فصل سوم

درس اول / بخش اول: توابع گویا

مفاهیم اولیهٔ تابع

هر **تابع** از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت می‌دهد. A را **دامنهٔ** این تابع و B را **هم‌دامنهٔ** این تابع می‌نامند. مجموعه عضوهایی از B را که به عضوی از A نسبت داده شده‌اند **برد** این تابع می‌نامند. بنابراین برد تابع زیرمجموعه‌ای از هم‌دامنهٔ تابع است. دامنهٔ تابع f را با D_f و برد آن را با R_f نمایش می‌دهیم. برای نشان دادن اینکه f تابعی با دامنهٔ A و هم‌دامنهٔ B است می‌نویسیم $f:A \to B$ (بخوانید f تابعی از A به B است).

ضابطهٔ تابع

می‌توان تابع را ماشینی در نظر گرفت که در ازای هر ورودی یک خروجی تحویل می‌دهد. ورودی‌ها از دامنهٔ تابع داده می‌شوند و خروجی‌ها در برد هستند. در ضمن، به ازای هر ورودی دقیقاً یک خروجی وجود دارد، البته ممکن است چند ورودی مختلف خروجی یکسان داشته باشند. اگر x عضوی از دامنهٔ تابع f و y خروجی این تابع به ازای x باشند، می‌نویسیم $y=f(x)$. به عملیاتی که ماشین تابع روی ورودی انجام می‌دهد تا آن را به خروجی تبدیل کند، **ضابطهٔ تابع** می‌گویند.

تست ۱

در تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و ضابطهٔ $f(x)=x^۲(۲-x)^۲$، حاصل $f(۱+x)-f(۱-x)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $۴x$ ۳) $۲x^۲$ ۴) $۴x^۲$

راه‌حل در ضابطهٔ تابع به جای x مقدارهای $۱+x$ و $۱-x$ را قرار می‌دهیم:

$f(۱+x)=(۱+x)^۲(۱-x)^۲,\quad f(۱-x)=(۱-x)^۲(۱+x)^۲$

بنابراین $f(۱+x)-f(۱-x)=۰$.

تست ۲

اگر $D_f=\mathbb{R}$ و $f(x)+xf(۲)=x^۳+۱$، حاصل $f(-۲)$ کدام است؟

۱) -۷ ۲) -۱ ۳) ۹ ۴) ۳

راه‌حل در تساوی داده شده قرار می‌دهیم $x=۲$:

$x=۲ \Rightarrow f(۲)+۲f(۲)=۸+۱ \Rightarrow f(۲)=۳$

بنابراین

$f(x)+۳x=x^۳+۱ \Rightarrow f(x)=x^۳-۳x+۱ \Rightarrow f(-۲)=-۸+۶+۱=-۱$

تست ۳

اگر $D_f=\mathbb{R}$ و $f(x+۱)=x^۳+۳x^۲+۳x$، مقدار $f(\sqrt[۳]{۲})$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\sqrt[۳]{۴}$ ۴) $\sqrt[۳]{۲}$

راه‌حل تساوی داده شده را به‌صورت $f(x+۱)=(x+۱)^۳-۱$ می‌نویسیم. اکنون اگر فرض کنیم $x+۱=\sqrt[۳]{۲}$، یعنی $x=\sqrt[۳]{۲}-۱$، به‌دست می‌آید

$f(\sqrt[۳]{۲})=(\sqrt[۳]{۲})^۳-۱=۱$

تابع گویا

اگر $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند و $Q(x)$ چندجمله‌ای ثابت صفر نباشد، به تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ و دامنهٔ $D_f=\{x|Q(x)\neq ۰\}$ **تابع گویا** می‌گوییم.

مثال: تابع‌های زیر گویا هستند:

الف) $f(x)=\frac{۱}{x}$, $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$ ب) $f(x)=\frac{x}{x-۱}$, $D_f=\mathbb{R}-\{۱\}$ پ) $f(x)=\frac{x-۱}{x^۲+۱}$, $D_f=\mathbb{R}$

تست ۴

اگر $f(x)=\frac{x^{2}}{x^{2}-1}$ و $D_f=\mathbb{R}-\{\pm1\}$، حاصل $f(\frac{1}{x})$ کدام است؟

۱) $\frac{x^{2}}{1-x^{2}}$ ۲) $\frac{1}{1-x^{2}}$ ۳) $\frac{1-x^{2}}{x^{2}}$ ۴) $\frac{x^{2}-1}{x^{2}}$

راه‌حل می‌توان نوشت

$$f(\frac{1}{x})=\frac{(\frac{1}{x})^{2}}{(\frac{1}{x})^{2}-1}=\frac{\frac{1}{x^{2}}}{\frac{1}{x^{2}}-1}=\frac{\frac{1}{x^{2}}}{\frac{1-x^{2}}{x^{2}}}=\frac{1}{1-x^{2}}$$

تست ۵

اگر $D_f=\mathbb{R}-\{1,\frac{1}{3}\}$ و $f(\frac{x-1}{x+1})=\frac{x+1}{x-2}$، مقدار $f(\frac{1}{2})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل اگر معادلهٔ $\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{2}$ را حل کنیم، به‌دست می‌آید $x=3$. بنابراین اگر در تساوی داده شده قرار دهیم $x=3$ ، به‌دست می‌آید

$$f(\frac{2}{4})=\frac{4}{1}\Rightarrow f(\frac{1}{2})=4$$

تست ۶

اگر $f(\frac{x-1}{2x+1})=\frac{2x-1}{x+1}$ ، آن‌گاه $f(x)$ برای هر $x\in\mathbb{R}-\{2,\frac{1}{2}\}$ کدام است؟

۱) $\frac{4x+1}{x+1}$ ۲) $\frac{2x+1}{1-x}$ ۳) $\frac{1}{2x-1}$ ۴) $\frac{4x+1}{2-x}$

راه‌حل فرض می‌کنیم $t=\frac{x-1}{2x+1}$ ، بنابراین

$$2tx+t=x-1\Rightarrow(2t-1)x=-t-1\Rightarrow x=\frac{t+1}{1-2t}$$

در نتیجه

$$f(t)=\frac{2(\frac{t+1}{1-2t})-1}{\frac{t+1}{1-2t}+1}\xrightarrow[\text{را در }(1-2t)\text{ ضرب می‌کنیم}]{\text{صورت و مخرج کسر}}\frac{2t+2-1+2t}{t+1+1-2t}=\frac{4t+1}{2-t}\Rightarrow f(x)=\frac{4x+1}{2-x}$$

پیدا کردن دامنهٔ تابع از روی ضابطه

وقتی می‌خواهیم یک تابع را معرفی کنیم، باید دامنهٔ آن را نیز مشخص کنیم. مثلاً دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-2$ می‌تواند $\mathbb{R}$ یا $[1,2]$ یا $\{0,1,2,3\}$ یا هر مجموعهٔ دلخواه دیگری باشد. ولی اگر دامنهٔ تابع f را معین نکردیم و فقط ضابطهٔ آن را نوشتیم، قرارداد می‌کنیم که دامنهٔ تابع f را مجموعهٔ تمام مقادیری از x در نظر بگیریم که $f(x)$ به‌ازای آن‌ها بامعنی است. مثلاً اگر ضابطهٔ تابع f را به صورت $f(x)=\frac{1}{x}$ معرفی کنیم، دامنهٔ تابع f را طبق این قرارداد مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{0\}$ در نظر می‌گیریم، زیرا عبارت $\frac{1}{x}$ فقط به‌ازای $x=0$ بامعنی نیست.

دامنهٔ توابع گویا

برای پیدا کردن دامنهٔ توابع گویا، همهٔ مقادیری که مخرج را صفر می‌کنند، پیدا می‌کنیم و مجموعهٔ آن‌ها را از $\mathbb{R}$ کم می‌کنیم.

مثال: می‌خواهیم دامنهٔ تابع گویای $f(x)=\frac{x+2}{x^{3}-x}$ را پیدا کنیم. ابتدا عددهایی را پیدا می‌کنیم که مخرج را صفر می‌کنند. توجه کنید که

$$x^{3}-x=0\Rightarrow x(x^{2}-1)=0\Rightarrow x(x-1)(x+1)=0\Rightarrow x=0\ ,\ x=-1\ ,\ x=1$$

بنابراین باید مجموعهٔ $\{0,-1,1\}$ را از $\mathbb{R}$ کم کنیم تا دامنهٔ تابع f به‌دست بیاید، پس $D_f=\mathbb{R}-\{0,-1,1\}$.

تست ۷

مجموع اعدادی که در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x^{2}-4}{x^{2}-3x+1}$ قرار ندارند، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل اعدادی که جواب معادلهٔ $x^{2}-3x+1=0$ باشند، در دامنهٔ تابع f قرار ندارند. مجموع این اعداد برابر ۳ است.

تست ۸

دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۲x-۱}{x^۲+kx+۱}$ **به ازای کدام مقدار** k **برابر** $\mathbb{R}$ **است؟**

۱) $k=۲$ ۲) $k=۵$ ۳) $k=-۳$ ۴) $k=\frac{۱}{۲}$

راه‌حل اگر دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ باشد، باید مخرج $f(x)$ به‌ازای تمام مقادیر حقیقی x مخالف صفر باشد، پس

$$x^۲+kx+۱=۰ \xrightarrow{\Delta<۰} \Delta=k^۲-۴<۰ \Rightarrow k^۲<۴ \Rightarrow |k|<۲ \Rightarrow -۲<k<۲$$

با توجه به مقادیر داده شده گزینهٔ (۴) درست است.

تست ۹

اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x-۱}{۲x^۲+ax+b}$ **به‌صورت** $\mathbb{R}-\{-۲\}$ **باشد، حاصل** $a+b$ **کدام است؟** $(a^۲\geq ۸b)$

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

راه‌حل فقط عدد -۲ در دامنهٔ تابع قرار ندارد، پس تنها ریشهٔ مخرج $f(x)$ عدد -۲ است. بنابراین عبارت مخرج مضربی از $(x+۲)^۲$ است. با توجه به ضریب $x^۲$ در مخرج $f(x)$، این عبارت $۲(x+۲)^۲$ است و در نتیجه

$$۲(x+۲)^۲=۲x^۲+ax+b \Rightarrow ۲x^۲+۸x+۸=۲x^۲+ax+b \Rightarrow a=۸\ ,\ b=۸ \Rightarrow a+b=۱۶$$

تست ۱۰

دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x}{۲x^۲+ax+b}$ **به صورت** $\mathbb{R}-\{-۳,۱\}$ **است. مقدار** $a-b$ **کدام است؟**

۱) ۱۰ ۲) -۱۰ ۳) ۲ ۴) -۲

راه‌حل $x=-۳$ و $x=۱$ ریشه‌های مخرج کسر ضابطهٔ تابع هستند، یعنی

$$۲(-۳)^۲+a(-۳)+b=۰ \Rightarrow b=۳a-۱۸\ ,\quad ۲(۱)^۲+a(۱)+b=۰ \Rightarrow b=-a-۲$$

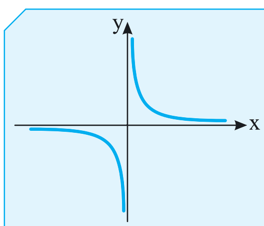
بنابراین

$$۳a-۱۸=-a-۲ \Rightarrow ۴a=۱۶ \Rightarrow a=۴ \Rightarrow b=-۶ \Rightarrow a-b=۱۰$$

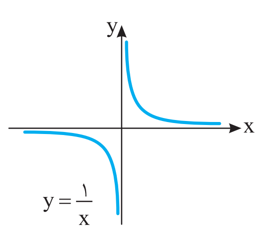
تابع گویای $f(x)=\frac{۱}{x}$

نمودار تابع گویای $f(x)=\frac{۱}{x}$ **که دامنهٔ آن** $\mathbb{R}-\{۰\}$ **است، به شکل مقابل است.**

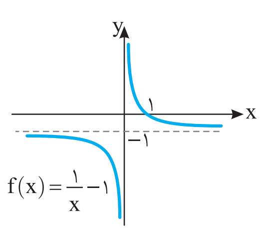
از روی این نمودار معلوم است که برد تابع f **مجموعهٔ** $\mathbb{R}-\{۰\}$ **است.**



مثال: برای رسم نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}-۱$ کافی است نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را یک واحد به سمت پایین منتقل کنیم.



$y=\frac{۱}{x}$

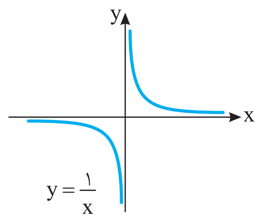


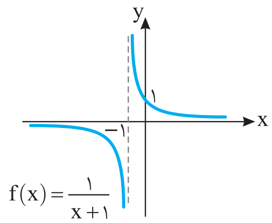
$f(x)=\frac{۱}{x}-۱$

$D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$

$R_f=\mathbb{R}-\{-۱\}$

مثال: برای رسم نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x+۱}$ کافی است نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را یک واحد به سمت چپ منتقل کنیم.



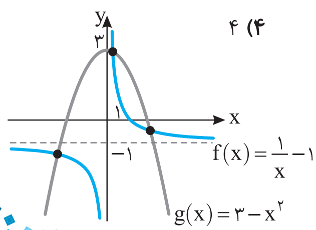


$D_f=\mathbb{R}-\{-۱\}$
$R_f=\mathbb{R}-\{۰\}$

تست ۱۱ نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}-۱$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x)=۳-x^۲$ را قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل اگر نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را یک واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}-۱$ به‌دست می‌آید که مطابق شکل مقابل در سه نقطه نمودار تابع $g(x)=۳-x^۲$ را قطع می‌کند.



تابع هموگرافیک

به تابعی گویا که ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ (با شرط $c\neq۰$ و $ad\neq bc$) و دامنهٔ آن برابر $\mathbb{R}-\{-\frac{d}{c}\}$ است، **تابع هموگرافیک** می‌گویند.

برد تابع f برابر $\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$ است.

نکته

- اگر $c=۰$ و $d\neq۰$، آن‌گاه تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ تابع خطی $f(x)=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$ است.
- اگر $c\neq۰$ و $ad=bc$، آن‌گاه تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ تابع ثابت $f(x)=\frac{a}{c}$ است.

تست ۱۲ اگر تابع $f(x)=\frac{۲x-k^۲}{kx+۴}$ تابعی ثابت باشد، مقدار $f(x)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲

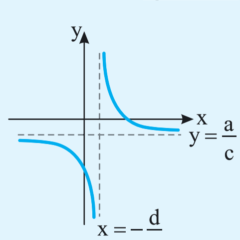
راه‌حل چون f تابعی ثابت است، پس $۲\times۴=(-k^۲)\times k$. بنابراین $k^۳=-۸$، یعنی $k=-۲$. در نتیجه $f(x)=\frac{۲x-۴}{-۲x+۴}=-۱$.

رسم نمودار تابع هموگرافیک

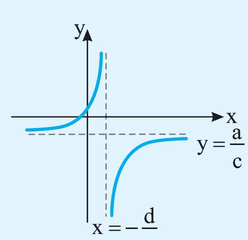
برای رسم نمودار تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱) ابتدا خط‌های $x=-\frac{d}{c}$ و $y=\frac{a}{c}$ را به‌صورت خط‌چین رسم می‌کنیم.

۲) اگر $ad-bc<۰$، نمودار تابع f به‌صورت شکل (۱) و اگر $ad-bc>۰$، نمودار تابع f به‌صورت شکل (۲) است.

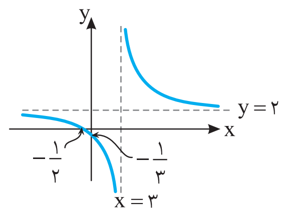


شکل (۱)

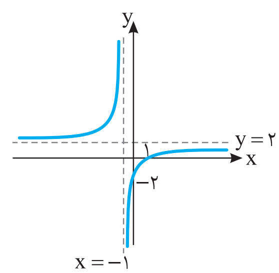


شکل (۲)

مثال: برای رسم نمودار تابع $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$، ابتدا خط‌های $x=3$ و $y=2$ را به‌صورت خط‌چین رسم می‌کنیم. چون $ad-bc=2(-3)-1\times1=-7<0$، پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است:



مثال: برای رسم نمودار تابع $f(x)=\frac{2x-2}{x+1}$، ابتدا خط‌های $x=-1$ و $y=2$ را به‌صورت خط‌چین رسم می‌کنیم. چون $ad-bc=2\times1-(-2)\times1=4>0$، پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است:

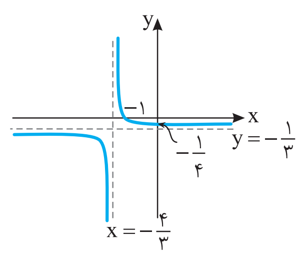


تست ۱۳

نمودار تابع $f(x)=\frac{-1-x}{3x+4}$ از کدام ناحیهٔ صفحهٔ مختصات عبور نمی‌کند؟

۱) اول　　۲) دوم　　۳) سوم　　۴) چهارم

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $ad-bc=(-1)\times4-(-1)\times3=-1<0$. پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است که از ناحیهٔ اول نمی‌گذرد.

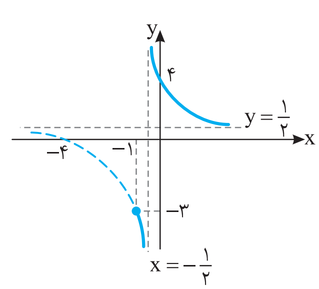


تست ۱۴

اگر $f(x)=\frac{x+4}{2x+1}$ و $D_f=[-1,+\infty]$، برد تابع f شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $ad-bc=1\times1-4\times2=-7<0$. پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است. بنابراین برد تابع f برابر با $(-\infty,-3]\cup(\frac{1}{2},+\infty)$ است، که شامل عددهای صحیح -2، -1 و صفر نیست.



توابع گویا

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

۷۷۹- اگر $\frac{2x+f(x)}{xf(x)-3}=4$، ضابطهٔ تابع f کدام است؟

۱) $f(x)=\frac{2x}{4x+1}$
۲) $f(x)=\frac{4x+12}{4x-1}$
۳) $f(x)=\frac{3x-2}{2x+1}$
۴) $f(x)=\frac{2x+12}{4x-1}$

۷۸۰- اگر $f(x)=\frac{3x-4}{2x+1}$، جواب معادلهٔ $f(2x)=2$ کدام است؟

۱) صفر
۲) -1
۳) -2
۴) -3

۷۸۱- در تابع $f(x)=\frac{8x}{x^2+3}$، اگر $f(a)=-2$، مقدار $f(a+2)$ کدام است؟

۱) ± 1
۲) ± 2
۳) ± 4
۴) صفر

۷۸۲- اگر $f(x-2)=\frac{3x}{2x+5}$، جواب معادلهٔ $f(x)=3$ کدام است؟

۱) -7
۲) 1
۳) صفر
۴) -5

۷۸۳- در تابع $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$، مقدار $f(a)f(-\frac{1}{a})$ به ازای $a\neq 1,-1$ کدام است؟

۱) 1
۲) -1
۳) $(a+1)^2$
۴) $\frac{1}{(a-1)^2}$

۷۸۴- اگر $f(\frac{x^4-1}{x^4+2})=x^4-x^8+x^{16}$، مقدار $f(\frac{1}{4})$ کدام است؟

۱) 12
۲) 14
۳) 16
۴) 18

۷۸۵- اگر $f(\frac{3x+4}{5x+2})=\frac{x^2+6x+10}{3x+2}$، مقدار $f(2)$ کدام است؟

۱) 2
۲) 3
۳) 4
۴) 5

۷۸۶- اگر $f(\frac{x+2}{x-1})=\frac{mx+1}{x+1}$ و $f(4)=3$، مقدار $f(0)$ کدام است؟

۱) -7
۲) -2
۳) 7
۴) 2

۷۸۷- اگر $f(\frac{x^2+1}{x})=3x+\frac{3}{x}-4$، مقدار $f(4)$ کدام است؟

۱) 4
۲) 6
۳) 8
۴) 12

۷۸۸- اگر $f(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1})=x^3+3x+2$، مقدار $f(3)$ کدام است؟

۱) 5
۲) 8
۳) 6
۴) 10

۷۸۹- چند عدد حقیقی در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x-1}{x^2-3x+2}$ قرار ندارد؟ کتاب درسی

۱) 1
۲) 2
۳) 3
۴) صفر

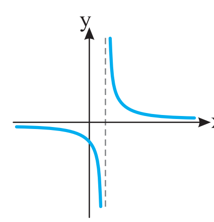
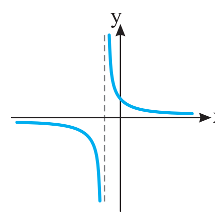
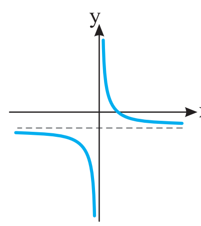
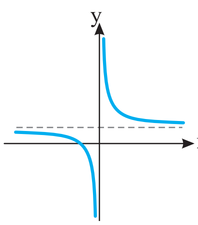
۷۹۰- چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x+2}{2x^3-5x^2+2x}$ قرار ندارند؟

۱) 1
۲) 2
۳) 3
۴) صفر

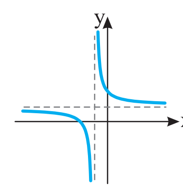
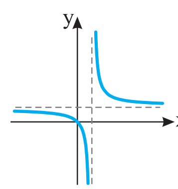
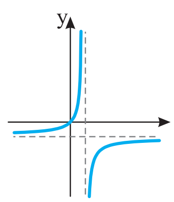
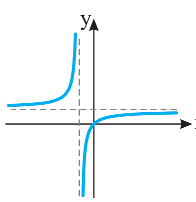
۷۹۱- در تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{x}+۱$ و دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۰,۱\}$، مجموع اعدادی که در برد تابع قرار ندارند، کدام است؟ کتاب درسی

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

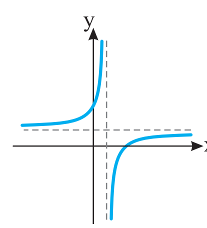
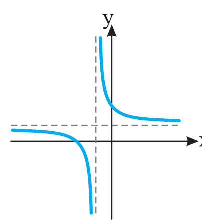
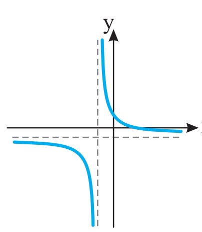
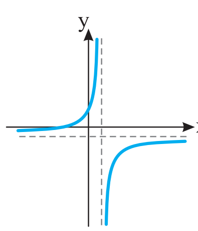
۷۹۲- نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ کدام است؟ کتاب درسی

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۷۹۳- نمودار تابع $f(x)=۱+\frac{۱}{x-۱}$ کدام است؟ کتاب درسی

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۷۹۴- نمودار تابع $y=\frac{x+۲}{x+۱}$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۷۹۵- اگر $f(x)=\frac{۱}{x+۲}$ و $R_f=\mathbb{R}-\{۰,۱,۲\}$، حاصل‌ضرب اعدادی که در دامنهٔ تابع f قرار ندارند، کدام است؟

۱) -۳
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) صفر

۷۹۶- نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x+۳}$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x)=|x|$ را قطع می‌کند؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۷۹۷- نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۲}+۱$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x)=x^۲$ را قطع می‌کند؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

سطح ۲

۷۹۸- اگر $f(\frac{۲}{x-۱})=\frac{x+۱}{x-۱}$، ضابطهٔ تابع f برای هر $x\neq ۰$ کدام است؟

۱) $f(x)=\frac{x+۱}{۲}$
۲) $f(x)=\frac{۱}{x+۱}$
۳) $f(x)=x+۱$
۴) $f(x)=\frac{۲}{x+۱}$

۷۹۹- اگر $f(\frac{x+۱}{x-۲})=۲x-۱$، آن‌گاه $f(x)$ برای هر $x\neq ۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۳x+۳}{x-۱}$
۲) $\frac{۳x-۱}{x-۱}$
۳) $\frac{۲x-۳}{x-۱}$
۴) $\frac{۵x+۴}{x-۱}$

۸۰۰- چند عدد در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x^۳-۲x^۲-x+۲}$ قرار ندارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۸۰۱- چند عدد در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x^۲+x+۱}{x^۴-۳x^۲+۲}$ قرار ندارند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

۸۰۲- سه عدد در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x}{x^۳+kx^۲+x}$ قرار ندارند. حدود k کدام است؟

۱) $|k|<۱$ ۲) $|k|>۲$ ۳) $|k|<۲$ ۴) $۱<|k|<۲$

۸۰۳- اگر $x=-۲$ در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۱}{x^۳-ax^۲+۲ax}$ نباشد، دامنهٔ این تابع کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{-۲,۰,۱\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{-۲,۰,۲\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{-۲,-۱,۱\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{-۲,-۱,۰\}$

۸۰۴- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x}{x^۲+mx+۲}$ مجموعهٔ $\mathbb{R}$ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $-۲\sqrt{۲}<m<۲\sqrt{۲}$ ۲) $m>۲\sqrt{۲}$ ۳) $-\sqrt{۲}<m<\sqrt{۲}$ ۴) $m>\sqrt{۲}$

۸۰۵- اگر m عددی صحیح و دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۴}{x^۲+۲x-m+۴}$ مجموعهٔ عددهای حقیقی باشد، بیشترین مقدار ممکن m کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۰۶- دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{x^۲-(a^۲+۱)x-b^۲}$ به صورت $\mathbb{R}-\{-۱,۶\}$ است. مقدار $a^۲+b^۲$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۸۰۷- اگر دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{۲x^۲-ax+۳b}$ برابر $\mathbb{R}-\{-۱\}$ باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) -۲ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) ۳ ۴) $-\frac{۸}{۳}$

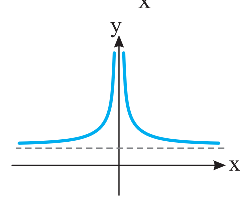
۸۰۸- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۱}{m^۲x^۲+x+۱}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{n\}$ است. حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای n کدام است؟

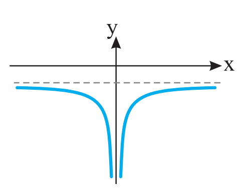
۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

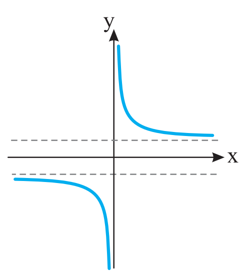
۸۰۹- نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x-۱}{x-۱}$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x)=۱-x^۲$ را قطع می‌کند؟

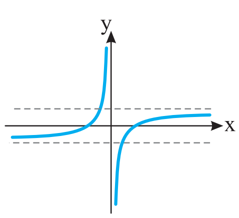
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۸۱۰- نمودار تابع $y=\frac{۱+|x|}{x}$ کدام است؟

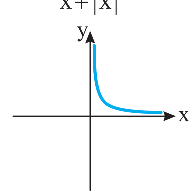
۱) 

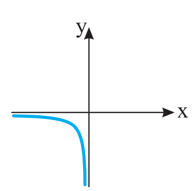
۲) 

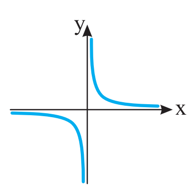
۳) 

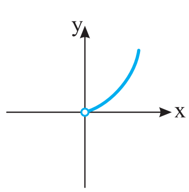
۴) 

۸۱۱- نمودار تابع $f(x)=\frac{۲}{x+|x|}$ به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۸۱۲- برد تابع $f(x)=\frac{۴x+۱}{۲x-۶}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{۲\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۳\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{۲,۳\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{-۲\}$

۸۱۳- اگر $f(x)=\frac{۶x-۱}{۲x-۴}$ و $D_f=\mathbb{R}-\{۲,۴\}$، مجموع اعدادی که در برد تابع f قرار ندارند، کدام است؟

۱) $\frac{۲۱}{۴}$ ۲) $\frac{۲۳}{۴}$ ۳) $\frac{۲۵}{۴}$ ۴) $\frac{۳۵}{۴}$

۸۱۴- چند عدد صحیح در برد تابع $f(x)=\frac{۳x-۱}{x+۲}$ با دامنهٔ $(-\infty,-۱]-\{-۲\}$ قرار ندارند؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

سطح ۳

۸۱۵- اگر $f(x)=\frac{۱}{x}$، کدام گزینه حاصل $f(a)-f(b)$ را درست نشان می‌دهد؟

۱) $f(\frac{b-a}{ab})$ ۲) $f(\frac{ab}{a-b})$ ۳) $f(\frac{a-b}{ab})$ ۴) $f(\frac{ab}{b-a})$

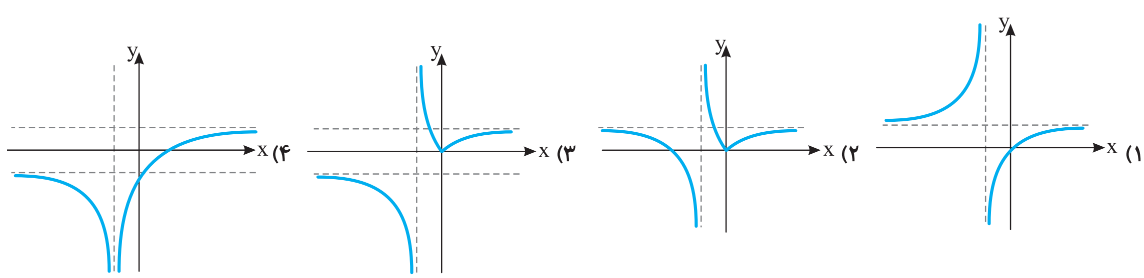
۸۱۶- اگر $f(x)=\frac{x}{x+۲}$، حاصل $f(x-۲)$ برحسب $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲f(x)+۱}{f(x)}$ ۲) $\frac{f(x)-۲}{f(x)}$ ۳) $\frac{۲f(x)-۱}{f(x)}$ ۴) $\frac{f(x)+۲}{f(x)}$

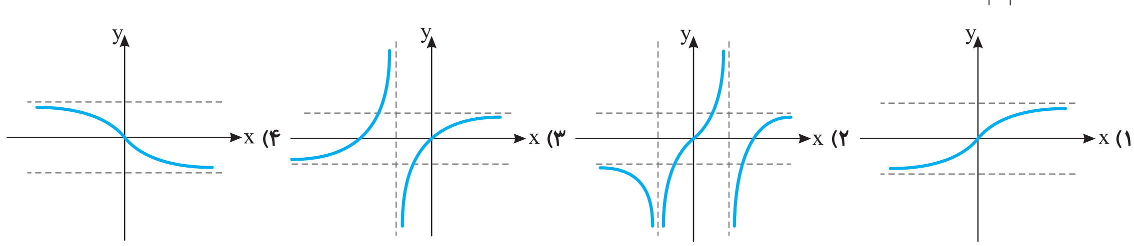
۸۱۷- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۱}{x^۳+ax^۲+b}$ برابر $\mathbb{R}-\{۲\}$ است. مجموعهٔ مقادیر ممکن a کدام است؟

۱) $(-۲,۶)$ ۲) $(۲,۶)$ ۳) $(-۶,۲)$ ۴) $(-۶,-۲)$

۸۱۸- نمودار تابع $f(x)=\frac{|x|}{x+۱}$ به کدام صورت است؟



۸۱۹- نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{|x|+۱}$ به کدام صورت است؟



درس اول / بخش دوم: توابع رادیکالی

تابع رادیکالی

به تابعی که به هر عدد حقیقی نامنفی، جذر آن را نسبت می‌دهد **تابع رادیکالی** می‌گوییم.

مثال: تابع‌های زیر رادیکالی هستند:

الف) $f(x)=\sqrt{x}\ ,\quad D_f=[0,+\infty)$ ب) $f(x)=\sqrt{x-1}\ ,\quad D_f=[1,+\infty)$

تست ۱

اگر $f(x)=\sqrt{1-x}$ و $a<0$، حاصل $f(1-a^2)$ کدام است؟

۱) $-a$ ۲) a ۳) $1-a$ ۴) $1+a$

راه‌حل می‌توان نوشت

$$f(1-a^2)=\sqrt{1-(1-a^2)}=\sqrt{1-1+a^2}=\sqrt{a^2}=|a|=-a$$

دامنهٔ توابع رادیکالی

برای پیدا کردن دامنهٔ توابع رادیکالی، مجموعهٔ همهٔ مقادیری را پیدا می‌کنیم که عبارت زیر رادیکال به ازای آن‌ها نامنفی است.

مثال: دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x+3}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$x+3\geq 0\Rightarrow x\geq -3\Rightarrow D_f=[-3,+\infty)$$

تست ۲

چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{3x-x^2}$ وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

راه‌حل مقادیری از x را پیدا می‌کنیم که به ازای آن‌ها عبارت زیر رادیکال نامنفی است:

$$3x-x^2\geq 0\Rightarrow x(3-x)\geq 0$$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$3x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

بنابراین به ازای $x\in[0,3]$ عبارت $3x-x^2$ که زیر رادیکال قرار دارد، نامنفی است، یعنی $D_f=[0,3]$، در نتیجه فقط چهار عدد صحیح صفر، ۱، ۲ و ۳ در دامنهٔ تابع f وجود دارند.

دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$

برحسب اینکه عبارت ax^2+bx+c ثابت، خطی یا درجهٔ دوم باشد، دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ به‌صورت زیر است:

حالت ۱: $a=b=0$. در این صورت $f(x)=\sqrt{c}$ و با توجه به علامت c، تابع f مطابق جدول زیر است:

	$c\geq 0$	$c<0$
D_f	$\mathbb{R}$	$\varnothing$

حالت ۲: $a=0$ و $b\neq 0$. در این صورت $f(x)=\sqrt{bx+c}$ و با توجه به علامت b، تابع f مطابق جدول زیر است:

	$b>0$	$b<0$
D_f	$[-\frac{c}{b},+\infty)$	$(-\infty,-\frac{c}{b}]$

- $-\frac{c}{b}$ ریشهٔ چندجمله‌ای $bx+c$ (عبارت زیر رادیکال) است.

حالت ۳: $a\neq 0$. در این صورت با توجه به علامت a و علامت دلتای عبارت زیر رادیکال، دامنهٔ تابع f مطابق جدول زیر است:

	$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
$a>0$	$D_f=\mathbb{R}$	$D_f=\mathbb{R}$	$D_f=(-\infty,x_1]\cup[x_2,+\infty)$
$a<0$	$D_f=\varnothing$	$D_f=\{-\frac{b}{2a}\}$	$D_f=[x_1,x_2]$

- **x_1 و x_2 ریشه‌های چندجمله‌ای ax^2+bx+c (عبارت زیر رادیکال) هستند و** $x_1\leq x_2$.

تست ۳

اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{(a^2-16)x+a}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، مقدار $f(a)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل ابتدا توجه کنید که عبارت زیر رادیکال یک چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر ۱ است. پس مطابق جدول‌های بالا، اگر ضریب x در عبارت زیر رادیکال برابر صفر نباشد، آن‌گاه دامنهٔ تابع f بازه‌ای است که برابر با $\mathbb{R}$ نیست. بنابراین باید $a^2-16=0$، یعنی $a=-4$ یا $a=4$. در این صورت $f(x)=\sqrt{a}$، پس $a=-4$ قابل قبول نیست. بنابراین $a=4$ و $f(a)=f(4)=\sqrt{4}=2$.

تست ۴

اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{ax+a^2-3}$ بازهٔ $(-\infty,2]$ باشد، مقدار $f(\frac{a}{3})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل مطابق جدول‌های بالا، باید a منفی باشد و $x=2$ ریشهٔ چندجمله‌ای $ax+a^2-3$ باشد. در نتیجه

$$a\times 2+a^2-3=0\Rightarrow a^2+2a-3=0\Rightarrow a=-3\ ,\ a=1$$

چون a باید عددی منفی باشد، پس $a=-3$. بنابراین $f(x)=\sqrt{-3x+6}$. در نتیجه

$$f(\frac{a}{3})=f(-1)=\sqrt{-3(-1)+6}=\sqrt{9}=3$$

تست ۵

اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{2x^2+mx+8}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، حداکثر مقدار ممکن m کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

راه‌حل برای اینکه دامنهٔ تابع f برابر $\mathbb{R}$ باشد باید عبارت $2x^2+mx+8$ به ازای هر مقدار حقیقی x نامنفی باشد. بنابراین باید ضریب x^2 در این عبارت، مثبت و Δ نامثبت باشد. پس

$$\Delta\leq 0\Rightarrow m^2-64\leq 0\Rightarrow m^2\leq 64\Rightarrow |m|\leq 8\Rightarrow -8\leq m\leq 8$$

بنابراین حداکثر مقدار ممکن m برابر ۸ است.

تست ۶

اگر دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{(a-2)x^2+bx+6}$ بازهٔ $(-\infty,2]$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱ ۳) -1 ۴) -5

راه‌حل باید جواب $(a-2)x^2+bx+6\geq 0$ به صورت $x\leq 2$ باشد. با توجه به تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم، ممکن نیست جواب نامعادلهٔ درجه دوم به شکل $x\leq 2$ باشد. بنابراین باید $a-2=0$ تا نامعادله به صورت $bx+6\geq 0$ درآید. برای اینکه جواب نامعادلهٔ اخیر به صورت $x\leq 2$ باشد، باید ۲ ریشهٔ عبارت $bx+6$ باشد. یعنی

$$2b+6=0\Rightarrow b=-3$$

بنابراین $a=2$، $b=-3$ و $a+b=-1$.

دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(x)}$

دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(x)}$ برابر با مجموعهٔ همهٔ xهایی از دامنهٔ تابع f است که به ازای آن‌ها $f(x)\geq 0$. برای پیدا کردن دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(x)}$، اشتراک دامنهٔ تابع f و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $f(x)\geq 0$ را پیدا می‌کنیم.

مثال: می‌خواهیـم دامنـهٔ تابـع $g(x)=\sqrt{|x|-۱}$ را پیدا کنیم. توجه کنیـد که دامنهٔ تابع $f(x)=|x|-۱$ برابر با $\mathbb{R}$ اسـت. همچنین، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x|-۱\geq ۰$ به‌صورت مقابل است:

$$|x|-۱\geq ۰\Rightarrow |x|\geq ۱\Rightarrow x\in(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$$

اشتراک این مجموعهٔ جواب‌ها با $\mathbb{R}$ برابر است با $(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$. در نتیجه $D_g=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$.

مثال: می‌خواهیم دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{۱-\sqrt{x}}$ را پیدا کنیم. ابتدا توجه کنید که دامنهٔ تابع $f(x)=۱-\sqrt{x}$ برابر با $[۰,+\infty)$ است. از طرف دیگر،

$$۱-\sqrt{x}\geq ۰\Rightarrow \sqrt{x}\leq ۱\Rightarrow x\in[۰,۱]$$

در نتیجه $D_g=[۰,+\infty)\cap[۰,۱]=[۰,۱]$.

تست ۷

چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۴-\sqrt{۱-۲x}}$ قرار دارند؟

۱) ۶ **۲)** ۷ **۳)** ۸ **۴)** ۹

راه‌حل عبارت‌های زیر رادیکال‌ها باید نامنفی باشند، پس

$$۱-۲x\geq ۰\Rightarrow x\leq \frac{۱}{۲}\ ,\quad ۴-\sqrt{۱-۲x}\geq ۰\Rightarrow ۴\geq \sqrt{۱-۲x}\Rightarrow ۴^۲\geq ۱-۲x\Rightarrow ۲x\geq -۱۵\Rightarrow x\geq -\frac{۱۵}{۲}$$

بنابراین $D_f=[-\frac{۱۵}{۲},\frac{۱}{۲}]$. عددهای صحیح ۰، ۱−، ۲−، ۳−، ۴−، ۵−، ۶− و ۷− در دامنهٔ تابع قرار دارند.

تست ۸

چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{||x|-۲|-۱}$، قرار <u>ندارند</u>؟

۱) ۱ **۲)** ۲ **۳)** ۳ **۴)** ۴

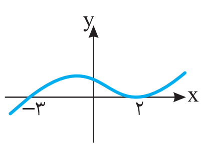
راه‌حل عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، پس

$$||x|-۲|-۱\geq ۰\Rightarrow ||x|-۲|\geq ۱\Rightarrow |x|-۲\geq ۱\Rightarrow |x|\geq ۳\Rightarrow x\geq ۳ \text{ یا } x\leq -۳ \quad \text{یا} \quad |x|-۲\leq -۱\Rightarrow |x|\leq ۱\Rightarrow -۱\leq x\leq ۱$$

در نتیجه $D_f=(-\infty,-۳]\cup[-۱,۱]\cup[۳,+\infty)$. بنابراین فقط عددهای صحیح ۲ و ۲− در دامنهٔ تابع قرار ندارند.

تست ۹

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\frac{f(x)}{۱-x^۲}}$ کدام است؟



۱) $(-\infty,-۳)\cup[-۱,۱]$ **۲)** $(-\infty,-۳]\cup(-۱,۱)$

۳) $(-\infty,-۳]\cup(-۱,۱)\cup\{۲\}$ **۴)** $(-\infty,-۳]\cup[-۱,۱]$

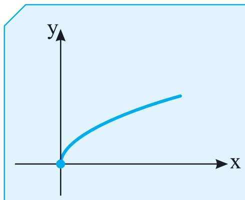
راه‌حل توجه کنید که $D_g=\{x|\frac{f(x)}{۱-x^۲}\geq ۰, x^۲\neq ۱\}$. در جدول زیر $f(x)$، $۱-x^۲$ و $\frac{f(x)}{۱-x^۲}$ تعیین علامت شده‌اند:

x	−∞		−۳		−۱		۱		۲		+∞
$f(x)$		−	۰	+		+		+	۰	+	
$۱-x^۲$		−		−	۰	+	۰	−		−	
$\frac{f(x)}{۱-x^۲}$		+	۰	−	ت ن	+	ت ن	−	۰	−	

بنابراین $D_g=(-\infty,-۳]\cup(-۱,۱)\cup\{۲\}$.

تابع $f(x)=\sqrt{x}$

نمودار تابع ریشهٔ دوم به‌صورت روبه‌رو است.



$f(x)=\sqrt{x}$

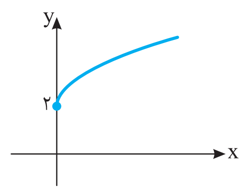
$D_f=[۰,+\infty)$

$R_f=[۰,+\infty)$

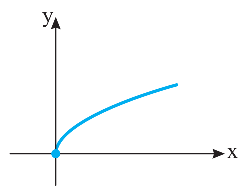
مثال: برای رسم نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}+۲$ کافی است نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را دو واحد به سمت بالا منتقل کنیم.

$D_f=[۰,+\infty)$

$R_f=[۲,+\infty)$



$f(x)=\sqrt{x}+۲$

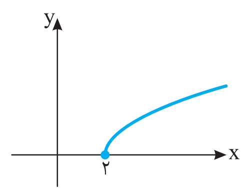


$y=\sqrt{x}$

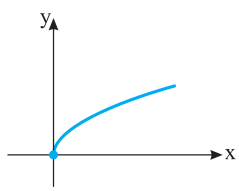
مثال: برای رسم نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ کافی است نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را دو واحد به سمت راست منتقل کنیم.

$D_f=[۲,+\infty)$

$R_f=[۰,+\infty)$



$f(x)=\sqrt{x-۲}$

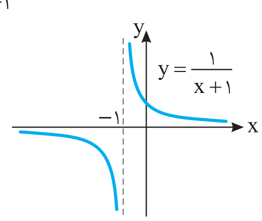


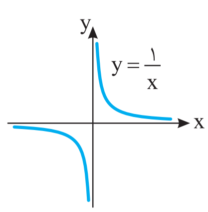
$y=\sqrt{x}$

تست ۱۰ **نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ نمودار تابع $g(x)=\frac{۱}{x+۱}$ را در نقطه‌ای به طول a قطع می‌کند. a در کدام بازه قرار دارد؟**

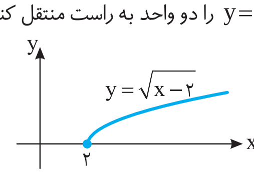
۱) $(۱,\frac{۳}{۲})$ **۲)** $(\frac{۳}{۲},۲)$ **۳)** $(۲,۳)$ **۴)** $(۳,۴)$

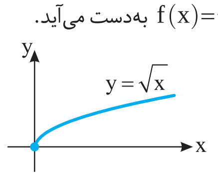
راه‌حل اگر نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم نمودار تابع $g(x)=\frac{۱}{x+۱}$ به‌دست می‌آید.



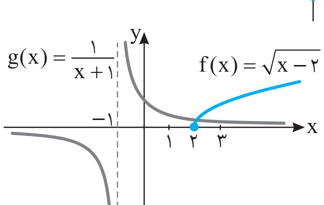


اگر نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را دو واحد به راست منتقل کنیم نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ به‌دست می‌آید.

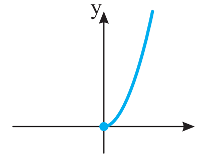


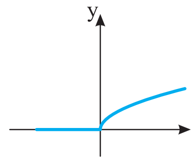


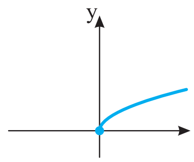
مطابق شکل روبه‌رو نمودارهای توابع f و g در نقطهٔ $x=a$ متقاطع‌اند و $a\in(۲,۳)$.

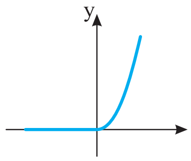


تست ۱۱ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{2x-|x|}$ کدام است؟

۱) 

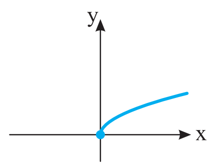
۲) 

۳) 

۴) 

راه‌حل ابتدا توجه کنید که اگر $x<0$، آن‌گاه $2x-|x|=2x-(-x)=3x<0$ و اگر $x\geq 0$، آن‌گاه $2x-|x|=2x-x=x\geq 0$. بنابراین $D_f=[0,+\infty)$.

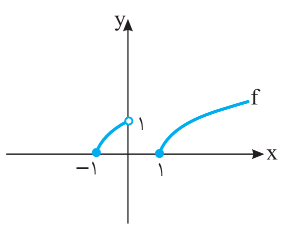
از طرف دیگر، اگر $x\geq 0$، آن‌گاه $f(x)=\sqrt{2x-|x|}=\sqrt{x}$. در نتیجه نمودار تابع f به‌صورت زیر است:



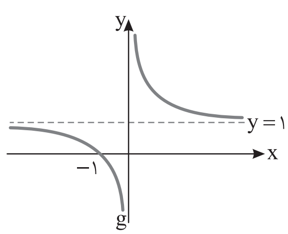
تست ۱۲ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-\frac{x}{|x|}}$ چند نقطهٔ مشترک با نمودار تابع $g(x)=\frac{1}{x}+1$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

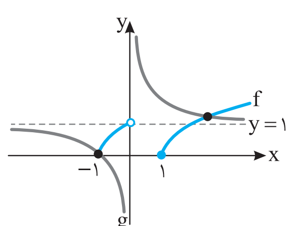
راه‌حل ابتدا توجه کنید که $x-\frac{x}{|x|}=\begin{cases} x-1 & x>0 \\ x+1 & x<0 \end{cases}$. چون دامنهٔ تابع f مجموعهٔ مقادیری از x است که به ازای آن‌ها $x-\frac{x}{|x|}\geq 0$، پس $D_f=[-1,0)\cup[1,+\infty)$. بنابراین $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x-1} & x\geq 1 \\ \sqrt{x+1} & -1\leq x<0 \end{cases}$. پس نمودار تابع f به‌صورت مقابل است.



از طرف دیگر نمودار تابع g به‌صورت روبه‌رو است.



اکنون توجه کنید که مطابق شکل مقابل، نمودارهای تابع‌های f و g دو نقطهٔ مشترک دارند.



توابع رادیکالی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

۸۲۰- اگر تابع f به‌صورت $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+۲}-۲ & x\geq a\\ -۲x+۴ & x\leq a\end{cases}$ تعریف شود، a چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۲۱- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+۲}-۱$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x)=|x|$ را قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۸۲۲- اگر $f(x)=\sqrt{x}+۱$ و $D_f=(۰,+\infty)-\{۴\}$، چند عدد طبیعی در برد تابع f وجود ندارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۸۲۳- اگر $f(x)=\sqrt{x+۱}+۲$ و $D_f=[۰,۳]$، مجموع اعداد صحیحی که در برد تابع f قرار دارند، کدام است؟ کتاب درسی

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۸۲۴- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۵-|x-۳|}$ کدام است؟

۱) $[-۲,۸]$ ۲) $(-۲,۸)$ ۳) $[-۸,۲]$ ۴) $(-۸,۲)$

۸۲۵- چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۲-|x+۱|}$ قرار دارند؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۸۲۶- چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{|x-۱|-۳}$ قرار ندارند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

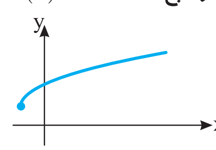
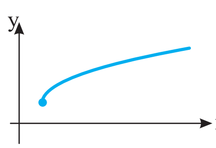
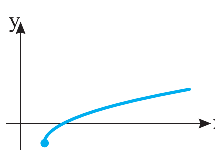
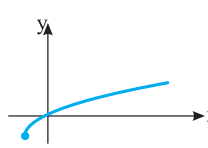
۸۲۷- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{-x^۲+۲x-۱}$ کدام است؟ کتاب درسی

۱) $(-\infty,۱)$ ۲) $[۱,+\infty)$ ۳) $\{۱\}$ ۴) $[۰,۱]$

۸۲۸- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۴x-x^۲-۳}$ بازهٔ $[a,b]$ است. مقدار $۲a+b$ کدام است؟ کتاب درسی

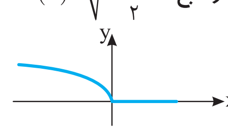
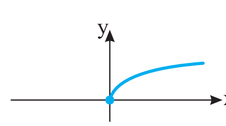
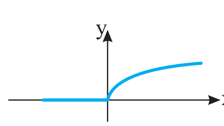
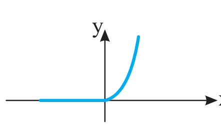
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۸۲۹- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-۱}+۱$ کدام است؟ کتاب درسی

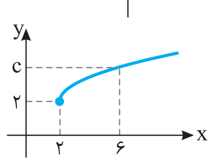
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

سطح ۲

۸۳۰- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+|x|}{۲}}$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۸۳۱- نمودار تابع $f(x)=a+\sqrt{x+b}$ در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $a+b+c$ کدام است؟



۱) ۱۰ ۲) ۶
۳) ۴ ۴) ۲

۸۳۲- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۹-|x^۲-۴|}$ کدام است؟

۱) $[-\sqrt{۱۳},\sqrt{۱۳}]$ ۲) $[-۳,\sqrt{۱۳}]$ ۳) $[-۱,\sqrt{۱۳}]$ ۴) $[-۴,۵]$

۸۳۳- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\frac{x-۱}{x}-\frac{x}{x-۱}}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۰)\cup(\frac{۱}{۲},۱)$ ۲) $(-\infty,۰]\cup(\frac{۱}{۲},۱)$ ۳) $(-\infty,۰)\cup[\frac{۱}{۲},۱)$ ۴) $[\frac{۱}{۲},۱)$

۸۳۴- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۱}{x^۲}-\frac{۱}{x}-۲}$ کدام است؟

۱) $[-۱,۰)$ ۲) $(-\infty,-۱]\cup[۲,+\infty)$ ۳) $[-۱,\frac{۱}{۲}]-\{۰\}$ ۴) $[-\frac{۱}{۲},۱)-\{۰\}$

۸۳۵- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\frac{x^۲-۲x+۸}{-x^۲+۲x+۸}}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-(-۲,۴)$ ۳) $\mathbb{R}-[-۲,۴]$ ۴) $(-۲,۴)$

۸۳۶- چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x^۴-۹x^۲}$ قرار نداردند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۸۳۷- چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x^۲-|x+۶|}$ قرار ندارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۳۸- اگر $f(x)=\sqrt{x^۲-۲ax+a+۲}$ و $D_f=\mathbb{R}$، حدود a کدام است؟

۱) $(-۱,۲)$ ۲) $[-۱,۲]$ ۳) $(۱,۲)$ ۴) $(-۲,-۱)$

۸۳۹- تابع $f(x)=\sqrt{ax^۲+bx+۲a^۲}$ در تمام نقاط بازهٔ $[-۳,۲]$ تعریف می‌شود و در تمام نقاط مجموعهٔ $\mathbb{R}-[-۳,۲]$ تعریف نمی‌شود. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۴ ۳) -۶ ۴) صفر

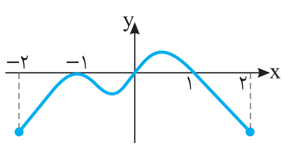
۸۴۰- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{-۲x^۲+۸x+m}$ فقط می‌تواند مجموعه‌ای یک‌عضوی باشد. مقدار m کدام است؟

۱) ۸ ۲) -۸ ۳) ۴ ۴) -۴

۸۴۱- تابع $f(x)=\sqrt{(a+۲)x^۲+ax+b}$ در بازهٔ $(-\infty,۳]$ تعریف می‌شود و در بقیهٔ اعداد تعریف نمی‌شود. مقدار b کدام است؟

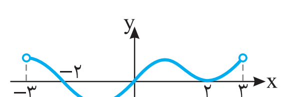
۱) -۲ ۲) -۳ ۳) ۶ ۴) ۴

۸۴۲- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. در دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{-x^۳f(x)}$ چند عدد صحیح وجود دارد؟



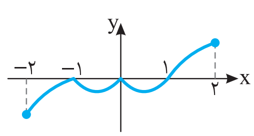
۱) ۲ ۲) ۳
۳) ۴ ۴) ۵

۸۴۳- نمودار تابع f به شکل مقابل است. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\frac{۴-x^۲}{f(x)}}$ کدام است؟



۱) $(۰,۲)$ ۲) $(۰,۳)$
۳) $(-۲,۲)$ ۴) $(-۳,-۲)\cup(۲,۳)$

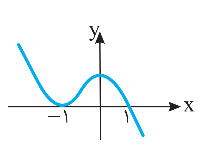
۸۴۴- نمودار تابع f به شکل مقابل است. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\frac{f(x)}{x^۲-x}}$ کدام است؟



۱) $(۰,۲]-\{۱\}$ ۲) $(-۱,۲]-\{۱\}$
۳) $(۰,۲]\cup\{-۱\}$ ۴) $(۰,۱)\cup(۱,۲]\cup\{-۱\}$

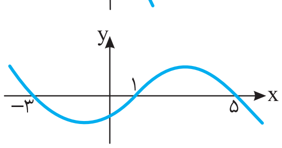
سطح ۳

۸۴۵- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{x-f(x+۱)}$ کدام است؟



۱) $[۰,+\infty)$ ۲) $(-\infty,۰]$
۳) $[۱,+\infty)$ ۴) $[-۱,+\infty)$

۸۴۶- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. حاصل‌جمع عددهای صحیحی که در دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{f(x-۲)f(x+۲)}$ نیستند، کدام است؟



۱) ۱۱ ۲) ۱۶
۳) ۹ ۴) ۷

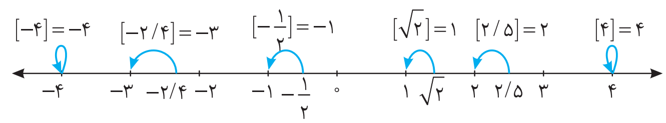
فصل سوم

درس اول / بخش سوم: جزء صحیح یک عدد حقیقی

جزء صحیح یک عدد حقیقی

جزء صحیح هر عدد حقیقی، بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از این عدد کوچک‌تر یا با آن برابر است. جزء صحیح عدد حقیقی x را با $[x]$ نشان می‌دهیم.

مثال:



نکته

برای اینکه جزء صحیح عدد حقیقی x را پیدا کنیم، باید عددی صحیح مانند n پیدا کنیم که $n \le x < n+1$. در این صورت $[x]=n$.

تست ۱

مقدار $[-10\sqrt{2}]+[10\sqrt{3}]$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) صفر

راه‌حل ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{2}\simeq 1/41 \Rightarrow -10\sqrt{2}\simeq -14/1 \Rightarrow -15<-10\sqrt{2}<-14 \Rightarrow [-10\sqrt{2}]=-15$$

$$\sqrt{3}\simeq 1/73 \Rightarrow 10\sqrt{3}\simeq 17/3 \Rightarrow 17<10\sqrt{3}<18 \Rightarrow [10\sqrt{3}]=17$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر است با $-15+17=2$.

تست ۲

حاصل $[x^3]+[2x]$ به ازای $x=-\sqrt{2}$ کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۶- ۳) ۵- ۴) ۸-

راه‌حل ابتدا $x=-\sqrt{2}$ را در عبارت قرار می‌دهیم:

$$[(-\sqrt{2})^3]+[2(-\sqrt{2})]=[-\sqrt{8}]+[-2\sqrt{2}]=[-2\sqrt{2}]+[-2\sqrt{2}]=2[-2\sqrt{2}]$$

با توجه به مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ به‌دست می‌آید

$$1<\sqrt{2}<1/5 \Rightarrow 2<2\sqrt{2}<3 \Rightarrow -3<-2\sqrt{2}<-2 \Rightarrow [-2\sqrt{2}]=-3 \Rightarrow 2[-2\sqrt{2}]=-6$$

تست ۳

مقدار $[4\sin 40^\circ]$ برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل ابتدا توجه کنید که

$$\sin 30^\circ < \sin 40^\circ < \sin 45^\circ \Rightarrow \frac{1}{2} < \sin 40^\circ < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2 < 4\sin 40^\circ < 2\sqrt{2} \simeq 2/8$$

بنابراین $[4\sin 40^\circ]=2$.

ویژگی‌های جزء صحیح

فرض کنید x عددی حقیقی باشد. در این صورت

۱) اگر x عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x]=x$ و برعکس.

۲) اگر n عددی صحیح باشد و $n \le x < n+1$، آن‌گاه $[x]=n$ و برعکس.

۳) $x-1<[x]\le x$ و $[x]\le x<[x]+1$.

۴) $0 \le x-[x] < 1$.

۵) اگر n عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x+n]=[x]+n$ و برعکس.

۶) $[-x]=\begin{cases} -[x] & x\in\mathbb{Z} \\ -[x]-1 & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$ (این تساوی به‌صورت $[-x]+[x]=\begin{cases} 0 & x\in\mathbb{Z} \\ -1 & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$ نیز بیان می‌شود).

نکته

اگر x و y دو عدد حقیقی دلخواه باشند، آن‌گاه در حالت کلی نابرابری‌های زیر برقرارند:

۱) $[x+y]\neq[x]+[y]$ **۲)** $[x-y]\neq[x]-[y]$ **۳)** $[xy]\neq[x][y]$ **۴)** $[\frac{x}{y}]\neq\frac{[x]}{[y]}$

توجه کنید که برای برخی از مقادیر x و y ممکن است هر کدام از نابرابری‌های بالا به تساوی تبدیل شوند. مثلاً اگر $x=۱/۲$ و $y=۲/۳$، آن‌گاه

$$[x+y]=[۱/۲+۲/۳]=[۳/۵]=۳=۱+۲=[۱/۲]+[۲/۳]=[x]+[y]$$

تست ۴

مقدار عبارت $A=[\sqrt[۳]{۱}]+[\sqrt[۳]{۲}]+\cdots+[\sqrt[۳]{۳۰}]$ کدام است؟

۱) ۴۸ **۲)** ۵۷ **۳)** ۵۹ **۴)** ۴۷

راه‌حل می‌دانیم $\sqrt[۳]{۱}=۱$، $\sqrt[۳]{۸}=۲$ و $\sqrt[۳]{۲۷}=۳$. بنابراین

$$[\sqrt[۳]{۱}]=[\sqrt[۳]{۲}]=\cdots=[\sqrt[۳]{۷}]=۱,\quad [\sqrt[۳]{۸}]=[\sqrt[۳]{۹}]=\cdots=[\sqrt[۳]{۲۶}]=۲,\quad [\sqrt[۳]{۲۷}]=[\sqrt[۳]{۲۸}]=[\sqrt[۳]{۲۹}]=[\sqrt[۳]{۳۰}]=۳$$

پس $A=۷\times۱+۱۹\times۲+۴\times۳=۵۷$.

تست ۵

اگر $x^۲+x<۰$، حاصل $[x]+[x^۲]+\cdots+[x^{۱۰}]$ کدام است؟

۱) ۱۰ **۲)** -۱۰ **۳)** ۵ **۴)** -۵

راه‌حل ابتدا با حل نامعادله، محدودهٔ x را می‌یابیم:

$$x^۲+x<۰\Rightarrow x(x+۱)<۰\Rightarrow -۱<x<۰$$

اگر عددی بین -۱ و صفر باشد، به توان هر عدد فردی برسد در همان محدوده باقی می‌ماند، ولی اگر به توان عددی زوج برسد عددی بین صفر و ۱ می‌شود، یعنی

$$-۱<x<۰\Rightarrow\begin{cases}۰<x^{۲k}<۱\Rightarrow[x^{۲k}]=۰\\ -۱<x^{۲k+۱}<۰\Rightarrow[x^{۲k+۱}]=-۱\end{cases}\Rightarrow[x]+[x^۲]+\cdots+[x^{۱۰}]=۵\times۰+۵\times(-۱)=-۵$$

تست ۶

اگر $[x]=۳$ و $[y]=۵$، حاصل $[x+y]$ چند عدد صحیح می‌تواند باشد؟

۱) ۱ **۲)** ۲ **۳)** ۳ **۴)** ۴

راه‌حل توجه کنید که $[x]=۳$ نتیجه می‌دهد $۳\leq x<۴$ و $[y]=۵$ نتیجه می‌دهد $۵\leq y<۶$. اگر این دو نابرابری را با هم جمع کنیم به دست می‌آید $۸\leq x+y<۱۰$،
بنابراین $[x+y]$ یکی از عددهای صحیح ۸ یا ۹ است.

تست ۷

اگر $[\frac{۱-۴x}{۳}]=-۲$، مقدار $[-x]$ کدام است؟

۱) -۲ **۲)** -۱ **۳)** ۱ **۴)** ۲

راه‌حل چون $[\frac{۱-۴x}{۳}]=-۲$، پس

$$-۲\leq\frac{۱-۴x}{۳}<-۱\Rightarrow-۶\leq۱-۴x<-۳\Rightarrow-۷\leq-۴x<-۴\Rightarrow-\frac{۷}{۴}\leq-x<-۱\Rightarrow[-x]=-۲$$

تست ۸

اگر n عددی طبیعی باشد، مقدار $[\sqrt[۳]{n^۳+۳n^۲}]$ برابر کدام است؟

۱) n **۲)** $n+۱$ **۳)** $n-۱$ **۴)** $۲n-۱$

راه‌حل **راه‌حل اول** از نابرابری $n^۳<n^۳+۳n^۲<(n+۱)^۳$، نتیجه می‌گیریم $n<\sqrt[۳]{n^۳+۳n^۲}<n+۱$، بنابراین $[\sqrt[۳]{n^۳+۳n^۲}]=n$.

راه‌حل دوم چون تساوی به ازای هر عدد طبیعی n باید برقرار باشد، پس مثلاً به ازای $n=۲$ باید تساوی برقرار باشد. اگر $n=۲$، آن‌گاه $[\sqrt[۳]{n^۳+۳n^۲}]=[\sqrt[۳]{۲۰}]=۲$. از طرف دیگر فقط عبارت گزینهٔ (۱) به ازای $n=۲$ برابر ۲ می‌شود.

تست ۹

اگر x عددی غیرصحیح باشد، حاصل $[x^2-1]+[2-x^2]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) صفر یا ۱− ۴) صفر یا ۱

راه‌حل می‌دانیم عدد صحیح را می‌توان از داخل جزء صحیح بیرون آورد، پس $[x^2-1]+[2-x^2]=[x^2]-1+2+[-x^2]=[x^2]+[-x^2]+1$

می‌دانیم $[a]+[-a]$ به ازای مقدارهای صحیح a برابر صفر و برای مقدارهای غیرصحیح a برابر ۱− است. اگر x عددی غیرصحیح باشد، x^2 می‌تواند صحیح باشد (مثل $x=\sqrt{2}$) یا غیرصحیح باشد (مثل $x=\frac{1}{2}$). بنابراین $[x^2]+[-x^2]+1$ می‌تواند برابر صفر یا ۱ باشد.

حل معادله‌های شامل جزء صحیح

- **اگر k عدد صحیحی باشد، مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x]=k$ بازهٔ $[k,k+1)$ است.**
- **اگر k عدد غیرصحیحی باشد، معادلهٔ $[x]=k$ جواب ندارد.**

مثال: الف) مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x]=3$ بازهٔ $[3,4)$ است.

ب) معادلهٔ $[x]=\frac{1}{2}$ جواب ندارد، زیرا سمت چپ آن عددی صحیح و سمت راست آن عددی غیرصحیح است.

تست ۱۰

مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[\frac{2x+1}{3}]=2$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل ابتدا مجموعهٔ جواب‌های معادله را پیدا می‌کنیم. توجه کنید که

$$[\frac{2x+1}{3}]=2\Rightarrow 2\le\frac{2x+1}{3}<3\Rightarrow 6\le 2x+1<9\Rightarrow 5\le 2x<8\Rightarrow\frac{5}{2}\le x<4$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر بازهٔ $[\frac{5}{2},4)$ است، که تنها عدد صحیح در آن ۳ است.

تست ۱۱

معادلهٔ $[x-1]+2[x]=m$ جواب دارد. مقدار m کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

راه‌حل ابتدا معادله را به‌صورت مقابل می‌نویسیم: $[x]-1+2[x]=m\Rightarrow 3[x]=m+1\Rightarrow[x]=\frac{m+1}{3}$

اگر $\frac{m+1}{3}$ عدد صحیحی باشد، آن‌گاه معادلهٔ بالا جواب دارد. با توجه به گزینه‌های داده شده، به ازای $m=2$ مقدار $\frac{m+1}{3}$ صحیح است.

تست ۱۲

مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x+1]+[x-[x]]=2$ به‌صورت $[a,b)$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $[x+1]+[x-[x]]=2\Rightarrow[x]+1+[x]-[x]=2\Rightarrow[x]=1$

در نتیجه $1\le x<2$، پس $a=1$ و $b=2$. بنابراین $b-a=1$.

تست ۱۳

مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[4-x]+[x-3]=0$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ۳) $\mathbb{Z}$ ۴) $[0,+\infty)$

راه‌حل می‌توان نوشت $[4-x]+[x-3]=0\Rightarrow 4+[-x]+[x]-3=0\Rightarrow[x]+[-x]=-1\Rightarrow x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

تست ۱۴

مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x]^2-3[x]+2=0$ بازهٔ $[a,b)$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل اگر فرض کنیم $[x]=t$، معادلهٔ مورد نظر به‌صورت مقابل درمی‌آید: $t^2-3t+2=0\Rightarrow(t-1)(t-2)=0$

در نتیجه $t=1\Rightarrow[x]=1\Rightarrow x\in[1,2)\ ,\quad t=2\Rightarrow[x]=2\Rightarrow x\in[2,3)$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با $[1,2)\cup[2,3)=[1,3)$. پس $a=1$ و $b=3$. در نتیجه $b-a=2$.

تست ۱۵

معادلهٔ $[x^2]+[2x]-x=6$ **چند جواب دارد؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل

ابتدا توجه کنید از معادلهٔ داده شده نتیجه می‌شود $[x^2]+[2x]=x+6$. سمت چپ این معادله عددی صحیح است، پس سمت راستش، یعنی $x+6$ نیز عددی صحیح است. بنابراین x هم عددی صحیح است. بنابراین x^2 و $2x$ نیز عددهایی صحیح‌اند. در نتیجه $[x^2]=x^2$ و $[2x]=2x$ و معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$x^2+2x-x=6 \Rightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow (x-2)(x+3)=0 \Rightarrow x=2, x=-3$$

هر دو این عددها در معادلهٔ مورد نظر صدق می‌کنند. بنابراین معادلهٔ مورد نظر دو جواب دارد.

تست ۱۶

مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $4[x]=3x$ **کدام است؟**

۱) ۴ ۲) $\frac{10}{3}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{8}{3}$

راه‌حل

چون $[x]$ عددی صحیح است، پس

$$[x]=k\ (k\in\mathbb{Z}) \Rightarrow 4k=3x \Rightarrow x=\frac{4k}{3}=0, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{8}{3}, \pm 4, \ldots$$

از طرف دیگر، $x-1<[x]\leq x$ ، پس $[x]=\frac{3x}{4} \Rightarrow x-1<\frac{3x}{4}\leq x \Rightarrow 0\leq x<4$

تنها عددهای $x=0, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}$ در این محدوده قرار دارند. پس مجموع جواب‌ها برابر ۴ است.

حل نامعادله‌های شامل جزء صحیح

فرض کنید k عددی صحیح باشد. در این صورت

$$[x]\geq k \Rightarrow x\geq k, \quad [x]>k \Rightarrow x\geq k+1$$

$$[x]\leq k \Rightarrow x<k+1, \quad [x]<k \Rightarrow x<k$$

مثال: مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های $-1<[x]\leq 2$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$[x]\leq 2 \Rightarrow x<3, \quad [x]>-1 \Rightarrow x\geq 0$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های مورد نظر اشتراک مجموعه‌های $[0, +\infty)$ و $(-\infty, 3)$ است، که برابر است با $[0, 3)$.

تست ۱۷

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $2[x+1]+[x]>3$ **کدام است؟**

۱) $(\frac{1}{3}, +\infty)$ ۲) $(\frac{1}{3}, 1]$ ۳) $(1, +\infty)$ ۴) $[1, +\infty)$

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که $[x+1]=[x]+1$. بنابراین نامعادلهٔ مورد نظر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$2([x]+1)+[x]>3 \Rightarrow 3[x]+2>3 \Rightarrow [x]>\frac{1}{3}$$

چون $[x]$ عددی صحیح و بزرگ‌تر از $\frac{1}{3}$ است، پس $[x]\geq 1$. بنابراین $x\geq 1$ ، یعنی مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر برابر $[1, +\infty)$ است.

تست ۱۸

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $3[x]-[x]^2\geq 0$ **بازهٔ** $[a, b)$ **است. طول این بازه کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که $3[x]-[x]^2\geq 0 \Rightarrow [x](3-[x])\geq 0$

بنابراین $0\leq[x]\leq 3$. اکنون می‌توان نوشت $[x]\geq 0 \Rightarrow x\in[0, +\infty), \quad [x]\leq 3 \Rightarrow x\in(-\infty, 4)$

بنابراین $x\in[0, +\infty)\cap(-\infty, 4)=[0, 4)$. پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر بازهٔ $[0, 4)$ است که طول آن برابر است با $4-0=4$.

جزء صحیح یک عدد حقیقی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

۸۴۷- مقدار $[-20/9]$ کدام است؟ کتاب درسی

۱) -19 ۲) -20 ۳) -21 ۴) -22

۸۴۸- اگر $x^3=20$، مقدار $[-x]$ کدام است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) -1 ۴) -4

۸۴۹- حاصل $[\frac{1}{2}]+[\frac{2}{2}]+\cdots+[\frac{20}{2}]$ چقدر است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۱۰ ۳) ۱۳۰ ۴) ۱۲۰

۸۵۰- مقدار عبارت $A=[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots+[\sqrt{20}]$ کدام است؟

۱) ۵۲ ۲) ۵۳ ۳) ۵۴ ۴) ۵۵

۸۵۱- مقدار عبارت $A=[\sqrt[3]{2}]+[\sqrt[3]{3}]+\cdots+[\sqrt[3]{63}]$ کدام است؟

۱) ۱۵۵ ۲) ۱۵۶ ۳) ۱۵۷ ۴) ۱۵۸

۸۵۲- اگر $\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$، مقدار عبارت $[3x]-[\frac{2}{3x}]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) صفر

۸۵۳- اگر $[x]=2$، مجموعهٔ مقدارهای $[3x-5]$ کدام است؟ کتاب درسی

۱) $\{1,2,3\}$ ۲) $\{1,2,3,4\}$ ۳) $\{2,3,4\}$ ۴) $\{2,3\}$

۸۵۴- اگر $[\frac{5-x}{2}]=-3$، حدود x کدام است؟

۱) $(9,11]$ ۲) $(-11,11)$ ۳) $[-11,-9]$ ۴) $[9,11)$

۸۵۵- اگر $[3x-2]=1$، مقدار $[2x-3]$ کدام است؟ کتاب درسی

۱) فقط -1 ۲) -2 ۳) -1 یا صفر ۴) فقط صفر

۸۵۶- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[2x-\frac{1}{2}]=3$ بازهٔ $[a,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۵۷- اگر $2[x+2]-[x-1]=7$، حدود x کدام است؟

۱) $1\le x<2$ ۲) $2\le x<3$ ۳) $3\le x<4$ ۴) $4\le x<5$

سطح ۲

۸۵۸- مقدار $[\sqrt[3]{2+\sqrt[3]{2+\sqrt[3]{2}}}]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۵۹- مقدار عبارت $A=[-\sqrt{10}]+[-\sqrt{9}]+[-\sqrt{8}]+\cdots+[\sqrt{10}]$ کدام است؟

۱) -5 ۲) -6 ۳) -7 ۴) -8

۸۶۰- اگر $[\sqrt{x}]=۹$ و $[\sqrt{y}]=۱۲$، بیشترین مقدار $[x+y]$ کدام است؟

۱) ۲۲۵ ۲) ۲۴۲ ۳) ۲۵۶ ۴) ۲۶۸

۸۶۱- اگر $[x]=[y]=۲$، حاصل $[\frac{۲x+۳y}{۵}]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۲ یا ۳

۸۶۲- اگر $[x]=۲$، عبارت $[x^۲-۴x]$ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۶۳- اگر $[x^۲+x]=-۱$، مقدار $[x^{۱۰}]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۸۶۴- اگر $[x^۲-۲x]=-۱$، مقدار $[\frac{x^۵}{۳۲}]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۸۶۵- اگر $[x^۲-۵x]=[x^۲-۷x]=-۱$، مقدار $[x^۲-۶x+۱]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) -۲

۸۶۶- اگر $[۳x]=-۲$، مقدار عبارت $A=[x]+[x^۲]+[x^۳]+\cdots+[x^{۱۰}]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۵ ۳) -۵ ۴) ۳

۸۶۷- اگر $[x^۲]=۰$ و $x\neq ۰$، مقدار عبارت $A=[-x^۴]+[-x^۶]+\cdots+[-x^{۲۰}]$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) -۹ ۳) -۱۰ ۴) -۱۲

۸۶۸- اگر n عددی طبیعی باشد، حاصل $[\sqrt{n^۲+۲n}]$ کدام است؟

۱) $n-۱$ ۲) n ۳) $n+۱$ ۴) $n+۲$

۸۶۹- اگر n عددی طبیعی باشد، حاصل $[\sqrt{n^۲+۴n+۱}]$ کدام است؟

۱) n ۲) $n+۱$ ۳) $n+۲$ ۴) $n+۳$

۸۷۰- اگر n عددی طبیعی باشد، حاصل $[\sqrt[۳]{n^۳+۳n^۲+۱}]$ کدام است؟

۱) $n-۱$ ۲) n ۳) $n+۱$ ۴) $n+۲$

۸۷۱- اگر $[x+[x-۳]]=۱$، حدود x کدام است؟

۱) $(۱,۲)$ ۲) $[۲,۳)$ ۳) $(۱,۳)$ ۴) $[۲,۴)$

۸۷۲- اگر $[x+[x]]=۳[x]+۱$، مقدار $[x^۳]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) صفر

۸۷۳- معادلهٔ $۲[x]=x+۱$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۸۷۴- اگر $[x+۲]+[۳-x]=x$، چند مقدار مختلف برای x وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۸۷۵- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[-۲x]+[۱-۲x]+[۳-۲x]=۱$ کدام است؟

۱) $(۰,\frac{۱}{۳}]$ ۲) $(۰,\frac{۱}{۲}]$ ۳) $(۰,۱)$ ۴) $(۰,\frac{۱}{۴}]$

۸۷۶- مجموع جواب‌های معادلهٔ $۳|x|+۲[x]=۱$ که در بازهٔ $(-۲,۱)$ قرار دارند، کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۵}{۳}$ ۳) $-\frac{۷}{۳}$ ۴) صفر

۸۷۷- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x+\frac{1}{3}]+[x+\frac{7}{3}]=4$ بازهٔ $[a,b)$ است. مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) $-\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{5}{3}$

۸۷۸- اگر معادلهٔ $[x+2[x]]+[x-2]=k$ جواب داشته باشد، k کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۸۷۹- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x]^2-3[x]+2=0$ بازهٔ $[a,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۸۰- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $2[x]^2+[x-1]=0$ کدام است؟

۱) $[-1,-\frac{1}{2}]$ ۲) $[-1,0)$ ۳) $[-2,0)$ ۴) $[-2,-1]$

۸۸۱- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[\frac{2[x]+1}{3}]=3$ کدام است؟

۱) $[5,6)$ ۲) $[4,5)$ ۳) $[4,6)$ ۴) $[4,7)$

۸۸۲- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $3\le[x]\le4$ به‌صورت $[a,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۸۸۳- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|[2x+3]|<1$ کدام است؟

۱) $[-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$ ۲) $(-2,-1)$ ۳) $[-\frac{3}{2},-1)$ ۴) $(-2,-\frac{3}{2}]$

۸۸۴- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $[2x]\le 2x-1$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $(0,1)$ ۳) $(\frac{1}{2},1)$ ۴) $\varnothing$

سطح ۳

۸۸۵- اگر a عدد طبیعی باشد و $[\sqrt{100}]=[\sqrt{101}]=\cdots=[\sqrt{100+a}]$، بیشترین مقدار a کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۰ ۳) ۱۹ ۴) ۲۲

۸۸۶- معادلهٔ $[2x^2]-[4x]=x-2$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۸۸۷- معادلهٔ $x^2+[x]=3-[-x]$ چند جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

۸۸۸- اگر مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x-3]-[-x]=-2$ بازهٔ (a,b) باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۸۸۹- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $[x]^2-2[x]\le3$ بازهٔ $[a,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) -3 ۴) -2

درس اول / بخش چهارم: تابع جزء صحیح

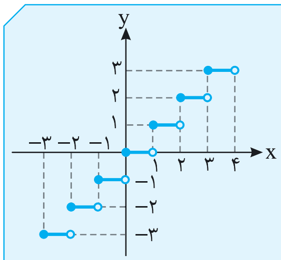
تابع جزء صحیح

به تابعی که به هر عدد حقیقی جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد، تابع جزء صحیح می‌گوییم.

$$f(x)=[x]$$

$$D_f=\mathbb{R}$$

$$R_f=\mathbb{Z}$$



تست ۱

اگر x عددی غیرصحیح باشد و $f(x)=[x]$، حاصل $f(f(x)-x)$ کدام است؟

۱) صفر یا -۱ **۲)** فقط -۱ **۳)** فقط ۱   **۴)** صفر یا ۱

راه‌حل می‌دانیم حاصل $[x]$ همواره عددی صحیح است و عددهای صحیح را می‌توان از جزء صحیح به بیرون منتقل کرد، پس

$$f(f(x)-x)=[[x]-x]=[x]+[-x]$$

تابع $y=[x]+[-x]$ به ازای همهٔ عددهای غیرصحیح برابر -۱ است. بنابراین $f(f(x)-x)=-۱$.

تست ۲

دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۱}{۲[x]-۶}$ کدام است؟

۱) $[۴,+\infty)$ **۲)** $(-\infty,۳)$ **۳)** $\mathbb{R}$ **۴)** $\mathbb{R}-[۳,۴)$

راه‌حل توجه کنید که $D_f=\{x|۲[x]-۶\neq ۰\}$. از طرف دیگر،

$$۲[x]-۶=۰\Rightarrow[x]=۳\Rightarrow ۳\le x<۴\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-[۳,۴)$$

تست ۳

دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۳-۲[-x]}$ کدام است؟

۱) $(۲,+\infty)$ **۲)** $[-۱,+\infty)$ **۳)** $(-۲,+\infty)$ **۴)** $[\frac{۵}{۲},+\infty)$

راه‌حل باید $۳-۲[-x]\ge ۰$، یعنی $۲[-x]\le ۳$، در نتیجه $[-x]\le\frac{۳}{۲}$. چون $[-x]$ عددی صحیح است و $[-x]\le\frac{۳}{۲}$، پس $[-x]\le ۱$، اما می‌دانیم اگر n عددی صحیح باشد و $[x]\le n$، آن‌گاه $x<n+۱$، بنابراین

$$[-x]\le ۱\Rightarrow -x<۲\Rightarrow x>-۲\Rightarrow D_f=(-۲,+\infty)$$

تست ۴

چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۲[x]-[x]^۲}$ قرار دارند؟

۱) ۳   **۲)** ۲   **۳)** ۵   **۴)** ۴

راه‌حل توجه کنید که $D_f=\{x|۲[x]-[x]^۲\ge ۰\}$. اگر فرض کنیم $[x]=t$، آن‌گاه

$$۲[x]-[x]^۲\ge ۰\Rightarrow ۲t-t^۲\ge ۰\Rightarrow ۰\le t\le ۲$$

بنابراین $۰\le[x]\le ۲$، پس $۰\le x<۳$، یعنی $D_f=[۰,۳)$ و سه عدد صحیح ۰، ۱ و ۲ در دامنهٔ تابع f قرار دارند.

تست ۵

اگر $f(x)=۳[x]+۱$ و $D_f=[-۱,۲]$، مجموع اعدادی که در برد تابع f قرار دارند، کدام است؟

۱) ۷   **۲)** ۹   **۳)** ۱۰   **۴)** ۱۱

راه‌حل ابتدا توجه کنید که

$$-۱\le x<۰\Rightarrow[x]=-۱\Rightarrow f(x)=-۳+۱=-۲,\quad ۰\le x<۱\Rightarrow[x]=۰\Rightarrow f(x)=۰+۱=۱$$

$$۱\le x<۲\Rightarrow[x]=۱\Rightarrow f(x)=۳+۱=۴,\quad x=۲\Rightarrow[x]=۲\Rightarrow f(x)=۶+۱=۷$$

بنابراین برد تابع f مجموعهٔ $\{-۲,۱,۴,۷\}$ است و مجموع اعداد واقع در برد این تابع برابر ۱۰ است.

تست ۶

برد تابع $f(x)=۱-x+[x]$ کدام است؟

۱) $(۰,۱]$ ۲) $[۰,۱]$ ۳) $[۰,۱)$ ۴) $(۰,۱)$

راه‌حل توجه کنید که برای هر x حقیقی نابرابری $۰\leq x-[x]<۱$ برقرار است. بنابراین

$$-۱<-x+[x]\leq ۰\Rightarrow ۰<۱-x+[x]\leq ۱\Rightarrow ۰<f(x)\leq ۱\Rightarrow R_f=(۰,۱]$$

تست ۷

برد تابع $f(x)=[۳x]-۳[x]$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

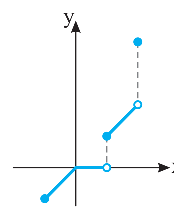
راه‌حل اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x]+k=[x+k]$. بنابراین $f(x)=[۳x]-۳[x]=[۳x-۳[x]]=[۳(x-[x])]$. از طرف دیگر، $۰\leq x-[x]<۱$، پس $۰\leq ۳(x-[x])<۳$. بنابراین مقادیر f یکی از عددهای ۰، ۱ یا ۲ هستند.

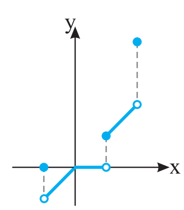
رسم نمودار توابع شامل جزء صحیح

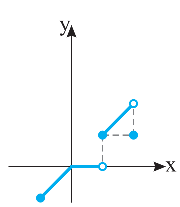
برای رسـم نمودار توابع شـامل جزء صحیح، ابتدا به کمک بازه‌بندی، به‌جای جزء صحیح در ضابطهٔ تابع عدد صحیح برابر آن را قرار می‌دهیم، سپس نمودار را رسم می‌کنیم.

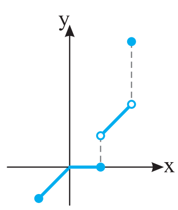
تست ۸

نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|x|[x]$ و دامنهٔ $[-۱,۲]$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

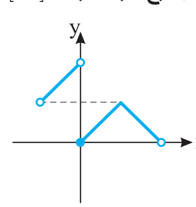
راه‌حل توجه کنید که

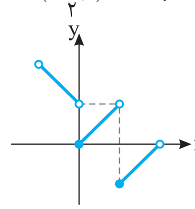
$$f(x)=|x|\times[x]=\begin{cases}۲\times ۲ & x=۲\\ x\times ۱ & ۱\leq x<۲\\ x\times ۰ & ۰\leq x<۱\\ (-x)\times(-۱) & -۱\leq x<۰\end{cases}=\begin{cases}۴ & x=۲\\ x & ۱\leq x<۲\\ ۰ & ۰\leq x<۱\\ x & -۱\leq x<۰\end{cases}$$

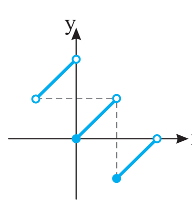
پس نمودار این تابع در گزینهٔ (۱) به‌صورت صحیح رسم شده است.

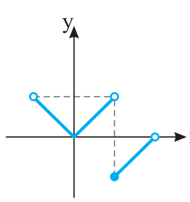
تست ۹

نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-[۲x]$ و دامنهٔ $(-\frac{۱}{۲},۱)$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

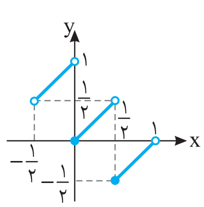
راه‌حل ابتدا توجه کنید که اگر $-\frac{۱}{۲}<x<۱$، آن‌گاه $-۱<۲x<۲$. بنابراین

$$-۱<۲x<۰\Rightarrow[۲x]=-۱\Rightarrow f(x)=x+۱,\quad -\frac{۱}{۲}<x<۰$$

$$۰\leq ۲x<۱\Rightarrow[۲x]=۰\Rightarrow f(x)=x,\quad ۰\leq x<\frac{۱}{۲}$$

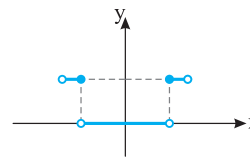
$$۱\leq ۲x<۲\Rightarrow[۲x]=۱\Rightarrow f(x)=x-۱,\quad \frac{۱}{۲}\leq x<۱$$

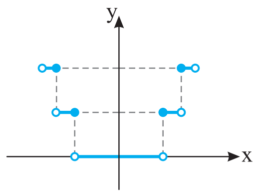
بنابراین نمودار تابع f به‌صورت مقابل است.

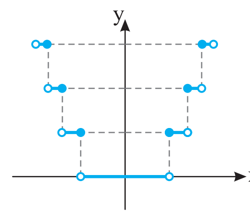


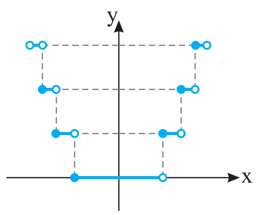
تست ۱۰

نمودار تابع $f(x)=[x^2]$ با دامنهٔ $(-2,2)$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

راه‌حل

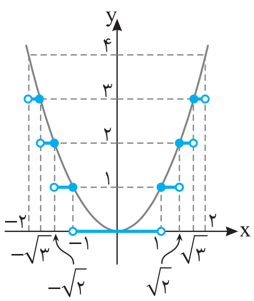
ابتدا توجه کنید که از $-2<x<2$ نتیجه می‌شود $0\le x^2<4$. بنابراین ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$0\le x^2<1 \Rightarrow f(x)=0,\ -1<x<1,\qquad 1\le x^2<2\Rightarrow f(x)=1,\ -\sqrt{2}<x\le -1 \text{ یا } 1\le x<\sqrt{2}$$

$$2\le x^2<3\Rightarrow f(x)=2,\ -\sqrt{3}<x\le -\sqrt{2} \text{ یا } \sqrt{2}\le x<\sqrt{3}$$

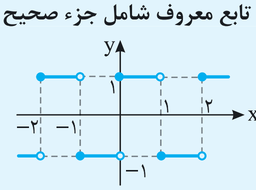
$$3\le x^2<4\Rightarrow f(x)=3,\ -2<x\le -\sqrt{3} \text{ یا } \sqrt{3}\le x<2$$

بنابراین نمودار تابع به شکل روبه‌رو است.

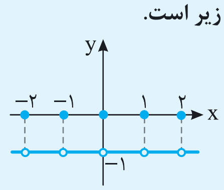


نمودار برخی تابع‌های معروف شامل جزء صحیح

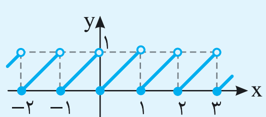
نمودار چند تابع معروف شامل جزء صحیح به‌صورت زیر است.



$y=(-1)^{[x]}$



$y=[x]+[-x]$



$y=x-[x]$

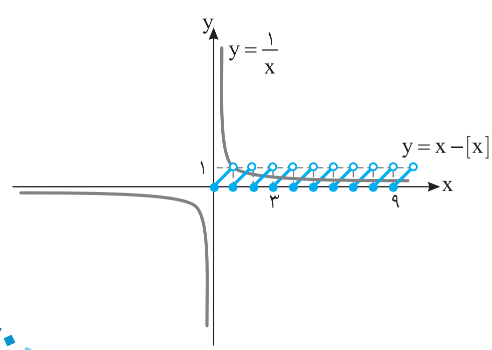
تست ۱۱

معادلهٔ $x-[x]=\frac{1}{x}$ در بازهٔ $[3,9)$ چند جواب دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

راه‌حل

هر جواب معادلهٔ مورد نظر طول یکی از نقطه‌های برخورد نمودارهای تابع‌های $y=x-[x]$ و $y=\frac{1}{x}$ است. نمودارهای این تابع‌ها را در شکل مقابل رسم کرده‌ایم. از روی این شکل معلوم می‌شود که تعداد نقطه‌های برخورد این نمودارها در بازهٔ $[3,9)$ برابر ۶ تاست.



تابع جزء صحیح

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

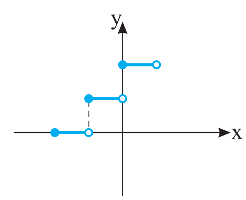
۸۹۰- اگر $f(x)=|[۵x]+[۷x]|$، مقدار $f(-\frac{۱}{۲})$ کدام است؟

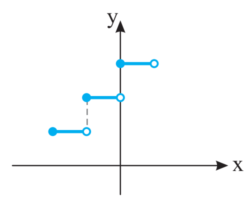
۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

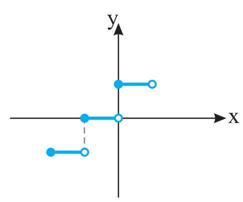
۸۹۱- اگر $f(x)=\left|[x+۳]\right|+[|x+۲|]$، مقدار $f(-\pi)$ کدام است؟

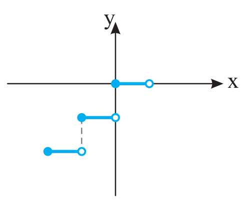
۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۸۹۲- نمودار تابع $f(x)=[x]+۳$ با دامنهٔ $[-۲,۱)$ کدام است؟ کتاب درسی

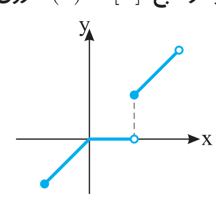
۱) 

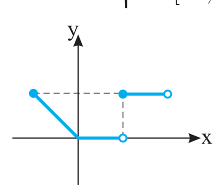
۲) 

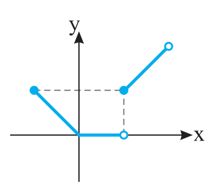
۳) 

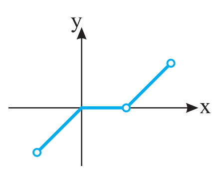
۴) 

۸۹۳- نمودار تابع $f(x)=x[x]$ روی بازهٔ $[-۱,۲)$ کدام است؟

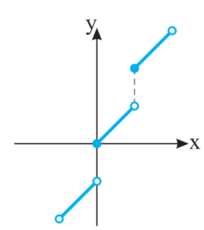
۱) 

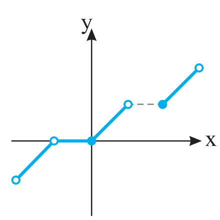
۲) 

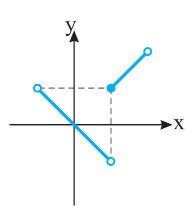
۳) 

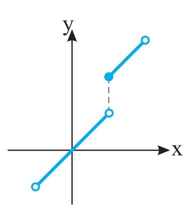
۴) 

۸۹۴- نمودار تابع $f(x)=x+[x]$ روی بازهٔ $(-۱,۲)$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

سطح ۲

۸۹۵- اگر $f(x)=۴x-[x]-[۳x]$، حاصل $f(x+۱)$ کدام است؟

۱) $f(x)$ ۲) $-f(x)$ ۳) $f(x)-۱$ ۴) $-f(x)+۱$

۸۹۶- اگر $f(x)=[x]-[\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲}]$، حاصل $f(x+۲)-f(x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $[x]$ ۴) $[\frac{x}{۲}]$

۸۹۷- اگر $f(x)=x(-۱)^{[x]}$ و $x\notin\mathbb{Z}$، حاصل $f(-x)$ کدام است؟

۱) $f(x)$ ۲) $-f(x)$ ۳) $xf(x)$ ۴) $-xf(x)$

۸۹۸- اگر $f(x)=x-۴[x]+[۲x]$، حاصل $f(f(x))$ کدام است؟

۱) $[x]$ ۲) x ۳) $۲x$ ۴) $[۲x]$

۸۹۹- دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{۱}{[\frac{x}{۳}]-۲}$ به‌صورت $\mathbb{R}-[a,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۹۰۰- دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{۱}{x-[x]}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{N}$ ۳) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ۴) $\mathbb{R}-\mathbb{N}$

۹۰۱- دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{۱}{[۴-x]+[x-۳]}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{N}$ ۲) $\mathbb{Z}$ ۳) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ۴) $\mathbb{R}-\mathbb{N}$

۹۰۲- مجموع عددهای صحیحی که در دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{۱}{[|x+۱|-۲]-۵}$ نیستند، چقدر است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۱

۹۰۳- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۴[x]-[x]^۲}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۹۰۴- برد تابع $f(x)=[x]-|x|$ با دامنهٔ $[-۱,۲)$ کدام است؟

۱) $[-۲,۰]-\{-۱\}$ ۲) $(-۱,۱]$ ۳) $[-۲,۰]$ ۴) $[-۲,-۱)$

۹۰۵- برد تابع $f(x)=۲[x]-۲x$ کدام است؟

۱) $(-۲,۰]$ ۲) $[۰,۲)$ ۳) $[-۲,۰]$ ۴) $(-\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲})$

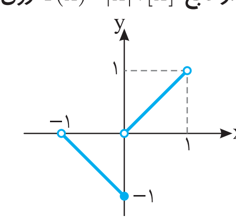
۹۰۶- برد تابع $f(x)=\sqrt{[x]-x}$ چند عضو دارد؟

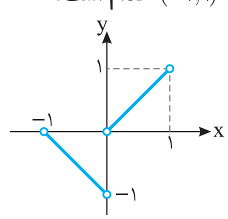
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

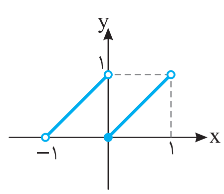
۹۰۷- کدام خط نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x+[x]$ و دامنهٔ $(-۲,۱)$ را قطع نمی‌کند؟

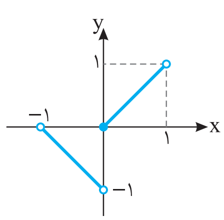
۱) $y=-\frac{۷}{۲}$ ۲) $y=-\frac{۵}{۲}$ ۳) $y=-۲$ ۴) $y=\frac{۱}{۲}$

۹۰۸- نمودار تابع $f(x)=|x|+[x]$ روی بازهٔ $(-۱,۱)$ کدام است؟

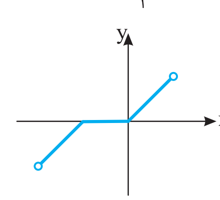
۱) 

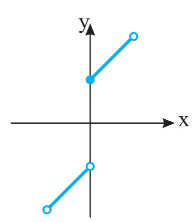
۲) 

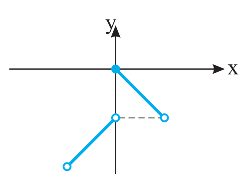
۳) 

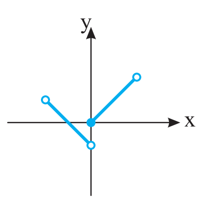
۴) 

۹۰۹- نمودار تابع $f(x)=|x|+[\frac{x}{۲}]$ روی بازهٔ $(-۲,۲)$ کدام است؟

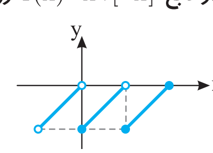
۱) 

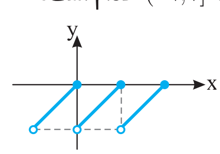
۲) 

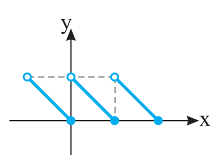
۳) 

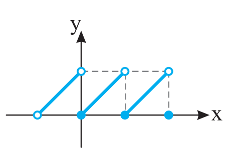
۴) 

۹۱۰- نمودار تابع $f(x)=x+[-x]$ روی بازهٔ $(-۱,۲]$ کدام است؟

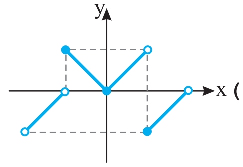
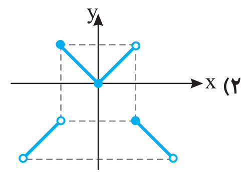
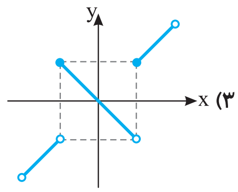
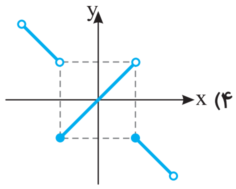
۱) 

۲) 

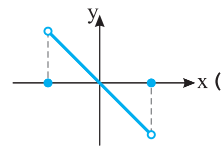
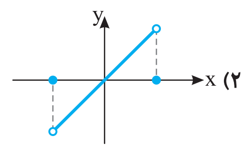
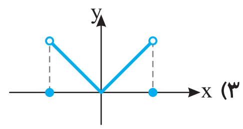
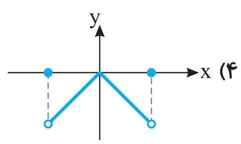
۳) 

۴) 

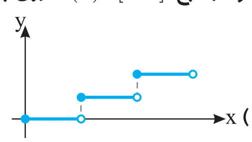
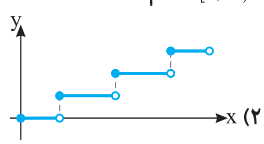
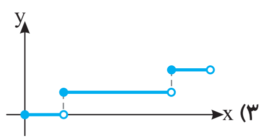
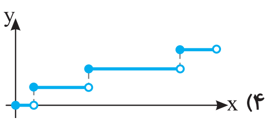
۹۱۱- نمودار تابع $f(x)=x(-1)^{[x]}$ روی بازهٔ $(-2,2)$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

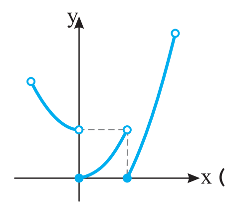
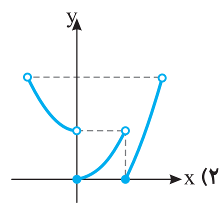
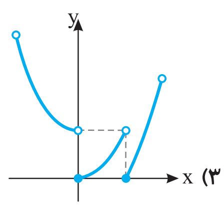
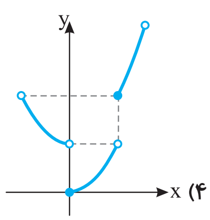
۹۱۲- نمودار تابع $f(x)=x[[x]-x]$ روی بازهٔ $[-1,1]$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

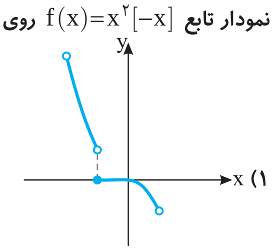
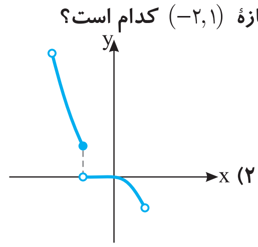
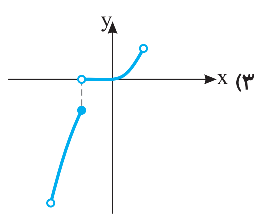
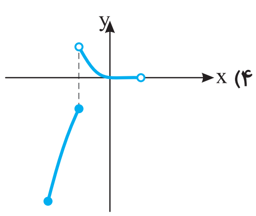
۹۱۳- نمودار تابع $f(x)=[\sqrt{x}]$ روی بازهٔ $[0,11)$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۹۱۴- نمودار تابع $f(x)=x^2-[x]$ روی بازهٔ $(-1,2)$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۹۱۵- نمودار تابع $f(x)=x^2[-x]$ روی بازهٔ $(-2,1)$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

سطح ۳

۹۱۶- برد تابع $f(x)=[3[x]-x]-[x+[x]]$ چند عضو دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) نامتناهی

۹۱۷- کدام عدد در برد تابع $f(x)=x-\frac{1}{2}[2x]$ قرار ندارد؟

۱) $\frac{1}{2}$
۲) $\frac{1}{3}$
۳) $\frac{1}{4}$
۴) صفر

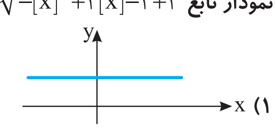
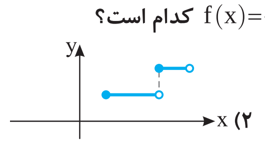
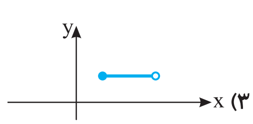
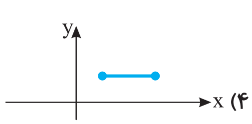
۹۱۸- برد تابع $f(x)=x-3[\frac{x}{3}]$ کدام است؟

۱) $[0,1)$
۲) $[0,3)$
۳) $[0,\frac{1}{3})$
۴) $[0,2)$

۹۱۹- برد تابع $f(x)=|4x-[4x]-2|$ کدام است؟

۱) $[0,1]$
۲) $[0,2]$
۳) $(1,2]$
۴) $[1,2)$

۹۲۰- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{-[x]^2+3[x]-2}+1$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

درس اول / بخش پنجم: تساوی دو تابع

تساوی دو تابع

دو تابع f و g را **برابر (مساوی)** می‌نامیم، به شرطی که

۱) $D_f = D_g$

۲) به ازای هر x از دامنهٔ دو تابع $f(x)=g(x)$.

در این صورت می‌نویسیم $f=g$.

نکته

اگر دو تابع f و g برابر باشند، آن‌گاه بردهای آن‌ها نیز برابرند. ولی اگر دامنه‌های دو تابع f و g با هم و بردهای دو تابع f و g نیز با هم برابر باشند، این دو تابع لزوماً برابر نیستند.

مثال: تابع‌های زیر برابرند:

$$f(x)=\frac{x^{3}+3x}{x^{2}+3} \ , \quad g(x)=x$$

در واقع دامنهٔ هر دو تابع مجموعهٔ $\mathbb{R}$ است و چون

$$f(x)=\frac{x^{3}+3x}{x^{2}+3}=\frac{x(x^{2}+3)}{x^{2}+3}=x \quad (x^{2}+3\neq 0 \text{ همواره})$$

پس ضابطهٔ دو تابع هم یکسان است.

مثال: تابع‌های f و g را به‌صورت زیر در نظر بگیرید

$$f=\{(1,2),(3,4)\} \ , \quad g=\{(1,4),(3,2)\}$$

این دو تابع برابر نیستند، زیرا $f(1)=2\neq 4=g(1)$، درحالی‌که $D_f=D_g$ و $R_f=R_g$.

مثال: تابع‌های زیر برابر نیستند:

$$f(x)=\frac{x}{x} \ , \quad g(x)=1$$

توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ و $D_g=\mathbb{R}$، پس دامنهٔ تابع‌های f و g برابر نیست.

تست ۱ **اگر تابع‌های $f=\{(1,2),(2,6),(a,4)\}$ و $g=\{(3,4),(1,b),(2,bc)\}$ برابر باشند، مقدار $a+b+c$ کدام است؟**

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $D_f=\{1,2,a\}$ و $D_g=\{1,2,3\}$. بنابراین $D_f=D_g$، پس $a=3$. از طرف دیگر

$$f(1)=g(1)\Rightarrow 2=b$$

$$f(2)=g(2)\Rightarrow 6=bc \xrightarrow{b=2} 6=2c\Rightarrow c=3$$

پس $a+b+c=8$.