

فصل چهارم

توان و ریشه

توان

از سال هفتم با توان آشنایی دارید و می‌دانید که عددی مثل $۲^۳$ را به صورت ۲ به توان ۳ می‌خوانیم و معادل $۲ \times ۲ \times ۲$ یعنی ۸ است.

$$\left(\frac{۲}{۵}\right)^۳ = \frac{۲}{۵} \times \frac{۲}{۵} \times \frac{۲}{۵} = \frac{۸}{۱۲۵}$$

مثلاً

در ادامه مهم‌ترین نکات توان را با هم دوره می‌کنیم.

نکات

- هر عدد به توان یک برابر خود آن عدد است.
- حاصل هر عدد به جز صفر به توان صفر برابر با یک است.
- اعداد منفی اگر به توان عددی زوج برسند، حاصل مثبت و اگر به توان عددی فرد برسند، حاصل منفی است.
- اگر توان زوج باشد، آمدن یا نیامدن پرانتز مهم است.
- در محاسبه حاصل عبارت‌هایی که دارای عدد توان‌دار هستند با رعایت تقدم عملیات حاصل عبارت را به دست می‌آوریم.

$$۱۰۰^۱ = ۱۰۰, (-۱۰)^۱ = -۱۰$$

$$۵^۰ = ۱, (-۷)^۰ = ۱$$

اعداد منفی اگر به توان عددی زوج برسند، حاصل مثبت و اگر به توان عددی فرد برسند، حاصل منفی است.

$$(-۳)^۲ = (-۳) \times (-۳) = +۹ \quad (-۳)^۳ = (-۳) \times (-۳) \times (-۳) = -۲۷$$

اگر توان زوج باشد، آمدن یا نیامدن پرانتز مهم است.

$$\left. \begin{aligned} -۳^۲ &= -(۳ \times ۳) = -۹ \\ (-۳)^۲ &= (-۳) \times (-۳) = ۹ \end{aligned} \right\} \Rightarrow -۳^۲ \neq (-۳)^۲$$

مثلاً حاصل $-۳^۲$ و $(-۳)^۲$ با هم متفاوت است.

در محاسبه حاصل عبارت‌هایی که دارای عدد توان‌دار هستند با رعایت تقدم عملیات حاصل عبارت را به دست می‌آوریم.

تست

حاصل عبارت $(۱۰۰)^۰ \times \frac{[۲ \times (۲/۵ - ۰/۷۵)]^۳}{(۰/۷۵ + ۲/۴)^۲}$ برابر است با:

۱ (۴)

۱/۷۵ (۳)

۳/۵ (۲)

۷ (۱)

$$\frac{[۲ \times (2/5 - 0/75)]^3}{(0/75 + 2/4)^2} \times (100)^0 = \frac{(3/5)^3}{(3/5)^2} = 3/5$$

با رعایت تقدم عملیات ریاضی داریم:

پاسخ

نکته

در جدول زیر توان‌هایی از چند عدد که با آن‌ها زیاد سروکار داریم را آورده‌ایم. البته که توصیه به حفظ آن‌ها نمی‌کنیم ولی دیدن آن‌ها را از دست ندهید.

توان پایه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۲	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸	۲۵۶	۵۱۲	۱۰۲۴
۳	۳	۹	۲۷	۸۱	۲۴۳	۷۲۹	۲۱۸۷			
۵	۵	۲۵	۱۲۵	۶۲۵	۳۱۲۵					
۷	۷	۴۹	۳۴۳	۲۴۰۱						

توان منفی

به طور کلی اگر a یک عدد غیرصفر باشد و n یک عدد طبیعی باشد، آن گاه:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

در توان منفی عملاً با معکوس کردن پایه، توان مثبت



می‌شود. تمام فرم‌هایی با توان منفی که ممکن است با آن‌ها مواجه شوید، در جدول مقابل آمده است.

فُرم کلی	معادل	مثال
a^{-n}	$\frac{1}{a^n}$	$7^{-3} = \frac{1}{7^3}$
$\frac{1}{a^{-n}}$	a^n	$\frac{1}{(\frac{4}{5})^{-7}} = (\frac{4}{5})^7$
$(\frac{a}{b})^{-n}$	$(\frac{b}{a})^n$	$(\frac{3}{4})^{-2} = (\frac{4}{3})^2$
$\frac{a^{-m}}{b^{-n}}$	$\frac{b^n}{a^m}$	$\frac{5^{-4}}{3^{-7}} = \frac{3^7}{5^4}$



حاصل $[(5^{-1} + 3^{-1})^{-1} \div (3^{-2} - 4^{-1})^{-1}]^{-1}$ برابر است با:

$$\frac{2}{27} \quad (4) \qquad \frac{-2}{27} \quad (3) \qquad \frac{27}{2} \quad (2) \qquad \frac{-27}{2} \quad (1)$$

با شروع از داخلی‌ترین پرانتزها، توان‌های منفی را به توان مثبت تبدیل می‌کنیم:



$$[(\frac{1}{5} + \frac{1}{3})^{-1} \div (\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4})^{-1}]^{-1} = [(\frac{3+5}{15})^{-1} \div (\frac{4-9}{36})^{-1}]^{-1} = [\frac{3}{15} \times \frac{36}{-5}]^{-1} = [\frac{-27}{5}]^{-1} = \frac{-2}{27}$$

توان و اعداد توان‌دار

اعداد توان‌دار به دو صورت می‌توانند توان داشته باشند.

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

توان در توان: در صورتی که عدد توان‌دار a^m به توان n برسد، حاصل برابر است با:

$$(5^2)^3 = 5^6, (a^3)^{-2} = a^{-6}$$



$$5^{2^3} = 5^8, a^{2^{-2}} = a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{2^2}}$$

توان توان: در صورتی که عدد a به توان عدد توان‌دار m^n برسد، ابتدا باید حاصل m^n را حساب کنیم.



مثال حاصل عبارت‌های زیر را به صورت عدد توان‌دار بنویسید.

$$2^{2^2} \quad (ت) \qquad (2^2)^{2^3} \quad (پ) \qquad (2^2)^3 \quad (ب) \qquad 2^{2^3} \quad (الف)$$

پاسخ با توجه به قوانین توان اعداد توان‌دار داریم:

$$(2^2)^3 = 2^{2 \times 3} = 2^6 \quad (ب) \qquad 2^{2^3} = 2^8 \quad (الف)$$

$$2^{2^2} = 2^{2^2} = 2^{2^4} = 2^{16} \quad (ت) \qquad (2^2)^{2^3} = (2^2)^8 = 2^{2 \times 8} = 2^{16} \quad (پ)$$

تجزیه پایه در اعداد توان‌دار

در بعضی از اعداد توان‌دار با تجزیه پایه می‌توانیم شکل ظاهری عدد را عوض کنیم **مثلاً** در عدد توان‌دار 4^3 با توجه به این که 4 را می‌توان به

$$4^3 = (2^2)^3 = 2^6$$

صورت 2^6 نوشت، داریم:



$$(a \times b)^m = a^m \times b^m$$

برای مقادیر دلخواه a ، b و m داریم:

$$15^7 = (3 \times 5)^7 = 3^7 \times 5^7$$

$$12^3 = (4 \times 3)^3 = (2^2 \times 3)^3 = 2^6 \times 3^3$$



ضرب و تقسیم اعداد توان‌دار

کلاً دو حالت داریم که با آن‌ها به خوبی آشنا هستید. برای یادآوری نگاهی به آن‌ها می‌اندازیم.

تقسیم	ضرب	حالت
$a^m \div a^n = a^{m-n}$	$a^m \times a^n = a^{m+n}$	پایه‌ها برابر باشند.
$a^m \div b^m = (\frac{a}{b})^m$	$a^m \times b^m = (ab)^m$	توان‌ها برابر باشند.



حالا که مقدمات و قوانین ضرب و تقسیم را دوره کردیم، برویم سراغ حل چند تست کار درست!

تست

عبارت $۶۴^۳ \times (\frac{1}{۸})^{-۲} \times (-۴)^۲ \times ۳۲^{-۱}$ کدام است؟

۴^{۲۳} (۴)

۴^{۲۲} (۳)

۲^{۲۳} (۲)

۲^{۲۳} (۱)

توان‌های منفی را به مثبت تبدیل کرده و پایه‌ها را تبدیل به ۲ می‌کنیم!

پاسخ

$$۶۴^۳ \times (\frac{1}{۸})^{-۲} \times (-۴)^۲ \times ۳۲^{-۱} = (۲^۶)^۳ \times ۸^۲ \times ۴^۲ \times \frac{1}{۳۲} = ۲^{۱۸} \times (۲^۳)^۲ \times (۲^۲)^۲ \times \frac{1}{۲^۵} = \frac{۲^{۱۸} \times ۲^۶ \times ۲^۴}{۲^۵} = \frac{۲^{۲۸}}{۲^۵} = ۲^{۲۳}$$

تست

نسبت $\frac{1}{۱۶}$ عدد ۳۲^{n-1} به نصف عدد ۴^{1-n} چیست؟

۲^{۷n-۹} (۴)

۲^{۱۲n-۱} (۳)

۲^{۷n-۸} (۲)

۲^{۷n-۱۰} (۱)

$\frac{۳۲^{n-1}}{۱۶} = \frac{(۲^۵)^{n-1}}{۲^۴} = \frac{۲^{۵n-۵}}{۲^۴} = \frac{۲^{۵n-۹}}{۲}$ و $\frac{۳۲^{n-1}}{۱۶}$ عدد ۳۲^{n-1} برابر $\frac{۲^{۵n-۹}}{۲}$ است و نسبت آن‌ها برابر است با:

پاسخ

$$\frac{\frac{۲^{۵n-۹}}{۲}}{\frac{۲^{۱-n}}{۲}} = \frac{(۲^۵)^{n-1}}{(۲^۲)^{۱-n}} = \frac{۲^{۵n-۹}}{۲^{۲-۲n}} = \frac{۲^{۵n-۹-(۱-۲n)}}{۲} = ۲^{۷n-۱۰}$$

جمع و تفریق اعداد توان‌دار

جمع و تفریق را با فکتورگیری از عددهای توان‌دار یکسان، به ضرب تبدیل می‌کنیم؛ به همین راحتی!

$$۷ \times ۲^۵ - ۴ \times ۲^۵ + ۶ \times ۲^۵ = ۲^۵ \times (۷ - ۴ + ۶) = ۲^۵ \times ۹$$

مثلاً

تست

ثالث عدد $۵ \times ۳^{۱۶} - ۳ \times ۳^{۱۴} + ۷ \times ۳^{۱۵} - ۴ \times ۳^{۱۶}$ کدام است؟

۳^{۱۸} (۴)

۳^{۱۷} (۳)

۳^{۱۶} (۲)

۳^{۱۵} (۱)

۳×۳^{۱۴} را به صورت $۳^{۱۵}$ نوشته و سپس از $۳^{۱۵}$ فکتور می‌گیریم.

پاسخ

$$۵ \times ۳^{۱۶} - ۳ \times ۳^{۱۴} + ۷ \times ۳^{۱۵} - ۴ \times ۳^{۱۶} = ۵ \times ۳^{۱۶} - ۳^{۱۵} + ۷ \times ۳^{۱۵} - ۴ \times ۳^{۱۶} = ۳^{۱۵} (۵ \times ۳ - ۱ + ۷ - ۴ \times ۳) = ۳^{۱۵} \times ۹ = ۳^{۱۵} \times ۳^۲ = ۳^{۱۷}$$

$$\frac{۳^{۱۷}}{۳} = ۳^{۱۶}$$

ثالث عبارت برابر است با:

تست

حاصل کسر توانی $A = \frac{۲^x + ۲^{x+1} + ۲^{x+2}}{۲^{x+3} - ۲^x}$ کدام است؟

۱ (۴)

۲^{x-۹} (۳)

۲^{x-۲} (۲)

۲ (۱)

از صورت و مخرج ۲^x را فکتور می‌گیریم.

پاسخ

$$A = \frac{۲^x + ۲^{x+1} + ۲^{x+2}}{۲^{x+3} - ۲^x} = \frac{۲^x (1 + 2 + 2^2)}{۲^x (2^3 - 1)} = \frac{۷}{۷} = 1$$

نکته

اگر توان‌های طبیعی و متوالی a با هم جمع شوند، حاصل برابر است با: $a^n + a^{n+1} + a^{n+2} + \dots + a^m = \frac{a^{m+1} - a^n}{a - 1}$

$$۷^۲ + ۷^۳ + ۷^۴ + ۷^۵ + \dots + ۷^{۲۰} = \frac{۷^{۲۱} - ۷^۲}{۷ - 1} = \frac{۷^{۲۱} - ۷^۲}{۶}$$

مثلاً

حاصل عبارت بالا را با روش‌های دیگری نیز می‌توان حل کرد ولی روش خودمان سرعت بیشتری دارد.

توجه

تست

اگر به 5 برابر حاصل عبارت $6^0 + 6^1 + 6^2 + 6^3 + 6^4 + \dots + 6^{50}$ یک واحد اضافه کنیم. حاصل برابر می شود با:

6^{51} (۱) $5 \times 6^{51} + 1$ (۲) 6^{100} (۳) $5 \times 6^{100} + 1$ (۴)

یک را به صورت 6^0 در نظر می گیریم و داریم:

$$6^0 + 6^1 + 6^2 + 6^3 + 6^4 + \dots + 6^{50} = \frac{6^{51} - 6^0}{6 - 1} = \frac{6^{51} - 1}{5}$$

5 برابر حاصل به علاوه یک برابر است با:

روش دوم: عبارت داده شده را برابر A فرض می کنیم و با تشکیل $6A$ به سراغ حاصل $6A - A$ می رویم:

$$A = 1 + 6 + 6^2 + 6^3 + 6^4 + \dots + 6^{50} \Rightarrow 6A = 6 + 6^2 + 6^3 + 6^4 + 6^5 + \dots + 6^{51} \Rightarrow 6A - A = 6^{51} - 1$$

$$\Rightarrow 5A = 6^{51} - 1 \Rightarrow A = \frac{6^{51} - 1}{5}$$

بنابراین 5 برابر حاصل به علاوه یک برابر است با:

$$5 \times \left(\frac{6^{51} - 1}{5}\right) + 1 = 6^{51} - 1 + 1 = 6^{51}$$

تست

حاصل $1 + (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{1380} + 2^{1379} + \dots + 2^{1380})$ برابر با کدام گزینه است؟

2^{1381} (۱) 2^{1389} (۲) 2^{1380} (۳) 2^{1381} (۴)

این تست را به سه روش حل می کنیم.

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{1379} + 2^{1380} = \frac{2^{1381} - 2^0}{2 - 1} = 2^{1381} - 1$$

پس حاصل عبارت برابر است با:

$$\Rightarrow 2^{1381} - 1 + 1 = 2^{1381}$$

روش دوم: عبارت داده شده را برابر A در نظر می گیریم و چون $2A - A$ برابر است. پس:

$$A = (2^{1380} + 2^{1379} + \dots + 2^2 + 2 + 1) + 1 \Rightarrow 2A - A = 2^{1381} \Rightarrow A = 2^{1381}$$

$$2A = (2^{1381} + 2^{1380} + \dots + 2^3 + 2^2 + 2) + 2$$

$$1 + 1 = 2$$

$$1 + 1 + 2 = 2 + 2 = 2^2$$

$$1 + 1 + 2 + 2^2 = 2^2 + 2^2 = 2 \times 2^2 = 2^3$$

⋮

$$1 + 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{1379} = 2^{1380}$$

$$1 + 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{1379} + 2^{1380} = 2^{1380} + 2^{1380} = 2 \times 2^{1380} = 2^{1381}$$

نماد علمی

از آن جا که نمایش اعداد خیلی بزرگ یا خیلی کوچک و مقایسه آنها کار سختی است از نماد علمی استفاده می کنیم. به طور کلی نماد علمی هر عدد اعشاری مثبت به صورت $a \times 10^n$ است که در آن $1 \leq a < 10$ و n عددی صحیح است.

$357 / 82 = 3 / 5782 \times 10^2$ $0.000791 = 7 / 91 \times 10^{-4}$ $215 = 2 / 15 \times 10^2$

مثلاً

نکته

برای نوشتن یک عدد به صورت نماد علمی اگر اعشار به سمت چپ برود به تعداد رقم های جابه جاشده به توان 10 اضافه و اگر اعشار به سمت راست حرکت کند به تعداد رقم های جابه جاشده از توان 10 کم می کنیم.

تست

چندتا از اعداد مقابل به صورت نماد علمی نوشته شده است؟

$0 / 1399 \times 10^{-2}$, 90×10^{-1399} , 3×10^0 , $1 / 456 \times 2^{100}$

4 (۴)

3 (۳)

2 (۲)

1 (۱)

هر کدام از اعداد را بررسی می کنیم.

$0 / 1399 \times 10^{-2}$ نماد علمی نیست زیرا $1399 / 1$ بین 1 تا 10 قرار ندارد. 90×10^{-1399} نماد علمی نیست زیرا 90 بین 1 تا 10 قرار ندارد.

3×10^0 نماد علمی است. $1 / 456 \times 2^{100}$ نماد علمی نیست زیرا توانی از 10 نداریم.

تست

نمایش علمی عدد $10^{(n-2)} \times 1395$ برابر است با: $(n \in \mathbb{N}, n > 3)$

$n-2$ رقم صفر

$1/395 \times 10^{-1}$ (۴) $1/395 \times 10^3$ (۳) $1/395 \times 10^{-2n}$ (۲) $1/395 \times 10^{5-2n}$ (۱)

پاسخ: برای این که عدد داده شده به صورت نماد علمی شود باید ممیز به اندازه $n-2+1$ رقم به سمت راست حرکت کند پس از توان 10 مقدار $n-1$ را کم می کنیم.

$1/395 \times 10^{n-2-(n-1)} = 1/395 \times 10^{-1}$

نکته

در جمع و تفریق چند عدد که به صورت نماد علمی نوشته شده اند بهتر است ابتدا توان 10 در اعداد را یکسان کرده و سپس فاکتورگیری کنیم.

تست

حاصل عبارت $0/2 \times 10^{-4} + 0/2 \times 10^{-3} + 0/2 \times 10^{-2}$ به صورت نماد علمی کدام است؟

$2/22 \times 10^{-5}$ (۴) $22/2 \times 10^{-3}$ (۳) $2/22 \times 10^{-3}$ (۲) $0/2 \times 10^{-9}$ (۱)

پاسخ: توان های 10 را در هر سه عدد یکسان کرده و سپس فاکتور می گیریم.

$0/2 \times 10^{-4} + 0/2 \times 10^{-3} + 0/2 \times 10^{-2} = 0/2 \times 10^{-4} + 2 \times 10^{-4} + 20 \times 10^{-4} = (0/2 + 2 + 20) \times 10^{-4}$
 $= 22/2 \times 10^{-4} = 2/22 \times 10^{-3}$

اعداد مربع کامل

اعدادی مربع کامل یا مجذور کامل هستند که پس از تجزیه، توان های عامل های اول آن همگی زوج باشند. **مثلاً** اعداد مربع کامل 144 و 625 را در نظر بگیرید.

$144 = 2^4 \times 3^2$, $625 = 5^4$

تست

اگر عدد $2^3 \times a \times 9^3 \times 7^4$ مجذور کامل باشد، آن گاه a برابر کدام است؟

14 (۱) 9 (۲) 2 (۳) 6 (۴)

پاسخ: برای این که عدد داده شده مجذور (مربع) کامل باشد باید توان عامل های اول آن زوج باشد؛ پس ابتدا با تجزیه پایه ها داریم:

$2^3 \times a \times 9^3 \times 7^4 = 2^3 \times a \times (3^2)^3 \times 7^4 = 2^3 \times a \times 3^6 \times 7^4$

در عبارت به دست آمده فقط توان 2 زوج نیست پس با توجه به گزینه ها باید $a = 2$ باشد تا توان 2 نیز زوج شود.

توجه a می تواند سایر توان های فرد 2 نیز باشد ولی در بین گزینه ها انتخاب دیگری نداریم.

اعداد مکعب کامل

اعدادی مکعب کامل هستند که پس از تجزیه، توان های عامل های اول آن همگی مضرب 3 باشند. **مثلاً** اعداد مکعب کامل 125 و 216 را در نظر بگیرید.

$125 = 5^3$, $216 = 2^3 \times 3^3$

تست

بین اعداد 1001 و $1 - 2^{15}$ چند عدد مکعب کامل وجود دارد؟

23 (۱) 22 (۲) 21 (۳) 20 (۴)

پاسخ: کوچک ترین عددی که مکعب آن بزرگ تر از 1001 باشد، عدد 11 است.

از طرفی چون 2^{15} را می توان به صورت $(2^5)^3$ یعنی 32^3 نوشت، پس بزرگ ترین عددی که کوچک تر از $1 - 2^{15}$ باشد 31^3 است.

می توان نتیجه گرفت که بین اعداد 1001 و $1 - 2^{15}$ مکعب کامل های $11^3, 12^3, \dots$ و 31^3 قرار دارند که تعداد آن ها برابر است با:

$31 - 11 + 1 = 21$



نکات

دربارهٔ اعداد مربع کامل و مکعب کامل نکات تکمیلی زیر به کارتان می‌آید.
 ۱ اگر پس از تجزیهٔ یک عدد به عامل‌های اول، همهٔ توان‌ها مضرب ۶ باشند، آن عدد هم مربع کامل و هم مکعب کامل است.

مثال	دهگان	یکان
۶۲۵	حتماً ۲ است.	۵
۱۰۰	حتماً صفر است.	۰

۲ یکان هیچ عدد مربع کاملی ارقام ۲، ۳، ۷ یا ۸ نیست.

۳ بین یکان و دهگان اعداد مربع کامل رابطه‌های مقابل برقرار است.

۴ حاصل ضرب هیچ دو عدد طبیعی متوالی هرگز مربع کامل نمی‌شود.

۵ اگر n عددی زوج باشد، عدد n^n مربع کامل است ولی اگر n عددی فرد باشد، فقط در صورتی که n مربع کامل باشد n^n مربع کامل می‌شود.

مثلاً مربع کامل است: $3^{18} = (3^2)^9 = 9^9$ ، مربع کامل است: 6^6

۶ اگر عدد a مربع کامل باشد، k امین عدد مربع کامل بعد از a برابر است با:

$$(\sqrt{a} + k)^2 = a + 2k\sqrt{a} + k^2$$

$$(\sqrt{4} + 3)^2 = 4 + 2 \times 3 \times 2 + 9 = 25$$

$$4, 9, 16, 25, 36, \dots$$

مثلاً سومین عدد مربع کامل بعد از ۴ برابر است با:

واقعاً هم همین‌طور است اعداد مربع کامل بعد از ۴ را ببینید:

مقایسهٔ اعداد توان‌دار

روش اصلی در مقایسهٔ اعداد توان‌دار این است که با تغییر در اعداد توان‌دار پایه‌ها یا توان‌ها را یکسان کرده و سپس اعداد را مقایسه کنیم. البته راه‌های دیگری نیز وجود دارد که در ادامه بررسی می‌کنیم.

تست

کدام رابطه درست است؟

$$(۲) \quad 3^{30} > 7^{15} > 8^5 \times 243^3 > 2^{45}$$

$$(۱) \quad 3^{30} > 2^{45} > 7^{15} > 8^5 \times 243^3$$

$$(۴) \quad 7^{15} > 8^5 \times 243^3 > 2^{45} > 3^{30}$$

$$(۳) \quad 8^5 \times 243^3 > 7^{15} > 3^{30} > 2^{45}$$

$$8^5 \times 243^3 = (2^3)^5 \times (3^5)^3 = 2^{15} \times 3^{15} = 6^{15}$$

ابتدا $8^5 \times 243^3$ را به صورت یک عدد توان‌دار می‌نویسیم.

$$8^5 \times 243^3 = 6^{15}$$

$$3^{30} = (3^2)^{15} = 9^{15}$$

$$2^{45} = (2^3)^{15} = 8^{15}$$

$$7^{15}$$

$$\Rightarrow 6^{15} < 7^{15} < 8^{15} < 9^{15}$$

$$8^5 \times 243^3 < 7^{15} < 2^{45} < 3^{30}$$

با توجه به اعداد به دست آمده مقایسهٔ اعداد به صورت مقابل است:

پاسخ

ب.م.م توان‌ها ۱۵ است پس همهٔ عددها را با توان ۱۵ می‌نویسیم:

نکته

مقایسهٔ توان‌های طبیعی عددی مثل a را با توجه به محدودهٔ آن در جدول زیر تمیز و مرتب آورده‌ایم.

محدودهٔ a	مقایسهٔ توان‌ها	مثال
$1 < a$	$a < a^2 < a^3 < a^4 < \dots$	$2 < 2^2 < 2^3 < 2^4 < \dots$
$0 < a < 1$	$\dots < a^4 < a^3 < a^2 < a$	$\dots < (\frac{1}{3})^4 < (\frac{1}{3})^3 < (\frac{1}{3})^2 < \frac{1}{3}$
$-1 < a < 0$	$-1 < a < a^3 < a^5 < \dots < 0 < \dots < a^6 < a^4 < a^2 < 1$	$-1 < (-\frac{1}{4}) < (-\frac{1}{4})^3 < \dots < 0$ $\dots < (-\frac{1}{4})^4 < (-\frac{1}{4})^2 < 1$
$a < -1$	$\dots < a^5 < a^3 < a < 0 < a^2 < a^4 < a^6 < \dots$	$\dots < (-3)^3 < -3 < 0 < (-3)^2 < (-3)^4 < \dots$

تست

اگر $a < 0 < b$ باشد، کدام نامساوی برقرار است؟

- (۱) $a^2 < b^2$ (۲) $a^3 < b^3$ (۳) $b^2 < a^2$ (۴) $b^3 < a^3$

با توجه به این که $a < 0 < b$ پس a عددی منفی و b عددی مثبت است. بنابراین می توان گفت $b^2 < a^2 < 0$ یا به

عبارتی $b^3 < a^3$.

توجه

در سؤالاتی مثل این سؤال می توانیم با عددگذاری به جای a و b ، گزینه ها را بررسی کنیم.

تعداد صفرها

می دانیم از ضرب یک عامل ۲ در یک عامل ۵ در جلوی حاصل، یک صفر ظاهر می شود، پس برای به دست آوردن تعداد صفرها فقط اعدادی که عامل ۲ یا ۵ دارند را تجزیه می کنیم و سپس تعداد جفت های ۲ و ۵ را می شماریم.

مثلاً برای به دست آوردن تعداد صفرهای عدد $۱۶^۱ \times ۷۵ \times ۲۵^۲$ ابتدا پایه ها را تجزیه می کنیم.

$$۱۶^۱ \times ۷۵ \times ۲۵^۲ = (۲^۴)^۱ \times ۳ \times ۵^۲ \times (۵^۲)^۲ = ۲^۴ \times ۳ \times ۵^۲ \times ۵^۴ = ۲^۴ \times ۳ \times ۵^۶ = (۲ \times ۵)^۴ \times ۳ \times ۵^۲$$

در تجزیه عدد داده شده، ۴ جفت ۲ و ۵ داریم، پس تعداد صفرهای آن ۴ تا است.

تست

در سمت راست $۱۲۵^{۳n} \times ۱۶^{۲n}$ ($n \in \mathbb{N}$)، ۳۲ تا صفر وجود دارد. مقدار n کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

ابتدا پایه ها را تجزیه می کنیم و توانی از ۱۰ را تشکیل می دهیم:

$$۱۲۵^{۳n} \times ۱۶^{۲n} = (۵^۳)^{۳n} \times (۲^۴)^{۲n} = ۵^{۹n} \times ۲^{۸n} = ۵^n \times ۵^{۸n} \times ۲^{۸n} = ۵^n \times (۱۰)^{۸n}$$

چون در سمت راست عدد، ۳۲ تا صفر وجود دارد، پس $۱۰^{۸n}$ همان $۱۰^{۳۲}$ است و داریم:

$$۸n = ۳۲ \Rightarrow n = ۴$$

نکته

تعداد صفرهای حاصل $n!(n \in \mathbb{N})$ با تعداد عامل های ۵ در تجزیه آن برابر است.

برای مشخص کردن تعداد عامل های ۵ در $n!$ کافی است مجموع قسمت صحیح خارج قسمت ها را در تقسیم متوالی n بر ۵ به دست آوریم.

مثلاً تعداد عامل های ۵ در تجزیه $۱۰!$ برابر است با:

$$\begin{array}{r} ۱۰ \\ ۵ \\ \hline ۲ \end{array} \Rightarrow ۱۰ + ۲ = ۱۲$$

تعداد عامل های ۵

تست

در سمت راست حاصل $۷۹!$ چند صفر ظاهر می شود؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۳۹ (۴) ۷۴

تعداد عامل های ۵ را در $۷۹!$ می شماریم و تمام!

$$\begin{array}{r} ۷۹ \\ ۵ \\ \hline ۱۵ \\ ۳ \\ \hline ۱۸ \end{array} \Rightarrow ۱۵ + ۳ = ۱۸$$

تعداد عامل های ۵

تعداد ارقام و مجموع ارقام

برای مشخص کردن تعداد رقم های یک عدد توان دار در صورت امکان تعداد صفرها و تعداد ارقام حاصل ضرب بقیه عامل ها را به دست می آوریم.

مجموع دو عدد به دست آمده برابر با تعداد ارقام حاصل است. به طور کلی تعداد ارقام عدد $m \times ۱۰^n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) برابر با $m + n$ است.





مفاهیم اولیه، توان صفر و منفی، توان توان و محاسبات

(المیبار ریاضی)

۱۰۱۲- حاصل عبارت $\frac{1^{\circ} + 2^{\circ} + 3^{\circ} + \dots + 10^{\circ}}{(1 + 2 + 3 + \dots + 10)^{\circ}}$ کدام است؟

- (۱) 10° (۲) 10 (۳) 1 (۴) صفر

(تیزهوشان)

۱۰۱۳- حاصل عبارت $100 \times (-1)^{100} + (-1)^2 \times 2 + (-1)^3 \times 3 + \dots + (-1)^1 \times 1$ برابر است با:

- (۱) -100 (۲) $+100$ (۳) -50 (۴) $+50$

۱۰۱۴- حاصل عبارت $8 - 8[-2^2 \times (-\frac{1}{4})^3 + \frac{3}{4}(-2)^4]$ کدام است؟

- (۱) -185 (۲) $-\frac{17}{8}$ (۳) $+\frac{17}{8}$ (۴) $+185$

۱۰۱۵- حاصل عبارت $\frac{4^2 \times (-3)^2 \div 24 \times (-2)^2 - 3 \times (2^2 - 3^2)}{2 \times 3^2 - 3 \times 2^2 + 8 \div 2}$ برابر است با:

- (۱) $-\frac{33}{10}$ (۲) $\frac{33}{10}$ (۳) $\frac{10}{33}$ (۴) $-\frac{10}{33}$

(المیبار ریاضی)

۱۰۱۶- حاصل عبارت $81^{-25/25}$ برابر است با:

- (۱) 27 (۲) 3 (۳) $\frac{1}{27}$ (۴) $\frac{1}{3}$

(انرژی اتمی)

۱۰۱۷- اگر $a = -\frac{1}{4}$ باشد، حاصل عبارت $-\frac{1}{a^{-2}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{16}$ (۲) -16 (۳) 16 (۴) $-\frac{1}{16}$

۱۰۱۸- کدام یک از تساوی‌های زیر صحیح است؟

- (۱) $(-7^2)^5 = 7^{10}$ (۲) $(-7^5)^2 = -7^{10}$ (۳) $(-7^5)^{-2} = 7^{-10}$ (۴) $(-7^2)^{-5} = 7^{-10}$

۱۰۱۹- حاصل چندتا از عبارت‌های زیر مثبت است؟

- (الف) 4^{-3} (ب) -3^{-4} (پ) $(-4)^{-3}$ (ت) $(-3)^{-4}$
(۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

(انرژی اتمی)

۱۰۲۰- حاصل $(-3^{-2})^{2^2}$ کدام است؟

- (۱) 3^{12} (۲) -3^{12} (۳) -3^{-18} (۴) 3^{18}

۱۰۲۱- مقدار $[2 - 3(2 - 3)^{-1}]^{-1} + [(-2)^{-1}]^2$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{20}$ (۲) $\frac{9}{20}$ (۳) $\frac{1}{20}$ (۴) $-\frac{9}{20}$

(انرژی اتمی)

۱۰۲۲- اگر $A = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 999 - 1000$ باشد، آن‌گاه A^A برابر است با:

- (۱) $500 \cdot 500$ (۲) $-500 \cdot 500$ (۳) $\frac{-1}{-500 \cdot 500}$ (۴) $500 \cdot 500$

۱۰۲۳- حاصل عبارت $[(\frac{1}{4})^{-1} - (\frac{3}{4})^{-2}]^{-1}$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) 3 (۳) $\frac{9}{14}$ (۴) $\frac{8}{7}$

۱۰۲۴- حاصل عبارت $(\frac{2^{-4} \div 3^4}{\frac{2}{4^{-2}} \div 9^2})^{-1}$ کدام است؟

- (۱) 100 (۲) $0/0$ (۳) $0/1$ (۴) 10

۱۰۲۵- حاصل عبارت $\frac{1}{9}\{2^3 - 2^3[3^2 - 3^2(2^2 - 3^2)^{-1}]^{-1}\}$ برابر است با:

- (۱) 86 (۲) 4 (۳) صفر (۴) $\frac{68}{81}$



۱۰۲۶- مجموعه A چند عضو دارد؟

(انرژی اتمی)

$$A = \{2^{400} + 2, 2^{400} + 4, 2^{400} + 6, \dots, 2^{401}\}$$

۲۳۹۹ (۱) ۲^{۴۰۰} (۲) ۴۰۰ (۳) ۳۹۹ (۴)

۱۰۲۷- همه توان‌های ۵ از ۵° تا ۵^۴ را روی تخته نوشته‌ایم. محسن تعدادی از این عددها را انتخاب می‌کند و با علامت‌های مثبت و منفی

پشت سر هم می‌نویسد، سپس حاصل عبارت را حساب می‌کند. کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند حاصل این عبارت باشد؟ (تیزهوشان)

۳۳۰ (۱) ۷۱۵ (۲) ۴۸۱ (۳) ۵۴۹۲ (۴)

۱۰۲۸- اگر آرایش پرانتزها برای محاسبه عدد توان‌دار ۲^{۲۲} تغییر کند، چند مقدار متمایز دیگر می‌توان به دست آورد؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۲۹- جمعیت یک نوع باکتری در هر ساعت، یا ۱۸ برابر می‌شود یا ۱۲ برابر می‌شود. پس از گذشت ۱۰ ساعت، جمعیت این نوع باکتری

چند برابر می‌تواند شده باشد؟ (تیزهوشان)

۶^{۱۸} برابر (۱) ۲ × ۶^{۱۴} برابر (۲) ۳ × ۶^{۱۳} برابر (۳) ۹ × ۶^{۱۵} برابر (۴)

۱۰۳۰- ماشین حسابی فقط این عملیات را انجام می‌دهد: ضرب یک عدد در ۲ یا در ۳ و رساندن یک عدد به توان دوم یا سوم. اگر با عدد

۱۵ شروع کنیم و ۵ بار عملیاتی را با این ماشین حساب انجام دهیم، کدام یک از این گزینه‌ها ممکن است به دست آید؟ (کانگورو ۲۰۰۷)

۲^۸ × ۳^۵ × ۵^۶ (۱) ۲^۸ × ۳^۴ × ۵^۲ (۲) ۲^۳ × ۳^۳ × ۵^۳ (۳)

۲ × ۳^۶ × ۵^۴ (۴) ۲ × ۳^۲ × ۵^۶ (۵)

۱۰۳۱- کاغذی مستطیل شکل را چندین بار تا کرده‌ایم. در هر مرحله تا بر روی خطی موازی دو ضلع و در وسط آن‌ها زده شده است تا به مستطیلی

با مساحت نصف مستطیل قبل برسیم. واضح است که در هر مرحله این کار به دو روش (افقی و عمودی) امکان‌پذیر است. در نهایت همه تاها را باز

کرده‌ایم و دیده‌ایم در مجموع ۳۱۸ خط تایی افقی و عمودی تولید شده است. کاغذ چند بار تا شده است؟ (المپیاد ریاضی)

۱۳ (۱) ۱۴ (۲) ۱۵۹ (۳)

۳۱۷ (۴)

ضرب و تقسیم اعداد توان‌دار

۱۰۳۲- نصف عدد ۲^{-۱۵} (-۲) برابر است با:

۲^{-۱۶} (۱) ۲^{-۱۶} (-۲) (۲) ۲^{۱۶} (-۲) (۳) ۲^{-۱۴} (-۲) (۴)

۱۰۳۳- ثلث عدد ۹^{۴a-2} برابر است با:

۳^{۸a-5} (۱) ۳^{۲a-2} (۲) ۳^{۴a-5} (۳) ۳^{۸a-2} (۴)

(انرژی اتمی)

۱۰۳۴- ثلث عدد ۲۷^x × ۹^{2-x} کدام است؟

۳^{2-x} × ۹^x (۱) ۳^{3+x} (۲) ۲۷² (۳) ۹² (۴)

(انرژی اتمی)

۱۰۳۵- ربع عدد ۸^{3t} برابر کدام است؟

۲²⁵ (۱) ۲²⁶ (۲) ۲²⁷ (۳) ۲²⁸ (۴)

(انرژی اتمی)

۱۰۳۶- نصف مجذور مربع ۴ⁿ⁺¹ برابر کدام است؟

۲²ⁿ⁺² (۱) ۲⁴ⁿ⁺⁴ (۲) ۲⁸ⁿ⁺⁷ (۳) ۲²ⁿ⁺⁷ (۴)

۱۰۳۷- حاصل عبارت $(\frac{99}{100})^n \times (\frac{99}{100})^n \times \dots \times (\frac{99}{100})^n \times (\frac{3}{4})^n \times (\frac{2}{3})^n \times (\frac{1}{2})^n$ برابر است با:

$(\frac{594}{1200})^n$ (۱) $(\frac{99}{100})^n$ (۲) $(\frac{99}{100})^n$ (۳) $\frac{594}{1200}$ (۴)

۱۰۳۸- حاصل $2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times \dots \times 2^3$ برابر کدام گزینه است؟

۲⁷ (۱) ۱۶^{۱۲} (۲) ۴^{۲۰} (۳) ۲^{۳۲} (۴)

(نمونه دولتی سمنان)

۱۰۳۹- حاصل $(5^{23})^2 \times [(\frac{1}{5})^{-2}]^{32}$ برابر کدام گزینه است؟

۵^{۳۴} (۱) ۵^{۲۴} (۲) ۵^{۳۰} (۳) ۵^{۲۸} (۴)

1040 - حاصل $(-18)^{-5} \times (-8)^2 \times (-1)^2$ کدام است؟

- 6 (1) 18 (2) -18 (3) -6 (4)

1041 - حاصل عبارت $[7^{2^3}]^2 \times (7^2)^3 \times (7^2)^3 \times (7^2)^3$ کدام است؟

- 7^{100} (1) 7^{552} (2) 7^{400} (3) 7^{1104} (4)

1042 - اگر مجموع اعداد طبیعی 1 تا 50 برابر $\frac{x}{y}$ باشد، حاصل عبارت $7^x \times 7^y \times 7^8 \times \dots \times 7^{98}$ برابر است با:

- 7^{x-100} (1) 7^{x-98} (2) 7^{x-102} (3) 7^{x-104} (4)

(تیزهوشان)

1043 - حاصل عبارت $9^{42} \times 8^{84} \times 6^{12} \times 16^6 = A$ به صورت عدد توان دار کدام است؟

- 24^{96} (1) 36^{72} (2) 64^{48} (3) 72^{32} (4)

(المپیاد آمریکا)

1044 - مقدار $10^{0.27} \times (0.256)^{0.9} \times (0.256)^{0.16}$ برابر است با:

- 4 (1) 16 (2) 64 (3) $256/25$ (4)

(انرژی اتمی)

1045 - عبارت $D = 2^n \times 6^{n+1} \times 12^{1-2n}$ برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

- $2^{2-2n} \times 3^{n-2}$ (1) $2^{2-n} \times 3^{1-2n}$ (2) $2^{3-2n} \times 3^{2-n}$ (3) $2^{3-n} \times 3^{2n-1}$ (4)

1046 - صد برابر $3! \times 4! \times 5!$ به صورت عددی توان دار برابر است با:

- $(5!)^2$ (1) $(4!)^2$ (2) $(3!)^2$ (3) $(3 \times 4 \times 5)^2$ (4)

(تیزهوشان)

1047 - اگر کسر $\frac{-20^{20}}{(-5)^{19}}$ را به صورت عدد توان دار بنویسیم، حاصل کدام گزینه است؟

- 5×10^{40} (1) -5×10^{40} (2) $-4^{19} \times 5$ (3) 5×4^{20} (4)

1048 - حاصل $\frac{3}{y-3} \div (\frac{81}{y^2})^2$ برابر است با:

- 3^y (1) $(\frac{3}{y})^y$ (2) $(\frac{y}{3})^y$ (3) 2^y (4)

(تیزهوشان)

1049 - حاصل $\frac{2^{-2} \times (-3)^{-2} \times 5^2 \times (-2)^2}{2^2 \times 3^{-2} \times (-5)^2 \times 3^{-1}}$ برابر است با:

- $\frac{1}{3}$ (1) $\frac{1}{9}$ (2) $-\frac{1}{8}$ (3) $\frac{25}{3}$ (4)

(انرژی اتمی)

1050 - جذر عدد $\frac{(1/2)^3 \times (14)^2 \times 2/1}{(3/5)^3 \times 0/5}$ کدام است؟

- $1/44$ (1) $2/88$ (2) $0/36$ (3) $5/76$ (4)

(تیزهوشان)

1051 - حاصل عبارت $\frac{15^6 \times 27^5 \times 35^3}{21^3 \times 5^2}$ چند برابر 9^3 است؟

- 1 (1) 45^6 (2) $(\frac{35}{9})^6$ (3) 105^6 (4)

1052 - حاصل کسر $\frac{[(\frac{3}{5})^2 \div (0/2)^2] \times 3^2 \times 5^4}{25^2 \times 7^2 \times [0/9^4 \div (\frac{3}{10})^4]}$ کدام است؟

- $\frac{1}{5}$ (1) $\frac{1}{7}$ (2) $\frac{1}{25}$ (3) $\frac{1}{49}$ (4)

1053 - حاصل عبارت $(\frac{-1}{y}xy^2)^3 (\frac{2}{x^2y^3})^2 (-4x)$ کدام است؟

- 2 (1) 2 (2) 2x (3) 2y (4)

(المپیاد ریاضی)

1054 - حاصل $[\frac{x^2 \times (-x^2)^{-1}}{(-x)^{-x}}]^{-1}$ به ازای $x = -2$ برابر است با:

- 4 (1) +4 (2) $\frac{1}{4}$ (3) $-\frac{1}{4}$ (4)



(المیپار ریاضی)

۱۰۵۵- حاصل $\frac{\frac{\Delta}{a^{12}} \times a^{-2}}{a^{24}}$ برابر است با:

(۱) a^2 (۲) a^{-2} (۳) $a^{\frac{1}{2}}$ (۴) a

(انرژی اتمی)

۱۰۵۶- حاصل عبارت $\frac{(\frac{a}{b})^6 \div (-b)^3}{(-\frac{1}{a})^4 \times (\frac{b}{a^2})^2}$ برابر کدام است؟

(۱) $\frac{b}{a^2}$ (۲) $\frac{-a^{14}}{b^{11}}$ (۳) $\frac{a^{96}}{b^{36}}$ (۴) $\frac{-b^y}{a^2}$

۱۰۵۷- حاصل عبارت $\frac{a^3 \times b^3 \times c^{-2}}{a^{-2} \times c^2 \times b^{-1}} \div \frac{a^2 \times c^{-2} \times b}{(ab)^{-1}}$ برابر کدام است؟

(۱) $(\frac{ab}{c})^2$ (۲) $(\frac{c}{ab})^2$ (۳) $\frac{a^2 b^3}{c^2}$ (۴) $a^3 b^2 c^{-2}$

$a^{16} \times [(\frac{a^3 b}{a^2 b^{-4}})^{-3} \div (\frac{ab^{-1}}{a^{-3} b^2})^5]$

۱۰۵۸- حاصل عبارت مقابل، کدام است؟

(۱) a^{11} (۲) $a^{11} b$ (۳) a^{21} (۴) $\frac{1}{a}$

(تیزهوشان)

۱۰۵۹- حاصل عبارت $(\frac{q^{-1} r^{-1} s^{-2}}{r^{-5} s q^{-8}})^{-1} \times (\frac{q r^{-2} s^{-3}}{q^2 r^3})^{-3}$ کدام است؟

(۱) $\frac{r^{12} s^{11}}{q^4}$ (۲) $\frac{r^{11} s^{12}}{q^4}$ (۳) $\frac{q^4}{r^{12} s^{11}}$ (۴) $\frac{q^4}{r^{11} s^{12}}$

۱۰۶۰- حاصل عبارت $\frac{x^{-4} y^{-3}}{y^{-4} x^{-6}} \div \frac{(x^{-2} y^{-1})^3}{(\frac{x}{y})^4}$ برابر است با:

(۱) x^{10} (۲) x^{11} (۳) x^{12} (۴) x^9

جمع و تفریق اعداد توان دار

(المیپار ریاضی)

۱۰۶۱- حاصل عبارت $7 \times 3^{15} + 2 \times 3^{15}$ کدام است؟

(۱) 6^{15} (۲) 3^{17} (۳) 3^{15} (۴) 27^{15}

۱۰۶۲- نصف عدد $3 \times 5^{18} + 5^{19} + 25^9 + 125^6$ کدام است؟

(۱) 5^{10} (۲) 5^{19} (۳) 25^9 (۴) 25^{10}

۱۰۶۳- حاصل جمع نصف 4^a با ربع 2^{2a+1} کدام است؟

(۱) 4^a (۲) 4^{2a-1} (۳) 4^{2a-1} (۴) $2^a + 2^{2a}$

(المیپار ریاضی آمریکا)

۱۰۶۴- حاصل عبارت $2^{-(2k+1)} - 2^{-(2k-1)} + 2^{-2k}$ برابر است با:

(۱) 2^{-2k} (۲) $2^{-(2k-1)}$ (۳) $-2^{-(2k+1)}$ (۴) صفر

۱۰۶۵- حاصل عبارت $\frac{7^6 \times (3^7 + 3^7 + 3^7 + 3^7 + 3^7 + 3^7 + 3^7)}{(7^7 + 7^7 + 7^7 + 7^7 + 7^7 + 7^7) \times 6^6}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{512}$ (۲) $\frac{1}{256}$ (۳) $\frac{1}{128}$ (۴) $\frac{1}{64}$

(انرژی اتمی)

۱۰۶۶- حاصل عبارت $\frac{1384^2 \times 2005 - 1384 \times 2005^2}{2005 \times 621}$ کدام است؟

(۱) -1384 (۲) 1385 (۳) -2004 (۴) 2005

۱۰۶۷- حاصل عبارت $\frac{12^{1399} + 11 - 12^{1400}}{1 - 12^{1399}}$ کدام است؟

(۱) 11 (۲) 12 (۳) -11 (۴) -12

(۱۰۶۸) حاصل عبارت $\frac{2^{30} + 4^{15}}{3^{30} + 9^{15} + 243^6}$ کدام است؟

(۱) $\frac{2^{60}}{3^{60}}$ (۲) $(\frac{2}{3})^{60}$ (۳) $(\frac{2}{3})^{25}$ (۴) $(\frac{2}{3})^{31}$

(۱۰۶۹) حاصل کسر $\frac{2^{1394} + 2^{1392}}{4^{697} - 8^{664}}$ به ساده‌ترین صورت کدام است؟

(۱) $\frac{5}{3}$ (۲) 2^{1392} (۳) 3 (۴) $\frac{1}{2}$

(۱۰۷۰) حاصل عبارت $\frac{2^{4n} + 4^{2n} + 16^n}{2^{4n+2} + 4^{2n}}$ برابر است با:

(۱) $2(2^{2n})$ (۲) 2 (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $2(2^{4n})$

(۱۰۷۱) حاصل عبارت $\frac{3^x + 4 \times 3^x + 3^{x+1} - 5 \times 3^{x+1} + 3^{x+2}}{3 \times 3^{x-1} \times 3^x \times 3^{2-x} + 3^{x+1}}$ به ازای $x = 1381$ کدام گزینه است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $(\frac{1}{3})^{1381}$ (۴) $(\frac{1}{3})^{1381}$

(۱۰۷۲) حاصل عبارت $\frac{7^{2014} + 7^{2013} + 7^{2012} + \dots + 7^{1014}}{7^{1393} + 7^{1392} + 7^{1391} + \dots + 7^{393}}$ به صورت عدد توان‌دار برابر است با:

(۱) 7^{621} (۲) 7^{1407} (۳) $(\frac{1}{7})^{621}$ (۴) $(\frac{1}{7})^{1407}$

(۱۰۷۳) حاصل عبارت $\frac{2^{-16} + 2^{-17} + 2^{-18} + \dots + 2^{-1401}}{2^{-2022} + 2^{-2021} + 2^{-2020} + \dots + 2^{-637}}$ کدام گزینه است؟

(۱) 2^{621} (۲) 2^{-630} (۳) 2^{630} (۴) 2^{2014}

(۱۰۷۴) حاصل عبارت $\frac{2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10}}{2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-10}}$ کدام است؟

(۱) 512 (۲) 2048 (۳) 1024 (۴) 4096

(۱۰۷۵) خارج قسمت تقسیم $a + a^2 + \dots + a^{100}$ بر $a^{-1} + a^{-2} + \dots + a^{-100}$ برابر است با:

(۱) a^{100} (۲) a^{101} (۳) a^{-100} (۴) a^{-101}

(۱۰۷۶) حاصل عبارت $A = \frac{x^{943} + x^{942} + \dots + x^{454}}{x^{-454} + x^{-455} + \dots + x^{-943}}$ به ازای $x = 3$ کدام است؟

(۱) 3^{1396} (۲) 3^{1397} (۳) $3^{1396} - 1$ (۴) $3^{1397} - 1$

(۱۰۷۷) حاصل عبارت $\frac{2 \times 2 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^{100}}{2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100}}$ به صورت عدد توان‌دار برابر است با:

(۱) 2^{100} (۲) 2^{5050} (۳) 2^{4950} (۴) 1

(۱۰۷۸) کدام گزینه در مورد حاصل $2^{28} + 2^{28} + 2^{29} + 2^{30} + 2^{31} + \dots + 2^{49}$ درست است؟

(۱) بیشتر از یک میلیون میلیارد (۲) بیشتر از یک هزار میلیارد (۳) کم‌تر از یک میلیون میلیارد (۴) کم‌تر از یک هزار میلیارد

(۱۰۷۹) اگر $3^{10} + 3^{10} + 3^2 + 3^2 + \dots + 3^{10} + 3^{10} = A$ باشد، مقدار $A - 3^{11}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) 1 (۳) 3 (۴) 3^5

(۱۰۸۰) حاصل عبارت $(5^{70} + 4(5^{70} + 5^{71} + 5^{72} + \dots + 5^{89}))$ چیست؟

(۱) 5^{89} (۲) 15^{30} (۳) 5^{93} (۴) 125^{30}

(۱۰۸۱) حاصل عبارت $2^{100} - 2^{99} - \dots - 2^6 + 2^5 - 2^4 + 2^3 - 2^2 + 2 - 2$ با کدام گزینه برابر است؟

(۱) 50×2 (۲) 100×2 (۳) $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99}$ (۴) $2 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + \dots + 2^{99}$

(۱۰۸۲) حاصل $S = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_{1396}}$ برابر کدام گزینه است؟

(۱) 1 (۲) $\frac{1}{p_{1396}}$ (۳) $\frac{p_{1396} - 1}{p_{1396}}$ (۴) $\frac{p_{1396} - 1}{p_{1396}}$





۱۰۸۳- حاصل عبارت $\sqrt{\frac{2 \times 2^2 \times 2^{2^2} \times 2^{2^3} \times 2^{2^4} \times \dots \times 2^{2^{2^n}}}{2^{2^{2^n}-1}}}$ برابر است با:

(۱) ۱ (۲) 2^{2^n} (۳) $2^{2^{2^n}}$ (۴) $2^{2^{2^n}}$

نماد علمی

(تیزهوشان)

۱۰۸۴- چندتا از عددهای زیر به صورت نماد علمی نوشته شده است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

(۱) $\sqrt{7} \times 10^{-20}$ (۲) $5/3 \times 2^{10}$ (۳) $(\frac{1}{3})^{-1} \times 10^{15}$ (۴) 2^{2^0}

۱۰۸۵- نماد علمی عدد 400400 کدام است؟

(۱) $400/4 \times 10^3$ (۲) $40/0/4 \times 10^4$ (۳) $4/0/0/4 \times 10^5$ (۴) $0/400/4 \times 10^6$

۱۰۸۶- اگر عدد $0/0000000028$ را به شکل $m \times 10^d$ بنویسیم که $d \in \mathbb{Z}$ و $1 \leq m < 10$ باشد، در این صورت $m+d$ کدام است؟

(۱) -10 (۲) $-7/8$ (۳) $-6/2$ (۴) $-11/8$

۱۰۸۷- کدام یک از اعداد زیر با $0/000000375$ معادل نیست؟

(۱) $3/75 \times 10^{-7}$ (۲) $3 \frac{3}{4} \times 10^{-7}$ (۳) $\frac{3}{8} \times 10^{-7}$ (۴) 375×10^{-9}

۱۰۸۸- نمایش علمی عدد $0/000...0002018 \times 10^{n+3}$ کدام است؟

(۱) $2/018 \times 10^{2n+7}$ (۲) $2/018 \times 10^{-2n-7}$ (۳) $2/018 \times 10^{-7}$ (۴) $2/018 \times 10^{-2}$

(المپیاد ریاضی)

۱۰۸۹- نمایش علمی عدد $0/000...0002016 \times 10^{n-1}$ برابر با کدام گزینه زیر می‌باشد؟ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$)

(۱) $2/016 \times 10^3$ (۲) $2/016 \times 10^{2n-5}$ (۳) $2/016 \times 10^{2n-2}$ (۴) $2/016 \times 10^1$

(نمونه دولتی البرز، فوژستان و قزوین)

۱۰۹۰- نماد علمی $0/81 \times 10^{-4} - 37 \times 10^{-6}$ کدام گزینه است؟

(۱) $4/4 \times 10^{-4}$ (۲) $4/4 \times 10^{-3}$ (۳) $4/4 \times 10^{-5}$ (۴) $0/44 \times 10^{-4}$

۱۰۹۱- نماد علمی حاصل عبارت $0/351 \times 10^{-1395} + 531 \times 10^{-1396}$ برابر است با:

(۱) $5/31351 \times 10^{-1394}$ (۲) $5/31351 \times 10^{-1393}$ (۳) $5/31351 \times 10^{-1396}$ (۴) $5/31351 \times 10^{-1395}$

۱۰۹۲- نماد علمی عبارت $5/6 \times 10^{-7} \times 2/5 \times 10^{12}$ کدام گزینه است؟

(۱) $1/4 \times 10^5$ (۲) $1/4 \times 10^4$ (۳) $1/4 \times 10^{-5}$ (۴) $1/4 \times 10^6$

(نمونه دولتی زنجان)

۱۰۹۳- نماد علمی $0/008 \times 10^{50} \times 0/25 \times 10^{-3}$ برابر است با:

(۱) 2×10^{-2} (۲) 2×10^4 (۳) 2×10^2 (۴) $0/2 \times 10^3$

۱۰۹۴- نماد علمی عبارت $0/003 \times 10^{-9} \times 0/0225 \times 10^{-2} \times 1000000^4$ کدام است؟

(۱) $6/75 \times 10^{-21}$ (۲) $6/75 \times 10^{-19}$ (۳) $6/75 \times 10^{-22}$ (۴) $6/75 \times 10^{-20}$

(نمونه دولتی سمنان)

۱۰۹۵- حاصل کسر $\frac{12/5 \times 10^{-14}}{25 \times 10^{-19}}$ با کدام گزینه برابر است؟

(۱) 5×10^{-3} (۲) 5×10^4 (۳) 5×10^6 (۴) 5×10^2

۱۰۹۶- نمایش علمی عدد $\frac{3/6 \times 10^{-4} \times 0/000028}{0/00063 \times 10^{-3}}$ کدام است؟

(۱) $0/16 \times 10^{-3}$ (۲) $1/6 \times 10^{-3}$ (۳) $1/6 \times 10^{-2}$ (۴) $4/8 \times 10^{-2}$

۱۰۹۷- اگر داشته باشیم $a = 24 \times 10^5$ و $b = 12 \times 10^{-4}$ ، نماد علمی $\frac{a^2}{2b}$ برابر است با:

(۱) 24×10^{15} (۲) $2/4 \times 10^{15}$ (۳) 24×10^{13} (۴) $2/4 \times 10^{13}$

(نمونه دولتی گلستان)

۱۰۹۸- در بین گزینه‌های زیر کوچک‌ترین عددی که به صورت نماد علمی نوشته شده، کدام است؟

(۱) $3/7 \times 10^2$ (۲) $53/5 \times 10^2$ (۳) $1/5 \times 10^2$ (۴) $0/05 \times 10^3$

فصل هفتم

عبارت‌های گویا

عبارت‌های گویا

به فصل ۷ خوش آمدید! قبل از آن که این فصل را به صورت رسمی شروع کنیم، لازم است از همین تریبون اعلام کنیم که این فصل با فصل پنجم کتاب ارتباط بسیار صمیمانه و نزدیکی دارد.
در جای جای این فصل از تجزیه عبارت‌های جبری، اتحادها و ... استفاده می‌کنیم. خلاصه کلام این که ما مطالب فصل پنجم را پیش‌نیاز این فصل می‌دانیم. والسلام!

تعریف عبارت گویا

چندجمله‌ای‌ها که از فصل پنجم معرف حضورتان هست؟ نیست؟ پس کمی خاطره‌بازی کنیم. در چندجمله‌ای جبری باید ضریب جمله‌ها، عددی حقیقی و توان متغیرها، عددی حسابی باشد.

مثلاً عبارت‌های مقابل، چندجمله‌ای نیستند.
به کسری که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای و مخرج آن مخالف صفر باشد، عبارت گویا می‌گوییم.

مثلاً عبارت‌های مقابل گویا هستند.

ولی عبارت‌های مقابل گویا نیستند.

$$|x|, 2\sqrt{x}, 5^{x-1}$$

$$\frac{5x+2}{2x+\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{4x^2+3x+1}, \frac{\sqrt{7}x}{z}$$

$$\frac{2\sqrt{x}}{x+1}, \frac{2^{y^{x+1}}}{5^{x^2+1}}, \frac{|x+1|}{xy-z}$$

تست

کدام یک از عبارت‌های زیر گویا نیست؟

$$\frac{1}{x^2} \times y^2 \quad (۴)$$

$$\frac{x+y}{2xy} \quad (۳)$$

$$\frac{4x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2} \quad (۲)$$

$$\frac{3x^2y+\sqrt{2}x}{x+y} \quad (۱)$$

در گزینه (۴) چون توان متغیرها عددی حسابی نیست، پس عبارت داده شده گویا نیست.

پاسخ

نکته

در تشخیص عبارت‌های گویا به سؤال خوب دقت کنید، زیرا گاهی بعضی از عبارت‌ها گویا نیستند، ولی سؤال گفته کدام عبارت بعد از ساده شدن گویا است که حُب منطقاً تا عبارت‌ها را ساده نکنیم نمی‌توانیم نظری بدهیم.

تست

ساده شده کدام گزینه عبارت گویا نیست؟ ($x \neq y$)

$$\frac{\pi a^2 + bm}{3c} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{x^2}}{x^2-1} \quad (۳)$$

$$\frac{|x^4+y^2|}{y^4-x^2} \quad (۲) \quad \frac{a^3+3ab^2+3b^3}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \quad (۱)$$

پاسخ

هر کدام از گزینه‌ها را ساده و سپس اظهار نظر می‌کنیم.

$$\frac{a^3 + 3ab^2 + 3b^3}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{a^3 + 3ab^2 + 3b^3}{x - y}$$

گزینه (۱): مخرج را با استفاده از اتحاد مزدوج ساده می‌کنیم:

پس عبارت داده‌شده گویا است.

$$\frac{|x^4 + y^4|}{y^4 - x^4} = \frac{x^4 + y^4}{y^4 - x^4}$$

گزینه (۲): با توجه به این که $x^4 + y^4$ همواره نامنفی است، پس می‌توانیم قدرمطلق را برداریم:

این عبارت هم گویاست.

$$\frac{\sqrt{x^2}}{x^2 - 1} = \frac{|x|}{x^2 - 1}$$

گزینه (۳): حاصل $\sqrt{x^2}$ برابر $|x|$ است؛ پس:

این عبارت گویا نیست.

گزینه (۴): صورت و مخرج عبارت داده‌شده چندجمله‌ای است؛ پس این عبارت گویاست.

دامنه عبارت‌های گویا

با توجه به این که عبارت‌های گویا به صورت کسر هستند، پس به ازای مقادیری که مخرج آن‌ها را صفر کند تعریف‌نشده هستند؛ پس دامنه یک عبارت گویا برابر با تمام مقادیر حقیقی است که مخرج را صفر نکنند.

مثلاً عبارت گویای $\frac{3}{x+1}$ به ازای $x = -1$ تعریف نشده و دامنه آن به صورت $\mathbb{R} - \{-1\}$ است.

در تعیین دامنه عبارت‌های گویا اجازه نداریم عبارت را ساده کنیم بلکه روی عبارت داده‌شده، به همان شکل که هست کار می‌کنیم.

تست

دامنه عبارت $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$ کدام است؟

(۴) $\mathbb{R} - \{-1\}$

(۳) $\mathbb{R} - \{1, -1\}$

(۲) $\mathbb{R} - \{1\}$

(۱) \mathbb{R}

$x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1$

مخرج کسر نباید صفر شود؛ پس:

دامنه عبارت گویای داده‌شده برابر $\mathbb{R} - \{1, -1\}$ است.

تست

دامنه عبارت گویای $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2 - x - 6}$ کدام است؟

(۴) $\mathbb{R} - \{-1, -2, 3\}$

(۳) $\mathbb{R} - \{-1, 2, -3\}$

(۲) $\mathbb{R} - \{1, 2, 3\}$

(۱) $\mathbb{R} - \{-1, -2, -3\}$

$x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

$x^2 - x - 6 \neq 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x - 3)(x + 2) \neq 0 \Rightarrow x \neq 3, x \neq -2$

مخرج‌ها نباید صفر شوند؛ پس:

پس دامنه عبارت داده‌شده برابر $\mathbb{R} - \{-1, -2, 3\}$ است.

تست

حاصل a^b چه قدر است در صورتی که دامنه عبارت $\frac{ax + b}{x^2 + ax + b}$ ، $\mathbb{R} - \{-2, 3\}$ باشد؟

(۴) -۶۴

(۳) +۱

(۲) ۶۴

(۱) -۱

اعداد ۲- و ۳ در دامنه عبارت داده‌شده نیستند؛ پس مخرج به ازای آن‌ها صفر می‌شود:

$x^2 + ax + b \xrightarrow{x=-2} (-2)^2 + a \times (-2) + b = 0 \Rightarrow 4 - 2a + b = 0$

$x^2 + ax + b \xrightarrow{x=3} 3^2 + a \times 3 + b = 0 \Rightarrow 9 + 3a + b = 0$

با تفریق طرفین معادله‌های به‌دست‌آمده داریم:

$4 - 2a + b - (9 + 3a + b) = 0 \Rightarrow 4 - 2a + b - 9 - 3a - b = 0 \Rightarrow -5a - 5 = 0 \Rightarrow -5a = 5 \Rightarrow a = \frac{-5}{5} = -1$

$4 - 2a + b = 0 \xrightarrow{a=-1} 4 - 2 \times (-1) + b = 0 \Rightarrow 4 + 2 + b = 0 \Rightarrow b = -6$

$a^b = (-1)^{-6} = \frac{1}{(-1)^6} = 1$

حاصل a^b برابر است با:



در تعیین دامنه عبارت‌های گویا حواستان به کسرهایی که در مخرج می‌آیند باشد، زیرا در این حالت حداقل دو مخرج داریم که نباید صفر شوند.

تست

عبارت مقابل به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است؟

$$\frac{2x+1}{2-\frac{1}{x}}$$

صفر (۴)

$0, \frac{1}{2}$ (۳)

$0, 2$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

مخرج هیچ‌کدام از کسرها نباید صفر شود؛ پس باید هم $x \neq 0$ و هم $2 - \frac{1}{x} \neq 0$ باشد:

$$2 - \frac{1}{x} \neq 0 \Rightarrow 2 \neq \frac{1}{x} \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$$

بنابراین عبارت داده‌شده، به ازای $x = 0, \frac{1}{2}$ تعریف نشده است.

تست

در عبارت $\frac{5x-3}{x^2-4} \div \frac{3x-6}{2x-8}$ متغیر x چه اعدادی نمی‌تواند باشد؟

$2, -2$ (۴)

$4, -2$ (۳)

$2, -2, -4$ (۲)

$2, -2, 4$ (۱)

عبارت را به صورت تقسیم کسری می‌نویسیم و بدون ساده‌کردن، ریشه‌های مخرج را مشخص می‌کنیم:

$$\frac{5x-3}{x^2-4} \div \frac{3x-6}{2x-8} = \frac{x^2-4}{x^2-4} \cdot \frac{3x-6}{2x-8}$$

حالا ریشه مخرج‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2, \quad 2x - 8 = 0 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

$$\frac{3x-6}{2x-8} = 0 \Rightarrow 3x-6=0 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2$$

بنابراین x نمی‌تواند اعداد 4 و ± 2 باشد.

ساده‌کردن عبارتهای گویا

حتماً یادتان هست که برای ساده‌کردن یک کسر، صورت و مخرج آن را بر عامل‌های مشترک صورت و مخرج تقسیم می‌کردیم. در ساده‌کردن عبارتهای گویا نیز به طریق مشابه همین کار را انجام می‌دهیم. برای ساده‌کردن عبارتهای گویا، ابتدا صورت و مخرج را تجزیه کرده و سپس عامل‌های مشترک آن‌ها را با هم ساده می‌کنیم.

مثلاً برای ساده‌کردن عبارت $\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}$ ، صورت با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای و مخرج با استفاده از اتحاد جمله‌مشترک تجزیه می‌شود:

$$\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x-3)} = \frac{x-2}{x-3}$$

تست

حاصل عبارت $\frac{9x^2+x-3x^2-3}{3x^2-1}$ کدام است؟

$1-x$ (۴)

$3-x$ (۳)

$x-1$ (۲)

$x-3$ (۱)

عبارت صورت را به دو شکل زیر دسته‌بندی کرده و سپس فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{9x^2+x-3x^2-3}{3x^2-1} = \frac{(9x^2-3x^2)+(x-3)}{3x^2-1} = \frac{3x^2+(x-3)}{3x^2-1} = \frac{(3-x)(3x^2-1)}{3x^2-1} = 3-x$$

تست

ساده شده عبارت $\frac{a^4 - 13a^2 + 36}{a^2 + 5a + 6}$ کدام است؟ (مخرج مخالف صفر است.)

(۱) $a^2 - 3a + 6$ (۲) $a^2 + 5a + 6$ (۳) $a^2 + 1$ (۴) $a^2 - 5a + 6$

$$\frac{a^4 - 13a^2 + 36}{a^2 + 5a + 6} = \frac{(a^2 - 9)(a^2 - 4)}{(a+2)(a+3)}$$

پاسخ صورت و مخرج به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌شوند:

$$\frac{(a-3)(a+3)(a-2)(a+2)}{(a+2)(a+3)} = (a-3)(a-2) = a^2 - 5a + 6$$

عبارات صورت به کمک اتحاد مزدوج تجزیه می‌شوند:

پاسخ

تست

حاصل عبارت $(\frac{x-y}{y-x})^{\frac{2m-2n}{n-m}}$ کدام است؟ ($m \neq n, x \neq y$)

(۱) $\frac{x+y}{m+n}$ (۲) $\frac{x-y}{m-n}$ (۳) $\frac{x^2 - y^2}{m^2 - n^2}$ (۴) ۱

پاسخ $x-y$ و $y-x$ قرینه هم هستند؛ پس حاصل $\frac{x-y}{y-x}$ برابر -1 است. از طرفی با فاکتورگیری در توان هم به همین

$$\left(\frac{x-y}{y-x}\right)^{\frac{2m-2n}{n-m}} = (-1)^{\frac{2(m-n)}{n-m}} = (-1)^{-2} = 1$$

ترتیب داریم:

پاسخ

جمع و تفریق عبارتهای گویا

مانند جمع و تفریق کسرها، برای جمع و تفریق عبارتهای گویا نیز باید مخرج مشترک بگیریم. برای این کار ابتدا مخرجها را تجزیه کرده و در صورت امکان هر کدام از کسرها را ساده می‌کنیم، سپس ک.م.م مخرجها را با ضرب عاملهای مشترک مخرجها با بیشترین توان و عاملهای غیرمشترک مخرجها به دست می‌آوریم. در ادامه بعد از هم‌مخرج کردن کسرها، صورتها را با هم جمع یا تفریق می‌کنیم.

مثلاً در محاسبه تفریق $\frac{x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}$ با توجه به این که تجزیه شده مخرج کسر اول برابر $(x-2)(x+2)$ است، پس ک.م.م مخرجها

$$\frac{x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} = \frac{x}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x-2} = \frac{x - (x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{-2}{(x-2)(x+2)}$$

برابر همان $x^2 - 4$ است و داریم:

تست

حاصل عبارت $\frac{x-2y}{xy} + \frac{2y+a}{ay} - \frac{2x-2a}{ax}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) $\frac{2}{y}$ (۳) $\frac{2}{x}$ (۴) $\frac{a}{xy}$

پاسخ مخرج مشترک سه کسر داده شده axy است؛ پس:

$$\frac{x-2y}{xy} + \frac{2y+a}{ay} - \frac{2x-2a}{ax} = \frac{a(x-2y) + x(2y+a) - y(2x-2a)}{axy} = \frac{ax-2ay+2xy+ax-2xy+2ay}{axy} = \frac{2ax}{axy} = \frac{2}{y}$$

تست

حاصل عبارت $\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2} + \frac{b^2-a^2}{(a+b)^2}$ به ازای $a = 1381$ و $b = 1382$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۱۳۸۱ (۴) ۱۳۸۲

پاسخ ابتدا عبارت را تا حد امکان ساده می‌کنیم. مخرج کسر اول و صورت کسر دوم را با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2} + \frac{b^2-a^2}{(a+b)^2} = \frac{(a-b)^2}{(a-b)(a+b)} + \frac{(b-a)(b+a)}{(a+b)^2} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-a}{a+b} = \frac{a-b+b-a}{a+b} = \frac{0}{a+b} = 0$$

حاصل عبارت داده شده همواره (به شرط $a \neq \pm b$) برابر صفر است.



مفاهیم اولیه

۲۱۴۱- کدام یک از گزینه‌های زیر، یک عبارت گویا است؟

(۱) $\frac{2x^2+3}{\sqrt{x}}$ (۲) $\frac{x^2+y^2+2}{2\sqrt{x+y}}$ (۳) $\frac{y+4}{\sqrt{x^4}+\sqrt{2}}$ (۴) $\frac{\sqrt{x+y}}{1+\sqrt{2}}$

۲۱۴۲- کدام یک از عبارت‌های زیر، گویاست؟

(۱) $2\sqrt{x}$ (۲) $\frac{y^2+x^2+2x+5}{\sqrt{x^2+1}}$ (۳) $\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+2}}$ (۴) $\frac{\sqrt{2x^3+1}}{\sqrt{3x+x^2}}$

۲۱۴۳- چندتا از عبارت‌های زیر عبارت گویا هستند؟ ($a \neq -x, a \in \mathbb{R}$)

(۱) $2-a-x^{-1}$ (۲) $(3+\sqrt{y})(3-\sqrt{y})$ (۳) $1-x+x^2$ (۴) $\frac{-\sqrt{2}}{5}$
 (۱) $\frac{x+3y}{x+2}$ (۲) $\frac{2a+\sqrt{2}}{3}$ (۳) $\frac{5ax}{2\sqrt{a+x}}$ (۴) $\frac{x+3y}{x+2}$

۲۱۴۴- چندتا از عبارت‌های زیر گویا هستند؟

(۱) $\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ (۲) $\frac{3x+\sqrt{7}}{x^2}$ (۳) $|x-x|$ (۴) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
 (۱) $\frac{|x|+|y|}{x}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $\sqrt{x^6}$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

دامنه عبارت‌های گویا

۲۱۴۵- عبارت $\frac{3}{((2x-1)^2)^3+4}$ به ازای کدام عدد تعریف نشده است؟ (نمونه دولتی اصفهان و کوگیلویه و بویراحمد)

(۱) -1 (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) به ازای همه مقادیر، تعریف شده است.

۲۱۴۶- دامنه تعریف عبارت $P = \frac{3x^2}{x(\Delta^x-1)}$ چند عدد حقیقی را شامل نمی‌شود؟

(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۱۴۷- عبارت $\frac{x(x-1)}{x^2-4x}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است؟ (نمونه دولتی قم)

(۱) 2 و -2 (۲) -2 و صفر (۳) -2 ، 2 و صفر (۴) 2 ، صفر و -3

۲۱۴۸- به ازای چند مقدار طبیعی n ، حاصل $\frac{\sqrt{5-n}}{n^2-3n+2}$ عدد حقیقی است؟ (نمونه دولتی قم)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۱۴۹- به ازای چه مقادیری از x عبارت $A = \frac{x}{x} + \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x^2-5x+6}$ تعریف نشده است؟ (نمونه دولتی زنجان)

(۱) $\{2, 3\}$ (۲) $\{0, 2, 3\}$ (۳) $\{1, 2, 3\}$ (۴) $\{0, -2, -3\}$

۲۱۵۰- عبارت‌های زیر به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است؟ (نمونه دولتی گلستان)

(۱) $2, 3, 0, -2$ (۲) $-3, 3, 0, -2$
 (۱) $A = \frac{x+2}{x^2+5x+6} \times \frac{(x-1)^2}{(x^3-9x)(x^2+1)}$ (۲) $-3, 3, 0, -2$
 (۱) $C = \frac{x-1}{5x^2+2\sqrt{5x+1}} \div \frac{x^3-5x}{1-\sqrt{5x}}$ (۲) $-3, 3, 0$

۲۱۵۱- عبارت C به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است؟

(۱) $0, \pm\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}$ (۲) $\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$
 (۱) $0, \pm\sqrt{5}, \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۲) $\pm\frac{\sqrt{5}}{5}, 0, 1$



2152 - دامنهٔ تعریف کدام عبارت زیر همهٔ اعداد حقیقی است؟

(1) $\frac{x^2(x-1)}{x}$ (2) $\frac{x+2}{x^2+4x+4}$ (3) $\frac{3}{x^2-2}$ (4) $\frac{2x-3}{x^6+1}$

2153 - اگر a و b دو عدد حقیقی غیر صفر و عبارت $\frac{x+5}{ax^2+b}$ به ازای همهٔ مقادیر x تعریف شده باشد، کدام گزینه همواره در مورد a و b درست است؟

(1) $ab < 0$ (2) $a+b > 0$ (3) $\frac{a}{b} > 0$ (4) $a-b < 0$

2154 - عبارت $\frac{1}{x^2-ax+1}$ به ازای $x = -1$ تعریف نشده است. مقدار a کدام است؟

(1) 2 (2) صفر (3) -2 (4) 3

2155 - اگر عبارت گویای $\frac{4x+3}{x^2+ax+b}$ به ازای مقادیر $x = 1$ و $x = -3$ تعریف نشده باشد، حاصل $a-b$ کدام گزینه است؟

(1) 1 (2) 5 (3) -1 (4) -5

2156 - اگر عبارت جبری $\frac{x+5}{x^2+mx+n}$ به ازای $\mathbb{R} - \{-3\}$ تعریف شده باشد، حاصل $n-m$ کدام است؟

(1) 7 (2) 3 (3) -7 (4) -3

ساده کردن عبارتهای گویا

2157 - ساده شدهٔ عبارت $\frac{3a^{12}-6a^{30}}{2a^7-4a^{25}}$ کدام است؟ ($a \neq 0$)

(1) $\frac{3}{2}a^5$ (2) $\frac{1}{3}a^4$ (3) $-\frac{2}{3}a^7$ (4) $-\frac{2}{3}a^6$

2158 - عبارت $\frac{1-y+y^3-y^5}{1-y}$ با کدام عبارت زیر هم‌ارز است؟ ($y \neq 1$)

(1) y^3 (2) y^3+1 (3) $1-y+y^3$ (4) y^3-y^5

2159 - ساده شدهٔ کسر $\frac{x^2-4x+kx-4k}{x^2-kx-4x+4k}$ کدام است؟

(1) $\frac{x+3}{x-3}$ (2) $\frac{x-k}{x+k}$ (3) $\frac{x+k}{x-k}$ (4) $\frac{x-4}{x+4}$

2160 - ساده شدهٔ عبارت $\frac{x^2-2xy+y^2-x+y}{x^2-xy-x}$ برابر با کدام گزینه است؟

(1) $\frac{x-y}{x}$ (2) $\frac{y-x}{x}$ (3) $-y$ (4) y

2161 - حاصل کسر $\frac{2x^2-8x+8}{2x-4}$ کدام است؟

(1) $2x+4$ (2) $x+2$ (3) $x-2$ (4) $2x-4$

2162 - کدام یک از عبارتهای گویای زیر را می‌توان ساده کرد؟ (مخرجها مخالف صفرند.)

(1) $\frac{x+y}{x-y}$ (2) $\frac{x^2+y^2}{x-y}$ (3) $\frac{x^2-y^2}{x+y}$ (4) $\frac{x^2+y^2}{x+y}$

2163 - حاصل کدام گزینه با بقیهٔ گزینه‌ها متفاوت است؟ (مخرج همهٔ کسرها، مخالف صفر است.)

(1) $\frac{a-3}{a+3}$ (2) $\frac{a^2-2a+1}{2a-a^2-1}$ (3) $\frac{a^2-9}{(3-a)(3+a)}$ (4) $\frac{2a-3b-6a}{4a+3b}$

2164 - حاصل کسر $\frac{-12-8x+4x^2}{-2x+6}$ کدام است؟ ($x \neq 3$)

(1) $2x+1$ (2) $2x+2$ (3) $-2x-2$ (4) $\frac{x+1}{2}$

2165 - ساده شدهٔ عبارت $\frac{c^2-a^2-b^2-2ab}{a+b-c}$ کدام است؟ (مخرج مخالف صفر است.)

(1) $c-a-b$ (2) $a+b-c$ (3) $-a-b-c$ (4) $c-a+b$



2166- حاصل عبارت $\frac{(x-3)(x^2-4)}{6+x-x^2}$ کدام است؟ ($x \neq 3, -2$)

(1) $2-x$ (2) $x+2$ (3) $x-3$ (4) $3-x$

2167- کدام عبارت زیر را در $\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$ ضرب کنیم تا حاصل برابر 1- شود؟

(1) $\frac{-x+3}{x-1}$ (2) $\frac{-x-2}{x+1}$ (3) $\frac{x-3}{x+1}$ (4) $\frac{x-3}{x-1}$

2168- کسر $\frac{a^{-4}-b^{-4}}{a^{-2}-b^{-2}}$ برابر کدام است؟

(1) $a^{-6}-b^{-6}$ (2) $a^{-2}+b^{-2}$ (3) a^2+b^2 (4) $a^{-2}-b^{-2}$

2169- ساده ترین حالت کسر $\frac{ab(a^{-2}+b^{-2}+2a^{-1}b^{-1})}{a+b}$ برابر است با: ($a, b \neq 0, a \neq -b$)

(1) $\frac{(a+b)^2}{ab}$ (2) $\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}$ (3) $\frac{ab}{a+b}$ (4) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

2170- حاصل عبارت $(a^{-2}b^{-2} - 2a^{-1}b^{-1} + 2) \div (a^{-1}b^{-1} - 2)$ کدام است؟ ($ab \neq \frac{1}{2}, a, b \neq 0$)

(1) $\frac{1-ab}{ab}$ (2) ab (3) $a^{-1}b^{-1} + 1$ (4) $\frac{ab-1}{ab}$

2171- حاصل $\frac{(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 3(x+1) - 1}{(x+1)^2 - 2(x+1) + 1}$ کدام است؟ ($x \neq 0$)

(1) $x+1$ (2) $x+2$ (3) x (4) $x-1$

2172- حاصل $\frac{1+x^3}{1+2x+2x^2+x^3}$ کدام است؟ ($x \neq -1$)

(1) $\frac{1}{2x(1+x)}$ (2) $\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ (3) $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ (4) $\frac{1+x}{1+x+x^2}$

2173- ساده شده عبارت $\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^4+x^2y^2+y^4}$ برابر با کدام گزینه است؟

(1) $x^4 - y^4 + x^2y^2$ (2) $x^4 + y^4 + x^2y^2$ (3) $x^4 + y^4 - x^2y^2$ (4) $y^4 - x^4 + x^2y^2$

2174- ساده شده عبارت $\frac{(2x^2-3x-2)(2x^2-3x-5)+2}{(2x^2-3x-5)(2x^2-3x-1)+4}$ کدام است؟ (مخرج مخالف صفر است.)

(1) $\frac{2x^2-3x-4}{2x^2-3x-3}$ (2) $\frac{2x^2-3x+4}{2x^2-2x+3}$ (3) $\frac{2x^2-3x+4}{x^2-x-3}$ (4) $\frac{2x^2-3x+4}{2x^2-3x-2}$

2175- حاصل عبارت $\frac{x^2+xy}{5x+5y+xz+yz} \times \frac{10+2z}{6x}$ کدام است؟

(1) $\frac{z+5}{x}$ (2) $\frac{x}{2}$ (3) $\frac{1}{2z}$ (4) $\frac{1}{3}$

2176- ساده شده عبارت $\frac{(a^3+a-1)(a^3+a+2)-4}{(a^3+a-2)(a^3+a+2)-5}$ کدام است؟ (همه عبارات تعریف شده هستند و $a^3+a \neq -3$ است.)

(1) $\frac{a^3+a-2}{a^3+a+3}$ (2) $\frac{a^3+a-5}{a^3+a-7}$ (3) $\frac{a^3+a-2}{a^3+a-3}$ (4) $\frac{a^3+a+2}{a^3+a-3}$

جمع و تفریق عبارتهای گویا

2177- $\frac{x}{x-y} - \frac{y}{y-x}$ برابر است با: ($x \neq y$)

(1) $x-y$ (2) $(x-y)(x+y)$ (3) $x+y$ (4) $\frac{x+y}{x-y}$

2178- اگر x و y معکوس یکدیگر باشند، حاصل عبارت $\frac{3-5x}{7x} - \frac{9+3y}{y}$ معادل کدام یک از گزینه های زیر است؟

(1) صفر (2) 1 (3) 2 (4) -2

(انرژی اتمی)

(المپیاد بلژیک)

2179- ساده شده عبارت $K = \frac{a^2 - b^2}{ab} - \frac{ab - b^2}{ab - a^2}$ در کدام گزینه آمده است؟

(1) $a - 2b$ (2) $-\frac{a}{b}$ (3) $\frac{a}{b}$ (4) $2ab - a$

(نمونه دولتی ایلام - مرکزی)

2180- اگر $\frac{Ax - 15}{x^2 - 3x} + \frac{3}{3 - x} = \frac{A}{x}$ باشد، عدد A کدام است؟

(1) -12 (2) -5 (3) 5 (4) 12

2181- مقدار عددی عبارت $\frac{5b}{5a - 5b} - \frac{a^2 + ab}{a^2 - b^2} + \frac{a + b}{-a - b}$ به ازای $a = 1396$ و $b = 2017$ کدام است؟

(1) 1396 (2) -2 (3) -2017 (4) صفر

2182- حاصل $\frac{x-3}{x^2-9} + \frac{x+7}{x^2+10x+21}$ کدام است؟

(1) $\frac{2}{x+3}$ (2) $\frac{1}{2}(x-3)$ (3) $\frac{x-3}{x+3}$ (4) $\frac{x+3}{x-7}$

(نمونه دولتی زنجان)

2183- مقدار عددی عبارت زیر به ازای $x = 2\sqrt{5}$ و $y = 3\sqrt{7}$ کدام گزینه است؟

(1) 6 (2) $6\sqrt{35}$ (3) $\sqrt{35}$ (4) 2

$$\frac{x^2 - xy}{x^2 - y^2} + \frac{xy}{xy + x^2} + \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)(x-2)}$$

2184- در عبارت $\frac{f}{x} + \frac{x}{f} + \frac{f}{x} + \dots$ جملات با شماره فرد $\frac{f}{x}$ و با شماره زوج $\frac{x}{f}$ می باشد. $(x \neq 0)$ مجموع 40 جمله اول این عبارت همواره برابر است با:

(نمونه دولتی کردستان)

(1) $\frac{80 + 5x^2}{x^2}$ (2) $\frac{40 + 5x}{x}$ (3) $\frac{80 + 5x^2}{x}$ (4) $\frac{40 + 5x^2}{x^2}$

(انرژی اتمی)

2185- اگر $A = \frac{x^2 - 4}{2x + 4}$ باشد، حاصل $\frac{1}{A} + 1$ کدام است؟

(1) $\frac{2}{x}$ (2) $\frac{2}{x-2}$ (3) $\frac{x}{x-2}$ (4) $\frac{-2}{x}$

2186- اگر $A = \frac{2x}{1-x^2}$ و $B = \frac{2x}{1+x^2}$ ، حاصل $1 + \frac{1}{A^2}$ برابر کدام است؟ $(x \neq 0, \pm 1)$

(1) B^2 (2) $\frac{1}{B^2}$ (3) $\frac{A}{B}$ (4) $\frac{B}{A}$

2187- حاصل عبارت زیر، در کدام گزینه آمده است؟ (با فرض مخالف صفر بودن مخارجها)

(1) $\frac{4-n}{(n^2-3n+2)(n+2)}$ (2) $\frac{4-n}{n^2-2n+4}$ (3) $\frac{4n}{(n-1)(n+2)}$ (4) $\frac{n-4}{n^2+n-2}$

$$\frac{2-n}{n^2-3n+2} + \frac{2}{n+2} = ?$$

2188- اگر $A = \frac{2x^2 + 4x}{x^2 - 9}$ ، $B = \frac{1}{x-3}$ و $C = \frac{2x}{x-3}$ سه عبارت گویا باشند، حاصل عبارت $A + B - C$ کدام است؟ (نمونه دولتی گیلان)

(1) $\frac{-1}{x-3}$ (2) $\frac{-1}{x+3}$ (3) $\frac{x-1}{x-3}$ (4) $\frac{-x+1}{-x+3}$

2189- حاصل عبارت $\frac{2x}{x^2+2x+1} + \frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{1+x}$ برابر با کدام گزینه است؟

(1) $\frac{-x+3}{(x-1)(x+1)^2}$ (2) $\frac{x}{(x-2)}$ (3) $\frac{x+3}{(x-1)^2}$ (4) $\frac{x+2}{(x-2)(x-1)}$

2190- حاصل عبارت $\frac{x^2+1}{x^2+3x+2} + \frac{x^2-x}{x^2+x^2-2x}$ کدام است؟ $(x \neq -1, 1, 0, -2)$

(1) $\frac{x^2+2}{x+2}$ (2) $\frac{x+2}{x^2+2}$ (3) $\frac{x^2+1}{x+1}$ (4) $\frac{x+1}{x^2+1}$