = r$  و  $b_1, b_2, \dots$  یک دنباله هندسی دیگر با قدرنسبت  $r'$   $\frac{b_n}{b_{n-1}} = r'$  باشد.

جدید  $a_1 b_1, a_2 b_2, \dots$

$$\Rightarrow \frac{a_2 b_2}{a_1 b_1} = \dots = \frac{a_n b_n}{a_{n-1} b_{n-1}} = \left( \frac{a_n}{a_{n-1}} \right) \left( \frac{b_n}{b_{n-1}} \right) = r r'$$

پس دنباله حاصل یک دنباله هندسی با قدرنسبت حاصل ضرب آن ها می باشد.

۴۸

در دنباله  $t_n$ ، حاصل تقسیم هر دو جمله متوالی  $\left( \frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{1}{3} \right)$ ، مقدار ثابت  $r = \frac{1}{3}$  است. پس این دنباله، یک دنباله هندسی است و داریم:

$$t_7 = t_1 \times r = 9 \Rightarrow t_1 \times \frac{1}{3} = 9 \Rightarrow t_1 = 27$$

$$\Rightarrow t_7 = t_1 \times r^6 = 27 \times \left( \frac{1}{3} \right)^6 = 3^3 \times \frac{1}{3^6} = 3^{3-6} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

۴۹

عدهای  $\pm \sqrt{ac}$  را واسطه هندسی دو عدد  $a$  و  $c$  می گوئیم. بنابراین عدهای  $\pm \sqrt{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \sqrt{9-5} = \pm 2$  واسطه هندسی دو عدد  $3-\sqrt{5}$  و  $3+\sqrt{5}$  می باشند.

۵۰

اگر  $a, b, c$  سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن گاه  $b^2 = ac$   $x, x+6, x-3$  سه جمله متوالی دنباله هندسی اند، پس:

$$x^2 = (x+6)(x-3) \Rightarrow x^2 = x^2 + 3x - 18 \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = 6$$

پس دنباله به صورت زیر است:

$$3, -6, 12, \dots \Rightarrow r = \frac{-6}{3} = -2 \Rightarrow \frac{t_{15}}{t_7} = \frac{t_1 \times r^{14}}{t_1 \times r^6} = r^8 = (-2)^8 = 256$$

۵۱

$x$  و  $x+3$  سه جمله متوالی دنباله هندسی با جملات مثبت اند، پس:

$$x^2 = 1 \times (x+3) \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

$x = -1$  غیرقابل قبول است، زیرا در این صورت جمله دوم دنباله منفی خواهد شد و در نتیجه  $x = 3$  است و داریم:

$$1, 3, 9, y^2 + 2, 81, \dots \Rightarrow t_4 = y^2 + 2 = t_1 \times r^3 = 1 \times 27$$

$$\Rightarrow y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm 5$$

۵۲

جملات چهارم، دهم و هجدهم یک دنباله حسابی با جمله اول  $t_1$  و قدرنسبت  $d$  به ترتیب برابر  $t_1 + 3d, t_1 + 9d, t_1 + 17d$  می باشند. این سه عدد جملات متوالی یک دنباله هندسی اند، بنابراین مربع جمله وسط با حاصل ضرب دو جمله کناری برابر است. پس داریم:  $(t_1 + 9d)^2 = (t_1 + 3d)(t_1 + 17d)$

$$\Rightarrow t_1^2 + 18t_1 d + 81d^2 = t_1^2 + 17t_1 d + 3t_1 d + 51d^2$$

$$\Rightarrow 3d^2 = 2t_1 d \Rightarrow t_1 = 15d$$

برای یافتن قدرنسبت دنباله هندسی، کافی است جمله دوم آن را بر جمله اول آن تقسیم کنیم:

$$t_1 + 3d = 18d, t_1 + 9d = 27d, \dots \Rightarrow r = \frac{27d}{18d} = \frac{3}{2}$$

۵۳

جملات دنباله هندسی  $t_1, t_1 + d, t_1 + 5d, \dots$

$$\xrightarrow{\text{سه جمله متوالی دنباله هندسی اند}} (t_1 + d)^2 = t_1(t_1 + 5d)$$

$$\Rightarrow t_1^2 + 2t_1 d + d^2 = t_1^2 + 5t_1 d \Rightarrow d^2 = 3t_1 d \Rightarrow d = 3t_1$$





Mathematics Test

## مجموعه، الگو و دنباله

# فصل

# ۱

قسمت اول: مجموعه‌ها، بازه‌ها، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ها

۱. مجموعه  $\{\{a, b, \{a, b\}, \{b, a\}, \emptyset, \{\}\}$  چند عضو دارد؟
 

۳ (۱)	۴ (۲)	۵ (۳)	۶ (۴)
-------	-------	-------	-------
۲. اگر  $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$  باشد، کدام نادرست است؟
 

(۱) $\{\} \in A$	(۲) $\emptyset \subseteq A$	(۳) $\{1, 2\} \in A$	(۴) $\{1, 2\} \subseteq A$
------------------	-----------------------------	----------------------	----------------------------
۳. اگر  $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$  باشد، کدام گزینه نادرست است؟
 

(۱) $\emptyset \subseteq A$	(۲) $\{\emptyset\} \in A$	(۳) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq A$	(۴) $n(A) = 2$
-----------------------------	---------------------------	--	----------------
۴. اگر مجموعه  $C$  به صورت  $\{x \in P \mid x - 1 < 3, 4 \leq x\}$  تعریف شده باشد که در آن منظور از  $P$  مجموعه اعداد اول می‌باشد، کدام گزینه درست است؟
 

(۱) $31 \in C$	(۲) $5 \in C$	(۳) $13 \notin C$	(۴) $29 \in C$
----------------	---------------	-------------------	----------------
۵. اگر  $A = \{3, 2x - y, 3\}$  و  $B = \{3, 2^{2x+2y}, -14\}$  دو مجموعه باشند و  $A = B$ ، مقدار  $x + y$  کدام است؟
 

(۱) -۲	(۲) -۱	(۳) ۳	(۴) ۶
--------	--------	-------	-------
۶. کدام یک از اعداد زیر به مجموعه  $A = \{2^x \times 3^y \mid x, y \in \mathbb{N}, x + y = 5\}$  متعلق است؟
 

(۱) ۸۱	(۲) ۴۸	(۳) ۱۶۴	(۴) ۱۴۴
--------	--------	---------	---------
۷. کدام یک از اعداد زیر به مجموعه  $A = \{-43, -7, -1, 5, \dots\}$  متعلق نیست؟
 

(۱) -۲۵	(۲) -۱۳	(۳) -۳۷	(۴) -۲۱
---------	---------	---------	---------
۸. اگر  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 2 = 0\}$ ،  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^3 - 2x = 0\}$  و  $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 2\}$  باشند، کدام گزینه نادرست است؟
 

(۱) $A \subseteq C$	(۲) $B \not\subseteq C$	(۳) $A \not\subseteq B$	(۴) $B \notin C$
---------------------	-------------------------	-------------------------	------------------
۹. اگر  $A = \{1, 2\}$ ،  $B = \{1, 2, \{1, 2\}\}$  و  $C = \{\{1, 2, \{1, 2\}\}, 1\}$  باشند. کدام بیان در مورد این مجموعه‌ها نادرست است؟ (سراسری ریاضی فارغ از کشور - ۹۷)
 

(۱) $B \subseteq C$	(۲) $A \in B$	(۳) $A \subseteq B$	(۴) $B \in C$
---------------------	---------------	---------------------	---------------
۱۰. مجموعه‌های  $A = \{2\}$ ،  $B = \{3, 5, \{2\}\}$  و  $C = \{\{\{2\}, 3, 5\}, 2\}$  مفروض‌اند. کدام بیان در مورد آن‌ها نادرست است؟ (سراسری ریاضی - ۹۵)
 

(۱) $A \in B$	(۲) $A \in C$	(۳) $B \in C$	(۴) $A \subset C$
---------------	---------------	---------------	-------------------
۱۱. اگر  $A = \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$ ،  $B = \{1, 2, 3, \{1, 2\}\}$  و  $C = \{1, 2, 3\}$  باشد، کدام رابطه درست است؟ (سراسری ریاضی فارغ از کشور - ۹۴)
 

(۱) $A - B = C$	(۲) $B - C = \emptyset$	(۳) $B - C = \{1, 2\}$	(۴) $A - B = \{C\}$
-----------------	-------------------------	------------------------	---------------------
۱۲. هرگاه  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  و  $X \cup \{1, 2, 3, 4, 5\} = X$ ، برای مجموعه  $X$  چند جواب وجود دارد؟
 

(۱) ۳۲	(۲) ۶۴	(۳) ۱۲۸	(۴) ۲۵۶
--------	--------	---------	---------
۱۳. اگر  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $B = \{3, 5\}$  باشد، به جای  $X$  در رابطه  $A \cap B \subseteq X \subseteq A \cup B$  چند مجموعه متفاوت می‌توان قرار داد؟
 

(۱) ۴	(۲) ۱۶	(۳) ۸	(۴) ۱۲
-------	--------	-------	--------

بازه‌ها

۱۴. کدام گزینه درست است؟
 

(۱) $-2 \in \{-3, 2\}$	(۲) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\} = (0, 1)$	(۳) $\sqrt{2} \in (1, 3) \cap [2, +\infty)$	(۴) $[-1, \pi] \subseteq [-1, 4]$
------------------------	--	---	-----------------------------------
۱۵. کدام گزینه نادرست است؟
 

(۱) $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ ، $[\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}] \subseteq (0, 1)$	(۲) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ یا } x \geq 3\} = \mathbb{R} - (-1, 3)$
(۳) $(-3, 0) \cup (-2, 5) = (-3, 5)$	(۴) $[2, 4) - (3, +\infty) = [4, +\infty)$

۱۶. حاصل عبارت  $(-2, 1] \cap [-1, 2)$  کدام است؟  
 (۱)  $[-1, 1]$  (۲)  $(-1, 2)$  (۳)  $[-2, -1]$  (۴)  $(-2, 2)$
۱۷. حاصل عبارت  $(0, 2] - [-2, 3)$  کدام است؟  
 (۱)  $[-2, -1] \cup [2, 3)$  (۲)  $(-2, 0) \cup (2, 3)$  (۳)  $[-2, 0) \cup [2, 3]$  (۴)  $[-2, 0] \cup (2, 3)$
۱۸. اگر  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq 2x - 1 < 7\}$  و  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x + 2 < 8\}$  باشد، حاصل  $A - B$  کدام است؟  
 (۱)  $(2, 4)$  (۲)  $[2, 4)$  (۳)  $(-\infty, 1)$  (۴)  $(-\infty, 1]$
۱۹. اگر  $A = (-2, 5]$  و  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in A\}$ ، در این صورت مجموعه  $A - B$  برابر کدام است؟  
 (۱)  $\emptyset$  (۲)  $(-2, 2)$  (۳)  $(2, 5]$  (۴)  $[2, 5]$
۲۰. اگر  $A = (-\infty, 2]$ ،  $B = [-3, 1)$  و  $C = (-1, +\infty)$  باشد، حاصل  $B \cup (A \cap C)$  کدام است؟  
 (۱)  $[-3, 2]$  (۲)  $(-3, 2)$  (۳)  $(-1, 1)$  (۴)  $[-3, 1)$
۲۱. اگر  $m + 1 \in [-1, 5]$ ، حدود  $m$  کدام است؟  
 (۱)  $0 \leq m \leq 3$  (۲)  $-1 \leq m \leq 2$  (۳)  $-3 \leq m \leq 0$  (۴)  $1 \leq m \leq 4$
۲۲. اگر عدد ۱ به بازه  $[2m - 1, 3m + 4]$  تعلق داشته باشد، آن‌گاه:  
 (۱)  $m \in [-2, 4)$  (۲)  $m \in [-1, 1)$  (۳)  $m \in (0, 4]$  (۴)  $m \in (-2, 3]$
۲۳. بازه  $(5, b)$  شامل فقط سه عدد مربع کامل است. حداکثر مقدار طبیعی  $b$  کدام است؟  
 (۱) ۲۵ (۲) ۲۶ (۳) ۳۶ (۴) ۳۷
۲۴. اگر بازه  $(-1, 2a - 1)$  شامل پنج عدد صحیح باشد، محدوده  $a$  کدام است؟  
 (۱)  $2/5 \leq a \leq 3$  (۲)  $2/5 < a < 3$  (۳)  $2/5 < a \leq 3$  (۴)  $2/5 \leq a < 3$
۲۵. اگر  $[1, a] \cup [b, 5] = [-1, 7]$  باشد، حاصل  $a - b$  کدام است؟  
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹
۲۶. اگر  $A_n = (n - 2, n + 3)$ ،  $n \in \mathbb{N}$  باشد،  $A_1 - (A_2 \cap A_3)$  کدام است؟  
 (۱)  $(4, 5)$  (۲)  $(4, 5]$  (۳)  $(-1, 1)$  (۴)  $(-1, 1]$
۲۷. اگر  $A_n = (-\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n})$  به صورت بازه باشد، مجموعه  $A_3 - (A_2 \cup A_4)$  برابر کدام بازه است؟  
 (۱)  $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  (۲)  $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  (۳)  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  (۴)  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$
۲۸. اگر  $A_i = [-i, \frac{9-i}{3}]$ ،  $i \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ، آن‌گاه مجموعه  $(A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7)$  کدام است؟  
 (۱)  $(-2, -1) \cup (1, 2]$  (۲)  $[-2, -1] \cup [1, 2]$  (۳)  $[-1, 1]$  (۴)  $\emptyset$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۲۹. کدام یک از مجموعه‌های زیر نامتناهی است؟  
 (۱) مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان  
 (۲) مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون  
 (۳) مجموعه کسرهای مثبت با صورت ۱  
 (۴) مجموعه مقسوم علیه‌های یک عدد طبیعی
۳۰. کدام یک از مجموعه‌های زیر بی‌پایان است؟  
 (۱) مجموعه تمام افراد روی کره زمین  
 (۲) مجموعه تمام اتومبیل‌های موجود در جهان  
 (۳) مجموعه اعداد طبیعی مضرب ۵  
 (۴) مجموعه تمام اعداد اول زوج
۳۱. اگر  $\mathbb{N}$ ،  $\mathbb{W}$  و  $\mathbb{Z}$  به ترتیب مجموعه‌های اعداد طبیعی، حسابی و صحیح باشند، کدام مجموعه متناهی است؟  
 (۱)  $\mathbb{Z} - \mathbb{W}$  (۲)  $\mathbb{W} \cap \mathbb{N}$  (۳)  $\mathbb{Z} \cap \mathbb{W}$  (۴)  $\mathbb{W} - \mathbb{N}$
۳۲. اگر  $A$  مجموعه متناهی و  $B$  مجموعه نامتناهی باشد، مجموعه  $A - B$  چگونه است؟  
 (۱) بی‌پایان (۲) بی‌پایان (۳) تهی (۴) غیرقابل تعریف
۳۳. کدام مجموعه متناهی (باپایان) است؟  
 (۱)  $\{x \mid x \in \mathbb{N}; x^2 > 16\}$  (۲)  $\{x \mid x \in \mathbb{N}; x \leq 2^{12}\}$  (۳)  $\{x \mid x \in \mathbb{Z}; x > 1000\}$  (۴)  $\{x \mid x \in \mathbb{Z}; x < 1000\}$
۳۴. کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟  
 (۱)  $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$  (۲) مجموعه اعداد گویا در بازه  $(1, 2)$   
 (۳)  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 1000\}$  (۴) مجموعه اعداد اول فرد

(برگرفته از کتاب درسی)

۳۵. کدام گزینه نادرست است؟  
 (۱) بین دو عدد گویای  $\frac{1}{5}$  و  $\frac{1}{4}$ ، بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.  
 (۲) اگر مجموعه  $A$  یک زیرمجموعه نامتناهی داشته باشد، آن‌گاه  $A$  نیز نامتناهی است.  
 (۳) اگر هر زیرمجموعه  $A$  متناهی باشد، آن‌گاه مجموعه  $A$  متناهی است.  
 (۴) اگر مجموعه‌ای نامتناهی را به صورت اجتماع دو مجموعه جدا از هم بنویسیم که یکی از آن‌ها نامتناهی باشد، آن‌گاه دیگری حتماً متناهی است.

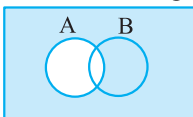
قسمت دوم: متمم یک مجموعه، مجموعه‌های جدا از هم و ...

مجموعه‌های مرجع و متمم

۳۶. اگر مجموعه اعداد طبیعی  $\mathbb{N}$  مجموعه مرجع،  $E$  مجموعه اعداد طبیعی زوج و  $O$  مجموعه اعداد طبیعی فرد باشد، کدام رابطه نادرست است؟  
 (۱)  $E \cap O = O$  (۲)  $E \cup O = \mathbb{N}$  (۳)  $(E \cup O)' = \emptyset$  (۴)  $E' \cap O = O$
۳۷. اگر مجموعه‌های  $A$  و  $B$  هر دو زیرمجموعه اعداد صحیح باشند به طوری که  $A$  مجموعه‌ای نامتناهی،  $B$  مجموعه‌ای متناهی و  $C \subseteq A$  باشد، در این صورت کدام مجموعه قطعاً نامتناهی است؟  
 (۱)  $A \cap B'$  (۲)  $B - A$  (۳)  $B \cup C$  (۴)  $A \cap C'$
۳۸. اگر  $A$  مجموعه متناهی و  $B$  مجموعه نامتناهی باشد، آن‌گاه کدام مجموعه لزوماً متناهی است؟  
 (۱)  $A \cup B$  (۲)  $A' \cup B$  (۳)  $A \cap B'$  (۴)  $A' \cap B$
۳۹. اگر  $A$  بازه متناظر با مجموعه جواب نامعادله  $x - 6 \leq 2x + 3 < x$  و  $B = (-\infty, -2) \cup [4, +\infty)$  و  $\mathbb{R}$  مجموعه مرجع باشد، حاصل  $A \cap B'$  کدام است؟  
 (۱)  $(-3, 4)$  (۲)  $(-3, -2)$  (۳)  $[-2, 1]$  (۴)  $(-2, 1]$

۴۰. اگر مجموعه اعداد حسابی ( $\mathbb{W}$ ) مجموعه مرجع باشد و  $A = \{2x \mid x \in \mathbb{W}\}$ ، آن‌گاه  $A'$  برابر کدام است؟  
 (۱)  $\{2x \mid x \in \mathbb{W}'\}$  (۲)  $\{2x - 1 \mid x \in \mathbb{W}'\}$  (۳)  $\{2x + 1 \mid x \in \mathbb{W}'\}$  (۴)  $\{x - 1 \mid x \in \mathbb{W}'\}$
۴۱. اگر  $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 40\}$  و  $A = \{x \in U \mid 7 \leq x \leq 25\}$ ، آن‌گاه مجموعه  $A' \cup U$  چند عضو دارد؟  
 (۱) ۴۰ (۲) ۳۹ (۳) ۲۳ (۴) ۱۹
۴۲. اگر  $\mathbb{N}$  مجموعه مرجع،  $A' = \{x \mid x \geq 2\}$  و  $B' = \{x \mid x \geq 5\}$  باشد، مجموعه  $A \cup B$  کدام است؟  
 (۱)  $\{1, 2\}$  (۲)  $\{1, 2, 3, 4\}$  (۳)  $\{2, 3, 4, 5\}$  (۴)  $\emptyset$
۴۳. اگر  $A' = \{1, 2, 4\}$ ،  $B' = \{2, 3\}$  و مجموعه مرجع اعداد طبیعی فرض شود، آن‌گاه  $(A \cap B)'$  کدام است؟  
 (۱)  $\{1, 2, 3, 4\}$  (۲)  $\{1, 4, 3\}$  (۳)  $\{1, 4\}$  (۴)  $\{2\}$
۴۴. اگر مجموعه  $\mathbb{N}$  مرجع،  $A = \{x \mid x \geq 4\}$  و  $B = \{x \mid x < 2\}$  باشد، آن‌گاه حاصل  $(A \cup B)'$  برابر کدام است؟  
 (۱)  $\{1, 2\}$  (۲)  $\{3\}$  (۳)  $\{2, 3\}$  (۴)  $\{1, 2, 3\}$
۴۵. اگر  $U = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ،  $A \cap B = \{2, 3\}$ ،  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$ ،  $A \subseteq \{1, 4\}$  و  $B \subseteq \{5, 7, 9\}$  باشند، مجموعه  $A'$  کدام است؟  
 (۱)  $\{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$  (۲)  $\{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  (۳)  $\{5, 6, 7, 8, 9\}$  (۴)  $\{5, 7, 8, 9\}$
۴۶. اگر  $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  مجموعه مرجع،  $A = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ،  $B$  مجموعه اعداد فرد و  $C$  مجموعه اعداد مربع کامل باشند، مجموعه  $(C \cup A) - (C' - B)$  چند عضو دارد؟  
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

(سراسری ریاضی) U



۴۷. با توجه به نمودار ون مقابل، مجموعه رنگی کدام است؟  
 (۱)  $A'$  (۲)  $B - A$  (۳)  $B' - A$  (۴)  $A' \cup B$

جبر مجموعه‌ها

۴۸. اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه دلخواه باشند، حاصل  $(A \cap B)' - A$  کدام است؟  
 (۱)  $A$  (۲)  $A'$  (۳)  $B$  (۴)  $\emptyset$
۴۹. حاصل  $[A \cup (A' \cap U)] \cup B$  در کدام گزینه آمده است؟ ( $U$  مجموعه مرجع است).  
 (۱)  $A$  (۲)  $U$  (۳)  $B$  (۴)  $\emptyset$

۵۰. اگر  $U$  مجموعه مرجع و  $A$  زیرمجموعه دلخواهی از آن باشد، ساده شده مجموعه  $(A \cap U)' \cup A - (A' - U)'$  کدام است؟

- (۱)  $A$  (۲)  $A'$  (۳)  $U$  (۴)  $\emptyset$

۵۱. اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه غیرتهی و  $B - A = B$  باشد، حاصل  $(A \cap B)' \cup (A - B)$  کدام است؟

- (۱)  $B$  (۲)  $U$  (۳)  $\emptyset$  (۴)  $A$

۵۲. متمم مجموعه  $[(A \cap B') \cup (A' \cup B)]$  کدام است؟

- (۱)  $A - B$  (۲)  $U$  (۳)  $B - A$  (۴)  $\emptyset$

۵۳. متمم مجموعه  $(B - A)' - A$ ، نسبت به مجموعه مرجع کدام است؟ (سراسری ریاضی فارغ از کشور - ۸۸)

- (۱)  $A \cup B$  (۲)  $A \cap B$  (۳)  $A$  (۴)  $B$

۵۴. اگر  $A \subseteq B$ ، آنگاه کدام گزاره نادرست است؟ (سراسری ریاضی)

- (۱)  $B' \subseteq A'$  (۲)  $A' \cup B = U$  (۳)  $A \cap B' = \emptyset$  (۴)  $A' \cap B = \emptyset$

۵۵. اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه غیرتهی باشند،  $(A \cap B') - (B - A)$  برابر کدام مجموعه است؟ (سراسری ریاضی فارغ از کشور - ۹۱)

- (۱)  $B'$  (۲)  $\emptyset$  (۳)  $A \cap B$  (۴)  $A - B$

### شمارش اعضای مجموعهها

۵۶. اگر  $n(U) = 30$ ،  $n(A) = 12$ ،  $n(B) = 20$  و  $n(A \cap B) = 7$  باشد، حاصل  $n(A' \cap B')$  کدام است؟

- (۱) ۲۳ (۲) ۷ (۳) ۵ (۴) ۳

۵۷. اگر  $n(A) + n(B) = 2n(A \cap B)$  باشد، حاصل  $\frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)}$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) ۳

۵۸. اگر  $n(A - B) = 2n(A \cap B)$  و  $n(B) = 2n(A \cap B)$  باشند، حاصل  $\frac{n(A \cup B)}{n(B - A)}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{2}$  (۲) ۳ (۳)  $\frac{7}{2}$  (۴) ۴

۵۹. اگر  $A$  و  $B$  دو زیرمجموعه از مجموعه ۲۰ عضوی  $U$  باشند به طوری که  $n(A - B) = 6$ ،  $n(B \cap A') = 4$  و  $n(A' \cap B') = 7$  باشد، مجموعه  $A$  چند عضو دارد؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

۶۰. در یک کلاس ۳۰ نفری، ۲۴ نفر به فوتبال و ۱۸ نفر به والیبال علاقمندند و ۴ نفر نیز به هیچ یک از دو بازی علاقه‌ای ندارند. در این کلاس چند نفر فقط به والیبال علاقمند هستند؟ (برگرفته از کتاب درسی)

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۶ (۳) ۶ (۴) ۲

۶۱. از ۵۱ دانش‌آموز یک دبیرستان، ۳۵ نفر در کلاس ادبیات، ۳۱ نفر در کلاس عربی و ۲۳ نفر در هر دو کلاس شرکت کرده‌اند. چند نفر در هیچ یک از دو کلاس شرکت ننموده‌اند؟ (سراسری ریاضی)

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۶۲. در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه‌دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزش هستند. چند نفر آنان عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند؟ (سراسری ریاضی - ۹۸)

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴) ۱۸

۶۳. در یک کلاس ۴۲ نفری، ۱۵ نفر عضو گروه آزمایشگاهی و ۱۲ نفر عضو گروه فوتبال و ۷ نفر آنان عضو هر دو گروه هستند. چند نفر آنان عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند؟ (سراسری ریاضی فارغ از کشور - ۹۸)

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۲۱ (۴) ۲۲

۶۴. از یک کلاس ۲۳ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۳ نفر عضو تیم والیبال می‌باشند. با فرض آن‌که هر دانش‌آموز حداقل در یک تیم عضو باشد، چند نفر دقیقاً عضو یکی از این دو تیم هستند؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۲۰

۶۵. در یک مجموعه با ۴۱ نفر، اگر یک نفر از افرادی که ورزش می‌کنند ولی فعالیت هنری ندارند، کم کنیم و  $\frac{3}{5}$  آن‌ها را در نظر بگیریم، حاصل برابر تعداد افرادی است که فعالیت هنری دارند ولی ورزش نمی‌کنند. اگر ۳ نفر در هیچ یک از این دو رشته فعالیت نکنند و ۵ نفر در هر دو رشته فعالیت کنند، چند نفر در رشته ورزشی فعالیت می‌کنند؟




- (۱) ۲۸ (۲) ۲۶ (۳) ۲۳ (۴) ۲۱

۶۶. مجموعه‌های  $A \cup B$ ،  $A \cap B$  و  $A - B$  به ترتیب ۵، ۲ و ۲ عضو دارند. مجموعه  $B - A$  چند عضو دارد؟  
 ۴ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴)
۶۷. اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه متناهی باشند، تعداد اعضای  $A \cup B$  سه برابر تعداد اعضای  $B$ ، تعداد اعضای  $A$ ،  $\frac{5}{3}$  برابر تعداد اعضای  $B$  و تعداد اعضایی که به هر دو مجموعه  $A$  و  $B$  تعلق دارند برابر ۳ باشد، آن‌گاه تعداد اعضایی که حداقل به یکی از دو مجموعه  $A$  یا  $B$  تعلق دارد کدام است؟  
 ۶ (۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴)
۶۸. اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$  دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های  $A - B$  و  $B - A$  به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هریک از مجموعه‌های  $A$  و  $B$ ، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعه اشتراک آن‌ها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه جدید کدام است؟  
 ۲۲ (۱) ۲۳ (۲) ۲۴ (۳) ۲۶ (۴)
۶۹. اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$ ، ۲۵ عضو دارد. به مجموعه  $A$ ، ۱۰ عضو جدید اضافه کرده‌ایم، به اشتراک آن‌ها ۹ عضو اضافه شده است. اجتماع مجموعه  $B$  و مجموعه جدید حاصل از  $A$  چند عضو دارد؟  
 ۲۵ (۱) ۲۶ (۲) ۳۴ (۳) ۳۵ (۴)
۷۰. مجموعه  $A$  دارای ۳۶ عضو و مجموعه  $B$  دارای ۲۸ عضو است. اشتراک آن‌ها ۱۵ عضو دارد. اگر ۱۶ عضو از مجموعه  $A$  حذف شود، از اشتراک آن‌ها ۹ عضو حذف می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع مجموعه جدید با مجموعه  $B$  کدام است؟  
 ۴۰ (۱) ۴۱ (۲) ۴۲ (۳) ۴۵ (۴)
۷۱. اگر مجموعه مرجع، مجموعه تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ باشد، چند عدد وجود دارد که نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش پذیر است؟  
 ۴۵ (۱) ۴۷ (۲) ۵۰ (۳) ۵۳ (۴)

(سراسری ریاضی)

قسمت سوم: الگو، دنباله و دنباله حسابی

الگویابی

۷۲. با توجه به الگوی مقابل، در شکل چندم این الگو، ۴۹ پاره‌خط وجود دارد؟  
 شکل (۱)  شکل (۲)  شکل (۳)   
 ۱۱ (۲) ۱۰ (۱)  
 ۱۳ (۴) ۱۲ (۳)
۷۳. با توجه به الگوی مقابل، تعداد دایره‌های توخالی در مرحله دهم کدام است؟  
 (۱) ۲۰ (۲) ۱۹  
 (۳) ۱۸ (۴) ۱۷
۷۴. طبق الگوی مقابل، تعداد چوب کبریت‌های مرحله دوازدهم کدام است؟  
 (۱) ۹۷ (۲) ۱۰۳  
 (۳) ۱۴۰ (۴) ۱۲۸
۷۵. با توجه به الگوی مقابل، در شکل ششم چند مکعب وجود دارد؟  
 (۱) ۹۶ (۲) ۹۱  
 (۳) ۱۳۹ (۴) ۱۳۶
۷۶. با توجه به الگوی مقابل، در شکل پانزدهم چند ستاره وجود دارد؟  
 (۱) ۲۰۱ (۲) ۲۱۹  
 (۳) ۲۲۹ (۴) ۲۴۹
۷۷. در الگوی مقابل، جمله بیستم از چند مربع تشکیل یافته است؟  
 (۱) ۲۰۰ (۲) ۲۰۱  
 (۳) ۲۱۰ (۴) ۲۱۱

Answers



## مجموعه، الگو و دنباله

# پاسخ فصل ۱

۲۷۸

با حل دستگاه دو معادله دو مجهولی  $\begin{cases} 2x - y = -14 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$  مقادیر  $x$  و  $y$  را به دست می‌آوریم:

$$3 \times \begin{cases} 2x - y = -14 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 3y = -42 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases} \Rightarrow 8x = -40 \Rightarrow x = -5$$

$$\xrightarrow{2x - y = -14} 2(-5) - y = -14 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow x + y = -1$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۶

تمام اعداد طبیعی که مجموع آن‌ها برابر ۵ باشد، عبارتند از:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

در نتیجه مجموعه  $A$  عبارت است از:

$$A = \{1 \times 3^4, 2^2 \times 3^3, 3^3 \times 3^2, 4^4 \times 3^1\} = \{162, 108, 72, 48\}$$

با توجه به گزینه‌ها، عدد ۴۸ در مجموعه  $A$  قرار دارد.

۴ ۳ ۲ ۱ ۷

مجموعه  $A$  شامل مضارب ۶ منهای یک، از ۵ تا  $-43$  می‌باشد. لذا مجموعه  $A$  عبارت است از:

$$A = \{5, -1, -7, -13, -19, -25, -31, -37, -43\}$$

بنابراین عدد  $-21$  متعلق به مجموعه  $A$  نیست.

۴ ۳ ۲ ۱ ۸

هر یک از مجموعه‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  را با اعضا می‌نویسیم:

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1, 2 \Rightarrow A = \{-1, 2\}$$

$$x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} B = \{0\}$$

همچنین  $C = \{-1, 0, 1, 2\}$  می‌باشد. با توجه به مجموعه‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  داریم:

$$A \subseteq C, B \subseteq C$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۹

مجموعه  $B$  دارای سه عضو  $0, 1, 2$  و  $A = \{1, 2\}$  و مجموعه  $C$  دارای دو عضو  $\{1, 2, \{1, 2\}\}$  و  $B = \{1, 2\}$  است، بنابراین دو عضو  $1$  و  $2$  از مجموعه  $B$  در مجموعه  $C$  قرار ندارند، پس  $B$  زیرمجموعه  $C$  نمی‌باشد.

۴ ۳ ۲ ۱ ۱۰

با توجه به مجموعه  $A$ ، مجموعه  $B$  به صورت  $B = \{3, 5, A\}$  است. بنابراین  $A$  عضوی از مجموعه  $B$  است و در نتیجه گزینه (۱) صحیح است. با توجه به مجموعه  $B$ ، مجموعه  $C$  به صورت  $C = \{B, 2\}$  است. بنابراین  $A$  عضوی از مجموعه  $C$  نمی‌باشد و در نتیجه گزینه (۲) نادرست است. توجه کنید که  $B$  عضوی از  $C$  است و مجموعه تک‌عضوی  $\{2\}$  که همان مجموعه  $A$  است، زیرمجموعه‌ای از مجموعه  $C$  است.

۴ ۳ ۲ ۱ ۱

**نکته:** برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیاء مشخص و دوبه‌دو متمایز از مجموعه استفاده می‌کنیم. مجموعه‌ای که عضوی نداشته باشد، مجموعه تهی نام دارد و با نماد  $\emptyset$  یا  $\{\}$  نشان داده می‌شود.

در مجموعه‌ها، تکرار عضو بی‌تأثیر است و با توجه به این‌که دو عضو  $\{b, a\}$  و  $\{a, b\}$  یکسان و همچنین  $\emptyset$  و  $\{\}$  یکی می‌باشند، بنابراین مجموعه به صورت  $\{a, b, \{a, b\}, \emptyset\}$  درمی‌آید که یک مجموعه ۴ عضوی می‌باشد.

۴ ۳ ۲ ۱ ۲

**نکته:** اگر هر عضو مجموعه  $A$ ، عضوی از مجموعه  $B$  باشد، آن‌گاه  $A \subseteq B$  مجموعه  $A$  زیرمجموعه  $B$  است و می‌نویسیم:

مجموعه  $A$  دارای ۳ عضو  $(1, 2), (2, 1), (1, 2)$  می‌باشد که  $\{1\}$  عضو مجموعه  $A$  نیست، بنابراین گزینه (۱) نادرست است.

۴ ۳ ۲ ۱ ۳

مجموعه  $A$  دارای سه عضو  $\emptyset, \{\emptyset\}$  و  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$  می‌باشد. یعنی تعداد اعضای  $A$  برابر ۳ است پس  $n(A) = 3$  می‌دانیم مجموعه  $\emptyset$  (تهی) زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است، پس گزینه (۱) درست است و چون  $\{\emptyset\}$  عضوی از مجموعه  $A$  است، پس گزینه (۲) نیز درست است و چون اعضای  $\emptyset$  و  $\{\emptyset\}$  به  $A$  تعلق دارند، پس  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq A$

۴ ۳ ۲ ۱ ۴

مجموعه  $C$  را می‌توان به صورت  $C = \{x + 2 \mid x \in P, 5 \leq x < 31\}$  نوشت. برای نوشتن اعضای مجموعه  $C$  ابتدا تمام اعداد اول که در رابطه  $5 \leq x < 31$  صدق می‌کنند را می‌نویسیم و سپس به هر یک از آن‌ها ۲ واحد اضافه می‌کنیم. اما اعداد اولی که در رابطه  $5 \leq x < 31$  صدق می‌کنند عبارتند از:

$C = \{7, 9, 13, 15, 19, 21, 25, 31\}$

در نتیجه با توجه به گزینه‌ها رابطه  $31 \in C$  درست است و بقیه گزینه‌ها نادرست هستند.

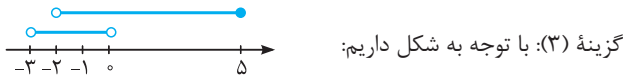
۴ ۳ ۲ ۱ ۵

**نکته:** دو مجموعه  $A$  و  $B$  برابرند، هرگاه هر عضو  $A$ ، عضوی از  $B$  و هر عضو  $B$ ، عضوی از  $A$  باشد و می‌نویسیم  $A = B$

برای مساوی بودن دو مجموعه  $A$  و  $B$  باید  $2x - y$  برابر  $-14$  و  $2x + 3y$  با عدد ۴ برابر باشد، پس داریم:

$$2x - y = -14, 2x + 3y = 4 \Rightarrow 2x + 3y = 2$$

روشن است که این مجموعه را می‌توان به صورت  $\mathbb{R} - (-1, 3)$  نیز نمایش داد. پس این گزینه نیز صحیح است.



پس این گزینه نیز صحیح است.  $(-3, 0) \cup (-2, 5] = (-3, 5]$

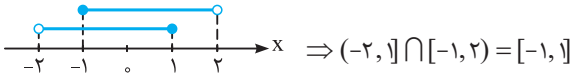
گزینه (۴): برای محاسبه حاصل  $(3, +\infty) - [2, 4)$ ، باید از بازه  $[2, 4)$ ، اعضای را که در بازه  $(3, +\infty)$  نیز قرار دارند، حذف شود. در واقع داریم:

$$[2, 4) - (3, +\infty) = [2, 3]$$

پس این گزینه نادرست می‌باشد و جواب تست نیز همین گزینه است.

۱۶ ۱ ۲ ۳ ۴

با نمایش هندسی هریک از دو بازه، داریم:



۱۷ ۱ ۲ ۳ ۴

تمام اعضای بازه  $(0, 2]$  را باید از بازه  $[-2, 3]$  حذف کنیم. توجه کنید که عدد صفر عضو مجموعه  $(0, 2]$  نیست، پس صفر را از  $[-2, 3]$  حذف نمی‌کنیم ولی چون  $2 \in (0, 2]$ ، پس عدد ۲ را باید از بازه  $[-2, 3]$  حذف کنیم، پس:

$$[-2, 3] - (0, 2] = [-2, 0] \cup (2, 3]$$

۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا هریک از مجموعه‌های  $A$  و  $B$  را به صورت بازه نمایش داده و سپس حاصل  $A - B$  را می‌یابیم:

$$1 \leq 2x - 1 < 7 \Rightarrow 2 \leq 2x < 8 \Rightarrow 1 \leq x < 4 \Rightarrow A = [1, 4) \quad (1)$$

$$3x + 2 < 8 \Rightarrow 3x < 6 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow B = (-\infty, 2) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow A - B = [1, 4) - (-\infty, 2) = [2, 4)$$

۱۹ ۱ ۲ ۳ ۴

بنابر تعریف مجموعه  $B$ ، اعضای آن، قرینه اعضای مجموعه  $A$  هستند. پس:

$$x \in B \Rightarrow -x \in A \Rightarrow -x \in (-2, 5] \Rightarrow -2 < -x \leq 5$$

$$\xrightarrow{\times(-1)} -5 \leq x < 2 \Rightarrow x \in [-5, 2) \Rightarrow B = [-5, 2)$$

$$A - B = (-2, 5] - [-5, 2) = [2, 5]$$

۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$A \cap C = (-\infty, 2] \cap (-1, +\infty) = (-1, 2]$$

$$B \cup (A \cap C) = [-3, 1) \cup (-1, 2] = [-3, 2]$$

۲۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$2m + 1 \in [-1, 5] \Rightarrow -1 \leq 2m + 1 \leq 5$$

$$\xrightarrow{-1} -2 \leq 2m \leq 4 \xrightarrow{\div 2} -1 \leq m \leq 2$$

۲۲ ۱ ۲ ۳ ۴

$$1 \in (2m - 1, 3m + 4) \Rightarrow 2m - 1 < 1 \leq 3m + 4 \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq 3m + 4 \\ 2m - 1 < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3 \leq 3m \\ 2m < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq m \\ m < 1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} -1 \leq m < 1 \Rightarrow m \in [-1, 1)$$

۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴

**نکته:** مجموعه  $A - B$ ، مجموعه‌ای است شامل همه عضوهای که عضو مجموعه  $A$  هستند ولی عضو مجموعه  $B$  نیستند.



هر یک از مجموعه‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$A - B = \{\{1, 2, 3\}\} \neq C, \quad B - C = \{\{1, 2\}\} \neq \emptyset, \{1, 2\}$$

$$A - B = \{\{1, 2, 3\}\} = \{C\}$$

۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴

مجموعه  $X$  باید عضو ۶ را داشته باشد و اعضای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را نیز می‌تواند اختیار کند یا نه، لذا برای هر یک از اعضای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ دو حالت وجود دارد که به  $X$  تعلق داشته باشند یا خیر. لذا تعداد مجموعه‌های  $X$  که در معادله داده شده صدق کنند برابر تعداد زیر مجموعه‌های  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، یعنی  $2^5 = 32$  می‌باشد.

۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴

مجموعه  $X$  باید اعضای مجموعه  $A \cap B$  یعنی ۳ را شامل باشد. همچنین هریک از اعضای  $A \cup B$ ، یعنی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ به جز ۳ می‌تواند در  $X$  باشند، لذا تعداد مجموعه‌هایی مانند  $X$  که در رابطه مذکور صدق می‌کنند، برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه  $\{1, 2, 4, 5\}$  می‌باشد که برابر  $2^4 = 16$  است.

۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱):  $\{-3, 2\}$  مجموعه‌ای فقط با دو عضو ۳- و ۲ می‌باشد، بنابراین  $\{-3, 2\} \notin \mathbb{Z}$

گزینه (۲): بازه‌ها زیرمجموعه‌ای از تمام اعداد گویا و گنگ می‌باشند و شامل فقط اعداد گویا نمی‌باشند، در واقع:  $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\} = (0, 1)$

$$\text{گزینه (۳): } (1, 3) \cap [2, +\infty) = [2, 3), \sqrt{2} < 2 \Rightarrow \sqrt{2} \notin [2, 3)$$

$$\text{گزینه (۴): } -1 \leq \pi = 3.14159 \dots < 4 \Rightarrow \pi \in [-1, 4)$$

هم‌چنین  $-1 \in [-1, 4)$ ، پس:

۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): با فرض  $A_n = \left[\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right]$  چون  $n \in \mathbb{N}$  و  $n \geq 2$ ، می‌توان نوشت:

$$A_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right], \quad A_3 = \left[\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right], \quad A_4 = \left[\frac{1}{4}, \frac{4}{5}\right], \dots$$

بدیهی است که با افزایش  $n$ ، ابتدای بازه‌ها به عدد صفر و انتهای بازه‌ها به عدد ۱ نزدیک می‌شود ولی هرگز به این اعداد نمی‌رسند. پس برای هر عدد طبیعی  $n \geq 2$ ،  $A_n \subseteq (0, 1)$ ، لذا این گزینه صحیح است.

گزینه (۲): نمایش هندسی مجموعه  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ یا } x \geq 3\}$  روی محور اعداد حقیقی به صورت زیر است:



۲۸ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$A_i = \left[-i, \frac{9-i}{4}\right]$$

$$A_1 = [-1, 4], A_2 = \left[-2, \frac{7}{4}\right], A_3 = [-3, 2], A_4 = [-4, 1]$$

$$A_2 \cap A_3 = \left[-2, \frac{7}{4}\right] \cap [-3, 2] = [-2, 2], A_1 \cap A_4 = [-1, 1]$$

$$\Rightarrow (A_2 \cap A_3) - (A_1 \cap A_4) = [-2, 2] - [-1, 1] = [-2, -1] \cup (1, 2]$$

۲۹ (۴ ۳ ۲ ۱)

در مجموعه کسرهایی مثبت با صورت کسر ۱، در مخرج کسر می‌توان هر عدد طبیعی قرار داد و چون تعداد اعداد طبیعی نامتناهی است، این مجموعه نامتناهی است.

تعداد اعضای بقیه مجموعه‌های ارائه شده در سایر گزینه‌ها برابر یک عدد حسابی بوده و در نتیجه همگی آن‌ها مجموعه متناهی‌اند.

۳۰ (۴ ۳ ۲ ۱)

مجموعه تمام افراد روی کره زمین و همچنین مجموعه تمام اتموسفرها موجود در جهان متناهی هستند گرچه تعداد آن‌ها زیاد است. همچنین مجموعه تمام اعداد اول زوج، یک مجموعه تک عضوی  $\{2\}$  است، لذا متناهی می‌باشد ولی مجموعه اعداد طبیعی مضرب ۵، بی‌شمار عضو دارد و در نتیجه نامتناهی (بی‌پایان) است.

۳۱ (۴ ۳ ۲ ۱)

بدیهی است که  $W - \mathbb{N} = \{0\}$  و مجموعه تک عضوی  $\{0\}$  متناهی است. توجه کنید که:

$$\mathbb{Z} - W = \{\dots, -3, -2, -1\}$$

$$W \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}, \mathbb{Z} \cap W = W$$

۳۲ (۴ ۳ ۲ ۱)

می‌دانیم  $A - B \subseteq A$  و چون مجموعه  $A$  متناهی است، پس مجموعه  $A - B$  نیز همواره متناهی خواهد بود. توجه کنید که ممکن است  $A - B = \emptyset$  باشد که در این صورت نیز مجموعه  $A - B$  متناهی است. زیرا تعداد اعضای  $A - B$  در این حالت نیز برابر یک عدد حسابی می‌باشد.

۳۳ (۴ ۳ ۲ ۱)

هر یک از مجموعه‌های داده شده در گزینه‌ها را با اعضا نمایش می‌دهیم:

$$\text{گزینه (۱): } \{5, 6, 7, 8, \dots\} \quad \text{گزینه (۲): } \{1, 2, \dots, 21\}$$

$$\text{گزینه (۳): } \{1001, 1002, 1003, \dots\} \quad \text{گزینه (۴): } \{997, 998, 999\}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید تنها مجموعه مذکور در گزینه (۲) متناهی است.

۳۴ (۴ ۳ ۲ ۱)

داریم:  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 1000\} = \{-31, -30, \dots, 30, 31\}$  بنابراین مجموعه ارائه شده در گزینه (۳) متناهی است. مجموعه ارائه شده در سایر گزینه‌ها، نامتناهی هستند.

۳۵ (۴ ۳ ۲ ۱)

بین هر دو عدد گویا، بی‌شمار عدد گویا وجود دارد و در نتیجه بین  $\frac{1}{5}$  و  $\frac{1}{4}$  نیز بی‌شمار عدد گویا وجود دارد. پس گزینه (۱) درست است.

اگر مجموعه  $A$  دارای زیرمجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه تمام اعضای این زیرمجموعه در مجموعه  $A$  قرار می‌گیرند و در نتیجه  $A$  نیز نامتناهی خواهد بود. بنابراین گزینه (۲) صحیح است. در گزینه (۳)، هر زیرمجموعه  $A$  یک مجموعه متناهی است و می‌دانیم یکی از زیرمجموعه‌های مجموعه  $A$ ، خود  $A$  است، پس  $A$  نیز یک مجموعه متناهی است و در نتیجه گزینه (۳) صحیح است.

گزینه (۴) می‌تواند نادرست باشد، به عنوان مثال، مجموعه اعداد طبیعی را می‌توان به صورت اجتماع دو مجموعه جدا از هم و نامتناهی  $O$  و  $E$  نوشت.

۲۳ (۴ ۳ ۲ ۱)

اولین سه عدد مربع کامل بزرگ‌تر از ۵ عبارتند از ۹، ۱۶ و ۲۵. پس بازه  $(5, b)$  باید شامل این سه عدد بوده و شامل هیچ عدد مربع کامل دیگری نباشد و نیز  $b$  بیش‌ترین مقدار را داشته باشد. چون عدد مربع کامل بعدی برابر ۳۶ بوده و بازه از طرف  $b$  باز است، پس بیش‌ترین مقدار  $b$  برابر ۳۶ است. در واقع بازه  $(5, 36)$  دارای سه عدد مربع کامل بوده و انتهای بازه، بیش‌ترین مقدار ممکن را دارا است.

۲۴ (۴ ۳ ۲ ۱)

پنج عدد صحیح بزرگ‌تر از  $-1$ ، عبارتند از ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴. با توجه به باز بودن بازه، برای این‌که این بازه شامل پنج عدد مذکور باشد،  $2a - 1$  باید از ۴ بیش‌تر ولی کوچک‌تر یا مساوی ۵ باشد. به عبارت دیگر باید داشته باشیم:

$$4 < 2a - 1 \leq 5 \Rightarrow 5 < 2a \leq 6 \Rightarrow 2.5 < a \leq 3$$

۲۵ (۴ ۳ ۲ ۱)

چون اجتماع دوبازه  $[1, a]$  و  $[b, 5]$  برابر یک بازه شده است، پس این بازه‌ها حتماً با هم اشتراک دارند. همچنین چون اجتماع این بازه‌ها برابر هیچ یک از آن‌ها نشده است، پس هیچ کدام زیرمجموعه دیگری نیست. از طرفی چون ابتدای بازه جواب  $1 < -1$  است، پس قطعاً  $b < 1$  می‌باشد. پس نمایش هندسی این بازه‌ها روی محور اعداد حقیقی می‌بایست به صورت روبه‌رو باشد:



با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$[1, a] \cup [b, 5] = [b, a]$$

پس بنابر فرض داریم:

$$[b, a] = [-1, 7] \Rightarrow b = -1, a = 7 \Rightarrow a - b = 7 - (-1) = 8$$

۲۶ (۴ ۳ ۲ ۱)

با قرار دادن اعداد ۱، ۲ و ۳ به جای  $n$  در  $A_n = (n-2, n+2)$  مجموعه‌های  $A_1, A_2, A_3$  را مشخص می‌کنیم:

$$A_1 = (1-2, 1+2) = (-1, 4), A_2 = (0, 5), A_3 = (1, 6)$$

$$\Rightarrow A_2 \cap A_3 = (0, 5) \cap (1, 6) = (1, 5)$$

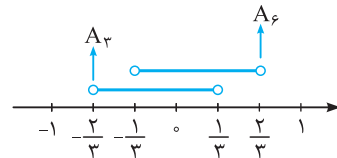
$$\Rightarrow A_1 - (A_2 \cap A_3) = (-1, 4) - (1, 5) = (-1, 1]$$

۲۷ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$A_n = \left(-\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n}\right) \Rightarrow A_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{3-2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$A_6 = \left(-\frac{2}{6}, \frac{6-2}{6}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

بازه‌های  $A_3$  و  $A_6$  را روی محور نمایش می‌دهیم:



$$A_3 \cup A_6 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow (A_3 \cup A_6) - A_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$



۴۳ ۱ ۲ ۳ ۴

$$(A \cap B)' \stackrel{\text{دمورگان}}{=} A' \cup B' = \{1, 2, 4\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

۴۴ ۱ ۲ ۳ ۴

با استفاده از قوانین دمورگان می‌دانیم  $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ، داریم:  
 $A' = \{1, 2, 3\}$ ،  $B' = \{2, 3, 4, \dots\} \Rightarrow A' \cap B' = \{2, 3\}$

۴۵ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم  $A \cap B \subseteq A$  و  $A \cap B \subseteq B$ . چون  $A \cap B = \{2, 3\}$ ، پس مجموعه‌های  $A$  و  $B$  هر دو شامل اعضای ۲ و ۳ هستند. از سوی دیگر  $A \subseteq \{1, 4\}$  و  $B \subseteq \{5, 7, 9\}$ ، پس داریم:

$$A = \{1, 4, 2, 3\}$$

از آنجایی که  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$ ، پس مجموعه‌های  $A$  و  $B$  عضو دیگری ندارند. بنابراین:

$$A' = U - A = \{1, 2, \dots, 9\} - \{1, 2, 3, 4\} = \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

۴۶ ۱ ۲ ۳ ۴

هر یک از مجموعه‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  با اعضا به صورت زیر است:

$$A = \{3, 6, 9\}$$
،  $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ،  $C = \{1, 4, 9\}$

$$(1) \quad C \cup A' = \{1, 4, 9\} \cup \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$$

$$(2) \quad C' - B = \{2, 4, 6, 8, 10\} - \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{2, 6, 8, 10\}$$

از (۱) و (۲) داریم:

$$(C \cup A') - (C' - B) = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10\} - \{2, 6, 8, 10\}$$

$$= \{1, 4, 5, 7, 9\}$$

بنابراین مجموعه  $(C \cup A') - (C' - B)$ ، ۵ عضو دارد.

۴۷ ۱ ۲ ۳ ۴

خارج مجموعه  $A$  رنگی است و طبق تعریف متمم، این قسمت مجموعه  $A'$  است.

۴۸ ۱ ۲ ۳ ۴

با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها داریم:

$$(A \cap B') - A = (A \cap B') \cap A' = (A \cap A') \cap B' = \emptyset \cap B' = \emptyset$$

۴۹ ۱ ۲ ۳ ۴

چون  $U$  مجموعه مرجع می‌باشد، لذا  $A' \subseteq U$  و در نتیجه

$$A' \cap U = A' \quad \text{بنابراین} \quad A \cup (A' \cap U) = A \cup A' = U$$

$$[A \cup (A' \cap U)] \cup B = U \cup B = U$$

۵۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$A \subseteq U \Rightarrow A \cap U = A \Rightarrow (A \cap U) \cup A = A \cup A = U \quad (1)$$

$$U' = \emptyset \Rightarrow A' - U' = A' - \emptyset = A'$$

$$\Rightarrow (A' - U')' = (A')' = A \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \text{مجموعه} = U - A = A'$$

۵۱ ۱ ۲ ۳ ۴

چون  $A$  و  $B$  ناتهی هستند و  $B - A = B$ ، لذا  $A$  و  $B$  جدا از هم

می‌باشند، یعنی  $A \cap B = \emptyset$ . بنابراین:

$$(A \cap B)' \cup (A - B) = \emptyset' \cup A = U \cup A = U$$

۳۶ ۱ ۲ ۳ ۴

مجموعه اعداد طبیعی زوج و مجموعه اعداد طبیعی فرد هیچ اشتراکی با هم ندارند و بنابراین  $E \cap O = \emptyset$  خواهد بود.

۳۷ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم  $A \cap B' = A - B$  و از آن جایی که اگر از مجموعه نامتناهی، مجموعه‌ای متناهی کم شود، حاصل مجموعه‌ای نامتناهی خواهد بود، پس مجموعه  $A \cap B' = A - B$  قطعاً مجموعه‌ای نامتناهی است.

در گزینه (۲)، چون  $B - A \subseteq B$  و مجموعه  $B$  متناهی است، پس  $B - A$  نیز متناهی است.

در گزینه (۳)، اگر مجموعه  $C$  که  $C \subseteq A$  است، متناهی باشد، مجموعه  $B \cup C$  متناهی خواهد بود. بنابراین این مجموعه الزاماً نامتناهی نیست.

در گزینه (۴)، اگر مجموعه  $C'$  متناهی باشد، از آن جایی که اشتراک یک مجموعه متناهی و یک مجموعه نامتناهی، همواره مجموعه‌ای متناهی است، پس این مجموعه نیز متناهی خواهد بود.

۳۸ ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به این که  $A \cap B' \subseteq A$  است و مجموعه  $A$  مجموعه‌ای متناهی می‌باشد، پس مجموعه  $A \cap B'$  نیز متناهی است.

۳۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$x < 2x + 3 \leq 6 - x \Rightarrow \begin{cases} x < 2x + 3 \\ 2x + 3 \leq 6 - x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3 < x \\ 3x \leq 3 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow -3 < x \leq 1 \Rightarrow A = (-3, 1]$$

$$B = (-\infty, -2) \cup [4, +\infty) \Rightarrow B' = [-2, 4)$$

$$\Rightarrow A \cap B' = (-3, 1] \cap [-2, 4) = [-2, 1]$$

۴۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$W = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \quad A = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$$

چون مجموعه  $W$  را مرجع گرفته‌ایم، بنابراین متمم مجموعه  $A$

زیرمجموعه‌های  $W$  است که اعضای  $A$  در آن نباشد، بنابراین

$$A' = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

است که می‌توان آن را با نماد ریاضی به صورت  $A' = \{2x + 1 \mid x \in W\}$

نمایش داد. توجه کنید که در گزینه (۲) اعداد فرد از ۱- شروع می‌شوند و

چون  $A$  و  $A'$  باید در داخل مجموعه مرجع باشند، این گزینه نادرست است.

۴۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$U = \{1, 2, 3, \dots, 39\} \quad \left. \begin{aligned} & \\ & A' = U - A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 26, 27, \dots, 39\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A' \cup U = U$$

بنابراین  $A' \cup U$  دارای ۳۹ عضو می‌باشد.

۴۲ ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به مجموعه مرجع که برابر مجموعه اعداد طبیعی می‌باشد، ابتدا مجموعه‌های  $A$  و  $B$  را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$$A' = \{2, 3, 4, \dots\} \Rightarrow A = \{1\}, B' = \{5, 6, 7, \dots\} \Rightarrow B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$$

بنابراین:

باید مجموع تعداد اعضای تمام قسمت‌های مشخص شده برابر ۲۰ شود:

$$6 + n(A \cap B) + 4 + 7 = 20 \Rightarrow n(A \cap B) + 17 = 20$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 3$$

$$\Rightarrow n(A) = n(A - B) + n(A \cap B) = 6 + 3 = 9$$

۶۰ (۴ ۳ ۲ ۱)

**روش اول:** در این مسئله اگر  $A$  مجموعه افرادی که به فوتبال و  $B$  مجموعه افرادی که به والیبال علاقه دارند باشد، آن‌گاه داریم  $n(A) = 24$  و  $n(B) = 18$  و چون از ۳۰ نفر ۴ نفر به هیچ یک از این دو ورزش علاقمند نیستند، لذا  $n(A \cup B) = 26$ . بنابراین داریم:

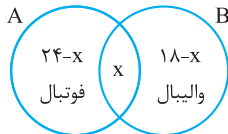
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 26 = 24 + 18 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 16$$

در نتیجه تعداد افرادی که فقط به والیبال علاقمندند برابر است با:

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 18 - 16 = 2$$

**روش دوم:** به کمک نمودار ون نیز می‌توان



این مسئله را حل کرد:

$$24 - x + x + 18 - x = 26 \Rightarrow x = 16$$

$$\Rightarrow 18 - x = 18 - 16 = 2 = \text{تعداد افرادی که فقط به والیبال علاقمندند.}$$

۶۱ (۴ ۳ ۲ ۱)

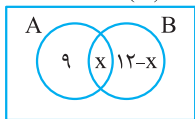
فرض کنیم  $A$  و  $B$  به ترتیب مجموعه دانش‌آموزانی باشند که در کلاس‌های ادبیات و عربی شرکت کرده‌اند. می‌خواهیم  $n(A' \cap B')$  را به دست آوریم. داریم:  $n(A) = 35$ ,  $n(B) = 31$ ,  $n(A \cap B) = 23$

$$\Rightarrow n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B)$$

$$= 51 - (n(A) + n(B) - n(A \cap B)) = 51 - (35 + 31 - 23) = 8$$

۶۲ (۴ ۳ ۲ ۱)

**روش اول:** از نمودار ون استفاده می‌کنیم. اگر گروه ورزش را با  $A$  و گروه روزنامه‌دیواری را با  $B$  نمایش دهیم، داریم:



$$9 + x = 16 \Rightarrow x = 7$$

بنابراین تعداد افرادی که در هیچ‌یک از این گروه‌ها

نیستند، برابر است با:

$$39 - (9 + 7 + 5) = 18$$

**روش دوم:** طبق فرض،  $n(U) = 39$ ،  $n(A) = 16$  و  $n(B) = 12$  و  $n(A - B) = 9$  و باید  $n(A' \cap B')$  را بیابیم. داریم:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \Rightarrow 9 = 16 - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 7$$

$$n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B)$$

$$= n(U) - (n(A) + n(B) - n(A \cap B))$$

$$= 39 - (16 + 12 - 7) = 39 - 21 = 18$$

۵۲ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$[(A \cap B') \cup (A' \cup B)] = [(A \cap B') \cup ((A' \cup B)')] = [(A \cap B') \cup (A \cap B)'] = U$$

بنابراین متمم مجموعه فوق، یعنی  $U$  برابر  $\emptyset$  می‌باشد.

۵۳ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$(B - A)' - A = (B \cap A')' \cap A' = (B' \cup A) \cap A' = (A' \cap B') \cup (A' \cap A) = (A' \cap B') \cup \emptyset = A' \cap B'$$

$$\Rightarrow ((B - A)' - A)' = (A' \cap B')' = A \cup B$$

۵۴ (۴ ۳ ۲ ۱)

با توجه به نمودار ون ، لزومی ندارد مجموعه  $B - A = B \cap A'$  یک مجموعه تهی باشد.

۵۵ (۴ ۳ ۲ ۱)

**نکته:** اگر  $A \cap B = \emptyset$ ، آن‌گاه  $A$  و  $B$  دو مجموعه جدا از هم هستند و داریم:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B', B \subseteq A', A - B = A, B - A = B$$

$$(A \cap B') - (B - A) = (A - B) - (B - A) = \frac{B - A + A - B}{\text{جدا از هم می‌باشند}} A - B$$

۵۶ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B)$$

$$= n(U) - (n(A) + n(B) - n(A \cap B))$$

$$= 30 - (12 + 20 - 7) = 30 - 25 = 5$$

۵۷ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\frac{n(A) + n(B) = 3n(A \cap B)}{3n(A \cap B) - n(A \cap B) = 2n(A \cap B)}$$

$$\Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)} = \frac{2n(A \cap B)}{n(A \cap B)} = 2$$

۵۸ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B), n(A - B) = 2n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow n(A) - n(A \cap B) = 2n(A \cap B) \Rightarrow n(A) = 3n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 3n(A \cap B) + 2n(A \cap B) - n(A \cap B) = 4n(A \cap B) \quad (1)$$

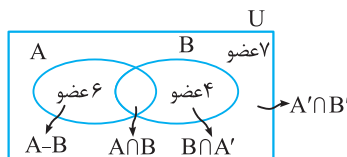
$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 2n(A \cap B) - n(A \cap B) = n(A \cap B) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(B - A)} = \frac{4n(A \cap B)}{n(A \cap B)} = 4$$

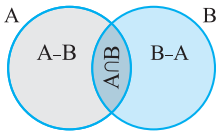
۵۹ (۴ ۳ ۲ ۱)

از نمودار ون استفاده می‌کنیم و تعداد عضوهای هر قسمت را مشخص می‌کنیم:



تعداد اعضای که حداقل به یکی از دو مجموعه A یا B تعلق دارد برابر  $n(A \cup B)$  می‌باشد که با توجه به فرض داریم:

$$n(A \cup B) = 3n(B) = 3 \times 6 = 18$$



با توجه به نمودار ون، می‌توان نوشت:

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B)$$

$$40 = 12 + 18 + n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 10$$

با توجه به نمودار ون داریم:

$$n(A) = n(A - B) + n(A \cap B) = 12 + 10 = 22$$

$$n(B) = n(B - A) + n(A \cap B) = 18 + 10 = 28$$

حال اگر از هر یک از مجموعه‌های A و B، 9 عضو حذف کنیم، داریم:

$$n(A_1) = n(A) - 9 = 22 - 9 = 13$$

$$n(B_1) = n(B) - 9 = 28 - 9 = 19$$

$$n(A_1 \cap B_1) = n(A \cap B) - 4 = 10 - 4 = 6$$

پس خواهیم داشت:

$$n(A_1 \cup B_1) = n(A_1) + n(B_1) - n(A_1 \cap B_1) = 13 + 19 - 6 = 26$$

فرض کنیم  $A_1$  مجموعه حاصل از اضافه کردن 10 عضو جدید به مجموعه A باشد، در این صورت  $n(A_1) = n(A) + 10$  و طبق

فرض  $n(A_1 \cap B) = 9 + n(A \cap B)$  می‌باشد، بنابراین:

$$n(B \cup A_1) = n(B) + n(A_1) - n(A_1 \cap B)$$

$$= n(B) + n(A) + 10 - (9 + n(A \cap B))$$

$$= \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B) + 1}{n(A \cup B)} = \frac{25 + 1}{26} = 1$$

اگر مجموعه جدید که از حذف 16 عضو از مجموعه A به دست می‌آید را  $A_1$  نمایش دهیم، بنابر فرض، اطلاعات زیر را داریم:

$$n(A) = 36 \Rightarrow n(A_1) = 36 - 16 = 20$$

$$n(B) = 28, n(A \cap B) = 15 \Rightarrow n(A_1 \cap B) = 15 - 9 = 6$$

اکنون باید حاصل  $n(A_1 \cup B)$  را بیابیم. پس:

$$n(A_1 \cup B) = n(A_1) + n(B) - n(A_1 \cap B) = 20 + 28 - 6 = 42$$

فرض کنیم A و B به ترتیب زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع باشند به طوری که اعضای آن‌ها بر 3 و 5 بخش پذیر باشند، در این صورت:

$$U = \{1, 2, \dots, 99\}, A = \{3, 6, 9, \dots, 99\} \Rightarrow n(A) = 33$$

$$B = \{5, 10, 15, \dots, 95\} \Rightarrow n(B) = 19$$

$$A \cap B = \{15, 30, 45, 60, 75, 90\}$$

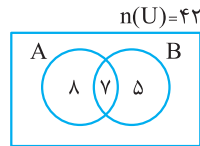
$$\Rightarrow n(A \cap B) = 6$$

می‌خواهیم  $n(A' \cap B')$  را به دست آوریم، داریم:

$$n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B)$$

$$= n(U) - (n(A) + n(B) - n(A \cap B)) = 99 - (33 + 19 - 6) = 53$$

۶۳ ۴ ۳ ۲ ۱



روش اول: اگر گروه آزمایشگاهی را با A و گروه فوتبال را با B نمایش دهیم، با استفاده از نمودار ون داریم:

با توجه به نمودار ون، تعداد افرادی که عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند، برابر است با:

$$42 - (8 + 7 + 5) = 42 - 20 = 22$$

روش دوم: داریم:

$$n(A) = 15, n(B) = 12, n(A \cap B) = 7, n(U) = 42$$

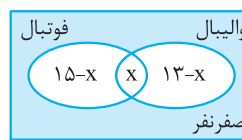
پس:

$$n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B)$$

$$= n(U) - (n(A) + n(B) - n(A \cap B))$$

$$= 42 - (15 + 12 - 7) = 42 - 20 = 22$$

۶۴ ۴ ۳ ۲ ۱



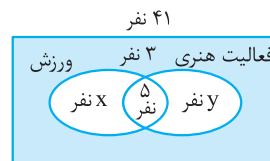
فرض کنیم که X نفر، هم عضو تیم فوتبال و هم عضو تیم والیبال باشند، با توجه به این‌که هر دانش‌آموز حداقل در یک تیم عضو است، داریم:

دانش‌آموزان کلاس

$$15 - x + x + 13 - x = 23 \Rightarrow 28 - x = 23 \Rightarrow x = 5$$

بنابراین 8 نفر فقط عضو تیم والیبال و 10 نفر فقط عضو تیم فوتبال هستند و در نتیجه  $10 + 8 = 18$  نفر دقیقاً عضو یکی از تیم‌های فوتبال یا والیبال می‌باشند.

۶۵ ۴ ۳ ۲ ۱



طبق فرض، نمودار ون مقابل را داریم: طبق فرض، اگر یک واحد از X کم کنیم و  $\frac{3}{5}$  آن را در نظر بگیریم، برابر Y است، بنابراین:

$$y = \frac{3}{5}(x - 1)$$

$$x + 5 + y + 3 = 41$$

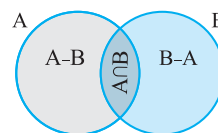
از طرفی داریم:

$$\Rightarrow x + y = 33, y = \frac{3}{5}(x - 1) \Rightarrow x + \frac{3}{5}(x - 1) = 33$$

$$\Rightarrow 5x + 3(x - 1) = 5 \times 33 = 165 \Rightarrow 8x = 168 \Rightarrow x = 21$$

پس  $x + 5 = 21 + 5 = 26$  نفر در رشته ورزشی فعالیت می‌کنند.

۶۶ ۴ ۳ ۲ ۱



با توجه به نمودار ون می‌توان نوشت:

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 5 = 2 + n(B - A) + 2 \Rightarrow n(B - A) = 1$$

با توجه به فرض مسئله  $n(A \cup B) = 3n(B)$ ،  $n(A) = \frac{5}{3}n(B)$  و

$n(A \cap B) = 3$ ، بنابراین خواهیم داشت:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 3n(B) = \frac{5}{3}n(B) + n(B) - 3 \Rightarrow \frac{1}{3}n(B) = 3 \Rightarrow n(B) = 9$$

۷۸ (۴ ۳ ۲ ۱)

دنباله تمام دایره‌های توپر و توخالی در آرایه داده شده، یک دنباله مربعی است و جملات آن عبارت است از:  $a_n = n^2 \Rightarrow 1, 4, 9, 16, 25, \dots$  با کمی دقت معلوم می‌شود که در شکل‌های با اندیس زوج، تعداد دایره‌های توپر و توخالی با یکدیگر برابرند و در شکل‌های با اندیس فرد، تعداد دایره‌های توپر یکی از تعداد دایره‌های توخالی بیش‌تر است. بنابراین جمله یازدهم کلاً از  $11^2 = 121$  دایره تشکیل شده است که چون شماره شکل فرد است، تعداد دایره‌های توپر آن یک واحد از تعداد دایره توخالی آن بیش‌تر است. پس شکل یازدهم دارای ۶۰ دایره توخالی و ۶۱ دایره توپر است.

۷۹ (۴ ۳ ۲ ۱)

ابتدا تعداد مربع‌های رنگی شکل هشتم را به دست می‌آوریم. برای این کار تعداد مربع‌های رنگی را به صورت دنباله زیر می‌نویسیم:

$$2, 2, 6, 6, 12, 12, 20, 20$$

پس ۲۰ مربع شکل هشتم رنگی است.

حال کافی است تعداد کل مربع‌های شکل هشتم را به دست آوریم. برای این کار ابتدا دنباله زیر را که شامل تعداد کل مربع‌های تشکیل‌دهنده شکل‌ها می‌باشد، می‌نویسیم:

واضح است که دنباله فوق، یک دنباله مثلثی می‌باشد، پس تعداد کل مربع‌های شکل هشتم برابر است با:

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow{n=8} a_8 = \frac{8(9)}{2} = 36$$

پس  $\frac{20}{36}$  یا به عبارتی  $\frac{5}{9}$  شکل هشتم رنگی است.

۸۰ (۴ ۳ ۲ ۱)

اگر به تعداد نقطه‌ها در ردیف اول دقت کنیم، به صورت زیر است:

$$1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1, \dots$$

بنابراین در ردیف اول شکل نهم، تعداد نقطه‌ها برابر  $17 = 2(9) - 1$  است. اما در شکل نهم، ۹ ردیف نقطه خواهیم داشت که هر ردیف نسبت به ردیف پایین یک نقطه کم‌تر دارد. بنابراین تعداد نقطه‌ها در ردیف نهم برابر است با:

$$\begin{aligned} & 9 + 10 + \dots + 16 + 17 \\ & = 9 + (9+1) + (9+2) + \dots + (9+8) = 9 \times 9 + (1+2+\dots+8) \\ & = 81 + \frac{8 \times 9}{2} = 81 + 36 = 117 \end{aligned}$$

۸۱ (۴ ۳ ۲ ۱)

در هر شکل، سه ردیف نقطه وجود دارد که دو ردیف پایینی دارای تعداد نقطه‌های یکسان و ردیف سوم، یک نقطه کم‌تر از ردیف‌های اول و دوم دارد. با توجه به الگو، در ردیف پایینی شکل دوازدهم، ۱۳ نقطه وجود دارد. بنابراین:  $13 + 13 + 12 = 38$  = تعداد نقطه‌های شکل دوازدهم

۸۲ (۴ ۳ ۲ ۱)

طول یکی از اضلاع قائمه در تمامی مثلث‌ها برابر ۱ واحد است و طول ضلع قائم دیگر در مثلث اول ۱، در مثلث دوم  $\sqrt{2}$ ، در مثلث سوم  $\sqrt{3}$  و ... و در مثلث نهم  $\sqrt{9} = 3$  می‌باشد؛ پس مساحت مثلث نهم برابر است با:  $S = \frac{3 \times 1}{2} = \frac{3}{2}$

۸۳ (۴ ۳ ۲ ۱)

با به دست آوردن چند جمله اول هر یک از دنباله‌های داده شده، مشخص می‌شود که جملات دنباله  $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n^2}$  به صورت  $0, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{4}, 0, \dots$  می‌باشد.

۷۲ (۴ ۳ ۲ ۱)

تعداد پاره‌خطها:  $5, 9, 13, \dots$

$$a_4 = 4 \times 1 + 5, \quad a_5 = 4 \times 2 + 5, \dots$$

بنابراین جمله  $n$ ام به صورت  $a_n = 4(n-1) + 5$  می‌باشد، لذا خواهیم داشت:

$$a_n = 49 \Rightarrow 4(n-1) + 5 = 49 \Rightarrow 4n - 4 + 5 = 49 \Rightarrow 4n = 49 \Rightarrow n = 12$$

۷۳ (۴ ۳ ۲ ۱)

تعداد دایره‌های توخالی:  $1, 4, 5, 8, 9, \dots$

با توجه به روند فوق می‌توان تعداد دایره‌های توخالی در این الگو را به صورت دنباله زیر نوشت:

$$1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 16, 17, 20, \dots$$

$$+3, +1, +3, +1, +3, +1, +3, +1, +3, +1, \dots$$

پس تعداد دایره‌های توخالی در مرحله دهم ۲۰ می‌باشد.

۷۴ (۴ ۳ ۲ ۱)

تعداد چوب‌کبریت‌ها را به صورت دنباله زیر می‌نویسیم:

$$8, 20, 32, \dots$$

در این صورت داریم:

$$(2) \text{ تعداد چوب کبریت‌ها در مرحله } 12 = 12 \times 1 + 8$$

$$(3) \text{ تعداد چوب کبریت‌ها در مرحله } 12 = 12 \times 2 + 8$$

$$\vdots$$

$$(n) \text{ تعداد چوب کبریت‌ها در مرحله } 12 = 12 \times (n-1) + 8$$

$$\Rightarrow a_n = 12n - 4 \xrightarrow{n=12} a_{12} = 140$$

۷۵ (۴ ۳ ۲ ۱)

تعداد مکعب‌ها را به صورت جدول زیر می‌نویسیم:

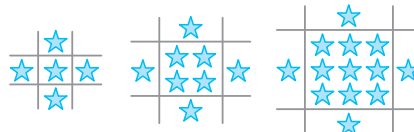
شماره شکل	۱	۲	۳
تعداد مکعب‌ها	۱	۱ <sup>۲</sup> + ۲ <sup>۲</sup>	۱ <sup>۲</sup> + ۲ <sup>۲</sup> + ۳ <sup>۲</sup>

پس تعداد مکعب‌ها در شکل ششم برابر است با:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91$$

۷۶ (۴ ۳ ۲ ۱)

الگو را می‌توان به صورت زیر دسته بندی کرد:



با توجه به دسته بندی فوق داریم:

$$a_1 = 1^2 + 4, \quad a_2 = 2^2 + 4, \quad a_3 = 3^2 + 4$$

$$\text{بنابراین } a_n = n^2 + 4 \text{ و در نتیجه } a_{15} = 15^2 + 4 = 229$$

۷۷ (۴ ۳ ۲ ۱)

با توجه به الگوی داده شده داریم:  $a_1 = 1+1, a_2 = 3+1, a_3 = 6+1$  می‌دانیم اعداد ۱، ۳، ۶ و ... همان جملات دنباله مثلثی هستند که جمله عمومی آن‌ها از رابطه  $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$  به دست می‌آید. پس می‌توان

گفت جمله عمومی این دنباله از رابطه  $a_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$  به دست می‌آید. بنابراین:

$$a_{20} = \frac{20 \times 21}{2} + 1 = 211$$