مقدمهٔ مؤلفان

به کتاب پاسخنامهٔ ریاضیات تجربی جامع خیلی‌سبز خوش آمدید.

ویژگی‌های این کتاب و شیوهٔ استفاده از آن:

۱ پاسخ سؤال‌ها در هر فصل با توجه به یک روند آموزشی نوشته شده است. معمولاً در سؤال‌های اول، راه‌حل‌ها تشریحی‌تر و با توضیح بیشتر است و هر چه که جلوتر می‌روید راه‌حل‌ها حرفه‌ای‌تر، سریع‌تر و با توضیح کم‌تر می‌شوند.

۲ در بعضی از سؤال‌ها راه | I، راه | II و ... آورده شده است. معمولاً راه | I سریع‌ترین یا متداول‌ترین راه‌حل است و راه‌حل‌های بعدی برای توضیح شیوه‌های دیگر و یا نوع نگاه دیگری به سؤال با توجه به مباحث دیگر یا با توجه به نکاتی که در درس‌نامه گفته شده آورده شده‌اند.

۳ در پاسخ‌ها هر جا که لازم بوده نکته یا اشاره یا خاطره داریم.

نکته به مفهوم مطلب، رابطه، فرمول یا ... است که باید بدانید تا بتوانید سؤال را سریع‌تر و بهتر حل کنید.

اشاره مثل یک تلنگر است که به شکل درست و مفهومی به سؤال نگاه کنید. گاهی وقت‌ها هم در اشاره سؤالی پرسیده‌ایم که باعث شود بیشتر با مفاهیم سؤال درگیر شوید.

خاطره همان‌طور که از اسمش پیداست یک یادآوری سریع در مورد مفهوم، فرمول، رابطه یا ... آن مبحث درسی است.

۴ توصیه می‌کنیم برای حل تست‌ها:

الف تعداد معینی سؤال (مثلاً ۳۰ تا ۴۰ تا) برای یک نشست انتخاب کنید.

ب با توجه به زمانی که برای این تست در نظر گرفته‌اید تست‌ها را حل کنید.

پ به پاسخنامهٔ کلیدی که در جلد درس‌نامه و سؤال آمده است مراجعه کنید و تست‌هایی را که نزده‌اید یا جواب نادرست داده‌اید مشخص کنید.

ت برگردید و سعی کنید اولاً تست‌هایی را که حل نکرده‌اید حل کنید و ثانیاً تست‌هایی را با پاسخ نادرست داده‌اید دوباره بررسی کنید و ببینید آیا می‌توانید به پاسخ درست برسید.

ث حالا بیایید سراغ پاسخنامه، پاسخ همه تست‌ها را حتی آن‌هایی را که درست پاسخ داده‌اید بررسی کنید. به نکته‌ها، اشاره‌ها، راه | I و راه | II توجه کنید تا هر چه را که لازم است درست یاد بگیرید.

۵ گاهی وقت‌ها ممکن است با دیدن راه‌حل یک تست که به نظر طولانی می‌رسد تعجب کنید یا ناامید شوید. حواستان باشد که در این کتاب بعضی از راه‌حل‌ها به علت این‌که لازم بوده همه چیز را خوب توضیح دهیم طولانی شده است و در عمل، هنگام حل سؤال لازم نیست این همه بنویسید.

۶ در بعضی از سؤال‌ها، از روش عددگذاری استفاده کرده‌ایم. سعی‌مان این بوده که در تست‌هایی از این روش استفاده کنیم که مناسب بوده و در عین حال تست و مفاهیمش این ویژگی را داشته باشند که در موارد مشابه از همین شیوه استفاده کنیم. به همین علت سعی کرده‌ایم در استفاده از عددگذاری زیاده‌روی و افراط نکنیم.

۷ امسال یک ID هم داریم که می‌توانید هر سؤال یا اشکالی که داشته باشید بروید سراغ این ID. نظرات، پیشنهادات و انتقادات خود را هم از همین طریق برایمان بفرستید.

@riazi_hamrah_konkoor

- کل پاسخ‌ها چند بار بررسی و ویرایش شده‌اند. سعی‌مان این بوده که کتاب بدون اشتباه باشد. اما حتماً طبق قوانین طبیعت ممکن است باز هم اشتباهاتی رخ داده باشد. اگر اشتباه، نقص یا نکته‌ای در کتاب دیدید لطفاً برایمان بنویسید و بفرستید. به ما در بهترشدن این کتاب بسیار کمک می‌کنید. در هر مورد دیگر هم هر پیشنهادی داشتید خوشحال می‌شویم که بشنویم.

- آقایان افشین ملاک‌پور و علی مقدم‌نیا که از اساتید برجسته و خوشنام‌اند با نظرات و پیشنهادات‌شان سهم مهمی در بهترشدن کتاب داشته‌اند. بر خود واجب می‌دانیم از ایشان نهایت سپاس و تشکر را داشته باشیم.
- هم‌چنین همکاران عزیز دیگری نیز با ارائهٔ نظرات و پیشنهادات خود در مورد چاپ قبلی کتاب به ما در بازنویسی کتاب کمک کرده‌اند، از این دوستان، آقایان معین کرمی، حسین نادری، مصطفی کرمی، حمید گلزاری، ایمان کاظمی، عباس موسوی و فرزاد فتاحی نیز کمال تشکر را داریم.

- از تمام معلمان گرامی که از این کتاب استفاده می‌کنند نیز درخواست می‌کنیم هر نظری در مورد کتاب دارند برایمان بفرستند. حتماً برایمان بسیار ارزشمند و مؤثر است.

خوب و شاد و پیروز باشید.

@soroushmueeni

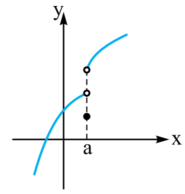
@mathmohsenimanesh

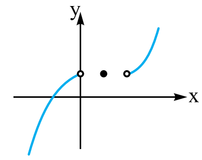
فهرست

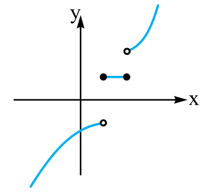
۴۳۳. گزینه ۴ تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) $f=\{(-۱,۰),(۱,۲),(۳,۳)\}$

با افزایش xها مقدار yها هم زیاد شده پس اکیداً صعودی است.







در (۲) تابع اکیداً صعودی است. در (۳) چون در $x=a$ مقدار تابع نسبت به نقاط همسایگی چپش کم‌تر شده (نقطهٔ توپر) تابع نه صعودی است و نه نزولی ولی (۴) صعودی است، اکیداً صعودی نیست چون تابع در بازهٔ $[a,b]$ ثابت است.

۴۳۴. گزینه ۲ می‌دانیم در یک تابع اکیداً صعودی اگر x زیاد شود، y زیاد می‌شود؛ یعنی $x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)<f(x_۲)$، پس بهتر است زوج مرتب‌های تابع f را به ترتیب صعودی برحسب x مرتب کنیم:

$$f=\{(۱,۱),(\sqrt{۲},m^۲-۲),(۳,۶),(۱۰,۲۰)\}$$

$x=\sqrt{۲}$ بین ۳ و ۱ است $۱<\sqrt{۲}<۳$. پس باید $f(۱)<f(\sqrt{۲})<f(۳)$ باشد:

$$۱<m^۲-۲<۶ \Rightarrow ۳<m^۲<۸ \Rightarrow \sqrt{۳}<|m|<۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{۳}<m<۲\sqrt{۲} \Rightarrow m\ \text{مقدار صحیح}=۲\\ -۲\sqrt{۲}<m<-\sqrt{۳} \Rightarrow m\ \text{مقدار صحیح}=-۲\end{cases}$$

پس حدود m شامل دو عدد صحیح است.

۴۳۵. گزینه ۴

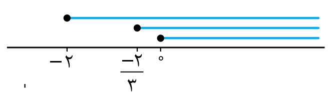
تابع $f=\{(۱,۳a+۱),(-۱,a+۱),(۲,۴a+۳)\}$ اگر بخواهد صعودی باشد باید با افزایش مقدار x، مقدار y زیاد شود (یا ثابت بماند)، پس:

$$-۱<۱ \Rightarrow a+۱\le ۳a+۱ \Rightarrow ۲a\ge ۰ \Rightarrow a\ge ۰$$

$$-۱<۲ \Rightarrow a+۱\le ۴a+۳ \Rightarrow ۳a\ge -۲ \Rightarrow a\ge -\frac{۲}{۳}$$

$$۱<۲ \Rightarrow ۳a+۱\le ۴a+۳ \Rightarrow a\ge -۲$$

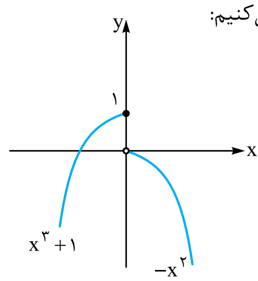
حالا با اشتراک این‌ها داریم:



پس جواب می‌شود $a\ge ۰$.

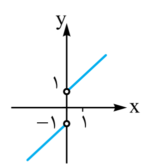
۴۳۶. گزینه ۳ اول نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

با توجه به نمودار، تابع ابتدا صعودی و سپس نزولی است.



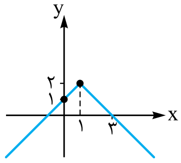
۴۳۷. گزینه ۲ نمودار هر یک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:

(۱) $f(x)=\frac{|x|}{x}+x=\begin{cases}۱+x & x>۰\\ -۱+x & x<۰\end{cases}$



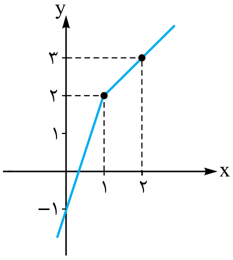
(۲) $f(x)=۲-|x-۱|$

$f(x)=\begin{cases}-x+۳ & x\ge ۱\\ x+۱ & x<۱\end{cases}$

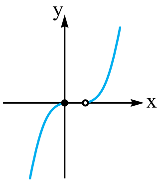


(۳) $f(x)=۲x-|x-۱|$

$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x+۱ & x\ge ۱\\ ۳x-۱ & x<۱\end{cases}$

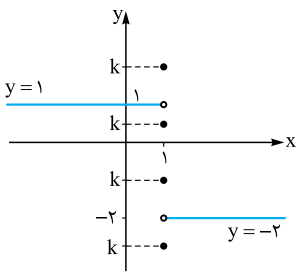


(۴) $f(x)=\begin{cases}-x^۲ & x\le ۰\\ x^۲-۱ & x>۱\end{cases}$



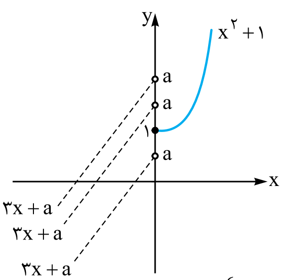
با توجه به نمودارها، تابع $f(x)=۲-|x-۱|$ غیریکنوا است و بقیهٔ تابع‌ها صعودی اکید هستند.

۴۳۸. گزینه ۳ اول نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



حالا با توجه به نمودار تابع برای این‌که تابع نزولی باشد باید $-۲\le f(۱)=k\le ۱$ باشد، پس $-۲\le k\le ۱$ و مقادیر صحیح k عبارت‌اند از ۲−، ۱−، ۰ و ۱ یعنی چهار مقدار صحیح.

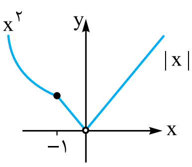
۴۳۹. گزینه ۲ اول نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



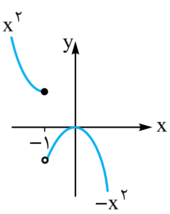
حالا با توجه به نمودار برای این‌که تابع در دامنه‌اش صعودی اکید باشد، حداکثر a می‌تواند برابر ۱ باشد.

۴۴۰. گزینه ۳ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\le -۱\\ g(x) & x>-۱\end{cases}$ را به ازای هر کدام از گزینه‌ها رسم می‌کنیم:

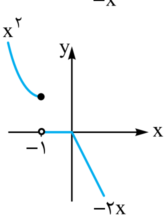
(۱) $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\le -۱\\ |x| & x>-۱\end{cases} \Rightarrow$



(۲) $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\le -۱\\ -x^۲ & x>-۱\end{cases} \Rightarrow$



(۳) $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\le -۱\\ -|x|-x & x>-۱\end{cases}$



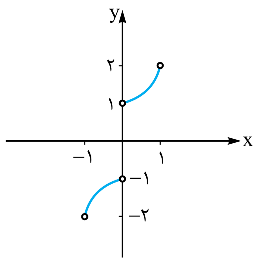
می‌بینیم که تابع f به ازای (۳) نزولی است پس جواب می‌شود (۳)، نمودار (۴) را هم خودتان رسم کنید!

۴۴۱. گزینه ۱ اول ضابطهٔ تابع $f(x)=x|x|+\frac{x}{|x|}$ را به ازای $x>0$ و $x<0$ ساده می‌کنیم: (حواسمان هست که $x=0$ در دامنه نیست)

$$x>0 \Rightarrow f(x)=x^2+1 \qquad x<0 \Rightarrow f(x)=-x^2-1$$

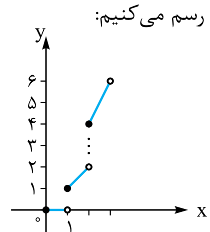
حالا نمودار تابع را در بازهٔ $(-1,1)$ رسم می‌کنیم.

همان‌طور که در شکل می‌بینیم تابع در بازهٔ $(-1,1)$ صعودی (اکید) است.

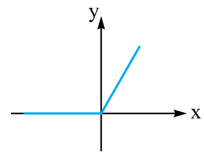


۴۴۲. گزینه ۴ نمودار هر دو تابع را در بازهٔ $[0,3)$ (بازه‌ای که شامل تمام گزینه‌ها باشد) رسم می‌کنیم:

$$y=x[x]=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ x & 1\le x<2\\ 2x & 2\le x<3\end{cases}$$



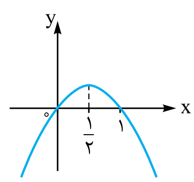
$$y=x+|x|=\begin{cases}0 & x<0\\ 2x & x\ge 0\end{cases}$$



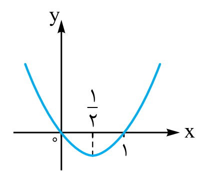
تابع $y=x+|x|$ به ازای $x\ge 0$ صعودی اکید است. پس فقط کافی است تابع $y=x[x]$ را بررسی کنیم. تابع $y=x[x]$ در بازهٔ $[0,1)$ ثابت است پس باید بازه‌ای را انتخاب کنیم که شامل قسمتی از بازهٔ $[0,1)$ نباشد. یعنی بازهٔ $[\frac{3}{2},\frac{7}{3}]$.

۴۴۳. گزینه ۲ نمودار تابع $y=|x|(x-1)$ را رسم می‌کنیم:

$$\begin{matrix}x<0 \Rightarrow y=-x^2+x\\ x\ge 0 \Rightarrow y=x^2-x\end{matrix} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}-x^2+x & x<0\\ x^2-x & x\ge 0\end{cases}$$



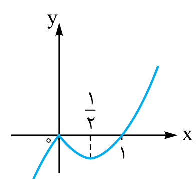
$y=-x^2+x$



$y=x^2-x$

با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $[0,\frac{1}{2}]$ نزولی اکید است پس بیشترین مقدار $b-a$ برابر $\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$ است.

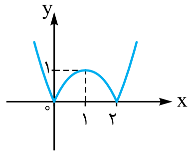
$\Rightarrow$

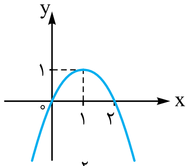


$y=|x|(x-1)$

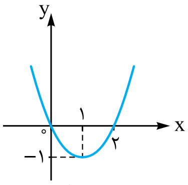
۴۴۴. گزینه ۳ نمودار تابع $f(x)=|x^2-2x|$ را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=|x^2-2x|=\begin{cases}x^2-2x & x\le 0\\ -x^2+2x & 0\le x\le 2\\ x^2-2x & x\ge 2\end{cases}$$





$y=-x^2+2x$



$y=x^2-2x$

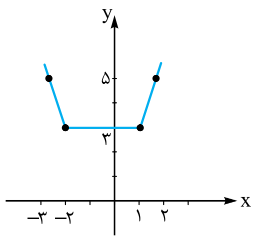
پس تابع در $(1,2)$ نزولی است و $b-a=2-1=1$.

۴۴۵. گزینه ۱ نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=|x+2|+|x-1|$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c}-3 & -2 & 1 & 2\\ 5 & 3 & 3 & 5\end{array}$$

حالا طبق نمودار تابع در بازهٔ $(-\infty,-2]$ اکیداً نزولی است.

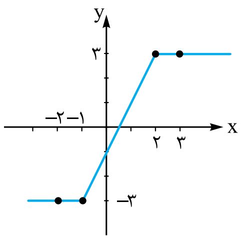


۴۴۶. گزینه ۳ نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

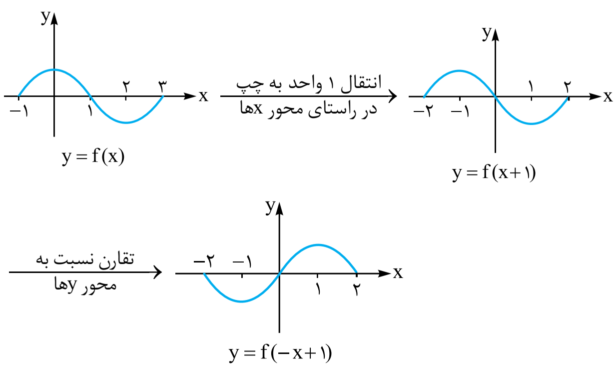
$$f(x)=|x+1|-|x-2|$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c}-2 & -1 & 2 & 3\\ -3 & -3 & 3 & 3\end{array}$$

حالا طبق نمودار تابع در بازهٔ $[-1,2]$ اکیداً صعودی است.



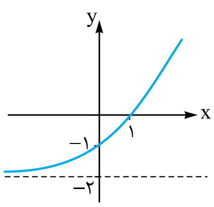
۴۴۷. گزینه ۴ اول نمودار تابع $y=f(1-x)$ را از روی نمودار تابع $y=f(x)$ رسم می‌کنیم:



حالا با توجه به نمودار، تابع در بازه‌های $[-2,-1]$ و $[1,2]$ نزولی اکید است پس با توجه به گزینه‌ها جواب می‌شود (۴).

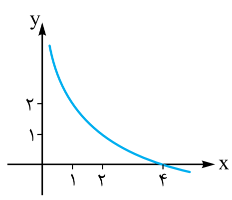
۴۴۸. گزینه ۴ نمودار هر کدام از تابع‌ها را رسم می‌کنیم:

(۱)



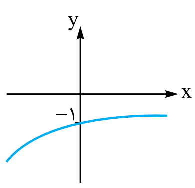
$y=2^x-2$

(۲)



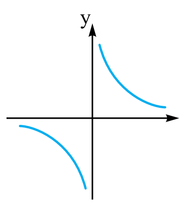
$y=-\log_2 x+2$

(۳)



$y=-2^{-x}$

(۴)



$y=\frac{1}{x}$

حالا با توجه به نمودارها، تابع $y=\frac{1}{x}$ غیریکنوا و یک‌به‌یک است. در درس‌نامه هم داشتیم که تابع هموگرافیک (و از جمله $\frac{1}{x}$ و $-\frac{1}{x}$) غیریکنوا هستند.

۴۴۹. گزینهٔ ۲ می‌دانیم تابع $f(x)=a^x$ به ازای $0<a<1$، نزولی اکید است و از طرفی تابع به ازای $f(x)=0$ و $f(x)=1$ هم نزولی (ثابت) است. پس در تابع $f(x)=(\frac{3m+1}{4})^x$ باید داشته باشیم:

$$0\le \frac{3m+1}{4}\le 1 \Rightarrow 0\le 3m+1\le 4$$

$$\Rightarrow -1\le 3m\le 3 \Rightarrow -\frac{1}{3}\le m\le 1$$

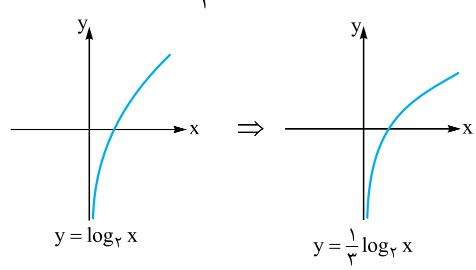
مقادیر صحیح بازهٔ $-\frac{1}{3}\le m\le 1$ عبارت‌اند از $m=0$ و $m=1$ یعنی دو مقدار صحیح.

۴۵۰. گزینهٔ ۳ تابع ثابت یعنی $f(x)=k$ و تابع $f(x)=(a^2-3)^x$ وقتی ثابت است که $a^2-3=1$ باشد پس $a^2=4$ و در نتیجه $a=2$ یا $a=-2$.
حالا برای تابع $g(x)=a^x$ مقدار $a=-2$ غیر قابل قبول است پس $g(x)=2^x$ و در نتیجه تابع g، صعودی اکید است.

۴۵۱. گزینهٔ ۱

راه I ضابطهٔ تابع را با استفاده از رابطهٔ $\log_b a^n = n\log_b a$ $(a>0)$ ساده و نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\log_2\sqrt[3]{x}=\frac{1}{3}\log_2 x$$



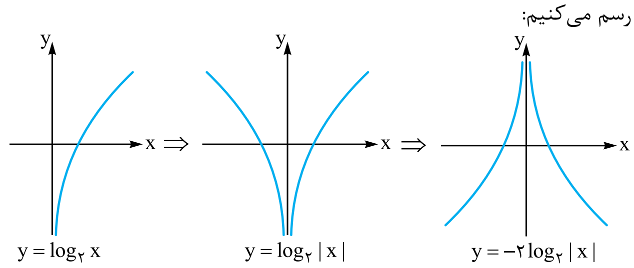
با توجه به شکل تابع اکیداً صعودی است.

راه II تابع $f(x)=\log_2\sqrt[3]{x}$ را می‌توانیم به شکل ترکیب دو تابع $h(x)=\sqrt[3]{x}$ و $g(x)=\log_2 x$ در نظر بگیریم یعنی $f(x)=(goh)(x)$.
حالا در goh، g و h هر دو صعودی اکیدند پس goh هم اکیداً صعودی است.

۴۵۲. گزینهٔ ۳ راه I اولاً با استفاده از رابطهٔ $\log_b a^n = n\log_b a$ (با شرط $a>0$) می‌توانیم بنویسیم:

$$f(x)=\log_{0/5} x^2=2\log_{0/5}|x|=2\log_{\frac{1}{2}}|x|=-2\log_2|x|$$

حالا نمودار تابع $y=-2\log_2|x|$ را با استفاده از نمودار تابع $y=\log_2 x$ رسم می‌کنیم:

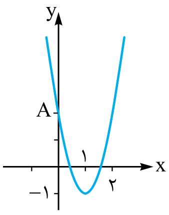


با توجه به نمودار، تابع نه صعودی است و نه نزولی.

راه II اگر دو تابع $h(x)=x^2$ و $g(x)=\log_{0/5} x$ را در نظر بگیریم $f(x)=(goh)(x)=\log_{0/5} x^2$ است.
تابع $g(x)=\log_{0/5} x$ نزولی است (چون $0<0/5<1$ است) و تابع درونی $h(x)=x^2$ نه صعودی است و نه نزولی، پس goh هم نه صعودی است و نه نزولی.

۴۵۳. گزینهٔ ۲ نمودار تابع $f(x)=3x^2-6x+2$ (که یک سهمی است) را رسم می‌کنیم: (یادمان هست که طول رأس سهمی از رابطهٔ $x=-\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید.)

$y=3x^2-6x+2$



$$x_S=-\frac{-6}{2\times 3}=\frac{6}{6} \Rightarrow x_S=1 \Rightarrow y_S=3-6+2=-1 \Rightarrow S(1,-1)$$

نقطهٔ برخورد با محور yها: $x=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow A(0,2)$

حالا با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $[-1,1]$ نزولی و در بازهٔ $[1,2]$ صعودی است؛ پس تابع روی بازهٔ $[-1,2]$ ابتدا نزولی و سپس صعودی است.

۴۵۴. گزینهٔ ۴ اول دامنهٔ $\{x:|x-1|<2\}$ را ساده می‌کنیم:

$$|x-1|<2 \Rightarrow -2<x-1<2 \Rightarrow -1<x<3$$

حالا نمودار تابع $f(x)=x^2-2x-3$ را رسم می‌کنیم:

$y=x^2-2x-3$

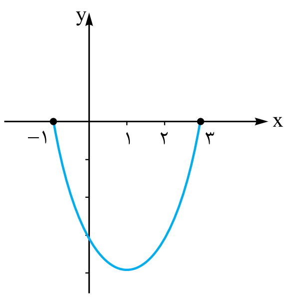
رأس سهمی $x=\frac{-(-2)}{2(1)}=1 \Rightarrow y=1-2-3=-4$

$\Rightarrow S(1,-4)$

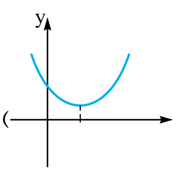
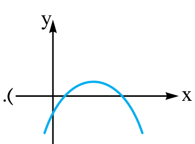
$x=0 \Rightarrow y=-3 \Rightarrow (0,-3)$

$x=-1 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (-1,0)$

$x=3 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (3,0)$



حالا با توجه به شکل، تابع در بازهٔ $[-1,3]$ همواره منفی است.

۴۵۵. گزینهٔ ۲ نمودار تابع $f(x)=(\frac{1}{m})x^2-x+3$ یک سهمی است که یا مینیمم دارد () یا ماکزیمم ().

پس در صورتی می‌تواند در بازهٔ $[1,+\infty)$ صعودی باشد که اولاً مینیمم داشته باشد و ثانیاً ($1 \ge$ طول رأس) باشد، برقراری این دو شرط را بررسی می‌کنیم:

مینیمم $a>0 \Rightarrow \frac{1}{m}>0 \Rightarrow m>0$

طول رأس $\le 1 \Rightarrow -\frac{-1}{2(\frac{1}{m})}\le 1 \Rightarrow \frac{m}{2}\le 1 \xrightarrow{m>0} m\le 2$

پس باید $0<m\le 2$ باشد.

۴۵۶. گزینهٔ ۴ نمودار تابع $f(x)=x^2-(2m+1)x+1$ یک سهمی است پس به شرطی در بازهٔ $[-1,2]$ غیریکنواست که طول رأس سهمی بین ۱- و ۲ باشد: (طول رأس سهمی برابر بود با $-\frac{b}{2a}$)

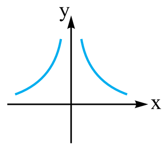
$$-1<-\frac{-(2m+1)}{2(1)}<2 \Rightarrow -1<\frac{2m+1}{2}<2$$

$$\Rightarrow -2<2m+1<4 \Rightarrow -3<2m<3 \Rightarrow \frac{-3}{2}<m<\frac{3}{2}$$

۴۵۷. گزینه ۴ تابع $f(x)=(a-۲)x^۲+۲ax+۳$ یک تابع درجه‌دوم است پس نمی‌تواند یکنوا باشد. پس برای یکنوابودن تابع باید جملهٔ $x^۲$ حذف شود یعنی $a-۲=۰$ پس $a=۲$ و در نتیجه:

$$f(x)=۴x+۳ \Rightarrow f(۲)=۴(۲)+۳=۱۱$$

۴۵۸. گزینه ۴ عبارت «برای هر $x_۱$ و $x_۲$ عضو این بازه رابطهٔ $x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)>f(x_۲)$ برقرار باشد»، یعنی می‌خواهیم بازه‌ای را پیدا کنیم که تابع در آن بازه نزولی اکید باشد. برای پیدا‌کردن این بازه، تابع را رسم می‌کنیم:

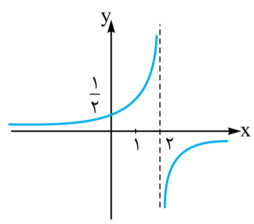


$f(x)=\frac{۱}{|x|}$

با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $(۰,+\infty)$ نزولی اکید است پس باید بازه‌ای را انتخاب کنیم که زیرمجموعهٔ این بازه باشد که می‌شود بازهٔ $(۰,۱)$.

۴۵۹. گزینه ۱ می‌دانیم تابع $f(x)=\frac{-۱}{x-۲}$ در همسایگی ریشهٔ مخرجش (مجانب قائمش) به سمت $\pm\infty$ میل می‌کند. پس برای این‌که تابع در بازهٔ $(-\infty,a]$ اکیداً صعودی باشد باید a را طوری انتخاب کنیم که بازهٔ $(-\infty,a]$ شامل عدد ۲ (یعنی ریشهٔ مخرج) نشود و چون قرار است a عدد صحیح باشد پس حداکثر a برابر است با ۱.

البته می‌توانستیم از نمودار تابع هم استفاده کنیم:



با توجه به نمودار، حداکثر مقدار صحیح a که تابع در بازهٔ $(-\infty,a]$ اکیداً صعودی باشد، می‌شود ۱.

۴۶۰. گزینه ۱ طبق آن‌چه در سؤال قبل دیدیم ریشهٔ مخرج تابع باید در بازهٔ $(-۲,+\infty)$ قرار نداشته باشد و با این حساب فقط ۱ یعنی $y=\frac{x-۱}{x+۳}$ قابل قبول است.

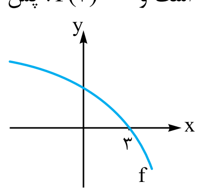
۴۶۱. گزینه ۴ گفتیم ریشهٔ مخرج دردسر درست می‌کند. پس الان $x=\frac{a}{۲}$ یعنی ریشهٔ مخرج نباید در فاصلهٔ $(۱,+\infty)$ باشد. پس داریم: $\frac{a}{۲}\le ۱$ و در نتیجه $a\le ۲$. اما دقت کنید که اگر $a=-۲$ باشد، اصلاً تابع هموگرافیک نداریم:

$$\xrightarrow{a=-۲} f(x)=\frac{x+۱}{۲x-(-۲)}$$

$$=\frac{x+۱}{۲x+۲}=\frac{x+۱}{۲(x+۱)}=\frac{۱}{۲},(x\ne -۱)$$

پس در این حالت، f به تابعی ثابت تبدیل می‌شود که اکیداً یکنوا نیست. پس جواب کامل‌تر $a\le ۲$ به‌جز $a=-۲$ است. یعنی $(-\infty,۲]-\{-۲\}$.

۴۶۲. گزینه ۱ راه I: f یک تابع نزولی اکید است و $f(۳)=۰$؛ پس اگر یک نمودار فرضی برای f رسم کنیم:



نتیجه می‌گیریم برای $x<۳$ مقدار f مثبت و برای $x>۳$ مقدار f منفی است. حالا برای پیدا‌کردن دامنهٔ تابع $\sqrt{xf(x)}$ عبارت $xf(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$		۰		۳		$+\infty$
f(x)		+		+		−	
x		−		+		+	
xf(x)		−		+		−	

$\Rightarrow ۰\le x\le ۳$

راه II: می‌توانیم برای f یک تابع مثال بزنیم. ساده‌ترین تابع، تابع خطی است پس $f(x)=-x+۳$ را در نظر می‌گیریم (۳+ را برای این نوشتیم که تابع محور xها را در نقطهٔ $x=۳$ قطع کند). حالا دامنهٔ تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ را پیدا می‌کنیم:

$y=\sqrt{x(-x+۳)}$ $\quad x(-x+۳)\ge ۰$

$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$

x	$-\infty$		۰		۳		$+\infty$
		−		+		−	

$\Rightarrow ۰\le x\le ۳$

۴۶۳. گزینه ۱ راه I: f تابعی صعودی است پس از $f(۲)=۰$ نتیجه می‌گیریم:

x	$-\infty$		۲		$+\infty$
f(x)		−		+	

حالا عبارت $(x^۲-x)f(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
f(x)		−		−		−		+	
$(x^۲-x)$		+		−		+		+	
$(x^۲-x)f(x)$		−		+		−		+	

دامنهٔ تابع $y=\sqrt{(x^۲-x)f(x)}$ برابر بازه‌ای است که $(x^۲-x)f(x)\ge ۰$ باشد، پس طبق جدول می‌شود $[۰,۱]\cup[۲,+\infty)$ که شامل تمام اعداد طبیعی هست.

راه II: می‌توانیم برای f یک تابع ساده (مثلاً خطی) مثال بزنیم که اکیداً صعودی باشد و محور طول‌ها را در نقطهٔ $x=۲$ قطع کند یعنی $f(x)=x-۲$، حالا دامنهٔ تابع $y=\sqrt{(x^۲-x)f(x)}$ را پیدا می‌کنیم:

$$y=\sqrt{(x^۲-x)(x-۲)}=\sqrt{x(x-۱)(x-۲)}$$

$$x(x-۱)(x-۲)\ge ۰$$

$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
		−		+		−		+	

پس دامنهٔ تابع برابر است با $[۰,۱]\cup[۲,+\infty)$ که شامل تمام اعداد طبیعی هست.

۴۶۴. گزینه ۲ می‌دانیم در یک تابع صعودی اگر $f(x_۱)>f(x_۲)$ باشد حتماً داریم $x_۱>x_۲$، پس: $f(۳-۲a)>f(۱+a) \Rightarrow ۳-۲a>۱+a$

$$\Rightarrow ۳a<۲ \Rightarrow a<\frac{۲}{۳}$$

و حالا که $a<\frac{۲}{۳}$ است، بزرگ‌ترین مقدار صحیح a برابر صفر است.

۴۶۵. گزینه ۳ راه I: *خب شرط دامنهٔ رادیکال چی بود؟* باید زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$f(۲x+۱)-f(x-۲)\ge ۰$$

$$\Rightarrow f(۲x+۱)\ge f(x-۲) \Rightarrow ۲x+۱\le x-۲$$

$$\Rightarrow x\le -۳ \Rightarrow D=(-\infty,-۳]$$

عددگذاری f نزولی است، پس $f(۱)-f(-۲)$ منفی است و $x=۰$ در $g(x)$ نمی‌خورد. یعنی گزینه‌های شامل صفر غلط هستند (۱ و ۲ نیست). به ازای $x=-۳$ زیر رادیکال صفر است که مشکلی ندارد؛ پس خود ۳− هست (۴ نیست).

۴۶۶. گزینه ۴ عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$f(\frac{۱}{x})-f(x)\ge ۰ \Rightarrow f(\frac{۱}{x})\ge f(x)$$

$f(x)=۲^x$ تابعی اکیداً صعودی است، پس با حذف fها، علامت برنمی‌گردد.

$\frac{۱}{x}\ge x$

نامعادلهٔ به دست آمده را حل می‌کنیم:

$$\frac{۱}{x}-x\ge ۰ \Rightarrow \frac{۱-x^۲}{x}\ge ۰ \Rightarrow \frac{(۱-x)(۱+x)}{x}\ge ۰$$

جدول تعیین علامت می‌کشیم:

		-۱		۰		۱	
کل	+		−	ت‌ن	+		−
	جواب				جواب		

$\Rightarrow (-\infty,-۱]\cup(۰,۱]$

۴۶۷. گزینهٔ ۱ تابع f در $(۰,+\infty)$ نزولی اکید است، پس:

$$f(۱+x^۴)>f(۳+x^۲) \Rightarrow ۱+x^۴<۳+x^۲ \Rightarrow x^۴-x^۲-۲<۰$$

$$\Rightarrow (x^۲+۱)(x^۲-۲)<۰ \Rightarrow -\sqrt{۲}<x<\sqrt{۲}$$

حالا چون نامعادله را در بازهٔ $(۰,+\infty)$ حل کردیم جواب می‌شود $۰<x<\sqrt{۲}$.

۴۶۸. گزینهٔ ۲ از بین گزاره‌ها، (ب) و (پ) همواره درست است؛ چون اگر f صعودی اکید و g صعودی باشد، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x_۱>x_۲ \Rightarrow f(x_۱)>f(x_۲)\\ x_۱>x_۲ \Rightarrow g(x_۱)\ge g(x_۲)\end{array}\right\} \Rightarrow x_۱>x_۲$$

$$\Rightarrow (f+g)(x_۱)>(f+g)(x_۲)$$

اشاره اگر g نزولی باشد، $-g$ صعودی است.

برای نشان‌دادن نادرستی گزاره‌های دیگر مثال نقض می‌آوریم:

الف) اگر f صعودی و g نزولی باشد، $f+g$ یک تابع ثابت است:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=۲x+۳ \text{ صعودی}\\ g(x)=-x \text{ نزولی}\end{array}\right\} \Rightarrow (f+g)(x)=x+۳ \text{ صعودی}$$

ت) اگر تابع f صعودی اکید و g تابعی ثابت باشد، $f\times g$ صعودی اکید است:

$$\begin{cases} f(x)=۲x+۳ \text{ صعودی اکید}\\ g(x)=-۳ \text{ ثابت}\end{cases} \Rightarrow (f\times g)(x)=-۶x-۹ \text{ نزولی اکید}$$

اگر توجه کنید، دو گزارهٔ (ب) و (پ) در حقیقت یکسان‌اند:

ب) اگر f صعودی اکید و g صعودی باشد، $f+g$ صعودی اکید است.

پ) اگر f صعودی اکید و g نزولی باشد، $f-g$ صعودی اکید است.

بگویید چرا این دو گزاره یکسان‌اند؟!

۴۶۹. گزینهٔ ۲ از نکات درس‌نامه استفاده می‌کنیم:

$$y=\underset{}{\overset{\text{اکیداً نزولی}}{f}}(\overbrace{-x^۳}^{\text{اکیداً نزولی}}) \Rightarrow \ominus\times\ominus \Rightarrow \text{اکیداً صعودی}$$

۴۷۰. گزینهٔ ۴ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $y=\overset{\text{اکیداً صعودی}}{f(x)}+\overset{\text{اکیداً صعودی}}{\sqrt{x}} \Rightarrow$ اکیداً صعودی

۲) $y=(gog)(x) \Rightarrow \overset{\text{اکیداً نزولی}}{\ominus}\times\overset{\text{اکیداً نزولی}}{\ominus} \Rightarrow$ صعودی

۳) $y=g(x^۲) \Rightarrow y=\overset{\text{نزولی}}{g}(\overset{\text{غیریکنوا}}{x^۲}) \Rightarrow$ نامشخص

۴) $y=(fog)(x)=\overset{\text{اکیداً صعودی}}{f}(\underset{\text{اکیداً نزولی}}{g}(\overset{\text{صعودی}}{x})) \Rightarrow \oplus\times\ominus\times\oplus \Rightarrow$ نزولی

برای تعیین صعودی و نزولی‌بودن در تابع‌های مرکب از روش گذاشتن $\oplus$ و $\ominus$ برای صعودی و نزولی که در درس‌نامه دیدیم، استفاده کردیم.

۴۷۱. گزینهٔ ۲ راه I با توجه به نمودار تابع f، f یک تابع نزولی است که مقدارش همیشه مثبت است. از نکاتی که در درس‌نامه داشتیم استفاده می‌کنیم:

$$g(x)=\overbrace{۲x}^{\text{صعودی}}\ \overbrace{-f(x)}^{\text{صعودی}} \Rightarrow \text{صعودی}+\text{صعودی} \Rightarrow \text{صعودی}$$

$$h(x)=\frac{۱}{\underset{\text{نزولی}}{f}\ \underbrace{(-x)}_{\text{نزولی}}}=\frac{۱}{\text{صعودی}} \Rightarrow \text{نزولی}$$

$(-)\times(-)$

راه II f یک تابع اکیداً نزولی است پس داریم:

$$x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)>f(x_۲)$$

حالا می‌رویم سراغ تابع‌های g و h:

$$g(x)=x-f(x)$$

$$x_۱<x_۲ \Rightarrow \begin{cases}\underbrace{۲x_۱<۲x_۲}_{(۱)}\\ \underbrace{-f(x_۱)<-f(x_۲)}_{(۲)}\end{cases} \Rightarrow f(x_۱)>f(x_۲)$$

$$\xrightarrow{\text{(۱) و (۲) را جمع می‌کنیم}} ۲x_۱-f(x_۱)<۲x_۲-f(x_۲)$$

$\Rightarrow g(x_۱)<g(x_۲)$ پس g یک تابع صعودی است.

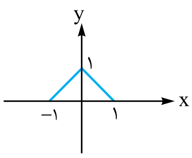
$$x_۱<x_۲ \Rightarrow -x_۱>-x_۲ \Rightarrow f(-x_۱)<f(-x_۲)$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس می‌کنیم}} \frac{۱}{f(-x_۱)}>\frac{۱}{f(-x_۲)} \Rightarrow h(x_۱)>h(x_۲)$$

پس h یک تابع اکیداً نزولی است.

با این حساب g صعودی و h نزولی است، یعنی ۲ درست است.

۴۷۲. گزینهٔ ۴



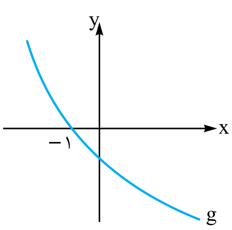
fof را در دو بازهٔ $-۱\le x\le ۰$ و $۰\le x\le ۱$ بررسی می‌کنیم:

$$-۱\le x\le ۰ \Rightarrow \underset{\text{نزولی}}{\overset{\ominus}{f}}(\underset{\text{صعودی}}{\overset{\oplus}{f(x)}}) \Rightarrow \ominus \text{ نزولی}$$

$$۰\le x\le ۱ \Rightarrow \underset{\text{نزولی}}{\overset{\ominus}{f}}\ (\underset{\text{نزولی}}{\overset{\ominus}{f}}(x)) \Rightarrow \oplus \text{ صعودی}$$

پس تابع در بازهٔ $[-۱,۱]$ ابتدا نزولی و سپس صعودی است.

۴۷۳. گزینهٔ ۲ صورت سؤال می‌گوید g چنین چیزی است:



پس علامت g مثل جدول زیر است:

x	$-\infty$		-۱		۰		۳		$+\infty$
$g(x)$		+	۰	−		−		−	
$x^۲-۳x$		+		+	۰	−	۰	+	
$\frac{x^۲-۳x}{g(x)}$		+	ت‌ن	−	۰	+	۰	−	

سؤال گفته کسر کم‌تر از صفر باشد؛ یعنی جاهایی که منفی است، قبول‌اند:

$(-۱,۰)\cup(۳,+\infty)$

پس در گزینه‌ها $(-۱,۰)$ مناسب است.

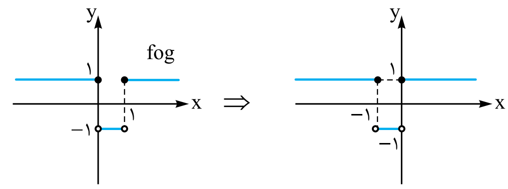
۴۷۴. گزینه ۲ اول ضابطهٔ تابع $(fog)(x)$ را پیدا می‌کنیم: (برای ساده‌کردن ضابطه باید علامت g را تعیین کنیم).

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=x^2-x$$

$$(fog)(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{|g(x)|} & g(x)\neq 0\\ 1 & g(x)=0\end{cases}$$

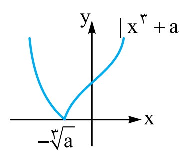
$$\Rightarrow (fog)(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ -1 & 0<x<1\\ 1 & x>1\\ 1 & x=0, x=1\end{cases}$$

حالا نمودار تابع $(fog)(x)$ و $(fog)(x+1)$ را رسم می‌کنیم:



حالا با توجه به شکل برای این‌که تابع $(fog)(x+1)$ در بازهٔ $(a,+\infty)$ صعودی باشد حداقل a برابر است با -1.

۴۷۵. گزینه ۲ نمودار f را رسم می‌کنیم باید بازهٔ $(-\infty, a-2)$ زیرمجموعه‌ای از بازهٔ $(-\infty,-\sqrt[3]{a})$ باشد، یعنی:



$$a-2\leq -\sqrt[3]{a} \Rightarrow a+\sqrt[3]{a}-2\leq 0$$

برای تجزیهٔ عبارت سمت چپ، دقت کنید که $a=1$ یکی از ریشه‌های نامعادله است و داریم:

$$(a-1)+(\sqrt[3]{a}-1)\leq 0 \Rightarrow (\sqrt[3]{a}-1)\underbrace{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+2)}_{\text{مثبت}}\leq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{a}-1\leq 0 \Rightarrow a\leq 1$$

پس تنها مقدار طبیعی a برابر ۱ است.

۴۷۶. گزینه ۲ $5-x$ نزولی است، پایهٔ ۲ صعودی است که ضریب منفی، آن را نزولی می‌کند. $\sqrt{\ }$ و توان ۵ صعودی‌اند و یک منفی در پشت رادیکال داریم که نزولی است. پس ۳تا عامل نزولی داریم که ضربشان $(-)$ می‌شود و تابع در کل نزولی است.

این‌طور هم می‌توانیم بنویسیم:

$$y=(-\sqrt{1-2^{5-x}})^5$$

$\ominus\oplus\ominus\oplus\ \ominus \Rightarrow \ominus$ نزولی