فصل ۱

# مجموعه، الگو و دنباله

## مجموعه، الگو و دنباله

**درس اول** مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

- یادآوری
- وضعیت مجموعه‌های اعداد
- بازه‌ها
- مجموعه‌های متناهی و نامتناهی
- جدول اعمال روی مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

**درس دوم** متمم یک مجموعه

- مجموعهٔ مرجع و مجموعهٔ متمم
- متمم مجموعه‌های متناهی و نامتناهی
- محاسبهٔ تعداد اعضای اجتماع، تفاضل و متمم دومجموعه

**درس سوم** الگو و دنباله

- الگو
- الگوی خطی
- الگوهای غیرخطی
- دنباله
- دنبالهٔ بازگشتی

**درس چهارم** دنباله‌های حسابی و هندسی

- دنبالهٔ حسابی
- واسطهٔ حسابی
- درج $m$ واسطه حسابی
- قانون اندیس‌ها در دنبالهٔ حسابی
- دنبالهٔ هندسی
- واسطهٔ هندسی
- درج $m$ واسطهٔ هندسی
- قانون اندیس‌ها در دنبالهٔ هندسی
- مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا $n$

درس اول

# مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

## وعدهٔ ۱
## یادآوری

برخی از مجموعه‌هایی را که در سال قبل با آن آشنا شدید، در زیر ملاحظه می‌کنید.

مجموعهٔ اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, ۴, \ldots\}$

مجموعهٔ اعداد حسابی: $\mathbb{W} = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, \ldots\}$

مجموعهٔ اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, \ldots\}$

مجموعهٔ اعداد گویا: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq ۰\}$

مجموعهٔ اعداد گنگ: $\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

مجموعهٔ اعداد حقیقی: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

**چاشنی:** ۱ مجموعه اعداد حقیقی به دو زیرمجموعهٔ **اعداد گویا** ($\mathbb{Q}$) و **اعداد گنگ** ($\mathbb{Q}'$) تقسیم می‌شود. هر عددی را که بتوان به صورت $\frac{m}{n}$ نوشت، در صورتی که $m$ و $n$ اعدادی صحیح باشند و $n$ مخالف صفر باشد، را یک عدد **گویا** می‌نامند و در غیر این صورت آن عدد را یک عدد **گنگ** می‌نامند.

۲ اگر هر عدد دلخواهی را در نظر بگیریم، جایی روی محور اعداد حقیقی دارد هم‌چنین هر نقطه روی این محور نشان‌دهندهٔ یک عدد حقیقی مشخص است.

## وعدهٔ ۳
## بازه‌ها

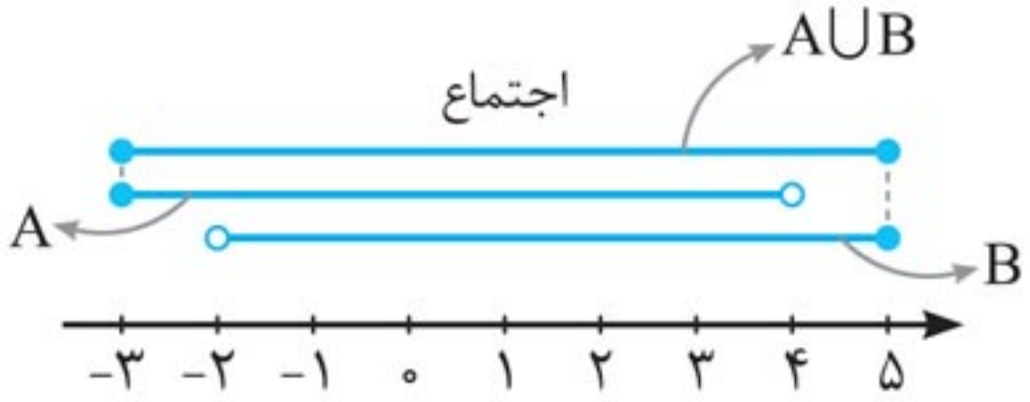
زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ که مشخص کننده یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشند را «بازه» یا «فاصله» می‌نامیم. مثلاً می‌توان مجموعهٔ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid ۰ \leq x \leq ۲\}$ را به صورت $[۰ , ۲]$ نوشت. دقت داشته باشید که خود اعداد ۰ و ۲ در این بازه حضور دارند یا مجموعهٔ $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -۱ < x \leq ۱\}$ را می‌توان به صورت $(-۱ , ۱]$ نوشت. عدد $-۱$ در این بازه حضور ندارد ولی عدد ۱ در این بازه حضور دارد.

### انواع بازه

| نوع بازه | نمایش هندسی | بازه | نمایش مجموعه‌ای |
|---|---|---|---|
| بسته | | $[a , b]$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ |
| باز | | $(a , b)$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ |
| نیم‌باز | | $[a , b)$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ |
| نیم‌باز | | $(a , b]$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ |
| نیم‌باز | | $[a , +\infty)$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ |
| نیم‌باز | | $(-\infty , b]$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ |
| باز | | $(a , +\infty)$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ |
| باز | | $(-\infty , b)$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ |

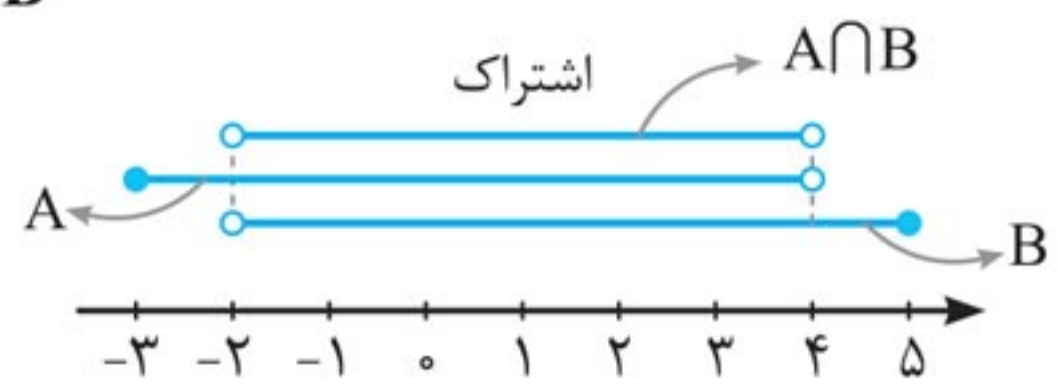
**مثال ۴** نمایش هندسی دو بازهٔ $B=(-۲,۵]$ و $A=[-۳,۴)$ را روی محور رسم کرده و سپس حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید. (مشابه کاردرکلاس ص۵)

**الف)** $A \cup B$



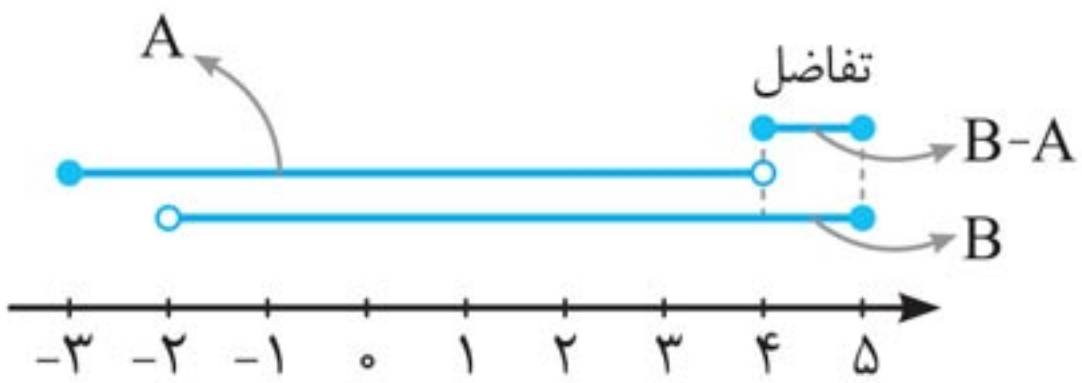

$$A \cup B = [-۳, ۵]$$

**ب)** $A \cap B$




$$A \cap B = (-۲, ۴)$$

**پ)** $B - A$




$$B - A = [۴, ۵]$$

**مثال ۵** درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

(مشابه کاردرکلاس ص۵)

**الف)** $۱ \in (-۲, ۱]$

درست است، چون بازهٔ داده‌شده از سمت راست بسته است و عدد ۱ عضو این بازه می‌باشد.

**ب)** $۰ \in (۰, ۲)$

نادرست است، چون بازهٔ داده‌شده از سمت چپ باز است و عدد صفر عضو این بازه نمی‌باشد.

**پ)** $\frac{۷}{۸} \in [۰, ۱]$

درست است، زیرا $\frac{۷}{۸}$ یک عدد بین صفر و یک می‌باشد و در این بازه قرار دارد.

وعدهٔ ۴

## مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها یک **عدد حسابی** است را **متناهی** می‌نامند. مانند تعداد مولکول‌های آب روی کرهٔ زمین یا تعداد کل انسان‌های متولدشده روی کرهٔ زمین از ابتدا تاکنون.

مجموعهٔ **نامتناهی**، مجموعه‌ای است که تعداد اعضای آن از هر عددی بزرگ‌تر است مانند خود مجموعهٔ اعداد طبیعی یا مجموعهٔ اعداد صحیح کوچک‌تر از یک میلیون.

وعدهٔ ۵

## جدول اعمال روی مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

| تفاضل | اشتراک | اجتماع | انواع مجموعه‌ها |
|---|---|---|---|
| متناهی | متناهی | متناهی | دو مجموعهٔ متناهی |
| نامتناهی<br>متناهی − نامتناهی = | متناهی | نامتناهی | یک مجموعه متناهی و دیگری نامتناهی |
| نامعلوم | نامعلوم | نامتناهی | دو مجموعهٔ نامتناهی |

**مثال ۶** متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌ها را مشخص کنید.

**الف) مجموعهٔ اعداد زوج دورقمی** (مشابه تمرین ص۷)

متناهی می‌باشد، چون تعداد عضوها یک عدد حسابی است.

$$A = \{۱۰, ۱۲, \ldots, ۹۸\}$$

**ب) مجموعهٔ اعداد طبیعی**

نامتناهی می‌باشد، چون تعداد عضوهای مجموعهٔ اعداد طبیعی یک عدد حسابی نیست.

$$\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, \ldots\}$$

**پ) اعداد حقیقی بین ۰ و ۲ (بازهٔ $(۰, ۲)$)**

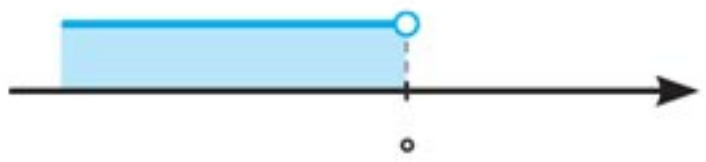
نامتناهی می‌باشد، چون در این بازه بی‌شمار عدد وجود دارد.

**ت) مجموعهٔ دانش‌آموزان پایهٔ دهم سراسر کشور**

متناهی می‌باشد، چون تعداد دانش‌آموزان پایهٔ دهم سراسر کشور یک عدد حسابی است.

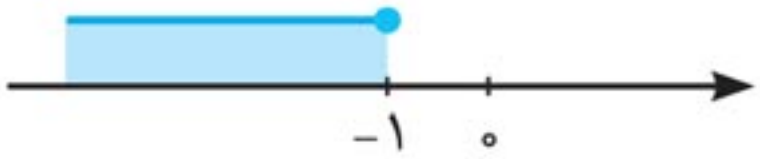
**پ) اگر $C=[۰,+\infty)$، آن‌گاه $C'$ را بیابید.**

$$C'=\mathbb{R}-C=\mathbb{R}-[۰,+\infty)=(-\infty,۰)$$




**ت) با استفاده از قسمت الف و پ، مجموعهٔ $(A\cup C)'$ را بیابید.**

$$(A\cup C)'=\mathbb{R}-(A\cup C)$$
$$=\mathbb{R}-(-۱,+\infty)=(-\infty,-۱]$$




وعدهٔ ۷

## متمم مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۱ متمم یک مجموعهٔ **متناهی** در مجموعهٔ مرجع **نامتناهی**، مجموعه‌ای **نامتناهی** است. به عنوان مثال اگر $U=\mathbb{N}$ و $A=\{۱,۲\}$ باشد، متمم مجموعهٔ $A$ یعنی $A'$ یک مجموعهٔ نامتناهی است. $A'=\{۳,۴,۵,\ldots\}$

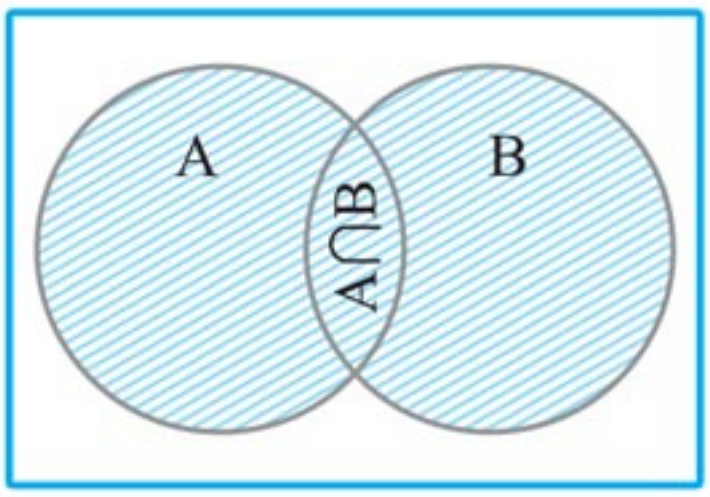
۲ متمم یک مجموعهٔ **نامتناهی** ممکن است **متناهی** و ممکن است **نامتناهی** شود. به عنوان مثال مجموعهٔ $A=\{۴,۵,۶,\ldots\}$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی، متممی برابر $A'=\{۱,۲,۳\}$ دارد که متناهی است ولی متمم مجموعهٔ $A$ در مجموعهٔ اعداد صحیح به صورت $A'=\{\ldots,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}$ می‌باشد که نامتناهی است.

وعدهٔ ۸

## تعداد اعضای اجتماع، تفاضل و متمم دو مجموعه

اگر تعداد اعضای مجموعهٔ مرجع را با $n(U)$ نشان دهیم، آن‌گاه:

۱ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

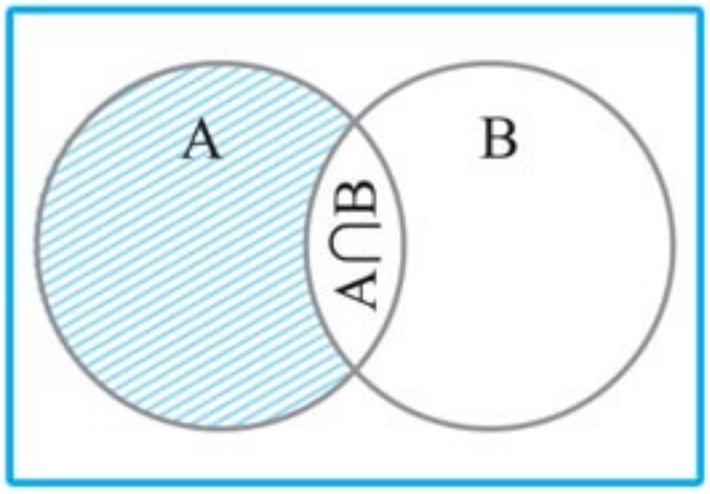



$n(A \cup B)$ یعنی تعداد عضوهایی که در $A$ یا در $B$ هستند.
$n(A \cap B)$ یعنی تعداد عضوهایی که هم در $A$ و هم در $B$ هستند.

**چاشنی:** اگر $A$ و $B$ دو مجموعهٔ جدا از هم باشند، $(A \cap B = \varnothing \Rightarrow n(A \cap B) = ۰)$، آن‌گاه داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

۲ $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$




$n(A - B)$ یعنی تعداد عضوهایی که در $A$ **هستند** ولی در $B$ **نیستند** یا تعداد عضوهایی که **فقط** در $A$ هستند.

**ب) نه در المپیاد ریاضی و نه در المپیاد فیزیک شرکت کرده‌اند.**

این کلاس ۳۲ دانش‌آموز دارد که۲۶ تای آن‌ها یا در المپیاد ریاضی و یا در المپیاد فیزیک شرکت کرده‌اند، بنابراین تعداد دانش‌آموزانی که نه در المپیاد فیزیک و نه در المپیاد ریاضی شرکت کرده‌اند برابر است با:

$$n(R' \cap P') = n(R \cup P)' = n(U) - n(R \cup P) = ۳۲ - ۲۶ = ۶$$

**پ) فقط در المپیاد ریاضی شرکت کرده‌اند.**

$n(R - P)$: تعداد دانش‌آموزانی که فقط در المپیاد ریاضی شرکت کرده‌اند:

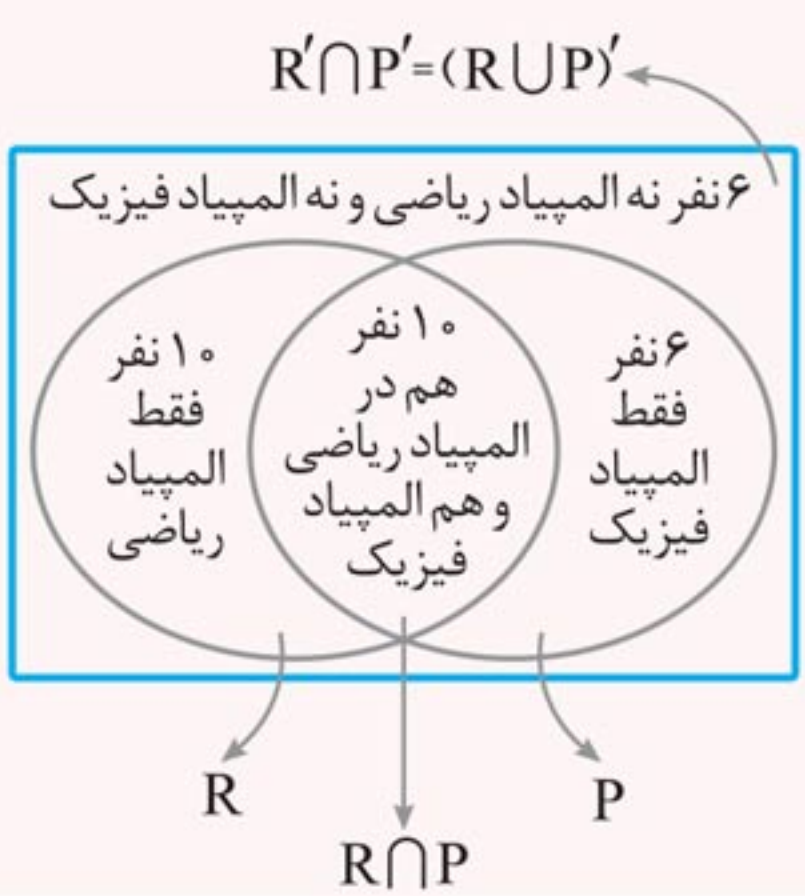
$$n(R - P) = n(R) - n(R \cap P) = ۲۰ - ۱۰ = ۱۰$$

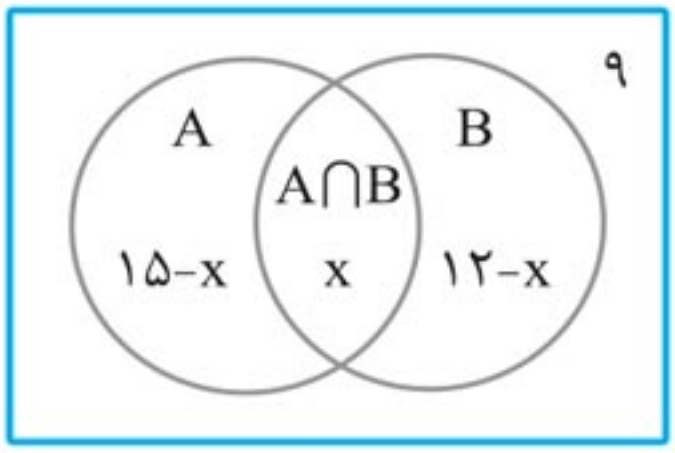
**ت) فقط در المپیاد فیزیک شرکت کرده‌اند.**

$n(P - R)$: تعداد دانش‌آموزانی که فقط در المپیاد فیزیک شرکت کرده‌اند:

$$n(P - R) = n(P) - n(R \cap P) = ۱۶ - ۱۰ = ۶$$

**چاشنی:** نمودار ون مرتبط با مثال۹ به صورت زیر می‌باشد:






با توجه به سوال می‌دانیم که داخل دایره‌ها۲۶نفر وجود دارند، پس:

$$۱۵-x+x+۱۲-x=۲۶\Rightarrow ۲۷-x=۲۶\Rightarrow x=۲۷-۲۶=۱$$

**مثال ۱۱** فرض کنیم B و A زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع U باشند، به طوری که $n(U)=۱۲۰$، $n(A)=۵۰$، $n(B)=۶۰$ و $n(A\cap B)=۳۰$، مطلوب است: (مشابه تمرین ص۱۲)

**الف)** $n(A\cup B)$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۵۰+۶۰-۳۰=۸۰$$

**ب)** $n(A\cap B')$

$$n(A\cap B')=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۵۰-۳۰=۲۰$$

**پ)** $n(A'\cap B)$

$$n(A'\cap B)=n(B\cap A')=n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$$
$$=۶۰-۳۰=۳۰$$

**ت)** $n(A'\cap B')$

$$n(A'\cap B')=n(A\cup B)'=n(U)-n(A\cup B)=۱۲۰-۸۰=۴۰$$

**ث)** $n(AUB')$

$$n(A\cup B')=n(A)+n(B')-n(A\cap B')=۵۰+(۱۲۰-۶۰)-۲۰$$
$$=۹۰$$

درس سوم

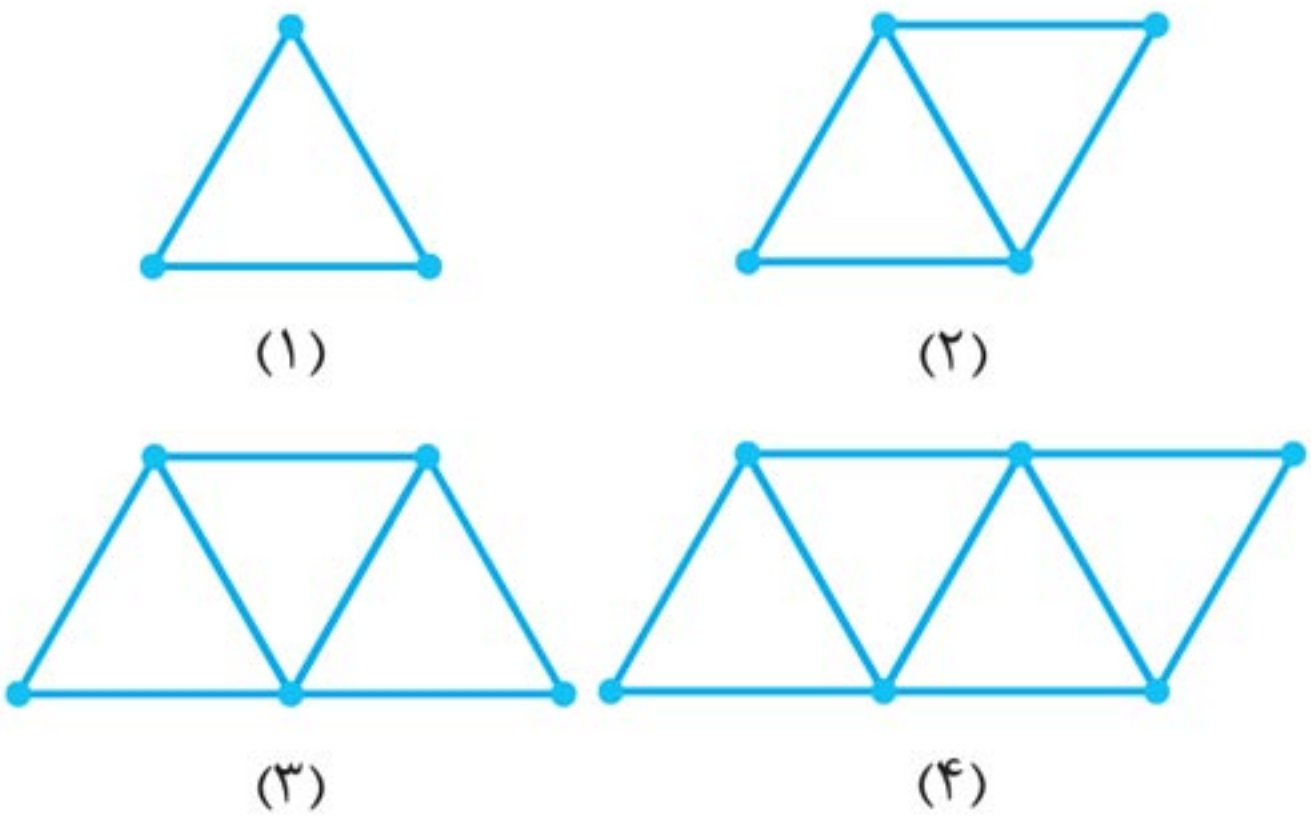
# الگو و دنباله

وعدهٔ ۹

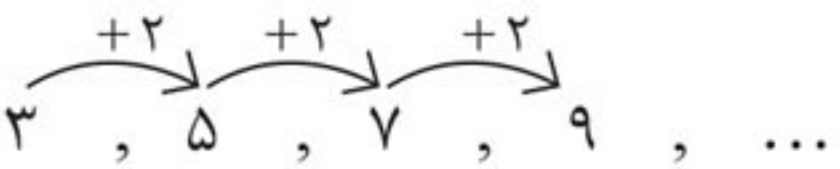
## الگو

یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع یا اعداد است. برای مطالعهٔ الگوها بهتر است آن‌ها را به زبان اعداد بیان کنیم.

**مثال ۱۲** **در الگوی زیر تعداد چوب‌کبریت‌ها در مرحلهٔ دهم را بیابید.** (مشابه فعالیت ص۱۵)




**پاسخ** اگر تعداد چوب‌کبریت‌ها را در هر مرحله از چپ به راست بنویسیم، داریم:



می‌بینیم که در هر مرحله ۲ چوب کبریت به تعداد چوب کبریت‌های قبلی اضافه می‌شود، بنابراین تا مرحلهٔ دهم، ۹ بار دو چوب کبریت به اولین عضو الگو یعنی ۳، اضافه می‌شود. پس:

تعداد چوب کبریت‌ها در مرحلهٔ دهم = $۳+۹\times۲=۲۱$

**چاشنی:** در مثال قبلی می‌توانیم جملهٔ عمومی الگو را حدس بزنیم. جملهٔ عمومی در واقع ساختار جملات الگو را مشخص می‌کند و به کمک آن می‌توان مقدار هر جمله از الگو را به دست آورد.

| | |
|---|---|
| (۲) | (۱) |
| $a_۲ = ۲(۲)+۱$ | $a_۱ = ۲(۱)+۱$ |
| (۴) | (۳) |
| $a_۴ = ۲(۴)+۱$ | $a_۳ = ۲(۳)+۱$ |

بنابراین جملهٔ عمومی الگوی بالا را می‌توانیم به صورت $a_n = ۲(n)+۱$ بنویسیم.

وعدهٔ ۱۱

## الگوهای غیرخطی

**الگوی درجه دوم:** الگویی است که جملهٔ عمومی آن به صورت $t_n = an^2 + bn + c \quad (a , b , c \in \mathbb{R})$ می‌باشد.

در ایـــن الگو اختلاف جملات متوالی الگو، خود تشـــکیل الگوی خطی می‌دهند که اختـــلاف ثابت جملات این الگوی خطی، دو برابر ضریب $n^2$ یعنی $2a$ می‌باشد.

به عنوان مثال الگوی $t_n = n^2 + 1$ را در نظر بگیرید.

$$\overset{+3}{\nearrow}\ \overset{+5}{\nearrow}\ \overset{+7}{\nearrow}$$
$$2 \ , \ 5 \ , \ 10 \ , \ 17 \ , \ \ldots$$

حال اگر الگوی اختلاف جملات را بنویسیم، داریم:

$$\overset{+2}{\nearrow}\ \overset{+2}{\nearrow}$$
$$3 \ , \ 5 \ , \ 7 \ , \ \ldots$$

می‌بینید که اختلاف جملات ثابت است و **الگو خطی** می‌باشد و این اختـــلاف ثابت بین جملات الگوی خطی، دوبرابر ضریب $n^2$ یعنی ۲می‌باشد.

**الگوی مربعی:** الگویی اســـت که هر جمله را به **مربع** شـــمارهٔ همان جمله نسبت می‌دهد.

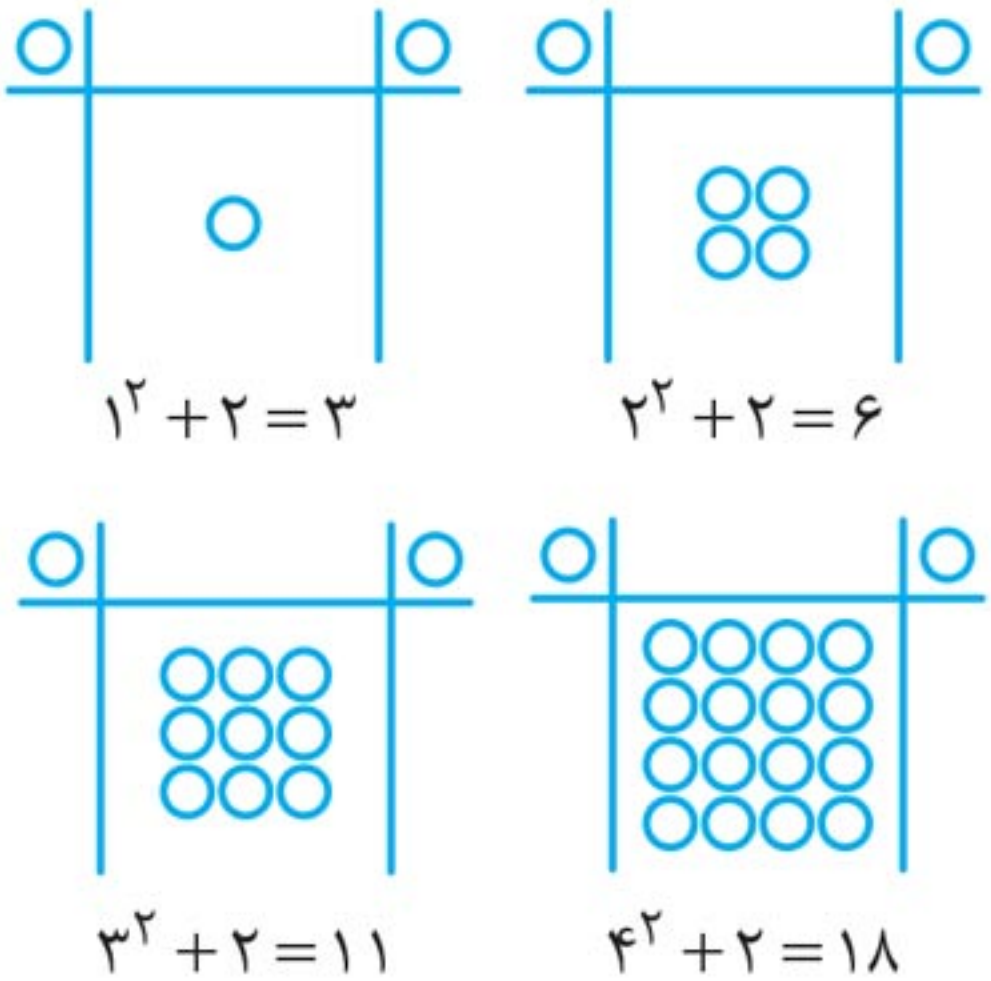
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۴ | ۹ | ۱۶ | ۲۵ | ۳۶ , ... |
| ↑ | ↑ | ↑ | ↑ | ↑ | ↑ |
| $t_1$ | $t_2$ | $t_3$ | $t_4$ | $t_5$ | $t_6$ |

**الگوی مثلثی:** الگویی است که هر جمله را به مجموع اعداد یک تا شـــمارهٔ آن جمله نســـبت می‌دهد. جملات این الگو از

**مثال ۱۶** **برای دنبالهٔ درجه‌دو زیر، یک جمله عمومی به‌دست آورید و برای آن یک الگوی هندسی نظیر کنید.** $۳, ۶, ۱۱, ۱۸, \ldots$

(مشابه تمرین ص۲۰)

**پاسخ** الگوی هندسی نظیرشده برای دنبالهٔ بالا مطابق زیر می‌باشد.




بنابراین جملهٔ عمومی این دنباله برابر است با: $a_n = n^2 + 2$

وعدهٔ ۱۳

## دنبالهٔ بازگشتی

دنباله‌ای که هر جملهٔ آن با نظم خاصی از روی جملات قبلی‌اش پیدا شـــود را دنبالهٔ بازگشتی می‌نامند. مشهورترین دنبالهٔ بازگشتی، دنبالهٔ فیبوناتچی است که در آن جملات اول و دوم برابر عدد یک هستند و از جملهٔ سوم به بعد هر جمله از مجموع دو جملهٔ قبلی به دست می‌آید.

دنباله فیبوناتچی: ... ،۵۵ ،۳۴ ،۲۱ ،۱۳ ،۸ ،۵ ،۳ ،۲ ،۱ ،۱

وضابطهٔ آن به صورت زیر است:

$$\begin{cases} t_1 = t_2 = 1 \\ t_{n+2} = t_n + t_{n+1} \end{cases}$$

درس چهارم

# دنباله‌های حسابی و هندسی

وعدهٔ ۱۴

## دنبالهٔ حسابی

دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به‌جز جملهٔ اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جملهٔ قبلش به دست می‌آید.

این عدد ثابت را **قدرنسبت** می‌نامند و با $d$ نمایش می‌دهند.

جملهٔ عمومی هر دنبالهٔ حسابی به صورت زیر می‌باشد:

$$t_n = t_1 + (n-1)d$$

($t_1$: جملهٔ اول، $d$: قدرنسبت)

**مثال ۱۷** **جملهٔ عمومی دنباله‌های حسابی زیر را بیابید.**

(مشابه کاردرکلاس ص۲۲)

**الف)** $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \ldots$

برای به دست آوردن قدرنسبت، کافیست که هر جمله را منهای جملهٔ قبل از خود کنیم. پس:

$$d = t_2 - t_1 = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}\ ,\ t_1 = \sqrt{2}$$

در نتیجه:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_n = \sqrt{2} + (n-1)\sqrt{2} = \sqrt{2}n$$

**ب)** $\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{10}{3}, \ldots$

$$d = t_2 - t_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1,\ t_1 = \frac{1}{3}$$

در نتیجه:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_n = \frac{1}{3} + (n-1)(1) = n - 1 + \frac{1}{3}$$
$$= n - \frac{2}{3}$$

**پ)** $3, 10, 17, 24, \ldots$

$$d = t_2 - t_1 = 10 - 3 = 7 \, , \, t_1 = 3$$

در نتیجه: $t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_n = 3 + (n-1)(7) = 7n - 4$

**مثال ۱۸** **در یک دنبالهٔ حسابی، جملات هفتم و دوازدهم آن به ترتیب ۹ و ۱۲۹ می‌باشند. جملات دنباله را به دست آورید.**

(مشابه تمرین ص۲۴)

**پاسخ** در یک دنبالهٔ حسابی با به دست آوردن جملهٔ اول و قدرنسبت، می‌توانیم تمامی جملات دنباله را به دست آوریم:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \xrightarrow{t_7 = 9} 9 = t_1 + (7-1) \times d \Rightarrow 9 = 6d + t_1$$

$$t_n = t_1 + (n-1)d \xrightarrow{t_{12} = 129} 129 = t_1 + (12-1) \times d$$

$$\Rightarrow 129 = 11d + t_1$$

با حل دستگاه زیر جملهٔ اول و قدرنسبت مشخص می‌شوند:

$$\begin{cases} 9 = 6d + t_1 \\ 129 = 11d + t_1 \end{cases} \xrightarrow{\times -1} \begin{cases} -9 = -6d - t_1 \\ 129 = 11d + t_1 \end{cases} \Rightarrow 120 = 5d$$

$$\Rightarrow d = \frac{120}{5} = 24$$

با جای‌گذاری $d$ در یکی از معادله‌ها مشخص می‌شود که: $t_1 = -135$

$$\overset{+24}{\longrightarrow} \quad \overset{+24}{\longrightarrow}$$
دنباله: $-135, -111, -87, \ldots$

قبل از خود تقسیم کنیم: $r=\frac{t_۲}{t_۱}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}, t_۱=۱۲$

در نتیجه:

$$t_n=t_۱r^{n-۱}\Rightarrow t_n=۱۲\times(\frac{۱}{۲})^{n-۱}=\frac{۱۲}{۲^{n-۱}}$$

**ب)** $۲,-۴,۸,-۱۶,\dots$

$$r=\frac{t_۲}{t_۱}=\frac{-۴}{+۲}=-۲, t_۱=۲$$

در نتیجه: $t_n=t_۱\times r^{n-۱}\Rightarrow t_n=۲\times(-۲)^{n-۱}$

**مثال ۲۴** **در یک دنبالهٔ هندسی جملات نهم و پنجم به ترتیب ۶۴ و ۴ می‌باشند. با فرض این‌که همهٔ جملات مثبت هستند، جملهٔ هفتم این دنباله را بیابید.** (مشابه تمرین ص۲۷)

**پاسخ**

$$\begin{cases}t_۹=۶۴\\t_۵=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_۱r^۸=۶۴\\t_۱r^۴=۴\end{cases}\Rightarrow\frac{t_۱r^۸}{t_۱r^۴}=۱۶\Rightarrow r^۴=۲^۴\Rightarrow r=\pm۲$$

دقت داشته باشید که چون همهٔ جملات دنباله مثبت هستند، بنابراین $r=۲$ قابل‌قبول می‌باشد.

$$t_۵=۴\Rightarrow t_۱r^۴=۴\Rightarrow t_۱\times۱۶=۴\Rightarrow t_۱=\frac{۴}{۱۶}=\frac{۱}{۴}$$

در نتیجه: $t_۷=t_۱r^۶=\frac{۱}{۴}\times۲^۶=۲^۴=۱۶$

**مثال ۲۵** **یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۳ و جملهٔ اول $\frac{۱}{۹}$ و جملهٔ آخر ۲۴۳، چند جمله دارد؟**

**پاسخ**

$$t_۱=\frac{۱}{۹}, r=۳$$

پس: $t_n=t_۱r^{n-۱}\Rightarrow t_n=\frac{۱}{۹}\times۳^{n-۱}$

چون جملهٔ آخر برابر ۲۴۳ می‌باشد، بنابراین:

$$t_n = ۲۴۳ \Rightarrow ۲۴۳ = \frac{۱}{۹} \times ۳^{n-۱} \Rightarrow ۹ \times ۲۴۳ = ۳^{n-۱}$$

$$\Rightarrow ۳^۲ \times ۳^۵ = ۳^{n-۱} \Rightarrow ۳^۷ = ۳^{n-۱} \Rightarrow n-۱ = ۷ \Rightarrow n = ۸$$

این دنباله هشت جمله دارد.

## وعدهٔ ۱۹
## واسطهٔ هندسی

اگر سه عدد $c$، $b$ و $a$ تشکیل **دنبالهٔ هندسی** بدهند، $b$ را **واسطهٔ هندسی** $c$ و $a$ می‌نامند و داریم:

$$b^۲ = ac$$

**مثال ۲۶** **اگر $\frac{۱}{۳۲}$، $\frac{۱}{۸}$ و $a$ تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند، $a$ را بیابید.**

(مشابه کاردرکلاس ص۲۶)

**پاسخ** در این دنباله $\frac{۱}{۸}$ واسطهٔ هندسی دو عدد $\frac{۱}{۳۲}$ و $a$ می‌باشد، بنابراین:

$$a \times \frac{۱}{۳۲} = (\frac{۱}{۸})^۲ \Rightarrow \frac{a}{۳۲} = \frac{۱}{۶۴} \Rightarrow ۶۴a = ۳۲ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$$

## وعدهٔ ۲۰
## درج m واسطهٔ هندسی

اگر بخواهیم بین دو عدد $b$ و $a$ تعداد $m$ **واسطهٔ هندسی** درج کنیم تا همگی با هم تشکیل **دنبالهٔ هندسی** بدهند، یعنی:

$$a, \underbrace{\bigcirc, \bigcirc, \ldots, \bigcirc}_{m \text{ تا واسطهٔ هندسی}}, b$$

پیوست

# فرمول‌نامه

۱ $A' = U - A \, , A \cap A' = \varnothing \ , \ A \cup A' = U$

$(A')' = A, (A \cup B)' = A' \cap B' \ , \ (A \cap B)' = A' \cup B'$

$A - B = A \cap B'$

۲ تعداد اعضایی که حداقل در یکی از مجموعه‌های A و B حضور دارند.

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

۳ تعداد اعضایی که در A حضور دارند ولی در B حضور ندارند.

$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

۴ تعداد اعضایی که در A حضور ندارند.

$n(A') = n(U) - n(A)$

۵ تعداد اعضایی که نه در A حضور دارند، نه در B.

$n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B)$

۶ جملهٔ عمومی الگوهای خطی: $t_n = an + b$

۷ جملهٔ عمومی دنباله‌های حسابی: $t_n = t_1 + (n-1)d$

۸ اگر a، b و c تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند: $\frac{a + c}{2} = b$

۹ درج m واسطهٔ عددی بین a وb:

$$d = \frac{b-a}{m+1}$$

۱۰ اگر در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع اندیس‌های دو جمله با مجموع اندیس‌های دو جملهٔ دیگر برابر باشند، مجموع جملات آن‌ها نیز با هم برابرند.

$$m+n=h+k \Rightarrow a_m + a_n = a_h + a_k$$

۱۱ جملهٔ عمومی دنباله‌های هندسی: $t_n = t_1 r^{n-1}$

۱۲ اگر a، b وc تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند:

$$b^2 = ac$$

۱۳ درج m واسطهٔ هندسی بین a وb:

$$r^{m+1} = \frac{b}{a}$$

۱۴ اگر در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع اندیس‌های دو جمله با مجموع اندیس‌های دو جملهٔ دیگر برابر باشند، حاصل‌ضرب جملات آن‌ها نیز با هم برابرند.

$$m+n=h+k \Rightarrow a_m \cdot a_n = a_h \cdot a_k$$

۱۵ مجموع n عدد طبیعی:

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$