فصل ۱

هندسهٔ تحلیلی و جبر

هندسهٔ تحلیلی و جبر

هندسهٔ تحلیلی — درس اول

- یادآوری و تکمیل معادلهٔ خط
- فاصلهٔ دو نقطه
- مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط
- فاصلهٔ نقطه از خط

معادلهٔ درجهٔ دوم و تابع درجه ۲ — درس دوم

- یادآوری
- روش تغییرمتغیر برای حل معادله
- مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم
- تشکیل معادلهٔ درجه۲ با استفاده از S و P
- ماکزیمم و مینیمم سهمی
- صفرهای تابع درجه۲
- نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$
- به‌دست آوردن معادلهٔ سهمی $y = ax^2 + bx + c$

معادلات گویا و معادلات رادیکالی — درس سوم

- معادلات گویا
- معادلات رادیکالی

مثال ۲۴ فاصلهٔ نقطهٔ $P(-۴,۷)$ را تا خطوط زیر محاسبه نمایید.

الف) $L : x = ۱$

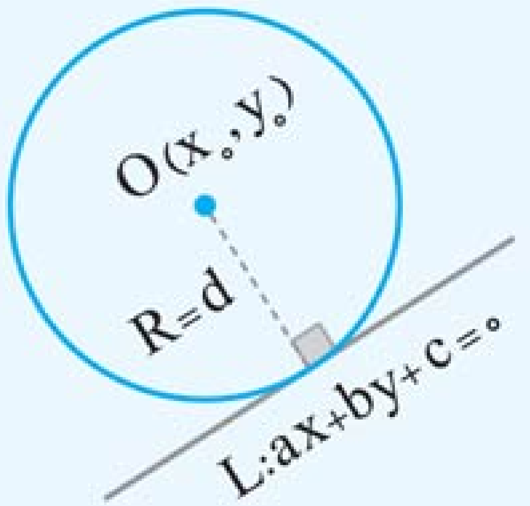
با توجه به چاشنی قبل، فاصلهٔ مورد نظر برابر است با:

$d = |۱-(-۴)| = ۵$

ب) $T : y = ۳$

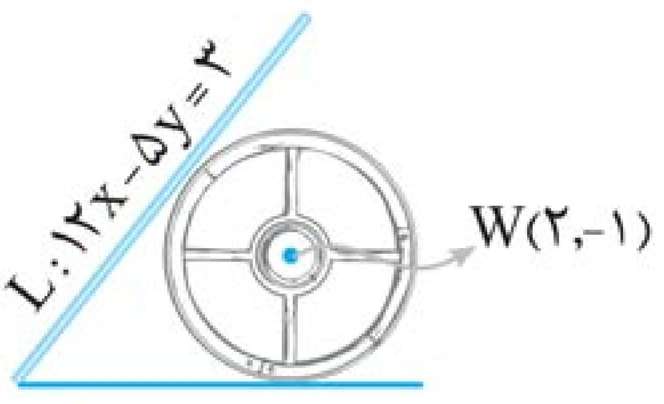
با توجه به چاشنی قبل، فاصلهٔ مورد نظر برابر است با: $d' = |۳-۷| = ۴$

چاشنی: فاصلهٔ هر خط مماس بر دایره تا مرکز دایره، برابر شعاع دایره است.



$$R = d = \frac{|ax_\circ + by_\circ + c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

مثال ۲۵ میله‌ای که در راستای خط $L:۱۲x-۵y=۳$ قرار دارد مطابق شکل بر چرخ چوبی دایره‌ای شکل به مرکز $W(۲,-۱)$ مماس است. شعاع چرخ را به‌دست آورید

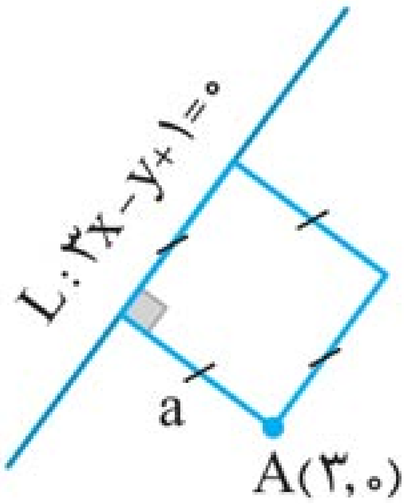


(مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۹)

پاسخ شعاع چرخ برابر فاصلهٔ مرکز آن تا خط $L : ۱۲x - ۵y - ۳ = ۰$ است، پس:

$$R = d = \frac{|۱۲(۲) - ۵(-۱) - ۳|}{\sqrt{(۱۲)^۲ + (-۵)^۲}} = \frac{۲۶}{۱۳} = ۲$$

مثال ۲۶ یکی از اضلاع مربعی بر خط $L : y = ۳x + ۱$ واقع است و $A(۳,۰)$ یکی از رئوس این مربع است. مساحت مربع را به‌دست آورید. (مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۹)

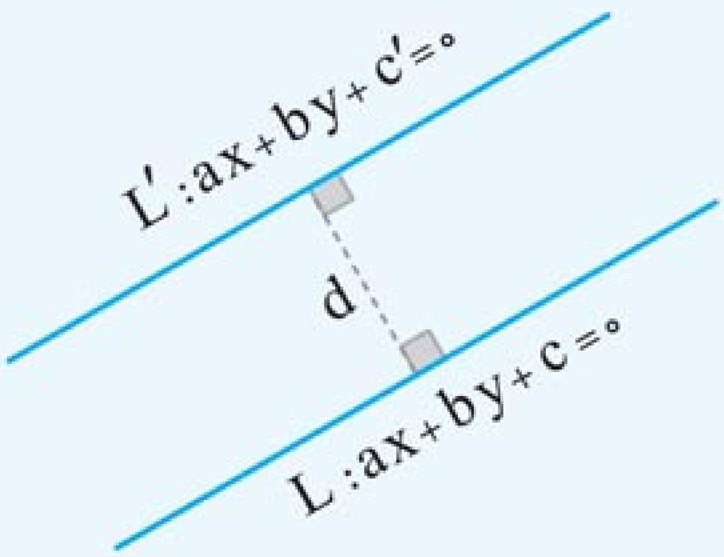


پاسخ A بر روی خط L نیست پس بر روی ضلع مقابل مربع است.
با توجه به شکل، فاصلهٔ A تا خط L برابر اندازهٔ ضلع مربع است.

$$a = d = \frac{|۳(۳) - (۰) + ۱|}{\sqrt{۳^۲ + ۱}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۱۰}} = \sqrt{۱۰}$$

پس مساحت مربع برابر است با: $S = a^۲ = (\sqrt{۱۰})^۲ = ۱۰$

چاشنی: فاصلهٔ دو خط موازی L و L' که معادلهٔ آن‌ها به صورت $ax + by + c = ۰$ و $ax + by + c' = ۰$ می‌باشد برابر است با:

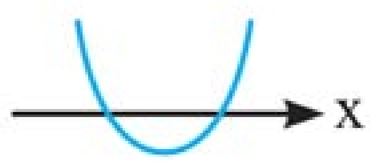
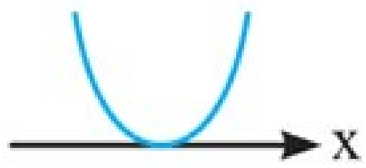
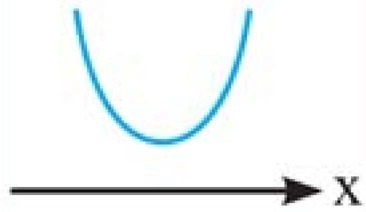
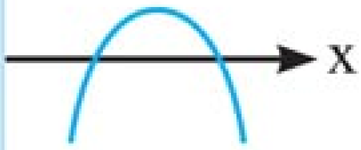
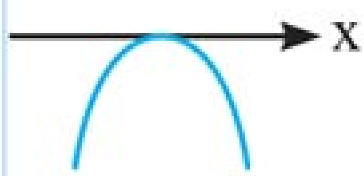
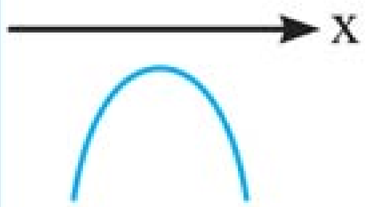


$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

وعدهٔ ۱۱

نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$

نمودار توابع درجه ۲ مطابق جدول زیر رسم می‌شوند:

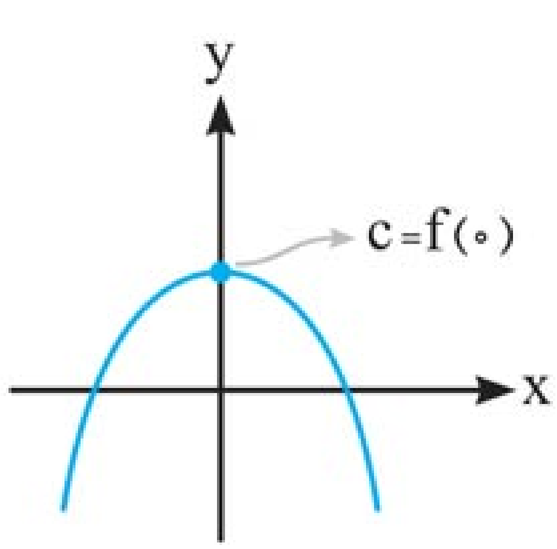
Δ / a	$\Delta > 0$ محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند.	$\Delta = 0$ در یک نقطه بر محور x ها مماس است.	$\Delta < 0$ محور x ها را قطع نمی‌کند.
$a > 0$ (سهمی رو به بالا)			
$a < 0$ (سهمی رو به پایین)			

ویژگی‌های نمودار تابع درجهٔ دوم $(f(x) = ax^2 + bx + c)$:

۱ Δ : **تعداد** ریشه‌ها را مشخص می‌کند.

۲ a : **جهت** دهانهٔ سهمی را مشخص می‌کند.

۳ c : **محـل برخورد** تابع با محور y ها یعنی $f(0)$ را مشـخص می‌کند.



به عنوان نمونه در سهمی زیر می‌توان گفت:

۱) سـهمی محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند، پس $\Delta > 0$ است.

۲) دهانـه سـهمی رو به پایین اسـت، پس $a < 0$ است.

۳) سـهمی محور y ها را در قسمت مثبت قطع می‌کند، پس $c > 0$ است.

چاشنی: تعیین تعداد و علامت ریشه‌های معادله $ax^{۲}+bx+c=۰$ به کمک S و P:

به کمک نمــودار درختی زیر، به راحتی می‌تــوان تعداد و علامت ریشـــه‌های معادلهٔ $ax^{۲}+bx+c=۰$ را که همــان صفرهای تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ هستند، به‌دست آورد.

- **۱** $\Delta>۰$ (دو ریشه (حقیقی)) $\Rightarrow$
  - $P>۰ \Rightarrow$ ریشه‌ها هم‌علامت $\Rightarrow$
    - $S>۰ \Rightarrow$ دو ریشه +
    - $S<۰ \Rightarrow$ دو ریشه −
  - $P=۰ \Rightarrow$ یک ریشه صفر $\Rightarrow$
    - $S>۰ \Rightarrow$ یکی ۰ و یکی +
    - $S<۰ \Rightarrow$ یکی ۰ و یکی −
  - $P<۰ \Rightarrow$ یکی + و یکی − $\Rightarrow$
    - $S>۰ \Rightarrow$ ریشهٔ مثبت $>$ |ریشهٔ منفی|
    - $S<۰ \Rightarrow$ ریشهٔ مثبت $<$ |ریشهٔ منفی|
- **۲** $\Delta=۰$ (یک ریشه (مضاعف)) $\Rightarrow$
  - $\frac{-b}{۲a}>۰ \Rightarrow$ یک ریشهٔ مضاعف +
  - $\frac{-b}{۲a}<۰ \Rightarrow$ یک ریشهٔ مضاعف −
- **۳** $\Delta<۰ \Rightarrow$ فاقد ریشهٔ حقیقی

تذکر: در حل مســائل این قسمت باید ابتدا Δ، سپس P و در آخر S معادله را بررسی و تعیین‌علامت کنیم.

مثال ۴۱ تعداد و علامت ریشه‌های معادلات زیر را به‌دست آورید.

الف) $۲x^{۲}-۶x+۱=۰$

ابتدا Δ، سپس P و در آخر هم S:

$\Delta=(-۶)^{۲}-۴(۲)(۱)=۲۸>۰ \Rightarrow$ دو ریشه دارد.

$P=\frac{۱}{۲}>۰ \Rightarrow$ دو ریشهٔ هم‌علامت دارد.

$S=-\frac{-۶}{۲}=۳>۰ \Rightarrow$ هر دو ریشه مثبت‌اند.

هندسه

درس اول: ترسیم‌های هندسی

- مجموعه نقاط دارای خاصیت یکسان
- وضعیت خط و دایره نسبت به هم
- عمود منصف
- رسم عمود منصف
- رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن
- رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیر واقع بر آن
- رسم خط موازی با خط داده شده از نقطه‌ای غیر واقع بر آن
- نیمساز
- نحوهٔ رسم نیمساز یک زاویه

درس دوم: استدلال و قضیهٔ تالس

- نسبت و تناسب
- استدلال
- قضیهٔ تالس و تعمیم آن
- برهان خلف
- عکس قضیهٔ تالس
- قضیه‌های دو شرطی

درس سوم: تشابه مثلث‌ها

- دو مثلث متشابه
- قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها
- قضایای تشابه دو مثلث
- برخی روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه

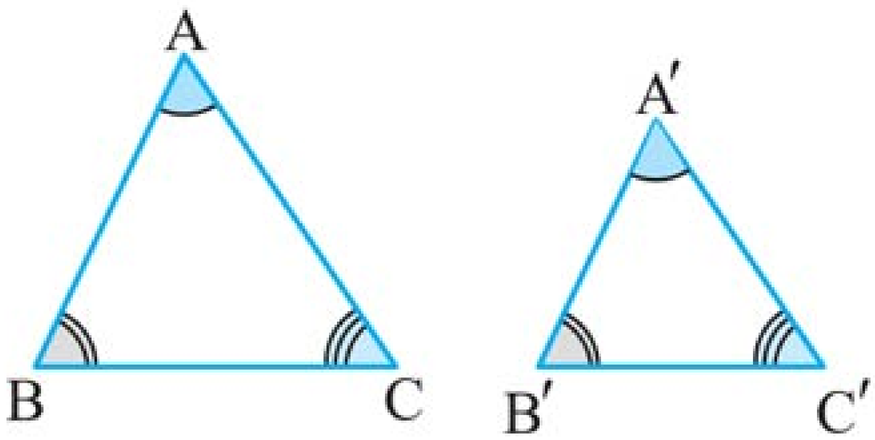
درس سوم

تشابه مثلث‌ها

وعدهٔ ۱۶

دو مثلث متشابه

دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را متشابه گوییم هرگاه زوایای متناظر با هم برابر باشند و نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث یکسان باشد.



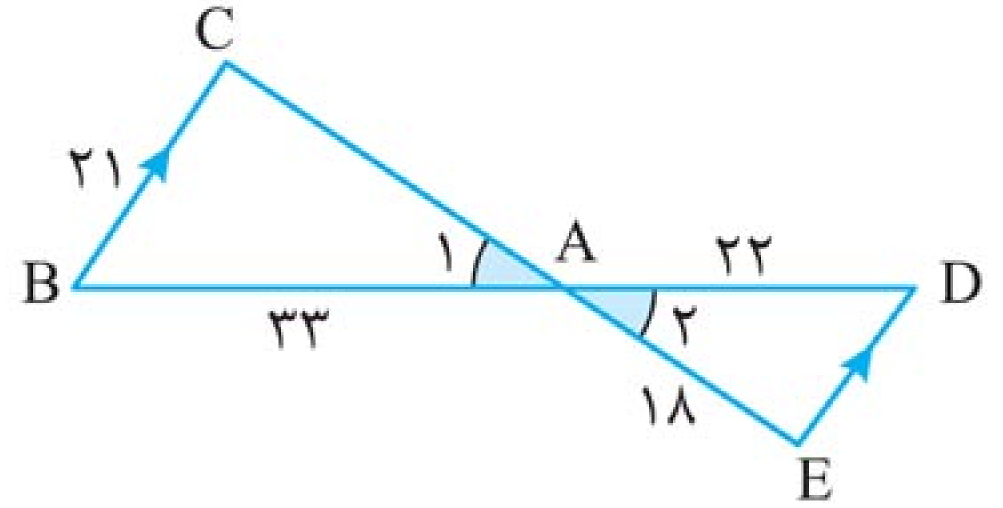
$$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A}=\hat{A}', \hat{B}=\hat{B}', \hat{C}=\hat{C}' \\ \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'} \end{cases}$$

قضیـهٔ ۱: هرگاه دو زاویه از مثلثی بـا دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

قضیهٔ ۲: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آن‌ها برابر باشد، دو مثلث متشابه‌اند.

قضیهٔ ۳: هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

مثال ۹ در شکل زیر، $BC \| DE$ است. اندازهٔ پاره‌خط‌های DE و CA را به دست آورید. (کار در کلاس صفحهٔ ۴۳)



پاسخ دو زاویهٔ A_1 و A_2 متقابل به رأس هستند و با هم برابرند.

زاویه‌هـای B و D نیز برابرند چون دو خط BC و DE موازی‌اند و BD مورب اسـت در نتیجه دو مثلث ADE و ABC براساس دو زاویهٔ یکسان متشابه‌اند. بنابراین:

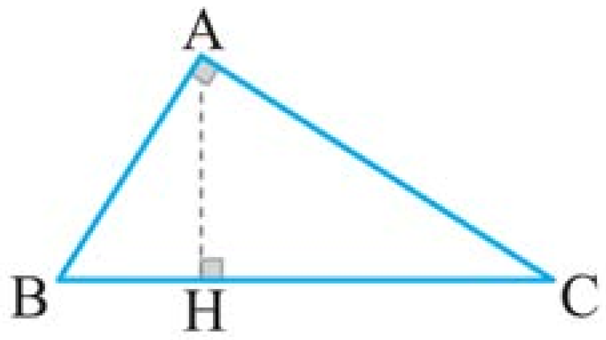
$$\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}$$

با جای‌گذاری مقادیر معلوم، مقدار اضلاع خواسته‌شده را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{DE}{۲۱}=\frac{۱۸}{AC}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\begin{cases}\frac{DE}{۲۱}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow DE=۱۴\\ \text{و}\\ \frac{۱۸}{AC}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow AC=۲۷\end{cases}$$

وعدهٔ ۱۹
برخی روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه

در هــر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتــر، دو مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آورد که این دو مثلث با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.



$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{AHB}$

$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{AHC}$

$\overset{\triangle}{AHB} \sim \overset{\triangle}{AHC}$

از تشابه این مثلث‌ها می‌توان نتیجه گرفت:

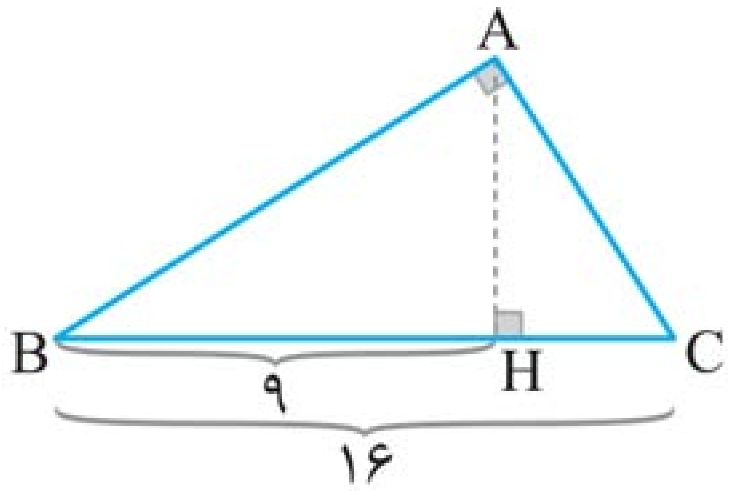
$AC^۲ = CH \times BC$

$AB^۲ = BH \times BC$

$AH^۲ = BH \times HC$

می‌توان از محاسبهٔ مساحت مثلث، رابطهٔ زیر را ثابت کرد:

$AB \times AC = AH \times BC$



مثال ۱۰ در مثلث ABC به کمک اندازه‌های داده‌شــده مقادیــر AH ، AB و AC را بیابید.

پاسخ به کمک دو مقدار داده‌شده، AB را می‌یابیم:

$AB^۲ = BH \times BC = ۹ \times ۱۶ \Rightarrow AB = ۳ \times ۴ = ۱۲$

حال مقدار CH را با کم کردن BH از BC پیدا می‌کنیم:

$CH = BC - BH = ۱۶ - ۹ = ۷$

تابع

درس اول: آشنایی با برخی از انواع توابع

- تابع
- صورت‌های مختلف نمایش تابع
- انواع توابع
- توابع گویا
- تساوی دو تابع
- توابع رادیکالی
- توابع پله‌ای
- توابع جزء صحیح
- نمودار توابع شامل جزء صحیح

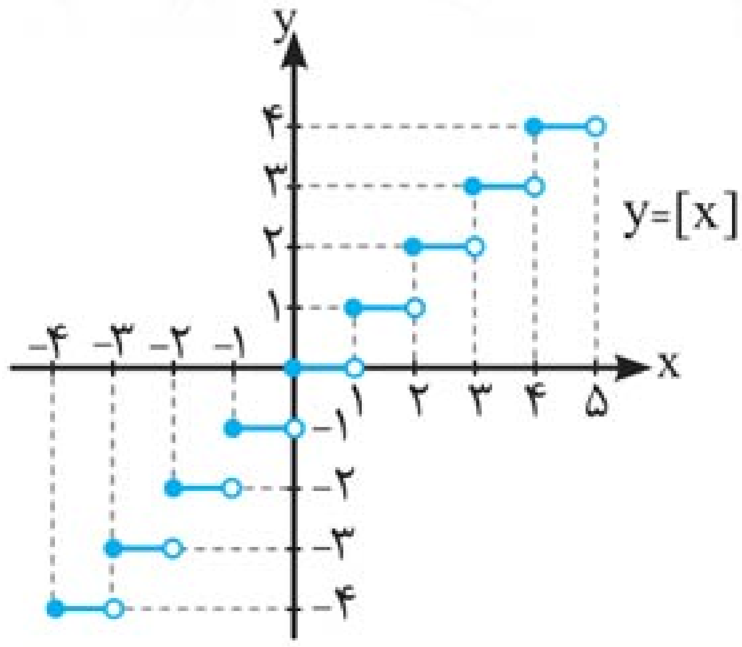
درس دوم: وارون یک تابع و تابع یک‌به‌یک

- وارون یک تابع
- تابع یک‌به‌یک
- محدود کردن دامنه برای یک به یک نمودن تابع
- تابع وارون
- به دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت

درس سوم: اعمال جبری روی توابع

- جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو تابع
- رسم نمودار به کمک انتقال، انقباض، انبساط و ...

نمودار تابع جزءصحیح به صورت روبه‌رو است:



چاشنی: ویژگی‌های جزءصحیح:

۱ هر عدد صحیح از جزءصحیح می‌تواند خارج شود:

$$a \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x+a]=[x]+a$$

به طور مثال:

$$[x+۷]=[x]+۷$$

۲ مجموع جزءصحیح یک عدد و جزءصحیح قرینهٔ آن عدد برابر ۰ یا ۱− است.

$$[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & ; \quad x\in\mathbb{Z} \\ -۱ & ; \quad x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

به طور مثال برای عدد صحیح $x=-۳$ داریم:

$$[x]+[-x]=[-۳]+[-(-۳)]=-۳+۳=۰$$

هم‌چنین برای عدد غیرصحیح $x=-۱/۱$ داریم:

$$[x]+[-x]=[-۱/۱]+[-(-۱/۱)]=-۲+[۱/۱]=-۲+۱=-۱$$

۳ همواره اختلاف هر عدد از جزءصحیح آن عدد بزرگ‌تر مساوی صفر و کوچک‌تر از ۱ است.

$$۰\le x-[x]<۱$$

مثال ۱۴ **برد تابع $y=۲x-۲[x]+۳$ را به دست آورید.**

پاسخ می‌دانیم همواره $۰\le x-[x]<۱$ برقرار است، پس:

$$۰\le x-[x]<۱ \xrightarrow{\times ۲} ۰\le ۲x-۲[x]<۲$$

$$\xrightarrow{+۳} ۳\le ۲x-۲[x]+۳<۵ \Rightarrow ۳\le y<۵ \Rightarrow R=[۳,۵)$$

وعدهٔ ۹

نمودار توابع شامل جزء صحیح

برای رسم این توابع با دامنهٔ مشخص، باید هر بازه که در آن جزءصحیح دارای یک مقدار ثابت است را به دست آوریم. بدین ترتیب می‌توانیم هر پله از نمودار را به طور جداگانه رسم کنیم.

مثال ۱۵ نمودار توابع زیر را رسم نمایید. (مشابه تمرین ۸ صفحهٔ ۵۶)

الف) $\mathbf{f(x)=2[\frac{x}{3}]\ ,\ D_f=[-3,4]}$

با توجه به دامنه می‌توان گفت: $-3\le x\le 4\Rightarrow -1\le \frac{x}{3}\le \frac{4}{3}$

بدین ترتیب $[\frac{x}{3}]$ می‌تواند دارای مقادیر زیر باشد:

$$-1\le \frac{x}{3}<0 \xrightarrow{\times 3} -3\le x<0\Rightarrow [\frac{x}{3}]=-1$$

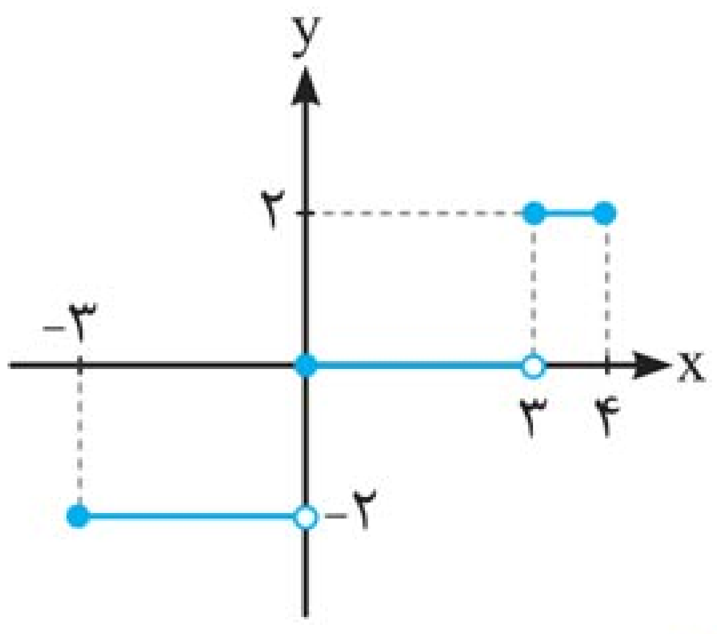
$$0\le \frac{x}{3}<1 \xrightarrow{\times 3} 0\le x<3\Rightarrow [\frac{x}{3}]=0$$

$$1\le \frac{x}{3}\le \frac{4}{3} \xrightarrow{\times 3} 3\le x\le 4\Rightarrow [\frac{x}{3}]=1$$

در نتیجه ضابطهٔ $f(x)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f(x)=\begin{cases} 2(-1)=-2 & ;\quad -3\le x<0 \\ 2(0)=0 & ;\quad 0\le x<3 \\ 2(1)=2 & ;\quad 3\le x\le 4 \end{cases}$$

حال نمودار با توجه به ضابطهٔ $f(x)$ رسم می‌شود.



اعمال جبری روی توابع — درس سوم

وعدهٔ ۱۵
جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو تابع

اگـــر f و g دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشـــند، در این صورت جمع، تفریق، ضرب و تقسیم آن‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ضابطه	تعریف دامنه
$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$D_{f+g}=D_f\cap D_g$
$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	$D_{f-g}=D_f\cap D_g$
$(f.g)(x)=f(x).g(x)$	$D_{f.g}=D_f\cap D_g$
$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=۰\}$

مثال ۲۷ برای دو تابع $f(x)=\sqrt{x+۴}$ و $g(x)=x^۲-۱$، توابع زیر را به همراه دامنه‌شان به دست آورید.

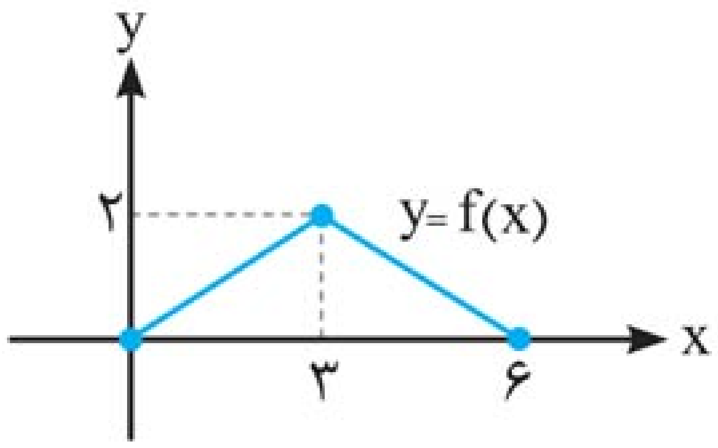
الف) $(f+g)(x)$

$$\begin{cases} f: x+۴\geq ۰ \Rightarrow x\geq -۴ \Rightarrow D_f=[-۴,+\infty) \\ g: D_g=\mathbb{R} \end{cases}$$

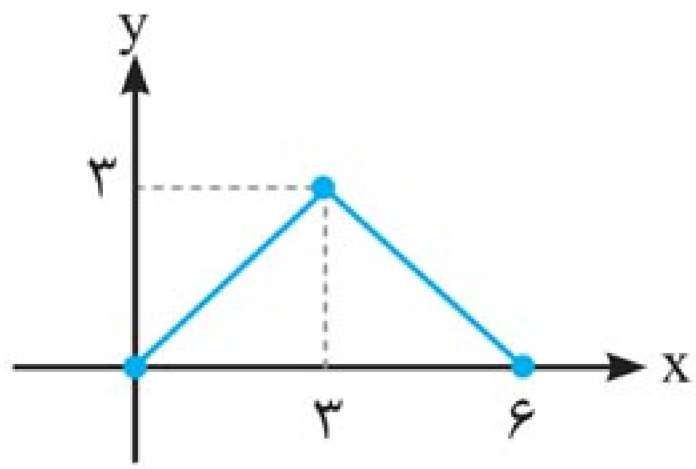
$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=[-۴,+\infty)$$

الـف) اگـر $k > 1$ باشـد: در این حالت عرض نقاط، k برابر شـده و نمودار $y = f(x)$ در راستای محور y ها کشیده‌تر می‌شود (انبساط می‌کند).

برای نمونـه فرض‌کنید نمودار $y = f(x)$ مانند روبه‌رو باشد:

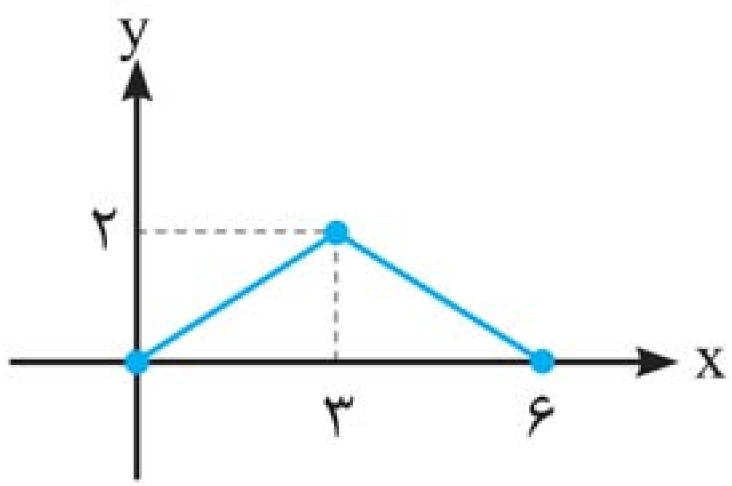


اگرنمودار $y = \frac{۳}{۲} f(x)$ را بخواهیم، کافیسـت عـرض همـۀ نقـاط $y = f(x)$ را $\frac{۳}{۲}$ برابـر نماییـم. دقت نمایید نمودار تابع $f(x)$ در راستای y ها انبساط کرده است.



ب) اگر $۰ < k < ۱$ باشـد: در این حالت عرض نقاط k برابر شـده و نمـودار $y = f(x)$ در راسـتای محور y ها جمع‌تر می‌شـود (دچار انقباض می‌کند).

برای نمونه فرض کنید نمودار $y = f(x)$ مانند زیر باشد.



مثلثات

درس اول: واحدهای اندازه‌گیری زاویه

- یادآوری
- رادیان

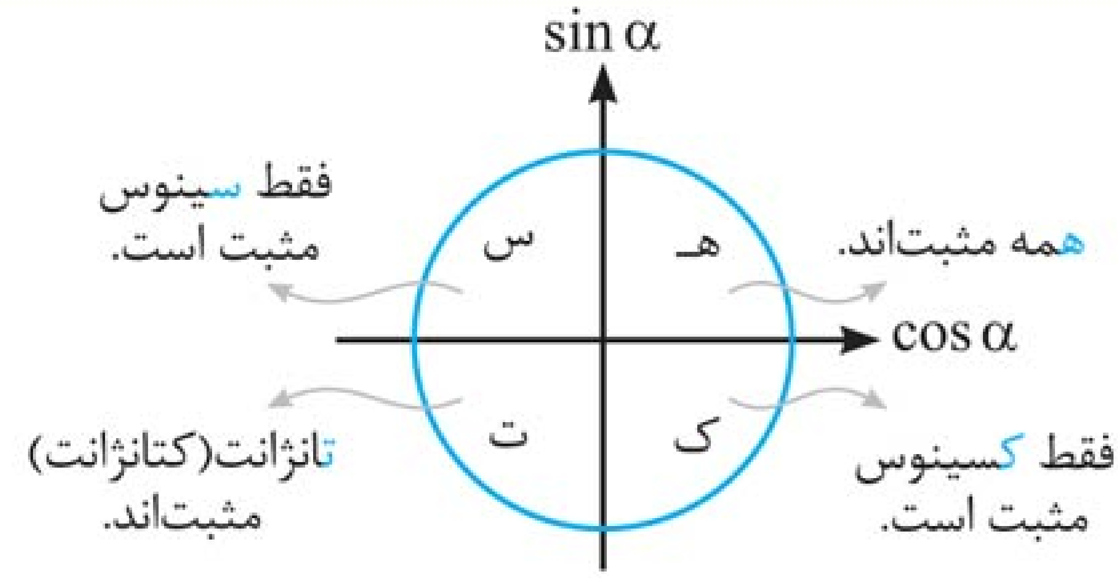
درس دوم: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

- تعیین علامت نسبت‌های مثلثاتی در نواحی چهارگانهٔ دایره مثلثاتی
- نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه
- نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل
- نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف π رادیان
- نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم
- نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف $\frac{\pi}{۲}$ رادیان
- نسبت‌های مثلثاتی زوایا با مجموع یا تفاضل $\frac{۳\pi}{۲}$ رادیان
- نسبت‌های مثلثاتی زوایا با مجموع یا تفاضل $۲k\pi$ رادیان

درس سوم: توابع مثلثاتی

- معرفی توابع مثلثاتی
- رسم تابع سینوس
- رسم تابع کسینوس
- رسم توابع $y=a\sin(x-b)+c$ یا $y=a\cos(x-b)+c$

چاشنی : برای تعیین علامت نسبت‌های مثلثاتی زوایای مختلف می‌توانیم از «قاعدهٔ هستک» استفاده کنیم.



در این وعده به یادآوری مباحث گذشته پرداختیم، زیرا در ادامهٔ درس کاربرد فراوانی دارند.

چاشنی : اتحادهای مثلثاتی اولیه به صورت زیر هستند.

۱ $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

۲ $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

۳ $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$

مثال ۴ اگر $\cos\alpha = \frac{۱}{۵}$ و انتهای کمان α در ربع چهارم باشد، بقیهٔ نسبت‌های مثلثاتی کمان α را به دست آورید.

(مشابه فعالیت صفحهٔ ۷۸)

پاسخ از اتحادهای مثلثاتی اولیه استفاده می‌کنیم:

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \Rightarrow \sin^۲\alpha + (\frac{۱}{۵})^۲ = ۱ \Rightarrow \sin^۲\alpha = \frac{۲۴}{۲۵}$$

حال می‌دانیم در ربع چهارم فقط $\cos\alpha$ مثبت است، پس:

$$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{۲۴}}{۵} = -\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}$$

هم‌چنین:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}}{\frac{۱}{۵}} = -۲\sqrt{۶},\ \ \cot\alpha = -\frac{۱}{۲\sqrt{۶}}$$

چاشنی: نسبت‌های مثلثاتی زوایای مهم به صورت زیر می‌باشند:

نسبت / زاویهٔ α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
۰ رادیان $= 0^\circ$ یا رادیان $2\pi = 360^\circ$	۰	۱	۰	ت ن
رادیان $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
رادیان $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	۱	۱
رادیان $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
رادیان $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$	۱	۰	ت ن	۰
رادیان $\pi = 180^\circ$	۰	-1	۰	ت ن
رادیان $\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$	-1	۰	ت ن	۰

تذکر: باید دقت کنیم هنگامی که $\cos\alpha = 0$ می‌باشد، $\tan\alpha$ تعریف نشــده اســت، زیرا $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ و مخرج کسر نمی‌تواند صفر شود. هم‌چنین هنگامی که $\sin\alpha = 0$ می‌باشد، $\cot\alpha$ تعریف نشده است، زیرا $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ و مخرج کسر نمی‌تواند صفر شود.

درس سوم توابع مثلثاتی

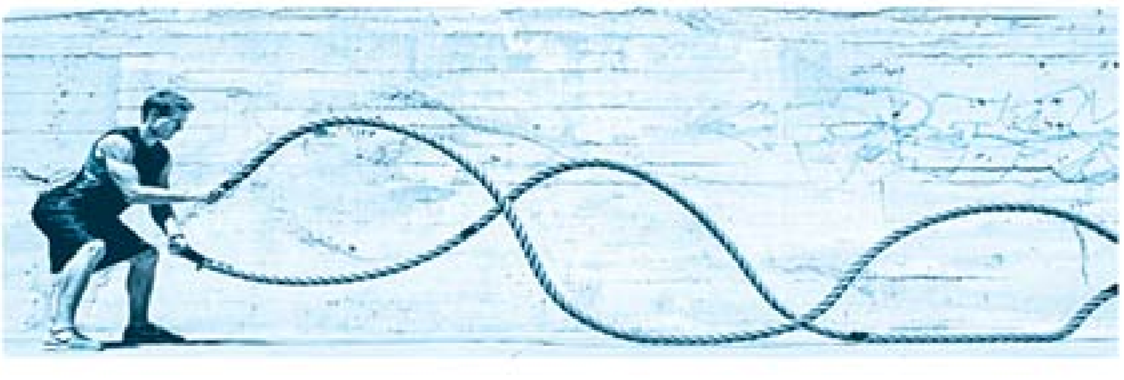
وعدهٔ ۱۱
معرفی توابع مثلثاتی

توابعی نظیر تابع سـینوس با ضابطهٔ $y = \sin x$ و تابع کسینوس با ضابطهٔ $y = \cos x$ نمونه‌هایی از توابع مثلثاتی‌اند که در این کتاب با آن‌ها آشنا می‌شوید.

مقدار $\sin$ و $\cos$ همواره کوچک‌تر مساوی ۱ و بزرگ‌تر مساوی ۱− است، پس:

$$y = \sin x \text{ یا } y = \cos x \Rightarrow \begin{cases} D = \mathbb{R} \\ R = [-۱, ۱] \end{cases}$$

وعدهٔ ۱۲
رسم تابع سینوس



برای رسم $y = \sin x$ از نقطه‌یابی استفاده می‌نماییم:

x	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π
$y = \sin x$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰

حد و پیوستگی

درس اول: فرایندهای حدی

- مفهوم شهودی حد
- تعریف حدود چپ و راست و حد

درس دوم: محاسبهٔ حد توابع

- قضایای حد
- محاسبهٔ حد توابع خاص
- حدهای مثلثاتی

درس سوم: پیوستگی

- پیوستگی در نقطه
- پیوستگی روی یک بازه

چاشنی: حد تابع $f(x)$ در $x = x_{\circ}$ هیچ ربطی به مقدار تابع در $x = x_{\circ}$ ندارد.

به طور کلی اگر دربارهٔ تابعی مانند f داشته باشیم $\lim\limits_{x \to x_{\circ}} f(x) = \ell$، آن‌گاه دربارهٔ $f(x_{\circ})$ یکی از حالت‌های زیر را داریم:

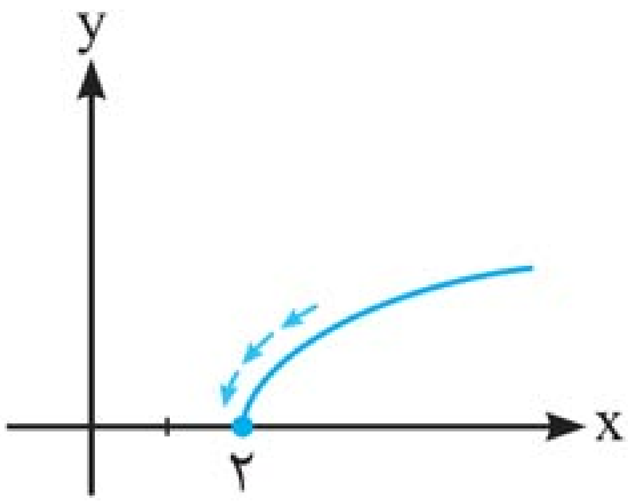
۱ $f(x_{\circ})$ موجود نیست.

۲ $f(x_{\circ})$ موجود است؛ ولی $\lim\limits_{x \to x_{\circ}} f(x) \neq f(x_{\circ})$.

۳ $\lim\limits_{x \to x_{\circ}} f(x) = f(x_{\circ})$.

مثال ۳ هر یک از حدود زیر را به کمک نمودار توابع آن‌ها به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۲^+} \sqrt{x - ۲}$



نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x - ۲}$ مطابق شکل روبه‌رو است.

مطابق نمودار، وقتی $x \to ۲^+$ مقدار تابع به صفر نزدیک می‌شود، پس:

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = ۰$$

ب) $\lim\limits_{x \to ۲} \sqrt{x - ۲}$

با توجه به نمودار رسم‌شده در قسمت قبل، تابع در سمت چپ $x = ۲$ تعریف نشده است، پس حد ندارد.

آمار و احتمال

درس اول: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

- یادآوری
- احتمال شرطی
- پیشامدهای مستقل

درس دوم: آمار توصیفی

- معیارهای گرایش به مرکز
- معیارهای پراکندگی

آمار توصیفی
درس دوم

آمار توصیفی به خلاصه‌سازی داده‌ها در قالب نمودار، جدول و یا شاخص‌هایی در قالب **معیارهای گرایش به مرکز** و **معیارهای پراکندگی** می‌پردازد.

وعدهٔ ۴
معیارهای گرایش به مرکز

از جمله معیارهای گرایش به مرکز می‌توان به میانگین و میانه اشاره کرد.

میانگین: متوسط یا مرکز ثقل داده‌هاست که آن را با $\bar{X}$ نشان می‌دهیم. میانگین داده‌های $x_۱, x_۲, \ldots, x_N$ برابر است با:

$$\bar{X} = \frac{x_۱ + x_۲ + \cdots + x_N}{N}$$ (N برابر با تعداد کل داده‌هاست.)

ویژگی‌های میانگین

۱ اگر هریک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شود، میانگین آن‌ها نیز با همان مقدار ثابت جمع می‌شود.

$$\begin{cases} x_۱, x_۲, \ldots, x_n \Rightarrow \text{میانگین} = \bar{X} \\ x_۱ + k, \ldots, x_n + k \Rightarrow \bar{X}_{\text{جدید}} = \bar{X}_{\text{قدیم}} + k \\ \Rightarrow \bar{X}_{\text{جدید}} = \bar{X} + k \end{cases}$$

۲ اگر هریک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شود، میانگین آن‌ها نیز در همان مقدار ثابت ضرب خواهد شد.

$$\begin{cases} x_۱, \ldots, x_n \Rightarrow \text{میانگین} = \bar{X} \\ kx_۱, \ldots, kx_n \Rightarrow \bar{X}_{\text{جدید}} = k\bar{X}_{\text{قدیم}} \end{cases} \Rightarrow \bar{X}_{\text{جدید}} = k\bar{X}$$

فصل۴

۱ اندازهٔ زاویه بر حسب رادیان:

$$\alpha = \frac{\text{طول کمان روبه‌روی زاویهٔ } \alpha}{\text{شعاع دایره}} = \frac{\ell}{r}$$ برحسب رادیان

۲ تبدیل رادیان به درجه:

D اندازهٔ زاویه برحسب درجه و R اندازهٔ زاویه α برحسب رادیان است.

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi \text{ رادیان}}$$

۳ روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی:

نسبت‌های مثلثاتی $(-\alpha)$
$$\begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \tan(-\alpha) = -\tan\alpha \\ \cot(-\alpha) = -\cot\alpha \end{cases}$$

نسبت‌های مثلثاتی $(\pi - \alpha)$
$$\begin{cases} \sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha \\ \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha \\ \tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha \\ \cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha \end{cases}$$

نسبت‌های مثلثاتی $(\pi + \alpha)$
$$\begin{cases} \sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha \\ \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha \\ \tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha \\ \cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha \end{cases}$$

نسبت‌های مثلثاتی $(۲k\pi-\alpha),\ k\in\mathbb{Z}$
$$\begin{cases} \sin(۲k\pi-\alpha) = -\sin\alpha \\ \cos(۲k\pi-\alpha) = \cos\alpha \\ \tan(۲k\pi-\alpha) = -\tan\alpha \\ \cot(۲k\pi-\alpha) = -\cot\alpha \end{cases}$$

۴ توابع مثلثاتی:

$$y=\sin x \Rightarrow \begin{cases} D=\mathbb{R} \\ R=[-۱,۱] \end{cases}$$

$$y=\cos x \Rightarrow \begin{cases} D=\mathbb{R} \\ R=[-۱,۱] \end{cases}$$

فصل۵

۱ توان‌های حقیقی: $a,b>۰ \quad , \quad a,b\neq ۱ \quad , \quad x,y\in\mathbb{R}$

$$a^{۰}=۱ \qquad (ab)^x=a^x\cdot b^x$$

$$a^{-x}=\frac{۱}{a^x} \qquad (\frac{a}{b})^x=\frac{a^x}{b^x}$$

$$a^x\cdot a^y=a^{x+y} \qquad \frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$$

$$(a^x)^y=a^{xy}$$

۲ تابع نمایی:

$$f(x)=a^x \quad (a>۰,a\neq ۱)\Rightarrow \begin{cases} D_f=\mathbb{R} \\ R_f=(۰,+\infty) \end{cases}$$

۳ نامعادلات نمایی: $(a>۰,a\neq ۱):a^x>a^y \xrightarrow{a>۱} x>y$

$$a^x>a^y \xrightarrow{۰<a<۱} x<y$$

۴ معادلات نمایی: $a^x=a^y \quad , \quad (a>۰,a\neq ۱)\Leftrightarrow x=y$

۵ تابع لگاریتمی:

$$f(x)=\log_a^x \quad (a>۰ \quad , \quad a\neq ۱)\Rightarrow \begin{cases} D_f=(۰,+\infty) \\ R_f=\mathbb{R} \end{cases}$$

۶ ده فرمان لگاریتم:

الف) $a^y = x \Leftrightarrow \log_a^x = y$

ب) $\log_a^{۱} = ۰ \quad , \quad \log_a^a = ۱ \quad , \quad \log_a^{\frac{۱}{a}} = -۱$

پ) $\log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b$

ت) $\log_c^{\frac{a}{b}} = \log_c^a - \log_c^b$

ث) $\log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_b^a$

ج) $a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}$

چ) $a^{\log_a^b} = b^{\log_a^a} = b$

ح) $\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$

خ) $\log_b^a = \frac{۱}{\log_a^b}$

د) $\log_b^a \times \log_c^b = \log_c^a$

تذکر: تمامی لگاریتم‌های بالا تعریف شده‌اند.

---

۷ معادلات لگاریتمی:

$$(a > ۰ , a \neq ۱)\log_a^x = \log_a^y \xleftrightarrow{x , y > ۰} x = y$$

---

۸ نامعادلات لگاریتمی:

$$a > ۱ : \log_a^x > \log_a^y \xleftrightarrow{x , y > ۰} x > y$$

$$۰ < a < ۱ : \log_a^x > \log_a^y \xleftrightarrow{x , y > ۰} x < y$$

---

۹ انرژی آزاد شده در یک زلزله: $\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M$

M: بزرگی زلزله بر حسب ریشتر

E: انرژی آزاد شده در واحد اِرگ (Erg)

فصل۶

۱ شرط وجود حد تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \ell$$