

# دیباچه کتاب

سلام بچه‌ها!

به کتاب ما خوش اومدین ...

با خودمون گفتیم به کتابی براتون چاپ کنیم که دیگه خیالتون راحت باشه. چرا که ویژگی‌های این کتاب به حدی جذاب و کامله که خیلی از نیازهای شما رو برطرف می‌کنه.

## ویژگی ۱ جامع بودن کتاب

تمام کتاب‌های اصلی تون رو تو یه کتاب جمع کردیم. این کتاب شامل کتاب‌های ریاضی، شیمی، فیزیک، فارسی، انگلیسی، عربی، دین‌وزندگی، هندسه و زیست است.

## ویژگی ۲ درسنامه‌های آموزشی

برای تمام کتاب‌ها و تک‌تک درس‌ها، درسنامه‌های آموزشی گذاشتیم. درسته که درسنامه‌ها مون کامله و مو لای درزش نمیره، ولی حتماً قبلش کتاب درسی تون رو هم خوب بخونید. ضرر نداره، هیچی، منفعت هم داره. بعدش هم کلاً دوستی با کتاب خوبه، چه برسه که اون کتاب، خود کتاب درسی باشه.

## ویژگی ۳ بانک سؤالات امتحانی

برای هر درس تعداد قابل توجهی سؤال امتحانی در تیپ‌های مختلف براتون آوردیم تا با انواع و اقسام سؤالات امتحانی آشنا بشین. با مطالعه این سؤالات، دیگه دغدغه‌ای برای امتحان نخواهید داشت، چون بیست تو مشتتونه.

## ویژگی ۴ پاسخ‌های کاملاً تشریحی

توصیه می‌کنیم که حتی اگه پاسخ یه سؤال رو می‌دونین، باز پاسخ‌ها رو یه نگاهی بندازین. مطالعه پاسخ‌ها خودش مرور کتابه. تازه ممکنه بعضی از جواباتون غلط باشه و خودتون ندونین، آخه بعضی از سؤالی ما انحرافی و ممکنه تو تله سؤال افتاده باشین.

با تشکر از مؤلفان این کتاب

علی‌اکبر طالبی (ریاضی) - افشین احمدی - امیرحسین کریمی (شیمی) - امیرحسن محمدپور (فیزیک)

نعمت‌اله بوالحسنی (فارسی) - بداله حیدری (انگلیسی) - اسرافیل قربان‌پور (عربی) - مرتضی محسنی کبیر (دین و زندگی)

محمدطاهر شعاعی (هندسه) - بی‌تا ساقی (زیست‌شناسی)

دانش‌آموزان عزیز! آزمون‌های این کتاب را می‌توانید با اسکن QR کد بر روی جلد، به صورت رایگان دریافت نمایید.

بخونین و لذت ببرین.

## شیمی دهم



### فصل ۱: کیهان زادگاه عناصر

- درسنامه ۱: شناخت کیهان و چگونگی تشکیل عناصرها ۱۵۷  
 درسنامه ۲: آیا همه اتم‌های یک عنصر پایدارند؟ ۱۶۰  
 درسنامه ۳: طبقه‌بندی عناصرها ۱۶۹  
 درسنامه ۴: شمارش ذره‌ها از روی جرم آن‌ها ۱۷۵  
 درسنامه ۵: نور، کلید شناخت جهان ۱۷۹  
 درسنامه ۶: کشف ساختار اتم ۱۸۳  
 درسنامه ۷: توزیع الکترون‌ها در لایه‌ها و زیر لایه‌ها ۱۸۷  
 درسنامه ۸: ساختار اتم و رفتار آن ۱۹۴

### فصل ۲: ردپای گازها در زندگی

- درسنامه ۱: هوا کره ۲۰۲  
 درسنامه ۲: اکسیژن، گازی واکنش پذیر در هوا کره ۲۰۸  
 درسنامه ۳: نام‌گذاری اکسید فلزها و نافلزها ۲۱۶  
 درسنامه ۴: رسم ساختار لوویس مولکول‌ها ۲۱۹  
 درسنامه ۵: رفتار اکسیدهای فلزی و نافلزی ۲۲۴  
 درسنامه ۶: اثر گلخانه‌ای ۲۲۸  
 درسنامه ۷: اوزون، دگرشکلی از اکسیژن در هوا کره ۲۳۱  
 درسنامه ۸: خواص و رفتار گازها ۲۳۴  
 درسنامه ۹: استوکیومتری واکنش ۲۳۸

### فصل ۳: آب، آهنگ زندگی

- درسنامه ۱: زمین، سامانه‌ای بزرگ ۲۴۸  
 درسنامه ۲: یون‌های چنداتمی ۲۵۱  
 درسنامه ۳: محلول و مقدار حل شونده‌ها ۲۵۶  
 درسنامه ۴: انحلال پذیری در آب ۲۶۵  
 درسنامه ۵: نمودار «انحلال پذیری-دما» ۲۶۸  
 درسنامه ۶: رفتار آب و دیگر مولکول‌ها در میدان الکتریکی ۲۷۴  
 درسنامه ۷: پیوند هیدروژنی ۲۷۷  
 درسنامه ۸: آب و دیگر حلال‌ها ۲۸۱  
 درسنامه ۹: انحلال پذیری گازها در آب ۲۸۵  
 درسنامه ۱۰: پدیده‌آسمز ۲۸۸

## ریاضی دهم



### فصل ۱: مجموعه، الگو و دنباله

- درسنامه ۱: مجموعه اعداد - بازه‌ها ۱۱  
 درسنامه ۲: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی... ۱۵  
 درسنامه ۳: الگو و دنباله ۲۱  
 درسنامه ۴: دنباله‌های حسابی و هندسی ۲۷

### فصل ۲: مثلثات

- درسنامه ۱: نسبت‌های مثلثاتی ۳۵  
 درسنامه ۲: دایره مثلثاتی ۴۱  
 درسنامه ۳: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ۴۷

### فصل ۳: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

- درسنامه ۱: ریشه و توان ۵۳  
 درسنامه ۲: ریشه nام ۵۷  
 درسنامه ۳: توان‌های گویا ۶۱  
 درسنامه ۴: عبارت‌های جبری ۶۵  
 درسنامه ۵: عبارت‌های گویا ۷۰

### فصل ۴: معادله‌ها و نامعادله‌ها

- درسنامه ۱: معادله درجه دوم و ... ۷۶  
 درسنامه ۲: سهمی ۸۱  
 درسنامه ۳: تعیین علامت ۸۵  
 درسنامه ۴: نامعادله ۸۹

### فصل ۵: تابع

- درسنامه ۱: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن... ۹۸  
 درسنامه ۲: انواع تابع - رسم تابع به کمک انتقال ۱۰۹

### فصل ۶: شمارش، بدون شمردن

- درسنامه ۱: شمارش ۱۱۸  
 درسنامه ۲: جایگشت ۱۲۳  
 درسنامه ۳: ترکیب ۱۲۸

### فصل ۷: آمار و احتمال

- درسنامه ۱: پدیده‌های تصادفی... ۱۳۷  
 درسنامه ۲: احتمال رخداد یک پیشامد... ۱۴۲  
 درسنامه ۳: مقدمه‌ای بر علم آمار... ۱۵۱



## فیزیک دهم

### فصل ۱: فیزیک و اندازه‌گیری

- درسنامه ۱: فیزیک و کمیت‌ها ..... ۲۹۵
- درسنامه ۲: تبدیل یکاها - اندازه‌گیری و ... ..... ۳۰۱
- درسنامه ۳: چگالی ..... ۳۰۹

### فصل ۲: ویژگی‌های فیزیکی مواد

- درسنامه ۱: حالت‌های ماده ..... ۳۱۴
- درسنامه ۲: نیروی بین مولکولی ..... ۳۱۶
- درسنامه ۳: فشار در شارها ..... ۳۲۰
- درسنامه ۴: نقاط هم‌تراز - لوله U شکل ..... ۳۲۵
- درسنامه ۵: فشار هوا ..... ۳۲۸
- درسنامه ۶: فشارسنج شارها (مانومتر) ..... ۳۳۲
- درسنامه ۷: نیروی شناوری ..... ۳۳۵
- درسنامه ۸: شار در حال حرکت و اصل برنولی ..... ۳۳۷

### فصل ۳: کار، انرژی و توان

- درسنامه ۱: انرژی جنبشی ..... ۳۴۱
- درسنامه ۲: کار انجام شده توسط نیروی ثابت ..... ۳۴۵
- درسنامه ۳: قضیه کار - انرژی جنبشی ..... ۳۴۹
- درسنامه ۴: کار و انرژی پتانسیل ..... ۳۵۲
- درسنامه ۵: پایداری انرژی مکانیکی ... ..... ۳۵۵
- درسنامه ۶: کار و انرژی درونی ..... ۳۵۹
- درسنامه ۷: توان - بازده ..... ۳۶۲

### فصل ۴: دما و گرما

- درسنامه ۱: دما - دماسنجی ..... ۳۶۷
- درسنامه ۲: انبساط طولی ..... ۳۷۰
- درسنامه ۳: انبساط سطحی ..... ۳۷۴
- درسنامه ۴: انبساط حجمی ..... ۳۷۶
- درسنامه ۵: گرما ..... ۳۷۹
- درسنامه ۶: گرمای ویژه - دمای تعادل ..... ۳۸۱
- درسنامه ۷: گرماسنج (کالری متر) ..... ۳۸۵
- درسنامه ۸: تغییر حالت (فاز) جامد به مایع ..... ۳۸۷
- درسنامه ۹: تغییر حالت مایع - بخار ..... ۳۹۱
- درسنامه ۱۰: روش‌های انتقال گرما، رسانش گرمایی ..... ۳۹۶
- درسنامه ۱۱: روش‌های انتقال گرما، همرفت ..... ۳۹۷
- درسنامه ۱۲: روش‌های انتقال گرما، تابش ..... ۳۹۸
- درسنامه ۱۳: قوانین گازها (ویژه رشته ریاضی و فیزیک) ..... ۳۹۹
- درسنامه ۱۴: قانون گازهای کامل (ویژه رشته ریاضی و فیزیک) ..... ۴۰۲
- فصل ۵: ترمودینامیک (ویژه رشته ریاضی و فیزیک)**
- درسنامه ۱: مقدمات ترمودینامیک ..... ۴۰۵
- درسنامه ۲: تبادل انرژی ..... ۴۰۸
- درسنامه ۳: فرایند هم‌حجم ..... ۴۱۱
- درسنامه ۴: فرایند هم‌فشار ..... ۴۱۴
- درسنامه ۵: فرایند هم‌دما ..... ۴۱۸
- درسنامه ۶: فرایند بی‌دررو ..... ۴۲۱
- درسنامه ۷: چرخه ترمودینامیکی ..... ۴۲۵
- درسنامه ۸: ماشین‌های گرمایی ..... ۴۲۸
- درسنامه ۹: یخچال‌ها ..... ۴۳۲

## عربی دهم



- درس ۱: ذَاكَ هُوَ اللّٰهُ ..... ۷۱۳
- درس ۲: الْمَوَاعِظُ الْعَدَدِيَّةُ... ..... ۷۲۷
- درس ۳: مَطَرُ السَّمَكِ ..... ۷۳۸
- درس ۴: التَّعَايُشُ السَّلْمِيُّ ..... ۷۵۱
- درس ۵: «هَذَا خَلَقَ اللّٰهُ» ..... ۷۶۶
- درس ۶: ذَوَالْقَرْنَيْنِ ..... ۷۸۰
- درس ۷: يَأْمَنُ فِي الْبِحَارِ عَجَائِبُهُ... ..... ۷۹۲
- درس ۸: صِنَاعَةُ التَّلْمِيْعِ فِي الْأَدَبِ الْفَارِسِيِّ ..... ۸۰۶

## دین و زندگی دهم



- درس ۱: هدف زندگی ..... ۸۱۹
- درس ۲: پر پرواز ..... ۸۲۱
- درس ۳: پنجره‌ای به روشنایی ..... ۸۲۴
- درس ۴: آینده روشن ..... ۸۲۷
- درس ۵: منزلگاه بعد ..... ۸۳۰
- درس ۶: واقعه بزرگ ..... ۸۳۳
- درس ۷: فرجام کار ..... ۸۳۶
- درس ۸: آهنگ سفر ..... ۸۳۹
- درس ۹: دوستی با خدا ..... ۸۴۲
- درس ۱۰: یاری از نماز و روزه ..... ۸۴۵
- درس ۱۱: فضیلت آراستگی ..... ۸۴۸
- درس ۱۲: زیبایی پوشیدگی ..... ۸۵۱

## فارسی دهم



- درس ۱: چشمه - پیرایه خرد ..... ۴۳۴
- درس ۲: از آموختن، ننگ مدار - دیوار ..... ۴۴۶
- درس ۳: پاسداری از حقیقت - دیوار عدل ..... ۴۵۸
- درس ۵: بیداد ظالمان - همای رحمت ..... ۴۶۵
- درس ۶: مهر و وفا - حقه راز ..... ۴۷۴
- درس ۷: جمال و کمال - بوی گل و ریحان ها ..... ۴۸۲
- درس ۸: سفر به بصره - شبی در کاروان ..... ۴۹۱
- درس ۹: کلاس نقاشی - پیرمرد چشم ما بود ..... ۵۰۲
- درس ۱۰: در یادلان صف شکن... ..... ۵۱۲
- درس ۱۱: خاک آزادگان... ..... ۵۲۰
- درس ۱۲: رستم و اشکبوس - عامل و رعیت ..... ۵۲۹
- درس ۱۳: گرد آفرید... ..... ۵۴۱
- درس ۱۴: طوطی و بقال - ای رفیق! ..... ۵۵۴
- درس ۱۶: خسرو - طراران ..... ۵۶۴
- درس ۱۷: سپیده دم - مزار شاعر ..... ۵۷۴
- درس ۱۸: عظمت نگاه - سه پرسش - نیایش ..... ۵۸۲
- ضمیمه: قالب‌های شعر و دانش‌های ادبی ..... ۵۹۲

## انگلیسی دهم



- درس ۱: Saving Nature ..... ۶۰۱
- درس ۲: Wonders of Creation ..... ۶۲۸
- درس ۳: The Value of Knowledge ..... ۶۵۷
- درس ۴: Traveling the World ..... ۶۸۶

## فصل ۲: گوارش و جذب مواد

گفتار ۱: ساختار و عملکرد لوله گوارش ..... ۹۷۴

گفتار ۲: جذب مواد و تنظیم فعالیت دستگاه گوارش ..... ۹۸۲

گفتار ۳: تنوع گوارش در جانداران ..... ۹۸۷

## فصل ۳: تبادلات گازی

گفتار ۱: ساز و کار دستگاه تنفس در انسان ..... ۹۹۱

گفتار ۲: تهویه ششی ..... ۹۹۹

گفتار ۳: تنوع تبادلات گازی ..... ۱۰۰۵

## فصل ۴: گردش مواد در بدن

گفتار ۱: قلب ..... ۱۰۰۸

گفتار ۲: رگ‌ها ..... ۱۰۱۵

گفتار ۳: خون ..... ۱۰۲۱

گفتار ۴: تنوع گردش مواد در جانداران ..... ۱۰۲۶

## فصل ۵: تنظیم اسمزی و دفع مواد زائد

گفتار ۱: هم‌ایستایی و کلیه‌ها ..... ۱۰۲۹

گفتار ۲: تشکیل ادرار و تخلیه آن ..... ۱۰۳۳

گفتار ۳: تنوع دفع و تنظیم اسمزی در جانداران ..... ۱۰۳۷

## فصل ۶: از یاخته تا گیاه

گفتار ۱: ویژگی‌های یاخته گیاهی ..... ۱۰۳۹

گفتار ۲: سامانه بافتی ..... ۱۰۴۶

گفتار ۳: ساختار گیاهان ..... ۱۰۵۲

## فصل ۷: جذب و انتقال مواد در گیاهان

گفتار ۱: تغذیه گیاهی ..... ۱۰۵۸

گفتار ۲: جانداران مؤثر در تغذیه گیاهی ..... ۱۰۶۳

گفتار ۳: انتقال مواد در گیاهان ..... ۱۰۶۶

## هندسه دهم (ویژه رشته ریاضی و فیزیک)



## فصل ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال

درسنامه ۱: ترسیم‌های هندسی ..... ۸۵۶

درسنامه ۲: استدلال ..... ۸۶۳

## فصل ۲: قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن

درسنامه ۱: نسبت و تناسب در هندسه ..... ۸۷۴

درسنامه ۲: قضیه تالس ..... ۸۷۹

درسنامه ۳: تشابه مثلث‌ها ..... ۸۸۶

درسنامه ۴: کاربردهایی از قضیه تالس و تشابه مثلث‌ها ..... ۸۹۴

## فصل ۳: چندضلعی‌ها

درسنامه ۱: چندضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن‌ها ..... ۹۰۰

درسنامه ۲: مساحت و کاربردهای آن ..... ۹۱۴

## فصل ۴: تجسم فضایی

درسنامه ۱: خط، نقطه و صفحه ..... ۹۳۴

درسنامه ۲: تفکر تجسمی ..... ۹۴۴

درسنامه ۳: برش ..... ۹۵۱

درسنامه ۴: دوران حول محور ..... ۹۵۶

## زیست دهم (ویژه رشته علوم تجربی)



## فصل ۱: دنیای زنده

گفتار ۱: زیست‌شناسی چیست؟ ..... ۹۶۰

گفتار ۲: گستره حیات ..... ۹۶۲

گفتار ۳: یاخته و بافت در بدن انسان ..... ۹۶۶



# ریاضی

www.gajmarket.com

# دہم





رياضة دهم

# فصل ١

١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧

پرسمان

## مجموعه، الگو و دنباله

Mathematics 10

08998628034825342117067982148086  
94895493038196442881097566593344  
91412737245870066063155881748815209  
57270365759591953092186117381932611  
6566430860239494639522473719070217  
57713427577896091736371787214684409  
13629774771309960518707211349999998  
93118817101000313783875288658753320  
577805321712268066130019278766111959  
995773622599413891249721775283479131  
628620899828034825342117067982148086  
62294895493038196442881097566593344  
51328230664709384460955058223172535940812848111745028410270193852110555964462294895493038196442881097566593344  
61284756482337867831652712019091456485669234603486104543266482133936072602491412737245870066063155881748815209  
20962829254091715364367892590360011330530548820466521384146951941511609433057270365759591953092186117381932611  
79310511854807446237996274956735188575272489122793818301194912983367336244065664308602139494639522473719070217  
98609437027705392171762931767523846748184676694051320005681271452635608277857713427577896091736371787214684409  
01224953430146549585371050792279689258923542019956112129021960864034418159813629774771309960518707211349999998  
37297804995105973173281609631859502445945534690830264252230825334468503526193118817101000313783875288658753320  
83814206171776691473035982534904287554687311595628638823537875937519577818577805321712268066130019278766111959  
09216420198938095257201065485863278865936153381827968230301952035301852968995773622599413891249721775283479131  
3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825342117067982148086  
51328230664709384460955058223172535940812848111745028410270193852110555964462294895493038196442881097566593344  
61284756482337867831652712019091456485669234603486104543266482133936072602491412737245870066063155881748815209  
20962829254091715364367892590360011330530548820466521384146951941511609433057270365759591953092186117381932611  
79310511854807446237996274956735188575272489122793818301194912983367336244065664308602139494639522473719070217  
98609437027705392171762931767523846748184676694051320005681271452635608277857713427577896091736371787214684409  
01224953430146549585371050792279689258923542019956112129021960864034418159813629774771309960518707211349999998  
37297804995105973173281609631859502445945534690830264252230825334468503526193118817101000313783875288658753320  
83814206171776691473035982534904287554687311595628638823537875937519577818577805321712268066130019278766111959  
09216420198938095257201065485863278865936153381827968230301952035301852968995773622599413891249721775283479131  
3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825342117067982148086  
51328230664709384460955058223172535940812848111745028410270193852110555964462294895493038196442881097566593344  
61284756482337867831652712019091456485669234603486104543266482133936072602491412737245870066063155881748815209  
20962829254091715364367892590360011330530548820466521384146951941511609433057270365759591953092186117381932611  
79310511854807446237996274956735188575272489122793818301194912983367336244065664308602139494639522473719070217  
98609437027705392171762931767523846748184676694051320005681271452635608277857713427577896091736371787214684409  
01224953430146549585371050792279689258923542019956112129021960864034418159813629774771309960518707211349999998  
37297804995105973173281609631859502445945534690830264252230825334468503526193118817101000313783875288658753320  
83814206171776691473035982534904287554687311595628638823537875937519577818577805321712268066130019278766111959  
09216420198938095257201065485863278865936153381827968230301952035301852968995773622599413891249721775283479131  
3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825342117067982148086  
51328230664709384460955058223172535940812848111745028410270193852110555964462294895493038196442881097566593344  
61284756482337867831652712019091456485669234603486104543266482133936072602491412737245870066063155881748815209  
20962829254091715364367892590360011330530548820466521384146951941511609433057270365759591953092186117381932611  
79310511854807446237996274956735188575272489122793818301194912983367336244065664308602139494639522473719070217  
98609437027705392171762931767523846748184676694051320005681271452635608277857713427577896091736371787214684409  
01224953430146549585371050792279689258923542019956112129021960864034418159813629774771309960518707211349999998  
37297804995105973173281609631859502445945534690830264252230825334468503526193118817101000313783875288658753320

# درسنامه ۱

## مجموعه اعداد - بازه‌ها

مجموعه اعداد: برخی از مجموعه‌های خاص اعداد به صورت زیر است:

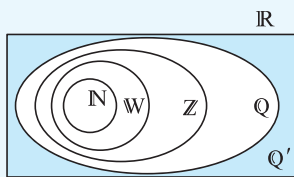
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  : مجموعه اعداد طبیعی ،  $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  : مجموعه اعداد حسابی  
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  : مجموعه اعداد صحیح ،  $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$  : مجموعه اعداد گویا

$\mathbb{Q}' = \{x \mid x \notin \mathbb{Q}\}$  : مجموعه اعداد گنگ

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$  : مجموعه اعداد حقیقی

### نکته

۱- رابطه زیرمجموعه بودن بین این مجموعه‌ها به صورت  $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$  و  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  است.

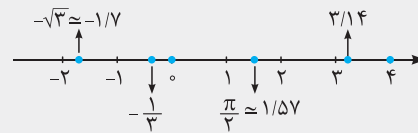


۲- هر عدد دلخواه را می‌توان روی محور اعداد نمایش داد و همچنین هر نقطه روی محور اعداد نشان‌دهنده یک عدد حقیقی مشخص است.

### مثال

کدام یک از اعداد زیر گویا و کدام یک گنگ می‌باشند؟ مکان تقریبی هر یک از آن‌ها را روی محور مشخص کنید.

$-\frac{1}{3}, 3/14, \frac{\pi}{2}, -\sqrt{3}, 4, 0$



پاسخ:

اعداد گویا:  $-\frac{1}{3}, 3/14, 4, 0$  ، اعداد گنگ:  $\frac{\pi}{2}, -\sqrt{3}$

**بازه (فاصله):** زیرمجموعه‌هایی از  $\mathbb{R}$  مانند  $A$  را که مشخص‌کننده یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشد، بازه یا فاصله می‌نامیم.

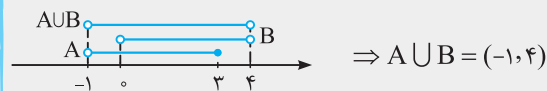
اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به طوری که  $a < b$  ، آن‌گاه:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	$(a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
بسته	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
نیم‌باز (نیم‌بسته)	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
نیم‌باز (نیم‌بسته)	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	

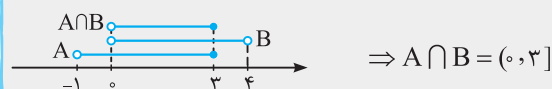
### مثال

اگر  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 3\}$  و  $B = (0, 4)$  باشند،  $A \cup B$  و  $A \cap B$  را به صورت بازه نوشته و روی محور اعداد مشخص کنید.

**پاسخ:** ابتدا مجموعه‌های  $A$  و  $B$  را روی محور اعداد مشخص می‌کنیم.  $A \cup B$  مجموعه‌ای است که اعضای آن یا در  $A$  یا در  $B$  و یا در هر دو باشند:



اعضای مشترک دو مجموعه  $A$  و  $B$  ، مجموعه  $A \cap B$  است:





درستنامه ۱

از دو نماد  $+\infty$  (مثبت بی‌نهایت) و  $-\infty$  (منفی بی‌نهایت) برای نمایش بازه‌هایی که از یک طرف نامحدود هستند، استفاده می‌کنیم. فرض کنیم  $a$  یک عدد حقیقی باشد، در این صورت داریم:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
نیم‌باز	$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
نیم‌باز	$(-\infty, a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
باز	$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
باز	$(-\infty, a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	

توجه:  $+\infty$  و  $-\infty$  عدد حقیقی نیستند.

**مثال** اگر  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 1 \leq 5\}$  و  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$  باشد،  $A - B$  را به صورت بازه نوشته و روی محور اعداد مشخص کنید.  
**پاسخ:** با حل نامعادله  $2x + 1 \leq 5$ ، داریم  $x \leq 2 \Rightarrow 2x \leq 4$ . اگر عضوهای مشترک  $A$  و  $B$  را از مجموعه  $A$  حذف کنیم، مجموعه  $A - B$  به دست می‌آید:



نکته

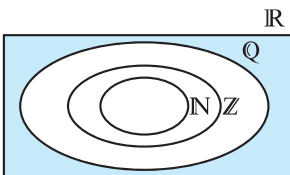
$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

بازه  $(-\infty, +\infty)$  شامل تمام اعداد حقیقی است، به عبارت دیگر:

۱. درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

- (ا)  $-1 \in (-1, 2]$  (ب)  $4 \in (3, 4]$  (پ)  $0 \in \{-1, 1\}$
- (ت)  $\frac{5}{6} \in (0, 1)$  (ث)  $\sqrt{3} \in (1, 2)$  (ج)  $[-1, 1) = (-1, 1)$
- (چ)  $\emptyset \subseteq [-1, +\infty)$  (ح)  $\{-1, 0, 2\} \subseteq [-1, 3]$  (خ)  $(-1, 1) \subseteq [-1, 1)$
- (د)  $0 \in (-2, 0) \cup (0, 1)$  (ذ)  $\{0\} = \mathbb{W} - \mathbb{N}$  (ر)  $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$
- (ز)  $(1, 2) \subseteq \mathbb{Q}$  (ز)  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$  (س)  $\{x \in \mathbb{Q} \mid -1 \leq x < 1\} = [-1, 1)$
- (ش)  $-6 \times 10^{23} \in (-\infty, 1]$  (ص)  $6 \times 10^{-4} \in [2, +\infty)$

۲. اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب قرار دهید.



$1^\circ, -2, -\frac{\pi}{2}, \sqrt{5}, \frac{1}{4}, 3/1212000$

۳. هر یک از اعداد  $-\frac{2}{3}, -\frac{\pi}{4}, \sqrt{2} + \sqrt{3}, 2/4$  و  $2^\circ$  را روی محور مشخص کنید و بگویید کدام یک از آن‌ها گنگ هستند.

۴. هر یک از بازه‌های زیر را به صورت مجموعه نمایش دهید و نمایش هندسی آن‌ها را مشخص کنید.

- (ا)  $(-2, 2)$  (ب)  $[0, 2)$  (پ)  $[-4, -1]$  (ت)  $(1, \sqrt{5})$
- (ث)  $(3, +\infty)$  (ج)  $(-\infty, -2)$  (چ)  $[\sqrt{2}, +\infty)$  (ح)  $(-\infty, \frac{1}{4}]$

۵. نمایش هندسی دو بازه  $A = [-1, 5)$  و  $B = (-3, 2)$  را روی محور رسم کنید و سپس حاصل عبارتهای زیر را بنویسید.

- (ا)  $A \cap B$  (ب)  $A \cup B$  (پ)  $A - B$  (ت)  $B - A$

۶. حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آن‌ها روی یک محور به دست آورید.

(آ)  $(-2, 5] \cap (-1, +\infty)$  (ب)  $[-4, 0] \cap [-1, +\infty)$  (پ)  $[-2, 4) \cup (0, 5]$  (ت)  $(-\infty, -1) \cup [-1, +\infty)$   
 (ث)  $(-\infty, 2) - (0, 3)$  (ج)  $(0, 5] - [2, +\infty)$  (چ)  $(-1, 0] \cap [0, 2)$  (ح)  $(-\infty, -1) \cup (-\infty, 3)$

۷. اگر  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x + 1 \leq 2\}$  و  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 0\}$  باشند، مجموعه‌های زیر را به کمک بازه نمایش دهید.

(آ)  $A$  (ب)  $B$  (پ)  $A - B$  (ت)  $A \cup B$

۸. اگر  $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -1 < x < 3\}$ ،  $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq 1\}$  و  $C = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$  باشند، حاصل  $(A \cap B) \cup C$  و  $B - (A \cap C)$  را به صورت بازه نوشته و روی محور نشان دهید.

۹. مجموعه‌های  $\mathbb{R} - \{0\}$ ،  $\mathbb{R} - \{-3, 0, 4\}$ ،  $\{4, 6\} - [3, 7]$  و  $(0, 1) - [-2, 4]$  را روی محور نشان دهید و سپس هر یک از آن‌ها را به صورت اجتماع چند بازه بنویسید.

۱۰. اگر  $\frac{m+1}{2} \in [-1, 4]$  باشد، حدود  $m$  را مشخص کنید.

### پاسخ‌های تشریحی

۱ (ش) درست است، زیرا عدد  $6 \times 10^{23}$  عددی منفی است و در نتیجه از یک کوچک‌تر است. بنابراین:

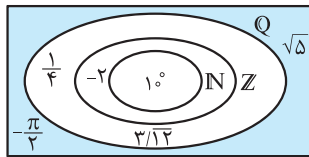
$$-6 \times 10^{23} \in (-\infty, 1]$$

۲ (ص) نادرست است، زیرا نمایش اعشاری عدد  $6 \times 10^{-4}$  به صورت  $0.0006$  می‌باشد که عددی کوچک‌تر از  $2$  می‌باشد، پس:

$$6 \times 10^{-4} \notin [2, +\infty)$$

۳ (ع) عدد  $1^\circ = 10^{-1}$  یک عدد طبیعی، عدد  $-2$  یک عدد صحیح منفی،

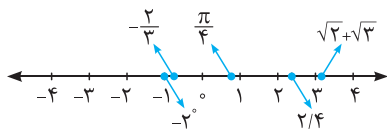
اعداد  $\frac{1}{4}$  و  $\frac{3}{14}$  اعداد گویا و اعداد  $\sqrt{5}$  و  $-\frac{\pi}{2}$  نیز اعدادی گنگ هستند، بنابراین:



۴ (س)  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  و  $\frac{\pi}{4}$  اعداد گنگ هستند و با توجه به مقدار تقریبی

$$\pi \approx 3.14 \Rightarrow \frac{\pi}{4} \approx 0.785$$

$$\sqrt{2} \approx 1.41, \sqrt{3} \approx 1.73 \Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 1.41 + 1.73 = 3.14$$



(آ)  $(-2, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$

(ب)  $[0, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\}$

(پ)  $[-4, -1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq -1\}$

(ت)  $(1, \sqrt{5}] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq \sqrt{5}\}$

۱ (آ) نادرست است، زیرا بازه  $[-1, 2)$  شامل تمام  $x$  هایی است که  $-1 < x \leq 2$  باشد، لذا  $-1 \notin (-1, 2]$

(ب) درست است، زیرا انتهای بازه بسته است و در نتیجه عدد  $4$  عضو این بازه است.

(پ) نادرست است، زیرا مجموعه  $\{-1, 0\}$  (نه بازه  $(-1, 0)$ )، شامل فقط دو عضو  $-1$  و  $0$  می‌باشد، بنابراین  $\{-1, 0\} \neq \emptyset$

(ت) درست است، زیرا  $0 < \frac{5}{6} < 1$  و در نتیجه  $\frac{5}{6} \in (0, 1)$

(ث) درست است، زیرا مقدار تقریبی  $\sqrt{3}$  برابر  $1.73$  است و در نتیجه  $2 < \sqrt{3} < 3$ ، پس  $\sqrt{3} \in (1, 2)$

(ج) نادرست است، زیرا مثلاً  $-1 \in [-1, 0]$  ولی  $-1 \notin (-1, 0)$ ، بنابراین دو بازه  $[-1, 0]$  و  $(-1, 0)$  با هم برابر نمی‌باشند.

(چ) درست است، زیرا  $\emptyset$  زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است.

(ح) درست است، زیرا اعداد  $-1$ ،  $0$  و  $2$  عضو بازه  $[-1, 3)$  می‌باشند و در نتیجه مجموعه شامل این  $3$  عدد، زیرمجموعه‌ای از بازه  $[-1, 3)$  است.

(خ) درست است، زیرا تمام اعضای بازه  $(-1, 0)$  عضوی از بازه  $(-1, 0)$  می‌باشند. (د) نادرست است، زیرا عدد صفر در هیچ یک از دو بازه  $(-2, 0)$  و  $(0, 1)$  قرار ندارد.

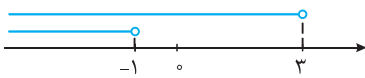
(ذ) درست است، زیرا:  $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} - \{1, 2, 3, \dots\} = \{0\}$

(ر) درست است، زیرا تمام اعداد گنگ (اصم) در مجموعه اعداد حقیقی قرار دارند.

(ز) نادرست است، زیرا در بازه  $(1, 2)$  بی‌شمار عدد گنگ مثل  $\sqrt{2} \approx 1.41$  وجود دارد که در مجموعه اعداد گویا قرار ندارند.

(ژ) درست است، زیرا  $\mathbb{R}$  از اجتماع  $\mathbb{Q}$  و  $\mathbb{Q}'$  تشکیل شده است.

(س) نادرست است، زیرا بازه‌ها شامل تمام اعداد حقیقی (گویا و گنگ) هستند و فقط شامل اعداد گویای بین دو عدد نمی‌باشد.



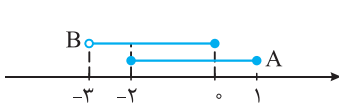
$$(-\infty, -1) \cup (-\infty, 3) = (-\infty, 3)$$

پ ۷ (آ) با حل نامعادله‌های  $-1 \leq x+1 \leq 2$ ، مجموعه‌های  $A$  را مشخص می‌کنیم:

$$-1 \leq x+1 \leq 2 \xrightarrow{-1} -2 \leq x \leq 1 \Rightarrow A = [-2, 1]$$

$$B = (-3, 0]$$

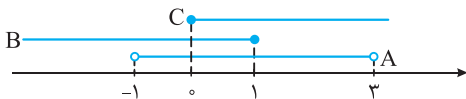
پ ۷ (ب) با نمایش مجموعه‌های  $A$  و  $B$  روی محور، مجموعه‌های  $A - B$  و  $A \cup B$  را مشخص می‌کنیم:



$$A - B = (0, 1]$$

$$A \cup B = (-3, 1]$$

پ ۸ (آ) برای مشخص کردن هریک از مجموعه‌ها، ابتدا مجموعه‌های  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $A \cap B$  را روی محور نمایش می‌دهیم:



$$A \cap B = (-1, 3) \cap (-\infty, 1] = (-1, 1]$$

$$\Rightarrow (A \cap B) \cup C = (-1, 1] \cup [0, 3] = (-1, 3]$$



$$A \cap C = (-1, 3) \cap [0, 3] = [0, 3]$$

$$\Rightarrow B - (A \cap C) = (-\infty, 1] - [0, 3] = (-\infty, 0)$$



پ ۹ (آ) در نمایش هندسی مجموعه  $\mathbb{R} - \{0\}$  باید عدد صفر را از روی محور حذف کنیم:

$$\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

با حذف اعداد  $-3$  و  $4$  از روی محور، مجموعه  $\mathbb{R} - \{-3, 4\}$  به دست می‌آید:



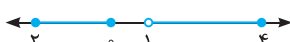
$$\mathbb{R} - \{-3, 4\} = (-\infty, -3) \cup (-3, 4) \cup (4, +\infty)$$

با حذف اعداد  $4$  و  $6$  از بازه  $[3, 7]$ ، مجموعه  $[3, 7] - \{4, 6\}$  به دست می‌آید:



$$[3, 7] - \{4, 6\} = [3, 4) \cup (4, 6) \cup (6, 7]$$

با حذف بازه  $(0, 1)$  از بازه  $[-2, 4]$ ، مجموعه  $[-2, 4] - (0, 1)$  به دست می‌آید:

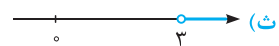


$$[-2, 4] - (0, 1) = [-2, 0] \cup (1, 4]$$

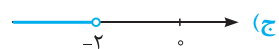
$$\frac{m+1}{2} \in [-1, 4] \Rightarrow -1 \leq \frac{m+1}{2} < 4$$

$$\xrightarrow{\times 2} -2 \leq m+1 < 8 \xrightarrow{-1} -3 \leq m < 7$$

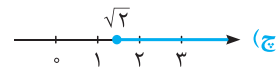
ح (ث)  $(3, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$



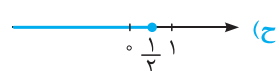
ج  $(-\infty, -2) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$



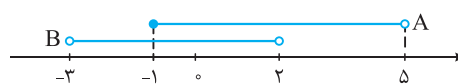
ج  $[\sqrt{2}, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \sqrt{2}\}$



ح  $(-\infty, \frac{1}{3}] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{3}\}$



پ ۵ (آ) نمایش هندسی دو بازه  $A$  و  $B$  به صورت زیر است:



پ ۵ (ب) قسمت‌های مشترک دو مجموعه  $A$  و  $B$ ، یعنی بازه  $[-1, 2]$  جواب

$$A \cap B = [-1, 2]$$

است:

پ ۵ (ب) تمام قسمت‌هایی که در  $A$  یا در  $B$  یا در هر دو وجود دارند، در

$$A \cup B = (-3, 5)$$

مجموعه  $A \cup B$  قرار می‌گیرند، بنابراین:

پ ۵ (ب) اگر قسمت‌های مشترک دو مجموعه  $A$  و  $B$  را از  $A$  حذف کنیم،

$$A - B = [2, 5)$$

مجموعه  $A - B$  به دست می‌آید:

پ ۵ (ب) اگر قسمت‌های مشترک دو مجموعه  $A$  و  $B$  را از  $B$  حذف کنیم،

$$B - A = (-3, -1)$$

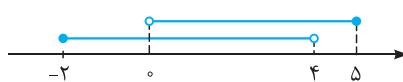
مجموعه  $B - A$  به دست می‌آید:



$$(-2, 5) \cap (-1, 7) = (-1, 5]$$



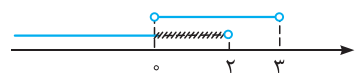
$$[-4, 0] \cap [-1, +\infty) = [-1, 0]$$



$$[-2, 4] \cup (0, 5] = [-2, 5]$$



$$(-\infty, -1) \cup [-1, +\infty) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$



$$(-\infty, 2) - (0, 3) = (-\infty, 0] \cup (3, 2)$$



$$(0, 5] - [2, +\infty) = (0, 2)$$



$$[-1, 0] \cap [0, 2) = \{0\}$$

### مجموعه‌های متناهی و نامتناهی - متمم یک مجموعه

**مجموعه‌های متناهی:** مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی می‌باشد، مجموعه‌های متناهی (با پایان) می‌نامیم.  
**مجموعه‌های نامتناهی:** مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها را نتوان با یک عدد حسابی بیان کرد، مجموعه‌های نامتناهی می‌گوییم. در واقع مجموعه‌ای که متناهی نباشد را مجموعه‌ی نامتناهی می‌نامیم.  
 به عنوان مثال، مجموعه اعداد اول یک رقمی یک مجموعه متناهی است، زیرا یک مجموعه ۴ عضوی می‌باشد:

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

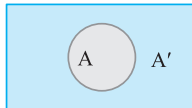
مجموعه اعداد اول یک رقمی

**توجه:** تعداد اعضای بعضی مجموعه‌های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد که با صرف وقت کافی و گاهی با بعضی امکانات می‌توان تعداد آن‌ها را به دست آورد، مثل تعداد سواری‌های شهر تهران.

**مجموعه مرجع:** در هر بحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند، مجموعه مرجع می‌نامیم و آن را با  $U$  نشان می‌دهیم.  
**متمم یک مجموعه:** هرگاه  $U$  مجموعه مرجع باشد و  $A \subseteq U$ ، آن‌گاه مجموعه  $U - A$  را متمم  $A$  می‌نامیم و آن را با نماد  $A'$  نشان می‌دهیم.

$$A' = U - A$$

به عبارت دیگر  $A'$  شامل عضوایی از  $U$  می‌باشد که در  $A$  نیستند. در واقع:  
 نمودار ون مجموعه  $A$  با مجموعه مرجع  $U$  به صورت مقابل است:



**مثال** فرض کنید  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  مجموعه مرجع،  $A = \{1, 2, 4\}$  و  $B = \{3, 4, 5, 7\}$  باشند. مجموعه‌های  $A' \cup B'$  و  $A' - B$  را با اعضا مشخص کنید.

**پاسخ:** ابتدا هر یک از مجموعه‌های  $A'$  و  $B'$  را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$$A' = U - A = \{3, 4, 5, 6, 7\} - \{1, 2, 4\} = \{3, 5, 6, 7\}, B' = U - B = \{1, 2, 3, 6, 7\} - \{3, 4, 5, 7\} = \{1, 2, 6\}$$

$$\Rightarrow A' - B = \{3, 5, 6, 7\} - \{3, 4, 5, 7\} = \{6\}, A' \cup B' = \{3, 5, 6, 7\} \cup \{1, 2, 6\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$$

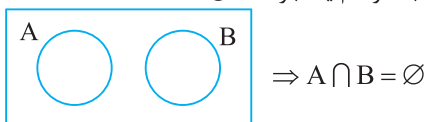
#### نکته

اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه از مجموعه مرجع  $U$  باشند، آن‌گاه:

۱) $(A')' = A$	۲) $A \cap A' = \emptyset$	۳) $A \cup A' = U$
۴) $\emptyset' = U$	۵) $U' = \emptyset$	۶) $A - B = A \cap B'$
۷) $A - B = A - (A \cap B)$	۸) $(A \cup B)' = A' \cap B'$	۹) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

**تذکر:** روابط (۸) و (۹)، قوانین دمورگان نام دارند.

**دو مجموعه جدا از هم:** به هر دو مجموعه مثل  $A$  و  $B$  که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه جدا از هم یا مجزا می‌گوییم. نمودار ون دو مجموعه جدا از هم به صورت مقابل است:



به عنوان مثال، مجموعه اعداد طبیعی فرد و مجموعه اعداد طبیعی زوج، دو مجموعه جدا از هم هستند:

$$\left\{ \begin{array}{l} O = \{1, 3, 5, \dots\} : \text{مجموعه اعداد طبیعی فرد} \\ E = \{2, 4, 6, \dots\} : \text{مجموعه اعداد طبیعی زوج} \end{array} \right. \Rightarrow O \cap E = \emptyset \Rightarrow O \text{ و } E \text{ دو مجموعه جدا از هم هستند.}$$

#### تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

**قرارداد:** تعداد عضوهای مجموعه متناهی  $A$  را با  $n(A)$  نمایش می‌دهیم.

#### نکته

۱- اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه متناهی باشند، آن‌گاه تعداد عضوهای مجموعه  $A \cup B$  برابر است با:  
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$   
 ۲- اگر  $U$  یک مجموعه متناهی باشد، آن‌گاه:  
 $n(A') = n(U) - n(A)$

۲ درسامه

مثال

در یک کلاس ۳۰ نفره، ۱۷ نفر عضو تیم فوتبال، ۱۵ نفر عضو تیم والیبال و ۷ نفر عضو هر دو تیم هستند. (آ) چند نفر عضو حداقل یکی از این دو تیم هستند؟ (ب) چند نفر عضو هیچ یک از این دو تیم نمی باشند؟

**پاسخ:** مجموعه شامل تمام دانش آموزان را با  $U$ ، مجموعه دانش آموزان عضو تیم فوتبال را با  $A$  و مجموعه دانش آموزان عضو تیم والیبال را با  $B$  نشان می دهیم.

(آ) باید تعداد عضوهای مجموعه  $A \cup B$  را به دست آوریم:

$$n(A) = 17, n(B) = 15, n(A \cap B) = 7 \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 17 + 15 - 7 = 25$$

(ب) باید تعداد عضوهای مجموعه  $(A \cup B)'$  را به دست آوریم:

$$n(U) = 30, n(A \cup B) = 25 \Rightarrow n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B) = 30 - 25 = 5$$

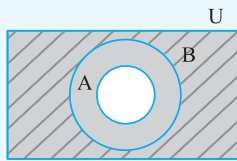
نکته

۱- اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه متناهی و  $U$  مجموعه مرجع باشد، آن گاه:

۱)  $n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$       ۲)  $n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B)$

در فرمول شماره (۲)،  $U$  باید مجموعه ای متناهی باشد.

۲- اگر  $A \subseteq B \subseteq U$ ، آن گاه  $A' \supseteq B'$ .



۱۱. در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

- (آ) مجموعه اعداد صحیح کوچک تر از ۵- یک مجموعه ..... است. (متناهی - نامتناهی)
- (ب) مجموعه اعداد طبیعی چهاررقمی یک مجموعه ..... است. (متناهی - نامتناهی)
- (پ)  $A \cap A' = \dots$  ،  $\emptyset' = \dots$  ،  $A \cap A' = \dots$
- (ت) اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه و  $A \cap B = \emptyset$  باشد، دو مجموعه  $A$  و  $B$  را دو مجموعه ..... می نامیم.
- (ث) اگر  $A$  یک مجموعه نامتناهی و  $B$  یک مجموعه متناهی باشد، آن گاه  $A - B$  یک مجموعه ..... است.

۱۲. کدام یک از عبارتهای زیر درست و کدام یک نادرست است؟

- (آ) مجموعه اعداد گویای بین ۰ و ۲ یک مجموعه متناهی است.
- (ب) مجموعه اعداد صحیح بین -۲ و -۱ یک مجموعه متناهی است.
- (پ) اگر  $A$  یک مجموعه متناهی و  $B$  یک مجموعه نامتناهی باشد، آن گاه مجموعه  $A \cap B$  یک مجموعه نامتناهی است.
- (ت) اگر  $A$  دارای یک زیرمجموعه متناهی باشد، آن گاه  $A$  یک مجموعه متناهی است.
- (ث) اگر همه زیرمجموعه های  $A$  متناهی باشند، آن گاه  $A$  یک مجموعه متناهی است.
- (ج) اگر  $A$  دارای یک زیرمجموعه نامتناهی باشد، آن گاه  $A$  یک مجموعه نامتناهی است.
- (چ) اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه نامتناهی باشند، آن گاه  $A - B$  مجموعه ای متناهی است.
- (ح) اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه جدا از هم باشند، آن گاه:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

(خ) متمم مجموعه اعداد طبیعی نسبت به مجموعه اعداد صحیح، مجموعه اعداد صحیح منفی است.

۱۳. متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه های زیر را مشخص کنید.

- (آ) مجموعه اعداد طبیعی اول و دورقمی      (ب) مجموعه اعداد صحیح فرد
- (پ) مجموعه تمام مربع ها      (ت) مجموعه خیابان های ایران
- (ث) مجموعه اعداد گویای بین ۰ و ۱      (ج) مجموعه اعداد گنگ بین ۰ و ۱
- (چ)  $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 0\}$       (ح) مجموعه ضرب های صحیح ۴
- (خ)  $(-1, \frac{1}{4})$       (د) مجموعه کسرهایی با صورت و مخرج عدد طبیعی
- (ذ) مجموعه شمارنده های عدد ۲۴      (ر)  $\mathbb{W} - \mathbb{N}$
- (ز)  $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}$       (ز)  $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

۱۴. به سؤالات زیر پاسخ دهید:

- (آ) دو مجموعه نامتناهی متمایز مثال بزنید که یکی از آن‌ها زیرمجموعه دیگری باشد.  
 (ب) دو مجموعه نامتناهی متمایز مثال بزنید که اشتراک آن‌ها متناهی باشد.  
 (پ) دو مجموعه نامتناهی متمایز مثال بزنید که تفاضل آن‌ها نامتناهی باشد.  
 (ت) دو مجموعه نامتناهی متمایز مثال بزنید که تفاضل آن‌ها متناهی باشد.

۱۵. فرض کنید  $U$  مجموعه تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۶ باشد.

- (آ)  $U$  را با نمایش اعضای آن بنویسید.  
 (ب)  $U$  متناهی است یا نامتناهی؟  
 (پ) یک زیرمجموعه متناهی از  $U$  بنویسید.  
 (ت) دو زیرمجموعه نامتناهی مانند  $C$  و  $D$  از  $U$  بنویسید که  $C \subseteq D$   
 (ث) دو زیرمجموعه نامتناهی و مجزا مانند  $A$  و  $B$  از  $U$  بنویسید که  $A \cup B = U$

۱۶. مجموعه اعداد صحیح را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید:

- (آ) مجموعه نامتناهی  $A$  را طوری بنویسید که  $A'$  نامتناهی باشد.  
 (ب) مجموعه نامتناهی  $A$  را طوری بنویسید که  $A'$  متناهی باشد.  
 (پ) مجموعه متناهی  $A$  را در نظر بگیرید.  $A'$  متناهی است یا نامتناهی؟  
 (ت) مجموعه متناهی  $A$  و مجموعه نامتناهی  $B$  را طوری بنویسید که  $A$  و  $B$  مجزا بوده و  $Z = A \cup B$

۱۷.  $\mathbb{R}$  را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید و متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید، سپس آن‌ها را به صورت بازه یا اجتماعی از بازه‌ها بنویسید.

$$\begin{array}{lll} \text{(آ)} A = (-1, 5] & \text{(ب)} Z & \text{(پ)} B = (2, +\infty) \\ \text{(ت)} C = (-\infty, 1] & \text{(ث)} (0, +\infty) \cap (-\infty, 1) & \text{(ج)} (-4, 1) \cup (2, 7) \end{array}$$

۱۸. اگر مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی مجموعه مرجع،  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ،  $B = \{2, 4, 6, 8\}$  و  $C = \{3, 4, 5, 6\}$  باشند، هر یک از مجموعه‌های زیر را با اعضا بنویسید.

$$\begin{array}{lll} \text{(آ)} A' & \text{(ب)} (A \cap B)' & \text{(پ)} B \cup C' \\ \text{(ت)} (A \cup B)' & \text{(ث)} (A \cup B') \cap C & \text{(ج)} (A - B) \cup C' \end{array}$$

۱۹. اگر  $U = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq x \leq 4\}$ ،  $A = \{x \in U \mid x \leq 0\}$ ،  $x$  مضرب ۴ است.  $B = \{x \in U \mid x \leq 2\}$  و  $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 2\}$  باشند، هر یک از مجموعه‌های زیر را با اعضا بنویسید.

$$\begin{array}{lll} \text{(آ)} B' & \text{(ب)} C' \cup B & \text{(پ)} (A \cap C) - B \\ \text{(ت)} (A' \cup B) \cap C' & & \end{array}$$

۲۰. اگر مجموعه اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۵ مجموعه مرجع، مجموعه مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۲ را با  $A$  و مجموعه مضرب‌های کوچک‌تر از ۱۴ عدد ۳ را با  $B$  نمایش دهیم، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را نشان دهید.

$$\begin{array}{lll} \text{(آ)} (A')' = A & \text{(ب)} A - B = A - (A \cap B) & \text{(پ)} B - A = B \cap A' \\ \text{(ت)} (A \cup B)' = A' \cap B' & \text{(ث)} (A \cap B)' = A' \cup B' & \text{(ج)} A \cup (A' \cap B) = A \cup B \end{array}$$

۲۱. (آ) فرض کنیم  $U = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$  (مجموعه مرجع)،  $A = \{2, 6, 10\}$  و  $B = \{2, 4, 6, 10\}$  باشند. آیا  $A \subseteq B$ ؟ آیا  $B' \subseteq A'$ ؟  
 (ب) فرض کنیم  $A \subseteq B \subseteq U$  که در آن  $U$  مجموعه مرجع می‌باشد. با استفاده از نمودار ون نشان دهید  $B' \subseteq A'$

۲۲. فرض کنیم  $U$  مجموعه مرجع و  $A$  و  $B$  دو مجموعه دلخواه باشند. عبارتهای زیر را ساده کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{(آ)} (A \cap A') \cup B & \text{(ب)} (((A \cup A') \cap A) \cup (A' \cap U)) \cap B \end{array}$$

۲۳. فرض کنیم  $A$  و  $B$  زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع  $U$  هستند، به طوری که  $n(U) = 50$ ،  $n(A) = 35$ ،  $n(B) = 20$  و  $n(A \cap B) = 12$  مطلوب است:

$$\begin{array}{lll} \text{(آ)} n(A') & \text{(ب)} n(A \cup B) & \text{(پ)} n(A \cap B') \\ \text{(ت)} n(A' \cap B') & \text{(ث)} n(A' \cup B') & \text{(ج)} n(A \cup B') \end{array}$$

۲۴. یک باشگاه ورزشی ۷۰ عضو دارد. ۴۰ نفر عضو تیم فوتبال، ۲۵ نفر عضو تیم والیبال و ۵۵ نفر حداقل در یکی از این دو رشته فعالیت می‌کنند.

- (آ) چند نفر در هر دو رشته فوتبال و والیبال فعالیت می‌کنند؟  
 (ب) چند نفر در هیچ یک از این دو رشته فعالیت نمی‌کنند؟  
 (پ) چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

۲۵. از ۳۰ دانش‌آموز یک کلاس، ۱۷ نفر در المپیاد ریاضی و ۱۵ نفر در المپیاد فیزیک شرکت کرده‌اند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس در هیچ یک از این دو المپیاد شرکت نکرده باشند:

- (آ) چند نفر در هر دو المپیاد ریاضی و فیزیک شرکت کرده‌اند؟  
 (ب) چند نفر در المپیاد ریاضی شرکت کرده‌اند ولی در المپیاد فیزیک شرکت نکرده‌اند؟

۲۶. در یک نظرسنجی از ۲۰۰ نفر که از اصفهان دیدن کرده‌اند، معلوم شد ۱۲۰ نفر از عالی‌قاپو و ۱۵۰ نفر از بازار اصفهان بازدید کرده‌اند. اگر ۴۰ نفر از عالی‌قاپو بازدید کرده باشند ولی از بازار اصفهان بازدید نکرده باشند:

- (آ) چند نفر از هر دو مکان بازدید کرده‌اند؟  
 (ب) چند نفر دست‌کم از یکی از این دو مکان بازدید کرده‌اند؟  
 (پ) چند نفر از بازار اصفهان و از عالی‌قاپو بازدید نکرده‌اند؟

۲۷. اگر  $n(A) + n(B) = 5n(A \cap B)$  باشد، حاصل  $\frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)}$  را به دست آورید.

### پاسخ‌های تشریحی

(ج) نادرست است،  $\mathbb{N}$  (مجموعه اعداد طبیعی) و  $O$  (مجموعه اعداد فرد طبیعی) مجموعه‌هایی نامتناهی‌اند و  $E = \{2, 4, 6, \dots\} = \mathbb{N} - O$  نیز مجموعه‌ای نامتناهی است.

(ح) درست است، زیرا:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cap B) = 0$$

$$\Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(A) + n(B)$$

(خ) نادرست است، متمم مجموعه  $\mathbb{N}$  نسبت به اعداد صحیح شامل تمام اعداد صحیح منفی و عدد صفر می‌باشد.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}, \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{N}' = \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{\dots, -2, -1, 0\}$$

(آ) متناهی، این مجموعه به صورت  $\{1, 13, \dots, 97\}$  است که یک مجموعه متناهی می‌باشد.

(ب) نامتناهی، این مجموعه به صورت  $\{1, 3, \dots, 11, 13, \dots, 3, \dots\}$  است که یک مجموعه نامتناهی می‌باشد.

(پ) نامتناهی، می‌توان هر تعداد دلخواه مربع با طول ضلع‌های مختلف رسم کرد. پس این مجموعه، نامتناهی است.

(ت) متناهی، تعداد خیابان‌های ایران ممکن است زیاد باشد، ولی بالاخره می‌توان تعداد آن‌ها را مشخص کرد. بنابراین یک مجموعه متناهی است.

(ث) نامتناهی، بین هر دو عدد می‌توان به هر تعداد دلخواه عدد گویا مشخص کرد:

$$\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \dots$$

(ج) نامتناهی، بین هر دو عدد می‌توان به هر تعداد دلخواه عدد گنگ مشخص کرد:

$$\dots, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \dots$$

(آ) نامتناهی - چون مجموعه اعداد صحیح کوچک‌تر از  $-5$  به صورت  $\{6, -7, -8, \dots\}$  است که یک مجموعه نامتناهی می‌باشد.

(ب) متناهی - چون مجموعه اعداد طبیعی چهاررقمی به صورت  $\{9999, 10000, \dots, 100000000\}$  است که یک مجموعه متناهی ۹۰۰۰ عضوی می‌باشد.

$$A \cap A' = \emptyset, \emptyset' = U, A' \cap B' = (A \cup B)'$$

(ت) جدا از هم

(ث) نامتناهی - چون اگر از یک مجموعه با بی‌شمار عضو، تعداد محدودی عضو حذف کنیم، آن‌گاه بی‌شمار عضو برای آن باقی می‌ماند.

(آ) نادرست است، زیرا بی‌شمار عدد گویا مانند  $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$  در

بازه  $(0, 2)$  وجود دارد.

(ب) درست است، زیرا مجموعه اعداد صحیح بین  $-2$  و  $-1$ ، مجموعه تهی است که یک مجموعه متناهی با صفر عضو می‌باشد.

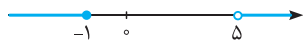
(پ) نادرست است، زیرا  $A \cap B$  زیرمجموعه مجموعه  $A$  است و چون  $A$  یک مجموعه متناهی می‌باشد، پس هر زیرمجموعه آن نیز یک مجموعه متناهی می‌باشد، بنابراین  $A \cap B$  یک مجموعه متناهی است.

(ت) نادرست است، به عنوان مثال، مجموعه نامتناهی  $\mathbb{N}$  دارای زیرمجموعه متناهی  $\{1, 2\}$  است.

(ث) درست است، زیرا اگر  $A$  یک مجموعه متناهی باشد، چون  $A \subseteq A$  و هر زیرمجموعه  $A$  متناهی است، بنابراین  $A$  متناهی می‌باشد.

(ج) درست است، زیرا اگر  $B \subseteq A$  و  $B$  نامتناهی باشد، آن‌گاه تمام عضوهای مجموعه  $B$  در مجموعه  $A$  قرار دارند و در نتیجه  $A$  نامتناهی است.

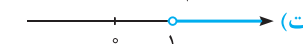
$A' = \mathbb{R} - (-1, 5] = (-\infty, -1] \cup (5, +\infty)$  (آ ۱۷)



$Z' = \mathbb{R} - Z = \dots \cup (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup \dots$  (ب)



$B' = \mathbb{R} - (2, +\infty) = (-\infty, 2]$  (پ)

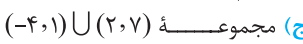


$C' = \mathbb{R} - (-\infty, 1] = (1, +\infty)$  (ت)

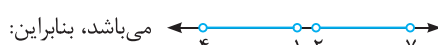


$(-\infty, 1) \cap (0, +\infty) = (0, 1)$  (ث)

$\Rightarrow (0, 1)' = \mathbb{R} - (0, 1) = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$



(ج) مجموعه  $(-4, 1) \cup (2, 7)$  روی محور به صورت



$((-4, 1) \cup (2, 7))' = (-\infty, -4] \cup [1, 2] \cup [7, +\infty)$



۱۸ مجموعه مرجع  $U = \{1, 2, \dots, 9\}$  می باشد.

$A' = U - A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{1, 2, 3, 4\}$  (آ)

$= \{5, 6, 7, 8, 9\}$

$A \cap B = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 4, 6, 8\} = \{2, 4\}$  (ب)

$\Rightarrow (A \cap B)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{2, 4\} = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$C' = U - C = \{1, 2, 7, 8, 9\}$  (پ)

$\Rightarrow B \cup C' = \{2, 4, 6, 8\} \cup \{1, 2, 7, 8, 9\} = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$  (ت)

$\Rightarrow (A \cup B)' = U - (A \cup B) = \{5, 7, 9\}$

$B' = U - B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  (ث)

$\Rightarrow A \cup B' = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$

$\Rightarrow (A \cup B') \cap C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\} \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{3, 4, 5\}$

$A - B = \{1, 3\} \Rightarrow (A - B) \cup C'$  (ج)

$= \{1, 3\} \cup \{1, 2, 7, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$

۱۹ مجموعه های  $U, A, B, C$  با اعضا به صورت زیر می باشند:

$U = \{-5, -4, \dots, 3, 4\}$  ,  $A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$

$B = \{-4, 0, 4\}$  ,  $C = \{-1, 0, 1, 2\}$

$B' = U - B = \{-5, -3, -2, -1, 1, 2, 3\}$  (آ)

$C' = \{-5, -4, -3, -2, 3, 4\}$  (ب)

$\Rightarrow C' \cup B = \{-5, -4, -3, -2, 0, 3, 4\}$

$A \cap C' = \{-5, -4, -3, -2\}$  (پ)

$\Rightarrow (A \cap C') - B = \{-5, -3, -2\}$

$A' = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow A' \cup B = \{-4, 0, 1, 2, 3, 4\}$  (ت)

$\Rightarrow (A' \cup B) \cap C' = \{-4, 3, 4\}$

(چ) متناهی، هیچ عدد طبیعی کوچک تر یا مساوی صفر وجود ندارد، لذا مجموعه  $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 0\} = \emptyset$  یک مجموعه متناهی است.

(ح) نامتناهی، مجموعه ضرب های صحیح عدد ۴ به صورت  $\{ \dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots \}$  است که یک مجموعه نامتناهی می باشد.

(خ) نامتناهی، بی شمار عدد (گویا و گنگ) بین دو عدد  $-1$  و  $\frac{1}{2}$  وجود دارد. بنابراین مجموعه  $(-1, \frac{1}{2})$  نامتناهی است.

(د) نامتناهی، بی شمار عدد کسری با صورت و مخرج عدد طبیعی وجود دارد، بنابراین مجموعه نامتناهی است.  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \dots$

(ذ) متناهی، مجموعه شمارنده های عدد ۲۴ به صورت  $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$  است که یک مجموعه متناهی ۸ عضوی می باشد.

(ر) متناهی، زیرا:  $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} - \{1, 2, \dots\} = \{0\}$

(ز) نامتناهی، زیرا  $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{N}$  و  $\mathbb{N}$  یک مجموعه نامتناهی است.

(ژ) نامتناهی، زیرا  $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$  و  $\mathbb{R}$  یک مجموعه نامتناهی است.

۱۴ (آ)  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W}$  و دو مجموعه نامتناهی اند

(ب)  $A = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$  ,  $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\Rightarrow A \cap B = \{-1, 0, 1, 2\}$

(پ)  $\mathbb{Q}$  و  $\mathbb{Z}$  دو مجموعه نامتناهی اند و  $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$  نیز مجموعه ای نامتناهی است.

(ت)  $\mathbb{N}$  و  $\mathbb{W}$  دو مجموعه نامتناهی اند و  $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$  یک مجموعه متناهی است.

۱۵ (آ)  $U = \{6, 12, 18, 24, \dots\}$

(ب)  $U$  مجموعه ای نامتناهی است.

(پ)  $A = \{12, 18, 24\} \subseteq U$  مجموعه ای متناهی است.

(ت) اگر  $C$  مجموعه ضرب های ۲۴ و  $D$  مجموعه ضرب های ۱۲ باشد، آنگاه  $C \subseteq D$

$D = \{12, 24, 36, 48, \dots\}$  ,  $C = \{24, 48, \dots\}$

(ث)  $A$  را ضرب های فرد ۶ و  $B$  را ضرب های زوج عدد ۶ در نظر می گیریم:

$A = \{6, 18, 30, 42, \dots\}$  ,  $B = \{12, 24, 36, \dots\} \Rightarrow A \cup B = U$

۱۶ (آ)  $A = \mathbb{N} \Rightarrow A' = \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{\dots, -2, -1, 0\}$  (نامتناهی)

(ب)  $A = \mathbb{Z} - \{0\} \Rightarrow A' = \{0\}$

(پ)  $A'$  نامتناهی است. اگر تعداد محدودی از عضوهای مجموعه نامتناهی  $\mathbb{Z}$  را از مجموعه  $\mathbb{Z}$  حذف کنیم، آنگاه مجموعه باقی مانده نیز دارای بی شمار عضو است.

(ت)  $A = \{0, 1, 2\}$  ,  $B = \{0, \dots, -2, -1, 3, 4, \dots\}$

$\Rightarrow A \cap B = \emptyset$  ,  $A \cup B = \mathbb{Z}$



۲۲ آ)  $A \cap A' = \emptyset \Rightarrow (A \cap A') \cup B = \emptyset \cup B = B$   
 ب)  $(A \cup A') \cap A = U \cap A = A$  ,  $A' \cap U = A'$   
 $\Rightarrow (((A \cup A') \cap A) \cup (A' \cap U)) \cap B$   
 $= (A \cup A') \cap B = U \cap B = B$

۲۳ آ)  $n(A') = n(U) - n(A) = 50 - 35 = 15$   
 ب)  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 35 + 20 - 12 = 43$   
 پ)  $n(A \cap B') = n(A) - n(A \cap B) = 35 - 12 = 23$   
 ت)  $n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B)$   
 ب)  $\underline{\underline{=}} 50 - 43 = 7$   
 ث)  $n(A' \cup B') = n((A \cap B)') = n(U) - n(A \cap B)$   
 $= 50 - 12 = 38$   
 ج)  $n(A \cup B') = n(A) + n(B') - n(A \cap B')$   
 طبق قسمت (ب)،  $n(A \cap B') = 23$  می‌باشد، بنابراین:  
 $n(A \cup B') = 35 + 20 - 23 = 42$

۲۴ طبق فرض داریم:  $U \Rightarrow n(U) = 70$  : مجموعه مرجع  
 $A \Rightarrow n(A) = 40$  : مجموعه اعضای تیم فوتبال  
 $B \Rightarrow n(B) = 25$  : مجموعه اعضای تیم والیبال  
 طبق فرض ۵۵ نفر در حداقل یکی از این دو رشته فعالیت می‌کنند، پس:  
 $n(A \cup B) = 55$   
 آ) باید  $n(A \cap B)$  را به دست آوریم:  
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$   
 $\Rightarrow 55 = 40 + 25 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 10$   
 ب) باید تعداد اعضای مجموعه  $(A \cup B)'$  را به دست آوریم:  
 $n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B) = 70 - 55 = 15$   
 پ) باید تعداد اعضای مجموعه  $A - B$  را به دست آوریم:  
 $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 40 - 10 = 30$

۲۵ مجموعه شامل تمام دانش‌آموزان را  $U$  ، دانش‌آموزان شرکت‌کننده در المپیاد ریاضی را  $A$  و دانش‌آموزان شرکت‌کننده در المپیاد فیزیک را  $B$  نشان می‌دهیم.  
 روش اول:  $(A \cup B)'$  مجموعه دانش‌آموزانی است که در هیچ‌یک از این دو رشته المپیاد شرکت نکرده‌اند. داریم:  
 $n(U) = 30$  ,  $n(A) = 17$  ,  $n(B) = 15$  ,  $n((A \cup B)') = 5$   
 $\Rightarrow n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B) = 5$   
 $\Rightarrow n(A \cup B) = 30 - 5 = 25$

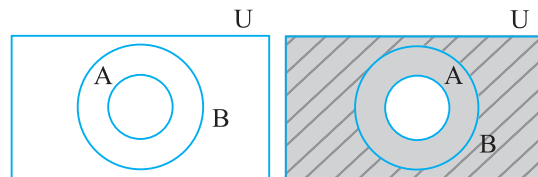
۲۰ مجموعه‌های  $U, A, B$  را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$U = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$  ,  $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$  ,  $B = \{3, 6, 9, 12\}$   
 آ)  $A' = U - A = \{5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15\}$   
 $\Rightarrow (A')' = U - A' = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} = A$   
 ب)  $A - B = \{1, 2, 4\}$  (۱)  
 $A \cap B = \{3, 6, 12\} \Rightarrow A - (A \cap B) = \{1, 2, 4\}$  (۲)  
 (۱), (۲)  $\Rightarrow A - B = A - (A \cap B)$   
 پ)  $B - A = \{9\}$  (۱)  
 $B \cap A' = \{3, 6, 9, 12\} \cap \{5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15\} = \{9\}$  (۲)  
 (۱), (۲)  $\Rightarrow B - A = B \cap A'$   
 ت)  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12\} \Rightarrow (A \cup B)' = U - (A \cup B)$   
 $= \{5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15\}$  (۱)  
 $A' \cap B' = \{5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15\}$   
 $\cap \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15\}$   
 $= \{5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15\}$  (۲)  
 (۱), (۲)  $\Rightarrow (A \cup B)' = A' \cap B'$   
 ث)  $A \cap B = \{3, 6, 12\} \Rightarrow (A \cap B)' = U - (A \cap B)$   
 $= \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15\}$  (۱)  
 $A' \cup B' = \{5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15\}$   
 $\cup \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15\}$   
 $= \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15\}$  (۲)  
 (۱), (۲)  $\Rightarrow (A \cap B)' = A' \cup B'$   
 ج) طبق قسمت (پ)، داریم:  
 $A' \cap B = B \cap A' = \{9\}$   
 $\Rightarrow A \cup (A' \cap B) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12\}$  (۱)  
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12\}$  (۲)  
 (۱), (۲)  $\Rightarrow A \cup (A' \cap B) = A \cup B$

۲۱ آ) تمام اعضای مجموعه  $A$  در مجموعه  $B$  قرار دارند، بنابراین:

$A \subseteq B$   
 $A' = \{4, 8, 12\}$  ,  $B' = \{8, 12\} \Rightarrow B' \subseteq A'$   
 ب) نمودار  $A \subseteq B$  به صورت زیر است.

مجموعه  $A'$  را با سایه و  $B'$  را با هاشور زدن مشخص می‌کنیم:



تمام قسمت‌های  $B'$  که به صورت هاشورخورده است، در مجموعه  $A'$  (سایه‌زده شده) نیز هست، لذا:  
 $B' \subseteq A'$

(آ) طبق فرض مجموعه  $A - B$  ، ۴۰ عضو دارد:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 40 = 120 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 80$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 120 + 150 - 80 = 190$$

(پ) باید تعداد عضوهای مجموعه  $(A' \cap B')$  را به دست آوریم:

$$n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B)$$

$$= 200 - 190 = 10$$

(ت) باید تعداد عضوهای مجموعه  $(A \cup B) - (A \cap B)$  را به دست آوریم. داریم:

$$n((A \cup B) - (A \cap B)) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$$

$$\stackrel{(آ) \text{ و } (پ)}{=} 190 - 80 = 110$$

$$n(A \cup B) = \underbrace{n(A) + n(B)}_{\Delta n(A \cap B)} - n(A \cap B) = 4n(A \cap B) \quad \boxed{27}$$

$$\Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)} = \frac{4n(A \cap B)}{n(A \cap B)} = 4$$

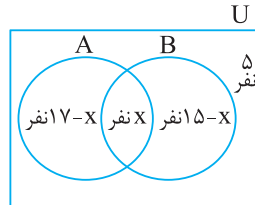
(آ) باید تعداد عضوهای مجموعه  $A \cap B$  را به دست آوریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 25 = 17 + 15 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 32 - 25 = 7$$

(ب) باید تعداد عضوهای مجموعه  $A \cap B'$  را به دست آوریم:

$$n(A \cap B') = n(A) - n(A \cap B) = 17 - 7 = 10$$



روش دوم: فرض کنیم  $x$  نفر در هر دو

رشته المپیا شرکت کرده باشند. با

استفاده از نمودار ون دو مجموعه  $A$

و  $B$  ، تعداد عضوهای هر چهار ناحیه

مجزا را مشخص می‌کنیم:

$$n(U) = 30 \Rightarrow (17 - x) + x + (15 - x) + 5 = 30 \Rightarrow x = 7$$

$$x = 7 \quad \text{(آ)}$$

$$17 - x = 17 - 7 = 10 \quad \text{(ب)}$$

$U \Rightarrow n(U) = 200$  مجموعه افرادی که در این نظرسنجی شرکت کرده‌اند. 26

$A \Rightarrow n(A) = 120$  مجموعه افرادی که از عالی قاپو بازدید کرده‌اند.

$B \Rightarrow n(B) = 150$  مجموعه افرادی که از بازار اصفهان بازدید کرده‌اند.

## درسنامه ۳

### الگو و دنباله

**الگو:** الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع و یا اعداد است که ممکن است تکرارشونده، رشدکننده یا ترکیبی از این دو باشند.

در این جا ما با الگوهای عددی و شکلی سروکار داریم.

الگوی عددی مقابل را در نظر بگیرید:

۲، ۴، ۶، ۸، ...

جمله اول این الگو را  $a_1$  (  $a$  اندیس ۱) نمایش می‌دهیم و می‌نویسیم  $a_1 = 2$ . هم‌چنین جمله دوم این الگو برابر ۴ است و می‌نویسیم  $a_2 = 4$  و به

همین ترتیب جمله  $n$ ام این الگو را  $a_n$  نمایش می‌دهیم و داریم  $a_n = 2n$

$a_n$  را **جمله عمومی** الگو می‌نامیم. با داشتن جمله عمومی الگو، می‌توان مقدار هر جمله از یک الگو را به دست آورد. در واقع جمله عمومی یک الگو، ساختار جملات الگو را مشخص می‌کند.

**مثال** جمله عمومی یک الگو به صورت  $a_n = \frac{2n+1}{n+4}$  است.

(آ) مقدار جمله دهم الگو را مشخص کنید.

(ب) جمله چندم الگو برابر  $\frac{7}{4}$  است؟

**پاسخ:** (آ) با قرار دادن عدد ۱۰ به جای  $n$  در جمله عمومی الگو، جمله دهم الگو به دست می‌آید:

$$n = 10, a_n = \frac{2n+1}{n+4} \Rightarrow a_{10} = \frac{2 \times 10 + 1}{10 + 4} = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}$$

(ب) باید  $n$  را طوری به دست آوریم که  $a_n = \frac{7}{4}$  شود:

$$a_n = \frac{7}{4} \Rightarrow \frac{2n+1}{n+4} = \frac{7}{4} \Rightarrow 4(2n+1) = 7(n+4) \Rightarrow 8n+4 = 7n+28 \Rightarrow 8n-7n = 28-4 \Rightarrow n = 24$$

بنابراین جمله بیست و چهارم الگو برابر  $\frac{7}{4}$  است.

**الگوی خطی:** الگوهایی که جمله عمومی آن‌ها به صورت  $t_n = an + b$  باشد را الگوهای خطی می‌گوییم (زیرا شبیه معادله خط هستند). که در آن  $a$

و  $b$  اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.  $t_n$  یک عبارت دو جمله‌ای از درجه یک بر حسب  $n$  می‌باشد.

به عنوان مثال، الگوهای  $a_n = -\frac{1}{3}n + 2$  و  $b_n = 4n + 17$  الگوهای خطی هستند.

## ۳ درسنامه

مثال

در یک الگوی خطی، جملات پنجم و دوازدهم به ترتیب ۹ و ۲۳ می‌باشند. جمله عمومی الگو را بیابید.

$$t_5 = a(5) + b = 9 \Rightarrow \begin{cases} 5a + b = 9 \\ 12a + b = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5a - b = -9 \\ 12a + b = 23 \end{cases}$$

پاسخ: فرض کنیم جمله عمومی الگو  $t_n = an + b$  باشد. پس داریم:

$$\Rightarrow 7a = 14 \Rightarrow a = \frac{14}{7} = 2 \xrightarrow{\Delta a + b = 9} 5(2) + b = 9 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow t_n = an + b = 2n - 1$$

نکته

اختلاف هر دو جمله متوالی در الگوهای خطی، برابر ضریب  $n$  می‌باشد (که همان شیب، در معادله خط است).

**الگوی غیرخطی:** هر الگویی که جمله عمومی آن به صورت  $t_n = an + b$  نباشد را الگوی غیرخطی می‌گوییم. به عنوان مثال،

الگوهای  $a_n = n^2 - 4n$  و  $b_n = \frac{1}{n}$  الگوهای غیرخطی‌اند.

**دنباله:** هر تعداد عدد که پشت سر هم قرار می‌گیرند را یک دنباله می‌نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند. به عنوان مثال

اعداد  $1, 3, 5, 7, \dots$  که از الگوی  $a_n = 2n - 1$  به دست می‌آیند را یک دنباله می‌گوییم.

هم‌چنین اعداد  $4, 10, 18, \dots$  که از الگوی درجه دوم  $a_n = n^2 + 3n$  به دست می‌آیند، یک دنباله می‌باشد.

**توجه:** جملات یک دنباله ممکن است فاقد الگو باشند، مانند دنباله اعداد اول  $2, 3, 5, 7, \dots$

مثال

جمله عمومی یک دنباله به صورت  $a_n = n^2 - 4n$  است. پنج جمله اول این دنباله را بنویسید.

$$\text{پاسخ: } a_1 = (1)^2 - 4(1) = -3, a_2 = 2^2 - 4(2) = -4, a_3 = 3^2 - 4(3) = -3, a_4 = 4^2 - 4(4) = 0, a_5 = 5^2 - 4(5) = 5$$

$\Rightarrow$  جملات دنباله:  $-3, -4, -3, 0, 5, \dots$

۲۸. با استفاده از چوب کبریت‌ها، سه شکل زیر ساخته شده است.



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

(آ) شکل بعدی را در الگو رسم کنید و جدول را کامل کنید.

n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴
$a_n$ : تعداد چوب کبریت‌ها				

(ب) جمله عمومی الگو را مشخص کنید.

(پ) در چه مرحله‌ای از الگو، تعداد چوب کبریت‌ها برابر ۷۰ می‌باشد؟

۲۹. در یک الگوی خطی، جملات چهارم و یازدهم به ترتیب ۹ و ۳۰ می‌باشند. جمله عمومی الگو را بیابید.

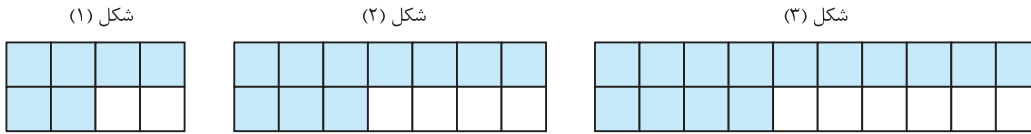
۳۰. در یک الگوی خطی، جملات پنجم و هفدهم به ترتیب ۳ و ۲۷ می‌باشند.

(آ) جمله عمومی الگو را بنویسید.

(ب) جمله پنجاهم الگو را مشخص کنید.

(پ) جمله چندم الگو ۱۶۵ می‌باشد؟

۳۱. به الگوی زیر توجه کنید:



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

(آ) تعداد مربع‌های رنگی در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید.

(ب) اگر  $n$  شماره شکل و  $a_n$  تعداد مربع‌های سفید باشد، مقدار  $a_n$  را بر حسب  $n$  بنویسید.

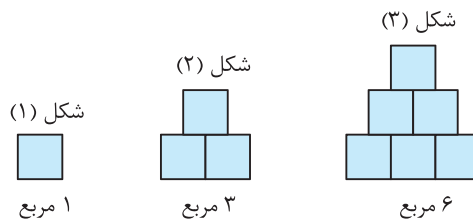
(پ) اگر  $n$  تعداد مربع‌های سفید و  $b_n$  تعداد مربع‌های رنگی باشد، مقدار  $b_n$  را بر حسب  $n$  بنویسید.

(ت) برای  $10^2$  مربع رنگی، چند مربع سفید لازم است؟

(ث) در چندمین شکل، نسبت تعداد مربع‌های سفید به تعداد مربع‌های رنگی  $\frac{31}{63}$  می‌باشد؟

(ج) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۴۶ مربع سفید باشد؟ اگر هست، تعداد مربع‌های رنگی آن چقدر است؟

۳۲. الگوی زیر را در نظر بگیرید:



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

۱ مربع

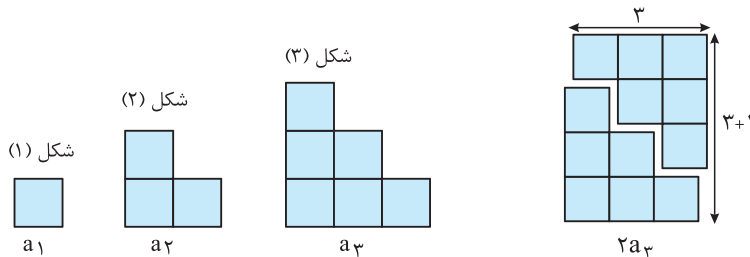
۳ مربع

۶ مربع

(آ) شکل بعدی را رسم کنید و سپس تعداد مربع‌ها در الگو را به صورت یک دنباله تا جمله هفتم آن بنویسید.

(ب) آیا دنباله حاصل یک دنباله خطی است؟ چرا؟

(پ) شکل‌های الگوی بالا را به صورت زیر تبدیل می‌کنیم. با توجه به تصویر حاصل  $a_n$  را بر حسب  $n$  به دست آورید.



شکل (۱)

شکل (۲)

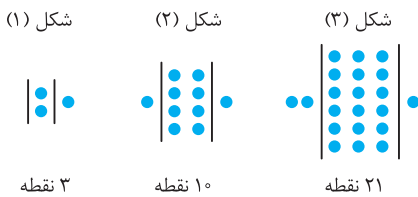
شکل (۳)

 $a_1$  $a_2$  $a_3$  $2a_3$ 

$$2a_3 = 3(3+1) \Rightarrow a_3 = \frac{3(3+1)}{2}$$

(ت) به کمک قسمت (پ)، حاصل عبارت  $1+2+3+\dots+n$  را به دست آورید.

۳۳. الگوی مقابل را در نظر بگیرید:



۳ نقطه

۱۰ نقطه

۲۱ نقطه

(آ) شکل بعدی را رسم کنید و سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک

دنباله تا جمله پنجم آن بنویسید.

(ب) جمله عمومی الگو را بیابید.

(پ) شکل بیستم در این الگو چند نقطه دارد؟

(ت) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۱۲۰ نقطه باشد؟

۳۴. چهار جمله اول دنباله‌های زیر داده شده است. در هر مورد، سه جمله بعدی را بنویسید و در صورت امکان جمله عمومی دنباله را حدس بزنید.

(ب)  $\sqrt{2}, 2, \sqrt{6}, 2\sqrt{2}, \dots$

(آ)  $1, 3, 5, 7, \dots$

(ت)  $0/3, 0/03, 0/003, 0/0003, \dots$

(پ)  $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$

(ج)  $3, \frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}, \dots$

(ث)  $-1, 4, -9, 16, \dots$

(ح)  $2, 5, 14, 41, \dots$

(چ)  $1, 2, 3, 5, \dots$

۳۵. جمله عمومی یک دنباله به صورت  $a_n = \frac{5n-1}{3n+7}$  است.

(آ) چهار جمله اول این دنباله را بنویسید.

(ب) جمله هفدهم این دنباله را مشخص کنید.

(پ) جمله چندم دنباله برابر  $\frac{27}{30}$  می باشد؟

۳۶. دو جمله اول دنباله درجه دوم  $t_n = an^2 + bn$  به ترتیب ۱- و ۲ می باشند.

(آ)  $a$  و  $b$  را به دست آورید. (ب) جمله هفتم دنباله را مشخص کنید.

۳۷. جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، چهار جمله اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آن ها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

(آ)  $a_n = 3n$  (ب)  $b_n = 5n - 2$

(پ)  $c_n = n^2 + 1$  (ت)  $d_n = n^2 + 2n$

۳۸. برای دنباله های درجه دوم زیر یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله عمومی هر دنباله را بیابید.

(آ) ۱، ۴، ۹، ۱۶، ... (ب) ۲، ۶، ۱۲، ...

پاسخ ها تشریحی

۳۰. (آ) جمله عمومی الگوی خطی به صورت  $t_n = an + b$  می باشد.

طبق فرض  $t_5 = 3$  و  $t_{17} = 27$  می باشد:

$$\begin{cases} t_5 = a(5) + b = 3 \\ t_{17} = a(17) + b = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5a - b = -3 \\ 17a + b = 27 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 12a = 24 \Rightarrow a = \frac{24}{12} = 2 \xrightarrow{\Delta a + b = 3} 5(2) + b = 3 \Rightarrow b = -7$$

$$\Rightarrow t_n = 2n - 7$$

(ب) با قرار دادن عدد ۵۰ به جای  $n$  در فرمول  $t_n = 2n - 7$ ، جمله پنجاهم الگو به دست می آید:

$$t_{50} = 2(50) - 7 = 93$$

(پ) باید  $n$  را طوری به دست آوریم که  $t_n = 165$  شود:

$$t_n = 2n - 7 = 165 \Rightarrow 2n = 172 \Rightarrow n = 86$$

۳۱. جدول زیر را در نظر می گیریم:

شماره شکل	۱	۲	۳	...
تعداد کل مربع ها	۸	۱۴	۲۰	...
تعداد مربع های رنگی	۶	۱۰	۱۴	...
تعداد مربع های سفید	۲	۴	۶	...

(آ) تعداد مربع های رنگی در هر مرحله از اضافه کردن عدد ثابت ۴ به تعداد مربع های رنگی مرحله قبل به دست می آید:

$$\begin{matrix} +4 & +4 & +4 & +4 & +4 \\ \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright \\ 6, & 10, & 14, & 18, & 22, & 26 \end{matrix}$$

۳۸. (آ)



$n$	۱	۲	۳	۴
$a_n$	۴	۷	۱۰	۱۳

(ب) روش اول: در هر مرحله، ۳ چوب کبریت اضافه می شود، بنابراین:

$$a_1 = 4, a_2 = 4 + 3, a_3 = 4 + 2(3)$$

$$a_4 = 4 + 3(3), \dots, a_n = 4 + (n-1) \times 3$$

بنابراین جمله عمومی الگو به صورت  $a_n = 3n + 1$  است.

روش دوم: در هر مرحله، شماره شکل ( $n$ ) در ۳ ضرب شده و حاصل آن به اضافه ۱،  $a_n$  را تولید می کند، یعنی  $a_n = 3n + 1$

روش سوم: در هر مرحله، شماره شکل ( $n$ ) در ۴ ضرب شده و حاصل آن منهای ( $n-1$ ) برابر  $a_n$  شده است، یعنی:

$$a_n = 4n - (n-1) = 4n - n + 1 = 3n + 1$$

همان طور که می بینید از روش های مختلفی، توانستیم  $a_n$  را پیدا کنیم ولی در نهایت، جواب به دست آمده یکی است.

$$a_n = 70 \Rightarrow 70 = 3n + 1 \Rightarrow 3n = 69 \Rightarrow n = 23 \quad (پ)$$

۳۹. جمله عمومی الگوی خطی  $t_n = an + b$  است. طبق فرض  $t_4 = 9$

و  $t_{11} = 30$  می باشد:

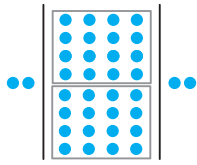
$$\begin{cases} t_4 = a(4) + b = 9 \\ t_{11} = a(11) + b = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4a - b = -9 \\ 11a + b = 30 \end{cases} \Rightarrow 7a = 21$$

$$\Rightarrow a = \frac{21}{7} = 3 \xrightarrow{4a + b = 9} 4(3) + b = 9 \Rightarrow b = -3 \Rightarrow t_n = 3n - 3$$

ت) حاصل عبارت  $1+2+\dots+n$  تعداد مربع‌های به کار رفته در  $a_n$  است (در ردیف اول،  $n$  مربع، در ردیف دوم،  $n-1$  مربع و ... و در ردیف  $n$ ام، یک مربع قرار دارد.)، پس:

$$1+2+\dots+n = a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

۳۳ آ) در شکل‌های داده شده درون | | به تعداد ۲ برابر  $n^2$ ، نقطه وجود دارد. هم‌چنین در دو طرف | | در شکل  $n$ ام،  $n$  نقطه وجود دارد. بنابراین:



ب) اگر  $a_n$  جمله عمومی الگو باشد، آن‌گاه  $a_n = 2n^2 + n$  می‌باشد.  
 پ)  $a_{20} = 2(20)^2 + 20 = 820$   
 ت)  $a_n = 120 \Rightarrow 2n^2 + n = 120 \Rightarrow 2n^2 + n - 120 = 0$   
 به ازای هیچ مقدار طبیعی از  $n$  تساوی  $2n^2 + n - 120 = 0$  برقرار نمی‌باشد، پس در این الگو شکلی وجود ندارد که شامل ۱۲۰ نقطه باشد.

۳۴ آ)  $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots \Rightarrow a_n = 2n - 1$

ب)  $\sqrt{2}, 2, \sqrt{4}, \sqrt{6}, 2\sqrt{2} = \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{12}, \sqrt{14}, \dots$   
 $\Rightarrow a_n = \sqrt{2n}$

پ)  $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \frac{1}{49}, \dots \Rightarrow a_n = \frac{1}{n^2}$

ت)  $0/3, 0/03, 0/003, 0/0003, 0/00003, 0/000003, 0/0000003, \dots$   
 $\Rightarrow a_n = \frac{0/0000003}{n-1} = a_n = \frac{3}{(10)^n}$

ث)  $-1, 4, -9, 16, -25, 36, -49, \dots \Rightarrow a_n = (-1)^n n^2$

جملات دنباله یک در میان مثبت و منفی دارد، بنابراین از  $(-1)^n$  برای منفی و مثبت شدن جملات استفاده می‌کنیم.

ج)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots$

$3, \frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, \dots$

$$\Rightarrow a_n = 3 + (n-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}n + \frac{7}{2}$$

ج) جمله سوم، مجموع جملات اول و دوم و جمله چهارم، مجموع جملات دوم و سوم می‌باشد. بنابراین:

$$1, 2, 3, 5, 3 + 5 = 8, 5 + 8 = 13, 8 + 13 = 21, \dots$$

$$\Rightarrow a_n = a_{n-1} + a_{n-2}; a_1 = 1, a_2 = 2, n \geq 3$$

ب) تعداد مربع‌های سفید یک الگوی خطی است که در آن تفاضل هر دو جمله متوالی برابر عدد ثابت ۲ است:

$$a_n = an + b, a_1 = 2, a_2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} a(1) + b = 2 \\ a(2) + b = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a - b = -2 \\ 2a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 0 \Rightarrow a_n = 2n$$

پ) جدول زیر را در نظر می‌گیریم:

$n$ : تعداد مربع‌های سفید	۲	۴	۶	...
$b_n$ : تعداد مربع‌های رنگی	۶	۱۰	۱۴	...

به جای  $n$  فقط اعداد زوج می‌توان قرار داد و  $b_n$  از دستور  $b_n = 6 + 2(n-2) = 2n + 2$  به دست می‌آید.

ت) طبق رابطه (پ)،  $n$  را طوری به دست می‌آوریم که  $b_n = 102$  شود:

$$b_n = 102 = 2n + 2 \Rightarrow 2n = 100 \Rightarrow n = \frac{100}{2} = 50$$

طبق قسمت (پ)،  $n = 50$  همان تعداد مربع‌های سفید است.

ث) تعداد مربع‌های رنگی برحسب شماره شکل از رابطه  $t_n = 4n + 2$  به دست می‌آید. پس نسبت تعداد مربع‌های سفید به تعداد مربع‌های رنگی

در شکل  $n$ ام برابر  $\frac{2n}{4n+2}$  است. داریم:

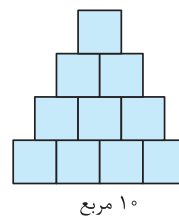
$$\frac{2n}{4n+2} = \frac{31}{63} \Rightarrow 63 \times 2n = 31 \times (4n+2) \Rightarrow 126n = 124n + 62$$

$$\Rightarrow 2n = 62 \Rightarrow n = 31$$

ج)  $a_n = 2n = 46 \Rightarrow n = 23$  (تعداد مربع‌های سفید)

بنابراین در شکل بیست و سوم، ۴۶ مربع سفید وجود دارد. پس در این شکل، تعداد مربع‌های رنگی برابر  $t_{23} = 4(23) + 2 = 94$  می‌باشند.

یا طبق فرمول قسمت (پ)، تعداد مربع‌های رنگی برابر  $b_n = 2(46) + 2 = 94$  است.



۳۲ آ)

$$\frac{+2}{2}, \frac{+3}{3}, \frac{+4}{4}, \frac{+5}{5}, \frac{+6}{6}, \frac{+7}{7}$$

دنباله:  $1, 3, 6, 10, 15, 21, 28$

ب) خیر، زیرا اختلاف هر دو جمله متوالی عدد ثابت نیست.

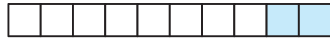
پ) در الگوی جدید، می‌توان دو شکل ( $n$ ) را طوری کنار هم قرار داد که شکل حاصل، یک مستطیل شامل  $n \times (n+1)$  مربع باشد. بنابراین:

$$2a_n = n(n+1) \Rightarrow a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$b_n = \Delta n - 2: 3, 8, 13, 18, \dots$$



شکل (۱)



شکل (۲)

در شکل  $n$ ام تعداد کل مربعها،  $\Delta n$  و تعداد مربعهای سفید شکل  $(n)$  برابر  $b_n = \Delta n - 2$  می باشد.

$$c_n = n^2 + 1: 2, 5, 10, 17, \dots$$



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

$$d_n = n^2 + 2n: 3, 8, 15, 24, \dots$$



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

تعداد نقطهها در الگوی هندسی زیر، جملات دنباله  $1, 4, 9, \dots$  می باشند:



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

جمله عمومی دنباله،  $a_n = n^2$  می باشد.  
تعداد نقطهها در الگوی هندسی زیر، جملات دنباله  $2, 6, 12, \dots$  می باشند:



شکل (۱)



شکل (۲)



جمله عمومی دنباله،  $a_n = n^2 + n$  است.

(ج) با توجه به جملات داده شده، به غیر از جمله اول، هر جمله یک واحد کم تر از سه برابر جمله قبل از خود می باشد:

$$5 = 3(2) - 1, 14 = 3(5) - 1, 41 = 3(14) - 1, 3(41) - 1 = 122$$

$$3(122) - 1 = 365, 3(365) - 1 = 1094$$

$$\Rightarrow a_n = 3a_{n-1} - 1; a_1 = 2$$

(۳۵) با قرار دادن اعداد ۱ تا ۴ به جای  $n$  در  $a_n$ ، چهار جمله اول دنباله به دست می آید:

$$a_1 = \frac{5(1) - 1}{3(1) + 7} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, \quad a_2 = \frac{5(2) - 1}{3(2) + 7} = \frac{9}{13}$$

$$a_3 = \frac{5(3) - 1}{3(3) + 7} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}, \quad a_4 = \frac{5(4) - 1}{3(4) + 7} = \frac{19}{19} = 1$$

$$a_{17} = \frac{5(17) - 1}{3(17) + 7} = \frac{84}{58} = \frac{42}{29} \quad (\text{ب})$$

$$a_n = \frac{27}{20} = \frac{5n - 1}{3n + 7} \Rightarrow 27(3n + 7) = 20(5n - 1) \quad (\text{پ})$$

$$\Rightarrow 81n + 189 = 100n - 20 \Rightarrow 209 = 19n \Rightarrow n = \frac{209}{19} = 11$$

(۳۶) طبق فرض  $t_1 = -1$  و  $t_2 = 2$  می باشد. داریم:

$$\begin{cases} t_1 = a(1)^2 + b(1) = -1 \\ t_2 = a(2)^2 + b(2) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 4a + 2b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a - 2b = 2 \\ 4a + 2b = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \xrightarrow{a+b=-1} b = -3$$

$$a = 2, b = -3 \Rightarrow t_n = 2n^2 - 3n \Rightarrow t_7 = 2(7)^2 - 3(7) = 77 \quad (\text{ب})$$

$$a_n = 3n: 3, 6, 9, 12, \dots$$

(۳۷)



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

## درسنامه ۴

## دنباله‌های حسابی و هندسی

**دنباله حسابی:** دنباله‌ای که در آن هر جمله (به‌جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به‌دست می‌آید، یک دنباله حسابی می‌نامیم و به آن عدد ثابت، قدرنسبت دنباله می‌گوییم و آن را با  $d$  نمایش می‌دهیم.

## نکته

$$d = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots = t_n - t_{n-1}$$

۱- اگر جمله عمومی یک دنباله حسابی  $t_n$  باشد، آن‌گاه:

$$t_n = t_1 + (n-1)d$$

۲- جمله  $n$ ام یک دنباله حسابی با جمله اول  $t_1$  و قدرنسبت  $d$  به‌صورت مقابل است:

**توجه:** شکل دنباله حسابی، به‌صورت الگوی خطی است.

## مثال

در دنباله حسابی زیر، جمله بیست و پنجم را مشخص کنید.

$$-5, -2, 1, \dots$$

$$t_1 = -5, \quad d = t_2 - t_1 = -2 - (-5) = 3, \quad t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_{25} = -5 + 24 \times 3 = -5 + 72 = 67$$

پاسخ:

## نکته

اگر  $a, b, c$  و سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، آن‌گاه  $2b = a + c$  و عدد  $b$  را واسطه حسابی دو عدد  $a$  و  $c$  می‌گوییم.

به عنوان مثال، واسطه حسابی دو عدد  $1 + \sqrt{2}$  و  $1 - \sqrt{2}$  برابر با  $1 = \frac{(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2})}{2} = \frac{2}{2}$  است.

## مثال

بین دو عدد ۱۱ و ۴۱ با جمله اول ۱۱، پنج واسطه حسابی درج کنید.

**پاسخ:** می‌خواهیم بین دو عدد ۱۱ و ۴۱، پنج عدد قرار دهیم به طوری که هفت عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی بدهند.

$$t_1 = 11, \quad t_7 = 41 \Rightarrow t_1 + 6d = 41 \Rightarrow 11 + 6d = 41 \Rightarrow 6d = 30 \Rightarrow d = 5$$

$$\underbrace{11}_{+5}, \underbrace{16}_{+5}, \underbrace{21}_{+5}, \underbrace{26}_{+5}, \underbrace{31}_{+5}, \underbrace{36}_{+5}, \underbrace{41}_{+5}$$

بنابراین هفت عدد حاصل به‌صورت روبه‌رو است:

**دنباله هندسی:** دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به‌جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت و غیر صفر به‌دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم و آن را با  $r$  نمایش می‌دهیم. جمله اول هم باید غیر صفر باشد.

## نکته

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \dots = \frac{t_n}{t_{n-1}} = r$$

۱- در دنباله هندسی با جمله عمومی  $t_n$ ، داریم:

$$t_n = t_1 r^{n-1}$$

۲- جمله  $n$ ام دنباله هندسی به‌صورت مقابل است که در آن  $t_1$  جمله اول و  $r$  قدرنسبت می‌باشد:

**تذکر:** اگر  $t_1, r > 0$ ، جملات دنباله هندسی مثبت و اگر  $r < 0$ ، آن‌گاه جملات دنباله هندسی، یکی در میان مثبت و منفی و اگر  $t_1 < 0$  و  $r > 0$ ، جملات دنباله هندسی منفی هستند.

## مثال

در یک دنباله هندسی، جمله دوم  $\frac{1}{3}$  و جمله پنجم ۹ است. جمله اول و قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.

**پاسخ:** جمله عمومی دنباله هندسی  $t_n = t_1 r^{n-1}$  است. طبق فرض  $t_2 = \frac{1}{3}$  و  $t_5 = 9$  می‌باشند، پس:

$$t_2 = t_1 r = \frac{1}{3}, \quad t_5 = t_1 r^4 = 9 \Rightarrow \frac{t_5}{t_2} = \frac{t_1 r^4}{t_1 r} = \frac{9}{\frac{1}{3}} \Rightarrow r^3 = 27 = 3^3 \Rightarrow r = 3, \quad t_1 r = \frac{1}{3} \Rightarrow 3t_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{9}$$

## نکته

اگر  $a, b, c$  و سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه  $b^2 = ac$ . اعداد  $b = \pm\sqrt{ac}$  را واسطه هندسی دو عدد  $a$  و  $c$  می‌گوییم.

به عنوان مثال، واسطه هندسی بین دو عدد ۳ و ۴۸،  $\pm\sqrt{3 \times 48} = \pm\sqrt{144} = \pm 12$  عددی هستند.



۳۹. از بین دنباله‌های زیر، کدام یک دنباله حسابی و کدام یک دنباله هندسی می‌باشند؟ قدرنسبت آن‌ها را تعیین کنید. هم‌چنین جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.

(ب)  $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \dots$  (آ)  $2, 2/4, 2/8, 3/2, \dots$   
 (ت)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$  (پ)  $-1, \sqrt{3}, -3, 3\sqrt{3}, \dots$   
 (ج)  $\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, \dots$  (ث)  $3, 3, 3, 3, \dots$   
 (ح)  $-1, 1, -1, 1, \dots$  (چ)  $12, 15, 18, 21, 25, 28, 31, \dots$

۴۰. جمله عمومی چهار دنباله، داده شده است. کدام یک، دنباله حسابی و کدام یک دنباله هندسی است؟

(آ)  $a_n = -\frac{n}{3} + 4$  (ب)  $b_n = 2n^2 - 1$  (پ)  $c_n = 4\left(-\frac{2}{3}\right)^n$  (ت)  $d_n = \frac{n+4}{2n+3}$

۴۱. کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

- (آ) هر دنباله یا حسابی است یا هندسی.  
 (ب) دنباله حسابی با قدرنسبت  $\frac{2}{5}$  وجود دارد.  
 (ت) بی‌شمار دنباله هندسی با قدرنسبت  $\frac{1}{3}$  وجود دارد.  
 (ث) دنباله هندسی وجود ندارد که فقط چهار جمله اول آن منفی باشد.  
 (ج) دنباله حسابی وجود ندارد که فقط چهار جمله اول آن منفی باشد.

۴۲. یک دنباله حسابی مثال بزنید که:

- (آ) قدرنسبت آن مثبت و جمله سوم آن ۲ باشد.  
 (ب) قدرنسبت آن منفی و جمله چهارم آن -۴ باشد.  
 (پ) فقط چهار جمله منفی داشته باشد.

۴۳. در یک دنباله حسابی، جملات هفتم و پانزدهم به ترتیب ۲۳ و ۶۳ می‌باشند. جمله چهارم دنباله را به دست آورید.

۴۴. در یک دنباله حسابی، جمله یازدهم، بیست واحد کم‌تر از جمله سوم است. اگر جمله نهم دنباله ۱۷ باشد، جمله دهم دنباله را به دست آورید.

۴۵. چندمین جمله دنباله حسابی  $1, 5, 9, \dots$  برابر ۲۲۱ می‌باشد؟

۴۶. چند جمله دنباله حسابی  $157, 151, \dots$  مثبت هستند؟

۴۷. اعداد  $8 - 3x$ ،  $4 - x$  و  $2x + 1$  سه جمله متوالی یک دنباله حسابی‌اند. مقدار  $x$  را به دست آورید.

۴۸. در یک دنباله حسابی، مجموع جملات دوم و پنجم برابر  $\frac{19}{3}$  و مجموع جملات چهارم و دهم برابر ۲۰ می‌باشد. جمله اول و قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.

۴۹. در یک دنباله حسابی، مجموع چهار جمله اول ۱۸ و مجموع پنج جمله بعدی ۱۳۵ می‌باشد. جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.

۵۰. در یک دنباله حسابی با قدرنسبت مثبت، مجموع سه جمله اول ۹ و حاصل ضرب آن‌ها -۴۸ می‌باشد. جمله هفتم دنباله را مشخص کنید.

۵۱. در یک دنباله حسابی، مجموع جملات هفتم و بیستم برابر ۴۱ است. مجموع جملات دوازدهم و پانزدهم این دنباله را به دست آورید.

۵۲. بین دو عدد -۱ و ۴۷، هفت واسطه حسابی درج کرده‌ایم. واسطه‌ها را مشخص کنید.

۵۳. واسطه حسابی بین جمله‌های بیست و یکم و چهل و نهم دنباله حسابی مقابل را به دست آورید.  $4, -\frac{13}{4}, -\frac{5}{2}, \dots$

۵۴. با توجه به الگوی مقابل:



(آ) دو جمله بعدی الگو را با رسم شکل بیابید.

(ب) جمله عمومی آن را مشخص کنید.

(پ) جمله چندم این دنباله برابر ۲۹۹ می‌باشد؟

۵۵. پنج عدد که تشکیل یک دنباله حسابی می دهند را طوری مشخص کنید که مجموع آن‌ها برابر  $8^\circ$  و بزرگ‌ترین عدد، دو برابر مجموع دو عدد کوچک‌تر باشد.

۵۶. در دنباله حسابی با جمله عمومی  $t_n$ ، حاصل  $\frac{t_4 + 2t_{10} - t_7}{t_8 + t_9}$  را به دست آورید.

۵۷. زوایای یک پنج ضلعی محدب که اندازه کوچک‌ترین زاویه آن  $6^\circ$  می باشد، تشکیل یک دنباله حسابی می دهند. اندازه زوایای این پنج ضلعی را به دست آورید.

۵۸. در یک دنباله هندسی، جمله‌های دوم و هفتم به ترتیب  $\frac{3}{4}$  و  $48$  می باشند. جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.

۵۹. جملات سوم و پنجم یک دنباله هندسی به ترتیب  $24$  و  $\frac{32}{3}$  می باشند. جمله هفتم دنباله را مشخص کنید.

۶۰. در یک دنباله هندسی با جمله‌های مثبت و جمله عمومی  $t_n$ ،  $t_1 t_3 = 4$  و  $t_4 t_5 = 16$  می باشند. جملات دنباله را مشخص کنید.

۶۱. در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول و سوم برابر  $17$  و مجموع جملات دوم و چهارم برابر  $68$  می باشد. جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.

۶۲. بین دو عدد  $1$  و  $64$  با جمله اول  $1$ ، پنج واسطه هندسی درج شده است. جملات دنباله را مشخص کنید.

۶۳. بین دو عدد  $1$  و  $81$  با جمله اول  $1$ ، هفت واسطه هندسی درج شده است. قدرنسبت دنباله حاصل را مشخص کنید.

۶۴. واسطه هندسی مثبت دو عدد  $2 + \sqrt{3}$  و  $2 - \sqrt{3}$  را به دست آورید.

۶۵. در دنباله هندسی روبه‌رو، جمله اول و قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.  
 $x - 4, 2x - 4, 4x + 4, \dots$

۶۶. در دنباله هندسی  $1, 2, 4, 8, \dots, \frac{1}{4}$ ، حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله را به دست آورید.

۶۷. قیمت یک خودرو به دلیل استفاده از آن و گذشت زمان کاهش می‌یابد. اگر قیمت اولیه یک خودرو  $40$  میلیون تومان باشد و قیمت آن در هر سال  $3$  درصد کاهش پیدا کند:

(آ) قیمت این خودرو را بعد از  $3$  سال مشخص کنید.

(ب) قیمت این خودرو بعد از گذشت  $n$  سال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

۶۸. جمعیت یک کشور، اکنون  $80$  میلیون نفر است. فرض کنید در هر سال به میزان  $2$  درصد به جمعیت آن اضافه می‌شود:

(آ) جمعیت این کشور را پس از گذشت  $3$  سال به دست آورید.

(ب) جمعیت این کشور پس از گذشت  $n$  سال چقدر خواهد بود؟

(پ) این دنباله، یک دنباله حسابی است یا یک دنباله هندسی؟

۶۹. مقدار یک ماده رادیواکتیو پس از گذشت  $200$  سال نصف می‌شود. اگر مقدار اولیه آن  $10$  گرم باشد، آن‌گاه:

(آ) بعد از  $200$ ،  $400$  و  $600$  سال چه مقداری از آن باقی می‌ماند؟

(ب) بعد از گذشت  $200n$  سال، چه مقدار از این ماده رادیواکتیو باقی می‌ماند؟

## پاسخ‌های تشریحی

۴۰ آ) جمله عمومی یک دنباله حسابی است  $(a_n)$  یک عبارت درجه یک بر حسب  $n$  است):

$$a_n : a_1 = -\frac{1}{3} + 4 = \frac{11}{3}, \quad a_2 = -\frac{2}{3} + 4 = \frac{10}{3}$$

$$a_3 = -1 + 4 = 3, \quad \dots \Rightarrow d = \frac{10}{3} - \frac{11}{3} = -\frac{1}{3}$$

ب)  $b_n$  جمله عمومی هیچ‌یک از دنباله‌های حسابی  $(b_n)$  یک عبارت درجه دوم بر حسب  $n$  است) و هندسی (جمله عمومی دنباله هندسی به صورت  $t_n = t_1 r^{n-1}$  است) نمی‌باشد.

پ) جمله عمومی یک دنباله هندسی است:

$$c_n : -\frac{8}{3}, \frac{16}{9}, -\frac{32}{27}, \dots \Rightarrow c_1 = -\frac{8}{3}, r = -\frac{2}{3}$$

ت)  $d_n$  جمله عمومی هیچ‌یک از دنباله‌های حسابی و هندسی نمی‌باشد.

$$d_n : 1, \frac{6}{9}, \frac{7}{9}, \dots$$

۴۱ آ) نادرست است، دنباله  $1, 2, 3, 5, 8, \dots$  نه دنباله حسابی و نه

دنباله هندسی است.

ب) نادرست است، تمام دنباله‌ها به صورت  $a, a+d, a+d, \dots$  هم دنباله حسابی  $(d=0)$  و هم دنباله هندسی  $(r=1)$  می‌باشند.

پ) درست است، دنباله  $1, \frac{3}{5}, \frac{9}{25}, \dots$  یک دنباله حسابی با قدرنسبت  $\frac{3}{5}$  می‌باشد.

ت) درست است، هر عدد حقیقی را می‌توان به عنوان جمله اول در نظر گرفت و با قدرنسبت  $\frac{1}{3}$  دنباله هندسی ساخت. بنابراین بی‌شمار دنباله هندسی با قدرنسبت  $\frac{1}{3}$  وجود دارد.

ث) درست است، اگر قدرنسبت دنباله هندسی مثبت باشد، آن‌گاه تمام جملات مثبت (اگر جمله اول مثبت باشد) یا تمام جملات منفی (اگر جمله اول منفی باشد) می‌باشند.

$$r=2, t_1=-1 \Rightarrow -1, -2, -4, -8, \dots$$

$$r=3, t_1=\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 9\sqrt{2}, \dots$$

و اگر قدرنسبت منفی باشد، آن‌گاه جملات دنباله یک در میان مثبت و منفی خواهند شد.

$$r=-2, t_1=4 \Rightarrow 4, -8, 16, -32, \dots$$

$$r=-2, t_1=-2 \Rightarrow -2, 4, -8, 16, \dots$$

ج) نادرست است، در دنباله حسابی زیر، فقط چهار جمله اول، منفی است:  $-15, -11, -7, -3, 1, \dots$

۴۲ آ) قدرنسبت را ۴ در نظر می‌گیریم و دو جمله قبل از عدد ۲ را پیدا

$$\dots, 2, -6, \dots$$

می‌کنیم:

ب) قدرنسبت را  $-1$  و سه عدد قبل از  $-4$  را می‌نویسیم:

$$\dots, -4, -3, -2, -1, \dots$$

۳۹ آ) هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عدد  $0/4$  به جمله قبل از خودش به دست می‌آید. بنابراین دنباله، یک دنباله حسابی با جمله اول  $t_1=2$  و قدرنسبت  $d=0/4$  می‌باشد.

$$t_n = t_1 + (n-1)d = 2 + 0/4(n-1) = 0/4n + 1/6$$

ب) دنباله  $1/2, 3/4, 5/6, \dots$  نه دنباله حسابی و نه دنباله هندسی است.

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq \frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{1}{12} \Rightarrow \text{دنباله حسابی نمی‌باشد.}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{2} \neq \frac{5}{3} = \frac{10}{6} \Rightarrow \text{دنباله هندسی نمی‌باشد.}$$

پ) هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب عدد  $-\sqrt{3}$  در جمله قبل از خودش به دست می‌آید. بنابراین دنباله، یک دنباله هندسی با جمله اول  $t_1=-1$  و  $r=-\sqrt{3}$  می‌باشد.

$$t_n = t_1 r^{n-1} = -1(-\sqrt{3})^{n-1} = -(-\sqrt{3})^{n-1} = (-1)^n (\sqrt{3})^{n-1}$$

ت) این دنباله، یک دنباله هندسی است:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \frac{t_4}{t_3} = \dots = \frac{1}{2} = r$$

$$t_1 = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow t_n = t_1 r^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$$

ث) این دنباله، هم یک دنباله حسابی با قدرنسبت صفر و با جمله عمومی  $t_n=3$  و هم یک دنباله هندسی با قدرنسبت یک و جمله عمومی  $t_n=3$  می‌باشد.

ج) این دنباله، یک دنباله حسابی است:

$$0 - \sqrt{2} = -\sqrt{2} - 0 = -2\sqrt{2} + \sqrt{2} = \dots = -\sqrt{2} = d$$

$$t_1 = \sqrt{2}, d = -\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow t_n = t_1 + (n-1)d = \sqrt{2} - \sqrt{2}(n-1) = 2\sqrt{2} - \sqrt{2}n$$

ج) این دنباله، نه دنباله حسابی و نه دنباله هندسی می‌باشد، زیرا:

$$21 - 18 \neq 25 - 21 \Rightarrow \text{دنباله حسابی نمی‌باشد.}$$

$$\frac{15}{12} \neq \frac{18}{15} \Rightarrow \text{دنباله هندسی نمی‌باشد.}$$

توجه کنیم که فقط جمله پنجم از اضافه شدن چهار واحد به جمله چهارم به دست آمده است و بقیه جملات از اضافه شدن سه واحد به جملات قبل از خود به دست آمده‌اند.

ج) این دنباله، یک دنباله هندسی با قدرنسبت  $r=-1$  است، زیرا:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \dots = r = -1, t_1 = -1$$

$$\Rightarrow t_n = t_1 r^{n-1} = (-1)^1 (-1)^{n-1} = (-1)^{1+n-1} = (-1)^n$$

۴۸ جمله عمومی دنباله حسابی  $t_n = t_1 + (n-1)d$  است. طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} t_7 + t_5 = \frac{19}{2} \\ t_6 + t_{10} = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (t_1 + 6d) + (t_1 + 4d) = \frac{19}{2} \\ (t_1 + 5d) + (t_1 + 9d) = 20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2t_1 + 10d = \frac{19}{2} \\ 2t_1 + 14d = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2t_1 - 5d = -\frac{19}{2} \\ 2t_1 + 14d = 20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 7d = 20 - \frac{19}{2} = \frac{21}{2} \Rightarrow d = \frac{3}{2} \xrightarrow{2t_1 + 14d = 20} 2t_1 + 12 \times \frac{3}{2} = 20$$

$$\Rightarrow 2t_1 = 2 \Rightarrow t_1 = 1$$

۴۹ طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} t_1 + t_7 + t_9 + t_{11} = 18 \\ t_5 + t_6 + t_7 + t_8 + t_9 = 135 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 + (t_1 + 6d) + (t_1 + 8d) + (t_1 + 10d) = 18 \\ (t_1 + 4d) + (t_1 + 5d) + (t_1 + 6d) + (t_1 + 7d) + (t_1 + 8d) = 135 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4t_1 + 24d = 18 \\ 5t_1 + 30d = 135 \end{cases} \xrightarrow{(-5) \times} \begin{cases} -20t_1 - 120d = -90 \\ 5t_1 + 30d = 135 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -15t_1 = 45 \Rightarrow t_1 = -3$$

$$\xrightarrow{4t_1 + 24d = 18} 4(-3) + 24d = 18 \Rightarrow 6d = 30 \Rightarrow d = 5$$

$$\Rightarrow t_n = t_1 + (n-1)d = -3 + 5(n-1) = 5n - 8$$

۵۰ فرض کنیم  $a-d$ ،  $a$  و  $a+d$  به ترتیب سه جمله اول دنباله باشد، در این صورت:

$$(a-d) + a + (a+d) = 9$$

$$\Rightarrow 3a = 9 \Rightarrow a = 3$$

$$\text{جملات دنباله: } 3-d, 3, 3+d, \dots$$

$$-16 \quad \text{حاصل ضرب جملات} = -48 \Rightarrow (3-d) \times 3 \times (3+d) = -48$$

$$\Rightarrow 9 - d^2 = -16 \Rightarrow d^2 = 25 \xrightarrow{d>0} d = 5$$

بنابراین جملات دنباله به صورت زیر خواهد بود:

$$-2, 3, 8, \dots \Rightarrow t_n = t_1 + (n-1)d = -2 + 5(n-1) = 5n - 7$$

۵۱ جمله عمومی دنباله حسابی  $t_n = t_1 + (n-1)d$  است. طبق فرض داریم  $t_7 + t_{10} = 41$  می باشد، پس:

$$(t_1 + 6d) + (t_1 + 9d) = 41 \Rightarrow 2t_1 + 15d = 41 \quad (*)$$

$$t_{12} + t_{15} = (t_1 + 11d) + (t_1 + 14d) = 2t_1 + 25d \stackrel{(*)}{=} 41$$

پ) جمله پنجم دنباله را صفر و قدرنسبت را ۲ در نظر می گیریم:

$$-8, -6, -4, -2, 0, \dots$$

۴۳ اگر جمله عمومی دنباله  $t_n = t_1 + (n-1)d$  باشد، آن گاه:

$$\begin{cases} t_7 = 23 \\ t_{15} = 63 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 6d = 23 \\ t_1 + 14d = 63 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -t_1 - 6d = -23 \\ t_1 + 14d = 63 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 8d = 40 \Rightarrow d = 5 \Rightarrow t_1 = -7 \Rightarrow t_{40} = -7 + (40-1) \times 5 = 188$$

۴۴ اگر جمله عمومی دنباله حسابی باشد، آن گاه:

$$\begin{cases} t_{11} - t_7 = -20 \\ t_9 = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (t_1 + 10d) - (t_1 + 6d) = -20 \\ t_1 + 8d = 17 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4d = -20 \Rightarrow d = -\frac{5}{2} \\ t_1 + 8d = 17 \end{cases} \Rightarrow t_1 - 20 = 17 \Rightarrow t_1 = 37$$

$$\Rightarrow t_{10} = t_1 + 9d = 37 + 9 \times \left(-\frac{5}{2}\right) = 37 - \frac{45}{2} = \frac{74-45}{2} = \frac{29}{2}$$

۴۵ جمله اول دنباله  $-1$ ، قدرنسبت دنباله  $d = 5 - (-1) = 6$  و جمله عمومی دنباله  $t_n = t_1 + (n-1)d$  می باشند.  $n$  را باید طوری به دست آوریم که  $t_n = 221$  شود:

$$t_n = t_1 + (n-1)d = -1 + 6(n-1) = 6n - 7 = 221$$

$$\Rightarrow 6n = 228 \Rightarrow n = \frac{228}{6} = 38$$

بنابراین سی و هشتمین جمله دنباله برابر ۲۲۱ است.

۴۶ ابتدا جمله عمومی دنباله را به دست می آوریم:

$$t_1 = 157, \quad d = 151 - 157 = -6$$

$$\Rightarrow t_n = t_1 + (n-1)d = 157 - 6(n-1) = -6n + 163$$

باید حدود  $n$  را طوری پیدا کنیم که  $t_n > 0$  شود:

$$t_n > 0 \Rightarrow -6n + 163 > 0 \Rightarrow 6n < 163$$

$$\Rightarrow n < \frac{163}{6} \approx 27.16 \Rightarrow n \leq 27$$

بنابراین بیست و هفت جمله اول دنباله مثبت هستند.

۴۷ می دانیم اگر  $a$ ،  $b$  و  $c$  سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، آن گاه:

$$2b = a + c$$

اعداد  $8 - 3x$ ،  $4 - x$  و  $1 + 2x$  سه جمله متوالی یک دنباله حسابی اند، بنابراین:

$$2(-x + 4) = (3x - 8) + (2x + 1) \Rightarrow -2x + 8 = 5x - 7$$

$$\Rightarrow 8 + 7 = 5x + 2x \Rightarrow 7x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{7}$$

**۵۶** جمله عمومی دنباله حسابی با جمله اول  $t_1$  و قدرنسبت  $d$  به صورت  $t_n = t_1 + (n-1)d$  می باشد. پس داریم:

$$\frac{t_4 + 2t_1 - t_7}{t_8 + t_9} = \frac{(t_1 + 3d) + 2(t_1 + 9d) - (t_1 + 6d)}{(t_1 + 7d) + (t_1 + 8d)}$$

$$= \frac{2t_1 + 15d}{2t_1 + 15d} = 1$$

**۵۷** فرض کنیم  $d$  قدرنسبت دنباله زوایای این پنج ضلعی باشد، در این صورت:

$4d + 3d + 2d + d + 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$  : اندازه زوایای پنج ضلعی مجموع زوایای داخلی هر  $n$  ضلعی محدب برابر  $(n-2) \times 180^\circ$  است. بنابراین مجموع زوایای داخلی پنج ضلعی برابر  $(5-2) \times 180^\circ = 540^\circ$  می باشد. پس داریم:

$$60^\circ + (60^\circ + d) + (60^\circ + 2d) + (60^\circ + 3d) + (60^\circ + 4d) = 540^\circ$$

$$\Rightarrow 300^\circ + 10d = 540^\circ \Rightarrow 10d = 240^\circ \Rightarrow d = 24^\circ$$

$156^\circ, 132^\circ, 108^\circ, 84^\circ, 60^\circ$  : اندازه زوایای پنج ضلعی

**۵۸** جمله عمومی دنباله هندسی به صورت  $t_n = t_1 r^{n-1}$  می باشد. طبق فرض  $t_7 = \frac{3}{4}$  و  $t_8 = 48$  می باشند. بنابراین:

$$\begin{cases} t_7 = t_1 r^6 = 48 \\ t_8 = t_1 r^7 = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{t_7}{t_8} = \frac{t_1 r^6}{t_1 r^7} = \frac{48}{\frac{3}{4}} = 32 \Rightarrow r^5 = 32 \Rightarrow r = 2$$

$$\Rightarrow r = 2 \xrightarrow{t_7 = \frac{3}{4}} 2t_1 = \frac{3}{4} \Rightarrow t_1 = \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow t_n = \frac{3}{8} \times 2^{n-1}$$

**۵۹** جمله عمومی دنباله هندسی به صورت  $t_n = t_1 r^{n-1}$  می باشد. طبق فرض داریم:

$$t_7 = 24, t_8 = \frac{32}{3} \Rightarrow \begin{cases} t_1 r^6 = 24 \\ t_1 r^7 = \frac{32}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{t_1 r^6}{t_1 r^7} = \frac{24}{\frac{32}{3}} \Rightarrow r = \frac{9}{4}$$

$$\xrightarrow{t_1 r^6 = 24} t_1 \times \frac{9}{4} = 24 \Rightarrow t_1 = 10.66 \Rightarrow t_7 = t_1 r^6 = t_1 (r^2)^3$$

$$= 10.66 \times \left(\frac{9}{4}\right)^3 = 10.66 \times \frac{9}{4} \times \frac{9}{4} \times \frac{9}{4} = \frac{128}{27}$$

**۶۰** جمله عمومی دنباله هندسی به صورت  $t_n = t_1 r^{n-1}$  است. بنابراین:

$t_1 t_7 = t_1 \times (t_1 r^6) = 4 \Rightarrow t_1^2 r^6 = 4$  (۱)

$t_7 t_8 = (t_1 r^6)(t_1 r^7) = t_1^2 r^{13} = 16$  (۲)

**۵۲** اگر هفت واسطه حسابی بین دو عدد  $-1$  و  $47$  قرار دهیم، آن گاه ۹ جمله یک دنباله حسابی را خواهیم داشت که در آن:

$$t_1 = -1, t_9 = 47 \Rightarrow t_1 + 8d = 47$$

$$\Rightarrow -1 + 8d = 47 \Rightarrow 8d = 48 \Rightarrow d = 6$$

بنابراین جملات دنباله به صورت زیر می باشند:

$-1, 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47$

**۵۳** ابتدا جمله عمومی دنباله حسابی داده شده را به دست می آوریم و سپس با استفاده از آن جملات بیست و یکم و چهل و نهم دنباله را مشخص می کنیم:

$$t_1 = -4, d = -\frac{13}{4} - (-4) = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow t_n = t_1 + (n-1)d = -4 + \frac{3}{4}(n-1) = \frac{3}{4}n - \frac{19}{4}$$

$$\Rightarrow t_{21} = \frac{63}{4} - \frac{19}{4} = \frac{44}{4} = 11, t_{49} = \frac{147}{4} - \frac{19}{4} = \frac{128}{4} = 32$$

$$\Rightarrow b = \frac{t_{21} + t_{49}}{2} = \frac{11 + 32}{2} = 21.5$$

**۵۴** (آ) در هر مرحله یک مثلث به شکل اضافه می شود. بنابراین دو جمله بعدی الگو به صورت زیر می باشند:



(ب) دنباله حاصل از این الگو به صورت  $2, 5, 8, 11, \dots$  می باشد که یک دنباله حسابی با جمله اول  $t_1 = 2$  و قدرنسبت  $d = 3$  می باشد. بنابراین:

$$t_n = t_1 + (n-1)d = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$$

(پ) باید  $n$  را طوری به دست آوریم که  $t_n = 299$  شود:

$$t_n = 3n - 1 = 299 \Rightarrow 3n = 300 \Rightarrow n = 100$$

پس جمله صدم دنباله برابر ۲۹۹ است.

**۵۵** فرض کنیم کوچکترین عدد  $t_1$  و قدرنسبت دنباله حسابی  $d$  باشد، در این صورت پنج عدد به صورت زیر می باشند:

$$t_1, t_1 + d, t_1 + 2d, t_1 + 3d, t_1 + 4d$$

مجموع پنج عدد  $= 80$

$$\Rightarrow t_1 + (t_1 + d) + (t_1 + 2d) + (t_1 + 3d) + (t_1 + 4d) = 80$$

$$\Rightarrow 5t_1 + 10d = 80 \xrightarrow{\div 5} t_1 + 2d = 16 \quad (1)$$

از طرفی  $t_1 + 4d = 2(t_1 + (t_1 + d)) \Rightarrow t_1 + 4d = 4t_1 + 2d$

$$\Rightarrow 2d = 3t_1 \quad (2)$$

از طرفی  $t_1 + 4d = 2(t_1 + (t_1 + d)) \Rightarrow t_1 + 4d = 4t_1 + 2d$

$$\Rightarrow 2d = 3t_1 \quad (2)$$

(۱)، (۲)  $\Rightarrow \begin{cases} t_1 + 2d = 16 \\ 2d = 3t_1 \end{cases} \Rightarrow t_1 + 3t_1 = 16$

$$\Rightarrow t_1 = 4 \xrightarrow{(1)} 4 + 2d = 16 \Rightarrow 2d = 12 \Rightarrow d = 6$$

بنابراین پنج عدد به صورت روبه رو می باشند:

$4, 10, 16, 22, 28$

۶۶ جمله عمومی دنباله به صورت  $t_n = 2^{n-2}$  می‌باشد، داریم:

$$t_1 t_2 t_3 \dots t_n = 2^{-1} \times 2^0 \times 2^1 \times 2^2 \times \dots \times 2^{n-2}$$

$$= 2^{-1+0+1+2+\dots+(n-2)}$$

داریم  $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$  پس:

$$1+2+\dots+18 = \frac{18 \times 19}{2} = 171$$

$$\Rightarrow 2^{-1+0+1+\dots+18} = 2^{-1+171} = 2^{170}$$

۶۷ (آ) بعد از یک سال ۳ درصد از قیمت اولیه آن کم می‌شود، پس قیمت

خودرو بعد از یک سال  $97 - 3 = 97$  درصد قیمت اولیه است. اگر قیمت

خودرو بعد از  $n$  سال برابر  $t_n$  باشد، آن‌گاه:

$$t_1 = 0.97 \times 40000000$$

قیمت خودرو بعد از دو سال برابر  $0.97^2 t_1$  خواهد شد، بنابراین:

$$t_2 = 0.97^2 t_1 = 0.97^2 \times 0.97 \times 40000000 = (0.97)^3 \times 40000000 = 37636000$$

قیمت خودرو بعد از سه سال برابر  $0.97^3 t_1$  خواهد شد، بنابراین:

$$t_3 = 0.97^3 t_1 = 0.97^3 \times (0.97)^2 \times 40000000$$

$$= (0.97)^5 \times 40000000 = 36506920$$

(ب) طبق قسمت (آ) می‌توان گفت که قیمت خودرو بعد از  $n$  سال از

دستور  $t_n = (0.97)^n \times 40000000$  به دست می‌آید.

۶۸ (آ) بعد از هر سال به میزان ۲ درصد به جمعیت سال قبل اضافه

می‌شود، بنابراین اگر  $P_n$  جمعیت این کشور بعد از  $n$  سال باشد، آن‌گاه:

$$P_1 = 80000000 + 0.02 \times 80000000 = 1.02 \times 80000000 = 81600000$$

$$P_2 = P_1 + 0.02 P_1 = 1.02 P_1 = 1.02 \times 1.02 \times 80000000$$

$$= (1.02)^2 \times 80000000 = 83222000$$

$$P_3 = P_2 + 0.02 P_2 = 1.02 P_2 = 1.02 \times (1.02)^2 \times 80000000$$

$$= (1.02)^3 \times 80000000 = 84896640$$

(ب) جمعیت این کشور بعد از  $n$  سال برابر  $P_n = (1.02)^n \times 80000000$

است.

(پ) این دنباله یک دنباله هندسی با قدرنسبت  $r = 1.02$  می‌باشد.

۶۹ (آ) پس از گذشت هر ۲۰۰ سال، نصف ماده رادیواکتیو باقی می‌ماند.

بنابراین مقدار ماده رادیواکتیو باقی‌مانده به صورت زیر می‌باشد:

$$\text{سال } 200 = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$

$$\text{سال } 400 = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\text{سال } 600 = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\text{سال } 200 \cdot n = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (\text{ب})$$

با تقسیم رابطه (۲) بر رابطه (۱) داریم:

$$\frac{(2)}{(1)} = \frac{t_1^2 r^6}{t_1^2 r^2} = \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow r^4 = 4 \Rightarrow r^2 = 2 \Rightarrow r = \pm\sqrt{2}$$

با توجه به این‌که جملات دنباله همگی مثبت می‌باشند،  $r = \sqrt{2}$  قابل قبول

است. از رابطه (۱) برای به دست آوردن جمله اول دنباله استفاده می‌کنیم:

$$t_1^2 r^2 = 4 \Rightarrow t_1^2 \times (\sqrt{2})^2 = 4$$

$$\Rightarrow t_1^2 = 2 \Rightarrow t_1 = \pm\sqrt{2} \xrightarrow{t_1 > 0} t_1 = \sqrt{2}$$

جملات دنباله هندسی:  $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \dots$

۶۱ جمله عمومی دنباله هندسی  $t_n = t_1 r^{n-1}$  می‌باشد. طبق فرض:

$$t_1 + t_2 = 17 \Rightarrow t_1 + t_1 r = 17 \Rightarrow t_1(1+r) = 17 \quad (1)$$

$$t_2 + t_4 = 68 \Rightarrow t_1 r + t_1 r^3 = 68 \Rightarrow t_1 r(1+r^2) = 68 \quad (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} = \frac{t_1 r(1+r^2)}{t_1(1+r)} = \frac{68}{17} \Rightarrow r = 4 \xrightarrow{(1)} t_1(1+4) = 17$$

$$\Rightarrow t_1 = 1 \Rightarrow t_n = 1 \times 4^{n-1} = 4^{n-1}$$

۶۲ اگر پنج عدد بین ۱ و ۶۴ قرار دهیم، آن‌گاه جمله اول دنباله برابر ۱ و

جمله هفتم دنباله برابر ۶۴ خواهد شد:

$$t_1 = 1, \quad t_7 = t_1 r^6 = 64 \Rightarrow r^6 = 64 = (\pm 2)^6 \Rightarrow r = \pm 2$$

اگر  $r = 2$  باشد، جملات دنباله به صورت زیر درمی‌آیند:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$$

اگر  $r = -2$  باشد، جملات دنباله به صورت زیر درمی‌آیند:

$$1, -2, 4, -8, 16, -32, 64$$

۶۳ جمله عمومی دنباله هندسی  $t_n = t_1 r^{n-1}$  می‌باشد. اگر بخواهیم

هفت واسطه هندسی بین ۱ و ۸۱ قرار دهیم، آن‌گاه:

$$t_1 = 1, \quad t_8 = 81 \Rightarrow t_1 r^7 = r^7 = 81 = 3^4$$

$$\Rightarrow (r^2)^4 = 3^4 \Rightarrow r^2 = 3 \Rightarrow r = \pm\sqrt{3}$$

۶۴ می‌دانیم عدد  $b$  که در آن  $b^2 = ac$  باشد، واسطه هندسی دو عدد  $a$

و  $c$  می‌باشد. بنابراین:

$$b^2 = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1 \Rightarrow b = \pm 1 \xrightarrow{b > 0} b = 1$$

۶۵ می‌دانیم اگر  $a, b, c$  سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی

باشند، آن‌گاه  $b^2 = ac$  می‌باشد. بنابراین داریم:

$$(2x - 4)^2 = (x - 4)(4x + 4)$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 16x + 16 = 4x^2 + 4x - 16x - 16$$

$$\Rightarrow 4x = 32 \Rightarrow x = \frac{32}{4} = 8$$

دنباله هندسی:  $4, 12, 36, \dots \Rightarrow t_1 = 4, r = \frac{t_2}{t_1} = 3$