فهرست

۱ تابع

درس اول: مفاهیم تابع

۱ شناسایی تابع ۱۰
۲ مقدار تابع ۱۱
۳ دامنه و برد تابع ۱۳
۴ تساوی دو تابع ۱۶

درس دوم: انتقال و تبدیل نمودار تابع

۵ انتقال و قرینه‌یابی ۱۷
۶ انبساط و انقباض نمودار ۲۱

درس سوم: انواع تابع ۲۳

درس چهارم: توابع صعودی و نزولی ۲۷

درس پنجم: اعمال جبری روی توابع و ترکیب توابع

۷ مقداردهی به ترکیب توابع ۳۴
۸ ضابطهٔ ترکیب توابع ۳۵
۹ دامنه و بُرد ترکیب توابع ۳۸
۱۰ وضعیت صعودی و نزولی توابع مرکب ۳۹

درس ششم: تابع یک‌به‌یک و تابع وارون

۱۱ تابع وارون ۴۲
۱۲ محاسبهٔ ضابطهٔ تابع وارون ۴۴
۱۳ برخورد f و f^{-1} و برخورد f^{-1} و g ۴۷
۱۴ ترکیب تابع f و f^{-1} و ترکیب تابع f^{-1} و g ۴۸

پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۳۷۴

۲ معادله و نامعادله

درس اول: معادلات گویا و معادلات رادیکالی

۲۴ معادلات گویا ۶۸
۲۵ مسائل کاربردی معادلات گویا و مستطیل طلایی ۷۰
۲۶ معادلات گنگ ۷۱

درس دوم: نامعادلات و تعیین علامت

۲۷ تعیین علامت ۷۴
۲۸ حل نامعادله ۷۵
۲۹ وضعیت دو منحنی ۷۷

پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۴۴۹

۳ قدرمطلق و براکت

درس اول: قدرمطلق

۳۰ تعریف و ویژگی‌های قدرمطلق ۸۰
۳۱ معادلات قدرمطلقی ۸۰
۳۲ نامعادلات قدرمطلقی ۸۲
۳۳ نمودارهای قدرمطلقی ۸۳

درس دوم: جزء صحیح

۳۴ تعریف و ویژگی‌ها ۸۵
۳۵ معادله و نامعادله شامل جزء صحیح ۸۶
۳۶ نمودار توابع شامل جزء صحیح ۸۷

پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۴۶۴

۴ معادله و تابع درجه دوم

درس اول: معادلهٔ درجه دوم

۱۵ مجموع ریشه‌ها، حاصل ضرب ریشه‌ها و ... ۵۱
۱۶ علامت ریشه‌ها ۵۵
۱۷ نوشتن معادلهٔ درجه دوم ۵۶
۱۸ معادلات قابل تبدیل به درجهٔ دوم ۵۷

درس دوم: سهمی و ویژگی‌های آن

۱۹ ویژگی‌های سهمی ۵۸
۲۰ بررسی سهمی ۶۰
۲۱ نوشتن معادلهٔ سهمی ۶۱
۲۲ وضعیت سهمی و خط یا وضعیت دو سهمی نسبت به هم ۶۴
۲۳ گذر از نواحی ۶۵

پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۴۲۴

۵ تابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: تابع نمایی و ویژگی‌های آن

۳۷	تابع نمایی	۹۰
۳۸	معادلات و نامعادلات تابع نمایی	۹۰
۳۹	نمودارهای توابع نمایی	۹۲

درس دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

۴۰	مفهوم لگاریتم	۹۶
۴۱	قوانین لگاریتم	۹۷
۴۲	دامنهٔ توابع لگاریتمی	۱۰۱
۴۳	نمودار تابع لگاریتمی	۱۰۲
۴۴	معادلات لگاریتمی	۱۰۴
۴۵	نامعادلهٔ لگاریتمی	۱۰۶
۴۶	حل معادلات نمایی به کمک لگاریتم	۱۰۶
۴۷	ضابطهٔ وارون تابع نمایی و لگاریتمی	۱۰۷
۴۸	کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی	۱۰۷
۴۹	ترکیبی‌های لگاریتم	۱۰۸

پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۴۷۹

۶ مثلثات

درس اول: مقدمات و مفاهیم اولیه مثلثات

۵۰	درجه و رادیان	۱۱۰
۵۱	نسبت‌های مثلثاتی مهم	۱۱۱
۵۲	دایرهٔ مثلثاتی	۱۱۵
۵۳	شیب خط و تانژانت	۱۱۷

درس دوم: اتحادها و روابط مثلثاتی

۵۴	روابط مثلثاتی مقدماتی	۱۱۸
۵۵	زاویه‌های متمم و مکمل	۱۲۰
۵۶	زاویه‌های ترکیبی $(\frac{\pi}{2}\pm\alpha, \pi\pm\alpha, ...)$	۱۲۰
۵۷	روابط 2α	۱۲۳
۵۸	رابطهٔ طلایی	۱۲۷
۵۹	کاربردها و نتایج روابط 2α	۱۲۹

درس سوم: توابع متناوب و نمودار ... ۱۳۱

درس چهارم: معادلات مثلثاتی

۶۰	حل معادلات مثلثاتی با کمک روابط 2α	۱۴۰
۶۱	دسته‌بندی و فاکتورگیری	۱۴۲
۶۲	معادلات مثلثاتی کسری	۱۴۲
۶۳	مسائل ترکیبی و خواسته‌های خاص	۱۴۳

پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۵۰۵

۷ حد و پیوستگی

درس اول: تقسیم چندجمله‌ای‌ها و ... ۱۴۶

درس دوم: مفاهیم اولیه و محاسبهٔ حد توابع

۶۴	همسایگی	۱۴۸
۶۵	فرآیندهای حدی	۱۴۹
۶۶	قضایای حد	۱۵۱
۶۷	ابهام $\frac{0}{0}$	۱۵۴

درس سوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

۶۸	حد بی‌نهایت	۱۶۱
۶۹	حد در بی‌نهایت	۱۶۵

درس چهارم: مفهوم پیوستگی

۷۰	مفهوم پیوستگی	۱۷۱
۷۱	نقطهٔ مرزی خاص	۱۷۵
۷۲	پیوستگی در بازه	۱۷۶

پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۵۵۵

۸ مشتق

درس اول: مفهوم هندسی مشتق و ... ۱۸۰

درس دوم: تابع مشتق و قوانین محاسبهٔ مشتق

۷۳	قواعد مشتق‌گیری	۱۸۲
۷۴	تکنیک‌های مشتق‌گیری	۱۸۵
۷۵	مشتق تابع مرکب	۱۸۶
۷۶	مشتق مرتبهٔ دوم	۱۹۰
۷۷	تعریف مشتق با ظاهری متفاوت!	۱۹۱
۷۸	معادلهٔ خط مماس	۱۹۲

درس سوم: مشتق چپ و راست و مشتق‌پذیری

۷۹	مشتق توابع چند ضابطه‌ای	۱۹۶
۸۰	مشتق توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح	۱۹۸
۸۱	نقاط مشتق ناپذیر، دامنهٔ تابع مشتق و مشتق‌پذیری ...	۱۹۹
۸۲	نمودار تابع مشتق	۲۰۲

درس چهارم: آهنگ تغییر ۲۰۵

پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۵۹۹

۹ کاربرد مشتق

درس اول: نقاط بحرانی و اکسترمم‌های تابع

۸۳	ارتباط یکنوایی تابع با مشتق آن	۲۱۰
۸۴	نقاط بحرانی	۲۱۳
۸۵	اکسترمم‌های نسبی تابع	۲۱۴
۸۶	اکسترمم‌های مطلق	۲۱۹

درس دوم: بهینه‌سازی ۲۲۲

پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۶۴۰

۱۰ مجموعه، الگو و دنباله

درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۸۷	مجموعه‌های اعداد	۲۲۸
۸۸	بازه‌ها	۲۲۸
۸۹	مجموعه‌های متناهی و نامتناهی	۲۳۰
۹۰	متمم یک مجموعه و مجموعهٔ مرجع	۲۳۰
۹۱	قوانین مجموعه‌ها	۲۳۱
۹۲	محاسبهٔ تعداد اعضای مجموعه‌ها	۲۳۳

درس دوم: الگو و دنباله

۹۳	دنباله خطی و درجه ۲	۲۳۵
۹۴	چند دنبالهٔ خاص (دنباله بازگشتی، فیبوناچی و ...)	۲۳۷

درس سوم: دنباله‌های حسابی و هندسی

۹۵	دنبالهٔ حسابی	۲۳۹
۹۶	دنباله هندسی	۲۴۲

پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۶۷۳

۱۱ توان گویا و عبارت جبری

درس اول: توان گویا و عبارت جبری

۹۷	ریشه و توان	۲۴۶
۹۸	مقایسه مقادیر تقریبی ریشهٔ n ام	۲۴۷
۹۹	اعداد با توان گویا	۲۴۸
۱۰۰	قوانین رادیکال‌ها	۲۴۸

درس دوم: عبارت‌های جبری

۱۰۱	اتحادها	۲۵۱
۱۰۲	ساده کردن عبارات رادیکالی	۲۵۴
۱۰۳	گویا کردن	۲۵۶

پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۶۹۶

۱۲ هندسه پایه

درس اول: ترسیم هندسی

۱۰۴	عمودمنصف و خواص آن	۲۶۱
۱۰۵	رسم مثلث	۲۶۲
۱۰۶	نیمساز و خواص آن	۲۶۳
۱۰۷	استدلال	۲۶۴

درس دوم: استدلال و قضیهٔ تالس

۱۰۸	قضیهٔ تالس و تعمیم آن	۲۶۶
۱۰۹	مسائل کاربردی	۲۶۸
۱۱۰	تالس در ذوزنقه	۲۶۹
۱۱۱	مسائل ترکیبی تالس	۲۷۰
۱۱۲	مساحت و ارتباط آن با تالس	۲۷۳
۱۱۳	رسم خط اضافه در مسائل تالس	۲۷۵

درس سوم: تشابه مثلث‌ها

۱۱۴	تشابه دو مثلث جدا از هم	۲۷۶
۱۱۵	تشابه دو مثلث تودرتو	۲۷۹
۱۱۶	تشابه و مساحت	۲۸۳
۱۱۷	روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه	۲۸۵

پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۷۱۳

۱۴ هندسه تحلیلی

درس اول: هندسه مختصاتی (تحلیلی)

۱۱۸	معادلهٔ خط	۲۹۰
۱۱۹	فاصلهٔ دو نقطه	۲۹۲
۱۲۰	فاصلهٔ نقطه از خط	۲۹۵
۱۲۱	فاصلهٔ دو خط موازی	۲۹۸

درس دوم: دوران و برش

۱۲۲	دوران	۲۹۹
۱۲۳	برش	۳۰۲
۱۲۴	مسائل ترکیبی دوران و برش	۳۰۳
۱۲۵	مقاطع مخروطی	۳۰۴

درس سوم: بیضی

۱۲۶	ویژگی‌های بیضی	۳۰۵
۱۲۷	مختصات نقاط مهم	۳۰۶

درس چهارم: دایره

۱۲۸	شناخت دایره و ویژگی‌های آن	۳۰۹
۱۲۹	شرط دایره بودن	۳۱۰
۱۳۰	معادلهٔ دایره در حالت‌های مختلف	۳۱۰
۱۳۱	وضعیت نقطه نسبت به دایره	۳۱۴
۱۳۲	وضعیت خط و دایره	۳۱۵
۱۳۳	وضعیت نسبی دو دایره	۳۱۶

پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۷۴۱

۱۵ شمارش بدون شمردن

درس اول: اصول شمارش

۱۴۱	اصل ضرب و اصل جمع	۳۳۶
۱۴۲	اصول عددنویسی	۳۳۷

درس دوم: فاکتوریل و جایگشت ۳۳۹

درس سوم: ترکیب و ترتیب

۱۴۳	تعداد زیرمجموعه‌ها و یک اتحاد مهم	۳۴۵
۱۴۴	مسائل هندسی	۳۴۶
۱۴۵	مسائل ترکیبی انتخاب و جایگشت	۳۴۸

پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۸۰۰

۱۶ آمـار

درس اول: مقدمه‌ای بر علم آمار، متغیر و انواع آن

۱۳۴	علم آمار	۳۲۰
۱۳۵	متغیر و انواع آن	۳۲۱

درس دوم: معیارهای گرایش به مرکز

۱۳۶	میانگین (مرکز ثقل داده‌ها)	۳۲۲
۱۳۷	میانه و چارک‌ها	۳۲۵

درس سوم: معیارهای پراکندگی

۱۳۸	دامنهٔ تغییرات	۳۲۸
۱۳۹	واریانس	۳۲۸
۱۴۰	ضریب تغییرات	۳۳۲

پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۷۸۱

۱۷ احتمال

درس اول: آزمایش تصادفی، فضای نمونه ... ۳۵۰

درس دوم: احتمال رخداد یک پیشامد

۱۴۶	محاسبهٔ احتمال در پرتاب تاس	۳۵۳
۱۴۷	محاسبهٔ احتمال مسائل سکه و فرزند	۳۵۵
۱۴۸	کیسه و مهره	۳۵۵
۱۴۹	احتمال و شمارش	۳۵۷
۱۵۰	قوانین احتمال	۳۵۹

درس سوم: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

۱۵۱	انواع مسائل احتمال شرطی	۳۶۱
۱۵۲	فرمول احتمال شرطی	۳۶۴
۱۵۳	دو پیشامد مستقل	۳۶۵

درس چهارم: احتمال کل ۳۶۸

پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۸۱۷

. فصل اول .

ریاضیات تجربی جامع

تابع

Chapter One

Function

Pythagoras

فصل اول

۱

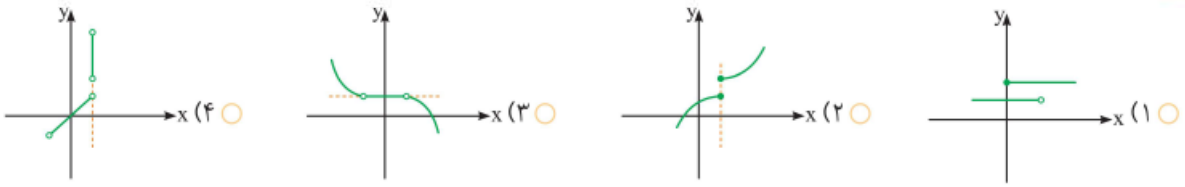
درس اول: مفاهیم تابع

CHAPTER 1

شناسایی تابع

سلام. به اولین بخش تابع خوش اومدید. بخش اول رو با شناسایی تابع شروع می‌کنیم.

۱ کدام نمودار زیر مربوط به یک تابع است؟



۱) x, y
۲) x, y
۳) x, y
۴) x, y

۲ اگر رابطهٔ $f=\{(5,a-2b),(4,a+b),(4,-2),(5,4a-b)\}$ نمایش یک تابع باشد $a-b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

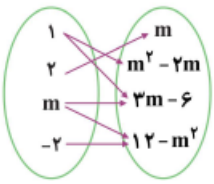
۳ اگر رابطهٔ $f=\{(1,4),(2,4),(3,5),(4,9),(k+1,(k+2)^2)\}$ یک تابع نباشد، مجموع مقادیر k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴ چه تعداد از نمودارهای پیکانی زیر یک تابع نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵ به ازای چند مقدار قابل قبول m ، نمودار پیکانی مقابل تابع خواهد بود؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۶ چه تعداد از موارد زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟

الف) رابطه‌ای که به هر عدد مثبت ریشهٔ چهارم آن را نسبت دهد.

ب) رابطه‌ای که هر عدد را به عددی نسبت می‌دهد که ۳ واحد با آن اختلاف دارد.

پ) رابطه‌ای که به هر عدد فردِ اول، مقسوم‌علیه‌های آن عدد را نسبت دهد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۷ کدام رابطهٔ زیر تابع نیست؟

۱) $y^2+|x|=0$ ۲) $|x+3|+|y-1|=0$ ۳) $[x]+[y]=0$ ۴) $y=\sqrt{[x]^2+2[x]+1}$

۸ با فرض $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{1,2,3,4\}$ چند تابع می‌توان از A به B نوشت که شامل زوج مرتب $(c,4)$ باشد؟

۱) ۹ ○ ۲) ۱۲ ○ ۳) ۱۶ ○ ۴) ۴۸ ○

۹ اگر رابطهٔ $f(x)=\begin{cases}2x^2+mx & ; \ x\geq 1\\ \frac{3m^2-2}{x} & ; \ x\leq 1\end{cases}$ تابع باشد، m کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ○ ۲) -1 ○ ۳) ۲ ○ ۴) -2 ○

۱۰ اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+3}+2a & |x|\leq 1\\ ax^2+5 & |x|\geq 1\end{cases}$، ضابطه تابع f باشد، مقدار $f(a)$ کدام است؟ (تجربی نوبت اول ۱۴۰۳)

۱) ۴۶ ○ ۲) ۳۲ ○ ۳) ۲۵ ○ ۴) ۱۴ ○

۱۱ اگر رابطهٔ $y=\begin{cases}ax+b & ; \ x\leq 2\\ bx^2+a & ; \ 2\leq x\leq 3\\ (a-b)x+8 & ; \ x\geq 3\end{cases}$ نشان‌دهندهٔ یک تابع باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{16}{3}$ ○ ۲) $\frac{15}{4}$ ○ ۳) $\frac{17}{3}$ ○ ۴) $\frac{15}{7}$ ○

مقدار تابع

سرنخ توی تست‌های زیر، می‌خوایم مقدار تابع رو در نقاط مختلف پیدا کنیم.

۱۲ در تابع $f(x+3)=3x+14$ مقدار $f(5)$ کدام است؟

۱) ۱۵ ○ ۲) ۱۸ ○ ۳) ۱۷ ○ ۴) ۲۰ ○

۱۳ اگر $2f(x+4)=f(4)+x^2+5(x+1)+2$ باشد، مقدار $f(4)$ کدام است؟

۱) ۴ ○ ۲) ۷ ○ ۳) -3 ○ ۴) ۱ ○

۱۴ اگر $g(3x+1)=\begin{cases}x-2 & ; \ x\geq 2\\ x^2 & ; \ x<2\end{cases}$ باشد، مقدار $g(4)+g(10)$ کدام است؟

۱) ۲ ○ ۲) ۳ ○ ۳) ۴ ○ ۴) ۵ ○

۱۵ اگر $f(2x-1)=3x-a$ و $f(3)+f(-3)=9$ باشد، مقدار $f(a+2)$ کدام است؟

۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۳ ○ ۴) ۴ ○

۱۶ اگر $f(x)=x^3-6x^2+12x-8$ باشد، مقدار $f(\sqrt{7+2\sqrt{12}})$ کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{3}$ ○ ۲) $2+\sqrt{3}$ ○ ۳) $3+\sqrt{3}$ ○ ۴) $3\sqrt{3}$ ○

۱۷ اگر $f(x)=\sqrt{x^2-6x+14}$ باشد، مقدار $f(3+\sqrt[4]{24})$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}+1$ ○ ۲) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ○ ۳) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ○ ۴) $\sqrt{2}-1$ ○

۱۸ اگر $f(x)+3f(\frac{1}{x})=1-x^2$ باشد، مقدار $f(2)$ کدام است؟

۱) $-\frac{9}{4}$ ○ ۲) $-\frac{3}{4}$ ○ ۳) $\frac{9}{16}$ ○ ۴) $\frac{21}{32}$ ○

۱۹ اگر $(x+2)f(x)-3xf(x+2)=4x^2-mx+3m-1$ باشد، مقدار $f(0)$ کدام است؟

۱) $\frac{17}{4}$ ○ ۲) ۵ ○ ۳) $\frac{25}{4}$ ○ ۴) ۶ ○

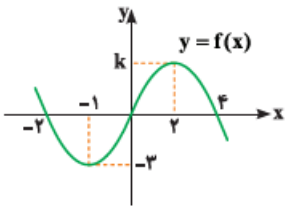
۲۰ اگر $f(x)=\begin{cases}4-f(x) & ; \ x\geq 1\\ x+1 & ; \ x<1\end{cases}$ باشد، مقدار $f(1+f(-1))$ کدام است؟

۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۳ ○ ۴) ۴ ○

۲۱ تابع $f(x)=\begin{cases}3x^2-12 & ; \ x<0\\ 2x-4 & ; \ 0\le x<3\\ x^2-x-12 & ; \ x\ge 3\end{cases}$ را در نظر بگیرید. مجموع طول نقاط برخورد تابع f و محور x ها کدام است؟

۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۳ ○ ۴) ۴ ○

۲۲ نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است. اگر $g(x)=\begin{cases}1+f(x) & ; \ x>0\\ f^2(x) & ; \ x\le 0\end{cases}$ و $g(-1)+g(2)=14$ باشد، مقدار k کدام است؟



۱) ۲ ○
۲) ۳ ○
۳) ۴ ○
۴) ۵ ○

سرنخ حالا می‌خواهیم بریم برای مساحت، محیط، حجم، فاصله، ... یک تابع بنویسیم.

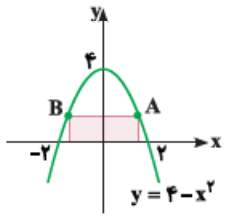
۲۳ کدام تابع مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع را برحسب ارتفاع آن بیان می‌کند؟

۱) $S=\frac{\sqrt{3}}{4}h^2$ ○ ۲) $S=\frac{\sqrt{3}}{2}h^2$ ○ ۳) $S=\frac{\sqrt{3}}{3}h^2$ ○ ۴) $S=\frac{\sqrt{2}}{2}h^2$ ○

۲۴ طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. تابعی که مساحت مستطیل (S) را برحسب محیط آن (P) بیان کند، کدام است؟

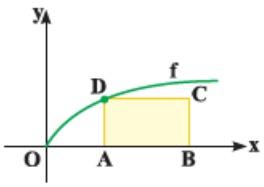
۱) $S(P)=\frac{P^2-36}{16}$ ○ ۲) $S(P)=P^2+36$ ○ ۳) $S(P)=\frac{P^2-36}{4}$ ○ ۴) $S(P)=\frac{P^2+36}{16}$ ○

۲۵ در شکل مقابل مستطیلی که دو رأس آن روی نمودار تابع $y=4-x^2$ و دو رأس دیگر آن روی محور x ها قرار دارد، مشاهده می‌شود. مساحت مستطیل رنگی برحسب تابعی از x کدام است؟



۱) $f(x)=4x-x^3$ ○
۲) $f(x)=8x-2x^3$ ○
۳) $f(x)=4x-x^2$ ○
۴) $f(x)=8x-2x^2$ ○

۲۶ مطابق شکل، رأس $A(x,0)$ و $B(6,0)$ از مستطیل ABCD روی محور x ها و رأس D روی نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ قرار دارد. مساحت این مستطیل برحسب طول نقطهٔ A کدام است؟

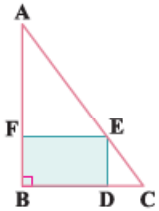


۱) $S(x)=6-\sqrt{x}$ ○
۲) $S(x)=6\sqrt{x}-x$ ○
۳) $S(x)=6\sqrt{x}-x\sqrt{x}$ ○
۴) $S(x)=6x-\sqrt{x}$ ○

۲۷ مطابق شکل استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره به شعاع x در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم 80π متر باشد، مساحت استادیوم برحسب تابعی از x کدام است؟

۱) $\pi x(80-x)$ ○
۲) $\pi x(40-x)$ ○
۳) $2\pi x(80-x)$ ○
۴) $2\pi x(40-x)$ ○

۲۸ در شکل مقابل رأس E از مستطیل BDEF روی وتر AC قرار دارد. اگر $AB=8$ و $BC=4$ و $BF=x$ باشد. کدام تابع مساحت مستطیل BDEF را برحسب x بیان می‌کند؟



۱) $f(x)=\frac{x^2}{2}-4x$ ○
۲) $f(x)=-\frac{x^2}{2}+4x$ ○
۳) $f(x)=-\frac{x^2}{4}+2x$ ○
۴) $f(x)=-\frac{x^2}{2}+8x$ ○

دامنه و برد تابع

۲۹ دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x^۲+x-۱}{x^۲+mx+n}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{-۱,۲\}$ است، مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) -۳

۳۰ دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x+۱}{۳x^۲+(۲m-n)x+m+n}$ به صورت $\mathbb{R}-\{-۳\}$ است. مقدار mn کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۱۸۰ ۳) ۱۵۰ ۴) ۱۶۰

۳۱ دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۳x+۵}{x^۲-ax-۲}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{۱,b\}$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۲ دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x^۲-|x|+۲}{||x|-۱|-۲}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۳ اگر $f(x)=\begin{cases}۱ & ; x>۰\\ ۰ & ; x=۰\\ -۱ & ; x<۰\end{cases}$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=\frac{x^۲-۱}{[x]-f(x)}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۴ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۱}{x+۲}-\frac{۱}{x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۵ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}+\sqrt[۳]{x-۵}+\sqrt{۱۶-۲x}$ به‌صورت بازهٔ $[a,b]$ است. مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x-b|<a$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۶ در تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x+۲}+\sqrt[۴]{۶-x}}{\sqrt[۳]{\frac{x+۱}{x-۳}}}$ مجموع همهٔ عضوهای صحیح دامنه کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۶ ۳) ۱۴ ۴) ۱۳

۳۷ دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x^۲+۲x}{\sqrt{|x+۲|-|x+۵|}}$ شامل چند عدد صحیح منفی نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۸ اگر $f(x)=\sqrt{x+|x+۲|}$ باشد، دامنهٔ تابع $f(-x)$ کدام است؟

۱) $x\le -۱$ ۲) $x\ge -۱$ ۳) $x\le ۱$ ۴) $x\ge ۱$

۳۹ تابع $f(x)=\sqrt{۳x-|x^۲-۴x|}$ را در نظر بگیرید. بزرگترین عضو طبیعی دامنه، چند برابر کوچک‌ترین عضو طبیعی آن است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۷ ۳) $-۳/۵$ ۴) -۷

۴۰ به ازای چند مقدار صحیح m دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x^۲-(m+۱)x+۲-m}$ برابر $\mathbb{R}$ است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) بی‌شمار

۴۱ دامنهٔ تعریف تابع $f(x)=\sqrt{۲\sin x-۱}$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟

۱) $[\frac{\pi}{۳},\frac{۲\pi}{۳}]$ ۲) $[\frac{\pi}{۶},\frac{۵\pi}{۶}]$ ۳) $[\frac{۲\pi}{۳},\frac{۳\pi}{۲}]$ ۴) $[\frac{۵\pi}{۶},\frac{۱۱\pi}{۶}]$

۴۲ اگر $f(x)=۲^x$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(x)-f(\frac{۱}{x})}$ به کدام صورت است؟

۱) $\mathbb{R}-(-۱,۱)$ ۲) $[-۱,۰)\cup(۰,۱]$

۳) $(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-۱]\cup(۰,۱]$

۴۳ اگر $g(x)=\begin{cases}1 & ; x>0\\ 0 & ; x=0\\ -1 & ; x<0\end{cases}$ باشد، دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{4^x-2^{x-1}}}{1-g(x)}$ کدام است؟

۱) $[-1,0)$ ۲) $[-1,+\infty)$ ۳) $[-1,0]$ ۴) $(-1,1)$

۴۴ اگر $f(x)=1-(\frac{1}{2})^x$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ کدام بازه است؟ (داخل ۹۳)

۱) $[-1,0]$ ۲) $(-\infty,0)$ ۳) $(-\infty,+\infty)$ ۴) $(0,+\infty)$

۴۵ اگر $f(x)=2^x-2$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\frac{xf(x)}{x-2}}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۴۶ دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{2x+5}}{1-\log_2(3-x)}$ کدام است؟

۱) $[-\frac{5}{2},3]-(-1,1)$ ۲) $[-\frac{5}{2},1)\cup(1,3)$ ۳) $[-\frac{5}{2},3)$ ۴) $(-\frac{5}{2},3)-[-1,1]$

۴۷ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $\frac{\log_4(x^2-x-2)}{\sqrt{x^2-1}+1}$ کدام است؟ (داخل ۱۴۰۰)

۱) $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ ۲) $(-1,2)$ ۳) $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$ ۴) $(-2,1)$

۴۸ مجموع اعداد صحیح دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\log_x(x^2-8x+15)}{\sqrt{4-|3-x|}}$ کدام است؟ (شبیه‌ساز داخل ۱۴۰۰)

۱) ۸ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

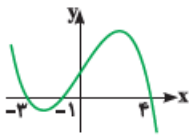
۴۹ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{2-\log_4(x^2-8x)}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۵۰ دامنهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{x}{\log_{\frac{1}{2}}^x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟ (نوبت اول ۱۴۰۲)

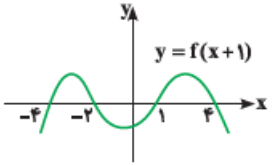
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۱ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=f(x-2)$ است. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $\sqrt{xf(x)}$، کدام است؟ (خارج ۹۴)



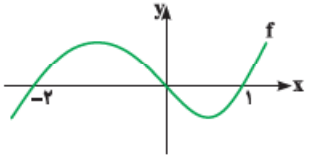
۱) $[-1,1]\cup[0,6]$
۲) $[-3,1]\cup[0,2]$
۳) $[-5,-3]\cup[-1,2]$
۴) $[-5,-3]\cup[0,2]$

۵۲ نمودار تابع $y=f(x+1)$ به‌صورت مقابل است. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{(x^2+4x+3)f(x)}$ شامل چند عدد صحیح است؟



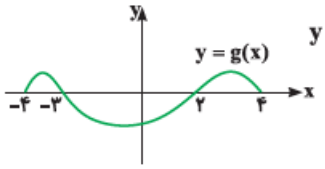
۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۵۳ نمودار زیر، تابع f را نشان می‌دهد. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{-\frac{f(x)}{f(2+x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟ (داخل ۱۴۰۲)



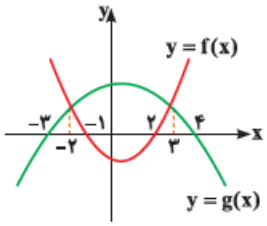
۱) ۳
۲) ۶
۳) ۴
۴) ۵

۵۴ اگر $f(x)=\log_{۲}(x+۳)$ و نمودار تابع $y=g(x)$ به‌صورت مقابل باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\frac{g(x)}{۲-f(x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۳ ○ ۴) ۴ ○

۵۵ نمودار دو تابع درجهٔ دوم f و g به‌صورت مقابل است. در تابع $y=\sqrt{f(x)g(x)-g^{۲}(x)}$ مجموع بزرگترین و کوچکترین عضو دامنه کدام است؟



۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۳ ○ ۴) ۴ ○

حالا بریم سراغ سوالات مربوط به بُرد تابع.

۵۶ اگر بُرد تابع $y=\frac{۱}{۲}x+۱$ بازهٔ $[۰,\frac{۵}{۲}]$ باشد، دامنهٔ آن شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳ ○ ۲) ۴ ○ ۳) ۵ ○ ۴) ۶ ○

۵۷ بُرد تابع $f(x)=\sqrt{۴-x}+\sqrt{x-۴}+x^{۲}-۲x+۳$ کدام است؟

۱) $\{۴,۱\}$ ○ ۲) $\{۱\}$ ○ ۳) $\{۰,۱\}$ ○ ۴) $\varnothing$ ○

۵۸ بُرد تابع $f(x)=\begin{cases}|x-۱|+۲ & ; \ -۳\le x<۲\\ -x^{۲}+۶x-۵ & ; \ ۲\le x\end{cases}$ کدام است؟

۱) $[۲,+\infty)$ ○ ۲) $[۲,۶]$ ○ ۳) $(-\infty,۶]$ ○ ۴) $(-\infty,۴]$ ○

۵۹ بُرد تابع $f(x)=۲+\sqrt{۴x-x^{۲}}$ به‌صورت بازهٔ $[a,b]$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۳ ○ ۴) ۴ ○

۶۰ بُرد تابع $f(x)=\sqrt{x^{۲}+۴x+۷}$ به‌صورت بازهٔ $[a,+\infty)$ است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) ۳ ○ ۲) ۴ ○ ۳) ۲ ○ ۴) $\sqrt{۳}$ ○

۶۱ بُرد تابع $f(x)=\frac{x^{۴}+۱}{x^{۲}}$ کدام است؟

۱) $(۰,+\infty)$ ○ ۲) $(۰,۲]$ ○ ۳) $[۲,+\infty)$ ○ ۴) $(۲,+\infty)$ ○

۶۲ بُرد تابع $f(x)=\frac{x^{۲}+۲}{\sqrt{x^{۲}+۱}}$ شامل چند عدد طبیعی نیست؟

۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۳ ○ ۴) بی‌شمار ○

۶۳ بُرد تابع $f(x)=\frac{۲x+۱}{۲x-۱}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{m\}$ است. بُرد تابع $g(x)=\frac{m}{m+\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۱]$ ○ ۲) $(۰,۱]$ ○ ۳) $[۱,+\infty)$ ○ ۴) $(۰,۱)$ ○

۶۴ برد تابع $f(x)=\frac{x^{۲}+۷x+۱۲}{x^{۲}-۱۶}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{۱\}$ ○ ۲) $\mathbb{R}-\{\frac{۱}{۸},۱\}$ ○ ۳) $\mathbb{R}-\{\pm۴\}$ ○ ۴) $\mathbb{R}$ ○

۶۵ بُرد تابع $f(x)=۲^{\sqrt{-\cos^{۲}x}}$ شامل چند عضو صحیح است؟

۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۳ ○ ۴) بی‌شمار ○

۶۶ برد تابع $f(x)=۲^{۱-\cos x}-۱$، شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۳ ○ ۴) ۴ ○

۶۷ برد تابع $y=\frac{۲}{|x|}(۲x^{۲}-۳x)$ کدام است؟

۱) $[-۳,+\infty)$ ○ ۲) $(-۶,+\infty)$ ○ ۳) $\mathbb{R}$ ○ ۴) $\mathbb{R}-[-۶,-۳]$ ○

۳۲۱ اگر $g(x)$ تابعی یک‌به‌یک با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد، دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{3x+4}{g(x)-g(x^2-3)}$ شامل چند عدد حقیقی نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۲۲ اگر f تابع یک‌به‌یک روی مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، معادله $f(2^x)=f(x^2)$ چند جواب مثبت دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

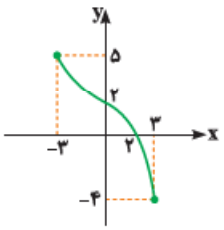
تابع وارون

سرنخ توی بعضی سؤالا، از تعریف تابع وارون سؤال می‌پرسن، چند تا با هم ببینیم.

۳۲۳ وارون تابع $y=x^3-x+1$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟ (داخل ۱۴۰۱)

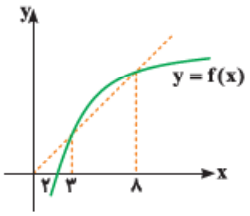
۱) $(-1,-2)$ ۲) $(\frac{5}{8},\frac{1}{2})$ ۳) $(1,2)$ ۴) $(-\frac{1}{2},-\frac{11}{8})$

۳۲۴ نمودار تابع f با دامنهٔ $[-3,3]$ به صورت مقابل است. اگر $\frac{f^{-1}(5)}{f(a)+f^{-1}(0)}=-\frac{3}{4}$ باشد، مقدار a کدام است؟



۱) صفر
۲) ۱
۳) -1
۴) $\frac{1}{2}$

۳۲۵ شکل زیر، نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را نشان می‌دهد. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{x-f^{-1}(x)}$ کدام است؟ (داخل ۹۴)



۱) $(0,2]$
۲) $[2,3]$
۳) $[2,8]$
۴) $[3,8]$

سرنخ این قسمت مبحث پر تکرار کنکورهای اخیره که باید مقدار تابع وارون رو در یک نقطه پیدا کنید. توی سه چهار سؤال اول نکته‌ها را یاد می‌گیرین، بعدش کلی تست قشنگارو می‌خونیم.

۳۲۶ فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x)=-x+\sqrt{-2x}$ باشد. حاصل $g(12)-g(4)$ کدام است؟ (شبیه‌ساز تجربی ۹۹)

۱) -10 ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) -6

۳۲۷ اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=1+x-2\sqrt{x}\ ,\ x\geq 1$ باشد، $(gog)(1)$ کدام است؟ (نوبت اول ۱۴۰۲)

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۹ ۴) صفر

۳۲۸ اگر $f(x-1)=\log_3^{(x+1)}$ و $g(x)=2\cos(\frac{\pi x}{2})$ باشد، مقدار $(f^{-1}og)(4)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) ۷

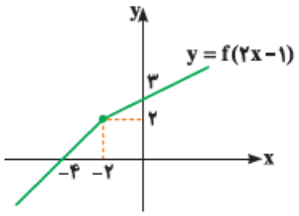
۳۲۹ اگر $f^{-1}(x)=\frac{x}{1+|x|}$ و $g(x)=\sqrt{x}-1$ باشد، حاصل $(f+g^{-1})(-\frac{2}{5})$ کدام است؟

۱) $-\frac{23}{25}$ ۲) $-\frac{11}{25}$ ۳) $-\frac{23}{75}$ ۴) $-\frac{11}{75}$

۳۳۰ اگر $f(x)=\begin{cases}6-2x\ ;\ x<2\\ 4-x\ ;\ x\geq 2\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}2x-3\ ;\ x<0\\ x-4\ ;\ x\geq 0\end{cases}$ باشد، مقدار $fog^{-1}(-5)+gof^{-1}(-2)$ کدام است؟

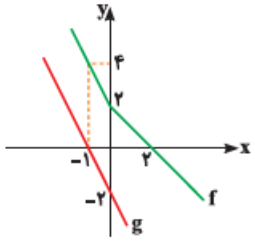
۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۳۳۱ نمودار تابع $y=f(2x-1)$ به‌صورت مقابل است. مقدار $\frac{f^{-1}(2)+f^{-1}(3)}{f(-5)}$ کدام است؟



۱) -7
۲) 2
۳) -3
۴) 5

۳۳۲ با توجه به نمودارهای دو تابع f و g در شکل مقابل، حاصل $gof^{-1}(-2)+g^{-1}of(-1)$ چقدر است؟ (شبیه‌ساز خارج ۱۴۰۱)



۱) -16
۲) -14
۳) -13
۴) -10

۳۳۳ به ازای کدام مقدار a، نمودار تابع وارون تابع $f(x)=x^3+6x^2+ax+1$ خط $10y-x=-10$ را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۵ (ریاضی نوبت اول ۱۴۰۳)

۳۳۴ وارون تابع $f(x)=\sqrt{x-2\sqrt{mx-1}}$ در دامنهٔ محدود، خط $y=12-x$ را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع می‌کند. مقدار $f(m+4)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۲ ۴) ۱ (ریاضی داخل ۱۴۰۲)

۳۳۵ دو تابع با ضابطه‌های $g=\{(2,5),(3,4),(1,6),(4,7),(8,1)\}$ و $f(x)=2x-5$ مفروض‌اند. اگر $(f^{-1}og)(a)=6$ باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (ریاضی داخل ۹۳)

۳۳۶ اگر $f=\{(-3,\frac{1}{4}),(\frac{1}{4},3),(-\frac{1}{4},\frac{1}{3}),(\frac{1}{3},1),(\frac{1}{9},-1)\}$، $g(x)=-|x|\sqrt{x}$ و $fog^{-1}(a)=-3$ باشد، مقدار a کدام است؟ (تجربی نوبت اول ۱۴۰۳)

۱) $-\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $-\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۳۳۷ اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{5x+9} & ; x\geq 3\\ 3x-x^2 & ; x<3\end{cases}$ و $g=\{(5,2),(7,3),(1,4),(3,6),(9,1)\}$ مفروض‌اند. اگر $(f^{-1}og^{-1})(a)=8$ باشد، a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

۳۳۸ دو تابع $f=\{(2,5),(6,3),(3,7),(4,1),(1,9)\}$ و $g(x)=\frac{x}{x-1}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-1}(g(2a))=6$ باشد، a کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۳۳۹ اگر $f(x)=\frac{2}{5}x-4$ و $g(x)=x^3+x$ باشند، مقدار $(g^{-1}of^{-1})(8)$ کدام است؟ (خارج ۹۸)

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

۳۴۰ اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{9x+6}{1-x}$ باشند، مقدار $(g^{-1}of^{-1})(20)$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۹)

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۳۴۱ اگر $f(x)=\frac{2x+1}{3}$ و $g(x)=\frac{2x+a}{a-x}$ باشند و $(fog^{-1})(-1)=-\frac{11}{3}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۴۲ اگر $f=\{(1,2),(2,5),(3,4),(4,6)\}$ و $g=\{(2,3),(4,2),(5,6),(3,1)\}$ باشند. تابع $\frac{g}{gof^{-1}}$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۸)

۱) $\{(4,2),(5,2)\}$ ۲) $\{(4,2),(3,5)\}$ ۳) $\{(5,2),(2,4)\}$ ۴) $\{(3,5),(2,4)\}$

۳۴۳ اگر $f=\{(1,2),(2,5),(3,4),(4,6)\}$ و $g=\{(2,3),(4,2),(5,6),(3,1)\}$ دو تابع باشند، بُرد تابع $(g^{-1}of)-f$ کدام است؟

۱) $\{-1,4\}$ ۲) $\{2,3\}$ ۳) $\{3,4\}$ ۴) $\{2,-1\}$ (ریاضی خارج ۹۸)

۳۴۴ اگر $f(x+1)=\frac{g(x)-1}{x}$ و $g^{-1}(x)=1-x$ باشند، مقدار $(fog)(2)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۲ ۳) -3 ۴) -5

۳۴۵ اگر $f(x)=x^2+4x+15$ و $(fog)(x)=x^3g(x)+4g(x)$ باشد، مقدار $g^{-1}(3)$ کدام است؟

۱) ۲ ○ ۲) ۶ ○ ۳) ۳ ○ ۴) ۱ ○

سرنخ می‌دونیم اگه $f(a)=b$ باشه، میشه نتیجه گرفت $f^{-1}(b)=a$ هستش! این ویژگی در حالت کلی‌تر هم قابل استفاده است.

۳۴۶ اگر $f(x^3+2x)=2^x-14$ باشد، مقدار $f^{-1}(2)$ کدام است؟

۱) ۱۶ ○ ۲) ۱۴ ○ ۳) ۷۲ ○ ۴) ۵۴ ○

۳۴۷ اگر $f^{-1}(\frac{x+2}{x-1})=x^3-1$ باشد، مقدار $f(7)$ کدام است؟

۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۳ ○ ۴) ۴ ○

۳۴۸ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-\frac{1}{2x}$ بر دامنهٔ $(0,+\infty)$ مفروض است. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیهٔ دوم را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی خارج ۹۹ و مشابه داخل ۹۹)

۱) $-\frac{3}{2}$ ○ ۲) $-\frac{3}{4}$ ○ ۳) -1 ○ ۴) $-\frac{1}{2}$ ○

۳۴۹ اگر $g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)}$ و $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{2x}$ باشند، آنگاه حاصل $g^{-1}(6)$ کدام است؟

۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۳ ○ ۴) ۴ ○

۳۵۰ اگر $g(x)=f(3x-4)$ و $f^{-1}(x)=x+\sqrt{x}$ باشند، حاصل $g^{-1}(16)$ کدام است؟ (داخل ۸۹)

۱) ۵ ○ ۲) ۶ ○ ۳) ۷ ○ ۴) ۸ ○

محاسبهٔ ضابطهٔ تابع وارون

سرنخ این بخش رو با وارون کردن تابع‌های خطی شروع می‌کنیم. فقط کافیه جای x و y رو عوض کنید!

۳۵۱ قرینهٔ خطی به معادلهٔ $3y-2x=4$ را نسبت به خط $y=x$، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟ (داخل ۹۷)

۱) -2 ○ ۲) -1 ○ ۳) ۱ ○ ۴) ۲ ○

۳۵۲ نمودار وارون تابع $f(x)=\frac{x-3}{2}$ را در راستای محور yها، ۶ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. اگر A نقطهٔ تلاقی نمودار منحنی حاصل با نمودار f باشد، فاصلهٔ A از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $2\sqrt{5}$ ○ ۲) $\sqrt{5}$ ○ ۳) $2\sqrt{2}$ ○ ۴) $\sqrt{2}$ ○

۳۵۳ فاصلهٔ نقطهٔ $A(7,1)$ از نمودار وارون تابع $f(x)=\frac{2}{3}x+2$ کدام است؟

۱) $\sqrt{7}$ ○ ۲) $\sqrt{11}$ ○ ۳) $\sqrt{13}$ ○ ۴) $\sqrt{15}$ ○

۳۵۴ تابع $f(x)=2x-1$ را در نظر بگیرید. اگر $g(x+1)=f(x)-f^{-1}(x)$ باشد، نمودار تابع $y=g(x)$ از کدام ناحیهٔ دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) اول ○ ۲) دوم ○ ۳) سوم ○ ۴) چهارم ○

۳۵۵ ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}$ به کدام صورت است؟

۱) $y=x-2\,;\,x\neq 3$ ○ ۲) $y=x-2\,;\,x\neq 1$ ○ ۳) $y=x+2\,;\,x\neq 3$ ○ ۴) $y=x+2\,;\,x\neq 1$ ○

۳۵۶ اگر دو خط به معادلات $ax+by=8$ و $2x-3y=b$ نسبت به نیمساز ربع اول متقارن باشند، $a+b$ کدام است؟ (خارج ۹۳)

۱) ± 3 ○ ۲) ± 2 ○ ۳) $2,-3$ ○ ۴) $-2,3$ ○

۳۵۷ تابع خطی f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{3x-1}{a}$ را در نظر بگیرید. اگر $f(3f^{-1}(x))=3x+5$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{3}{5}$ ○ ۲) $\frac{2}{5}$ ○ ۳) $-\frac{3}{5}$ ○ ۴) $-\frac{2}{5}$ ○

سرنخ تست‌های زیر مربوط به وارون کردن تابع‌های رادیکالی و درجهٔ دوم و درجهٔ سوم است. توی این سؤالا به محدود کردن دامنه توجه کنید.

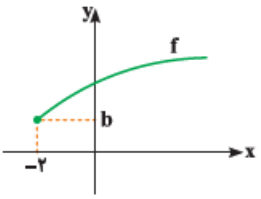
۳۵۸ ضابطهٔ وارون تابع $y=2-\sqrt{x-1}$ به کدام صورت است؟ (داخل ۹۲)

۱) $y=x^2-4x+5;x\leq 2$ ○ ۲) $y=-x^2+4x-5;x\leq 2$ ○ ۳) $y=x^2-4x+5;x\geq 1$ ○ ۴) $y=-x^2+4x-5;x\geq 1$ ○

۳۵۹ قرینهٔ نمودار تابع $y = ۲ + \sqrt{x-۱}$ را نسبت به خط $y = x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور xها و ۳ واحد در جهت منفی محور yها انتقال می‌دهیم و آن را $y = g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(۴)$ کدام است؟ (تجربی داخل ۱۴۰۰)

۱) ۳ ○ ۲) -۳ ○ ۳) -۲ ○ ۴) -۴

۳۶۰ نمودار تابع $f(x) = ۱ + \sqrt{x+a}$ به‌صورت زیر است. نمودار این تابع را ابتدا نسبت به محور yها و سپس نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم و آن را $g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(a+b)$ کدام است؟



۱) صفر ○
۲) ۱ ○
۳) -۲ ○
۴) -۴ ○

۳۶۱ نمودار تابع $y = \sqrt[۳]{x}$ را ۲ واحد به طرف xهای مثبت و ۱ واحد به طرف yهای مثبت انتقال می‌هیم. نمودار وارون تابع حاصل از کدام ناحیهٔ دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) اول ○ ۲) دوم ○ ۳) سوم ○ ۴) چهارم ○

۳۶۲ ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = (x-۲)^۲ + ۶x$ در بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً صعودی است. کدام است؟

۱) $-۱ - \sqrt{x-۳}$ ○ ۲) $-۱ + \sqrt{x-۳}$ ○ ۳) $۲ + \sqrt{x-۶}$ ○ ۴) $۲ - \sqrt{x-۶}$ ○

۳۶۳ ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = -۲ + \sqrt{x-۳}$ در بازه‌ای که نمودار آن زیر محور xها قرار دارد، کدام است؟

۱) $x^۲ + ۴x + ۷ \; ; \; -۲ \le x < ۰$ ○ ۲) $x^۲ + ۴x + ۷ \; ; \; ۳ \le x < ۷$ ○
۳) $x^۲ - ۶x + ۴ \; ; \; ۰ \le x \le ۳$ ○ ۴) $x^۲ - ۶x + ۴ \; ; \; x \ge ۰$ ○

۳۶۴ ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = -x^۲ + ۲x$ در بازه‌ای که بالای نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد، کدام است؟

۱) $۱ + \sqrt{۱-x} \; ; \; ۰ < x < ۱$ ○ ۲) $۱ + \sqrt{۱-x} \; ; \; x < ۱$ ○ ۳) $-۱ - \sqrt{۱-x} \; ; \; ۰ < x < ۱$ ○ ۴) $۱ - \sqrt{۱-x} \; ; \; ۰ < x < ۱$ ○

۳۶۵ نمودار تابع $y = x^۲ - ۲x \; ; \; x \ge ۱$ را ابتدا نسبت به محور yها و سپس نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قرینه می‌کنیم. ضابطهٔ تابع حاصل کدام است؟

۱) $-۱ - \sqrt{x-۱}$ ○ ۲) $-۱ + \sqrt{x-۱}$ ○ ۳) $-۱ - \sqrt{x+۱}$ ○ ۴) $-۱ + \sqrt{x+۱}$ ○

۳۶۶ اگر $g(x) = ۲x + ۱$ و $(fog)(x) = (۲x-۱)g(x)$ باشد، ضابطهٔ وارون تابع $y = f(x)$ با شرط $x \le ۱$ کدام است؟

۱) $y = ۱ - \sqrt{x-۱}$ ○ ۲) $y = ۱ + \sqrt{x-۱}$ ○ ۳) $y = ۱ - \sqrt{x+۱}$ ○ ۴) $y = ۱ + \sqrt{x+۱}$ ○

۳۶۷ تابع $f(x) = x^۲\sqrt{x^۲}$ در یک بازه، نزولی است. ضابطهٔ وارون تابع در این بازه، کدام است؟ (ریاضی داخل ۱۴۰۱)

۱) $-\sqrt[۳]{x} \; ; \; x \ge ۰$ ○ ۲) $-\sqrt{x^۳} \; ; \; x \le ۰$ ○ ۳) $-\sqrt[۳]{x} \; ; \; x \le ۰$ ○ ۴) $-\sqrt{x^۳} \; ; \; x \ge ۰$ ○

۳۶۸ اگر $y = \frac{x+۲}{۴} - \frac{\sqrt{x+۱}}{۲}$ ضابطهٔ تابع وارون $y = ax + a\sqrt{x}$ باشد، مقدار a کدام است؟ (تجربی نوبت اول ۱۴۰۳)

۱) ۲ ○ ۲) ۳ ○ ۳) ۴ ○ ۴) ۹ ○

۳۶۹ ضابطهٔ وارون $f(x) = \sqrt{x + ۲\sqrt{x-۱}}$ کدام است؟ (شبیه‌ساز ریاضی ۱۴۰۲)

۱) $x^۲ - ۲x + ۲ \; ; \; x \ge ۱$ ○ ۲) $x^۲ - ۲x \; ; \; x \ge ۱$ ○ ۳) $x^۲ + ۲x + ۲ \; ; \; x \ge -۱$ ○ ۴) $x^۲ + ۲x \; ; \; x \ge -۱$ ○

۳۷۰ ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{\frac{۱}{۴}x - ۱}$ در دامنهٔ محدود کدام است؟ (شبیه‌ساز ریاضی خارج ۱۴۰۲)

۱) $۲\sqrt{۴x+۴} + ۲$ ○ ۲) $۲\sqrt{۴x+۴} - ۲$ ○ ۳) $۲\sqrt{x^۲+۱} + ۲$ ○ ۴) $۲\sqrt{x^۲+۱}$ ○

سرنخ تابع‌های قدرمطلقی هم در حالت کلی وارون‌پذیر نیستند و برای وارون کردن آن‌ها باید به محدودیت دامنه توجه کنید!

۳۷۱ تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{(x+۱)^۲} - |۳x - ۶|$ در یک بازهٔ نزولی است. ضابطهٔ وارون تابع در این بازه، کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۱)

۱) $-\frac{۱}{۲}x - ۷, x \ge ۲$ ○ ۲) $-\frac{۱}{۲}x + \frac{۷}{۲}, x \le ۳$ ○ ۳) $-۲x + ۱۴, x \le ۳$ ○ ۴) $-۲x - \frac{۱۴}{۳}, x \ge ۲$ ○

۳۷۲ نمودار تابع $y=|۲x-۶|-|x+۴|+x$ در بازه‌ای اکیداً نزولی است. ضابطهٔ وارون آن در این بازه کدام است؟ (داخل ۹۴)

۱) $-x+۶;x\le -۴$ ۲) $-x+۵;x\ge ۲$

۳) $-\frac{۱}{۲}x+۱;-۴\le x\le -۳$ ۴) $-\frac{۱}{۲}x+۱;-۴\le x\le ۱۰$

۳۷۳ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|x+۱|-|۲x-۴|+x$ را در بازهٔ اکیداً نزولی در نظر بگیرید. نمودار تابع $f^{-۱}$ و خط $y=x+۱$ با کدام طول متقاطع هستند؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) غیرمتقاطع (شبیه‌ساز ۹۹)

۳۷۴ دو تابع $f(x)=۳-\sqrt{x+۱}$ و $g(x)=x^۲-۲x$ را در نظر بگیرید. ضابطهٔ وارون تابع $y=(fog)(x)$ در بازه‌ای که نمودار آن اکیداً نزولی می‌باشد، کدام است؟

۱) $-x+۳;x\le ۱$ ۲) $-x+۴;x\le ۱$ ۳) $-x+۳;x\le ۳$ ۴) $-x+۴;x\le ۳$

۳۷۵ تابع با ضابطهٔ $y=x|x-۲|$ در یک بازه، نزولی است. ضابطهٔ وارون آن در این بازه کدام است؟ (داخل ۹۴)

۱) $۱-\sqrt{۱+x};x\le ۰$ ۲) $۱-\sqrt{۱-x};x\le ۱$ ۳) $۱+\sqrt{۱-x};۰\le x\le ۱$ ۴) $۱-\sqrt{۱-x};۰\le x\le ۱$

۳۷۶ اگر $[x]=-۱$ باشد، ضابطهٔ وارون تابع $y=|x^۲-۱|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{x-۱};۰<x\le ۱$ ۲) $-\sqrt{x-۱};۰<x\le ۱$

۳) $\sqrt{۱-x};۰\le x<۱$ ۴) $-\sqrt{۱-x};۰\le x<۱$

پاسخ چندتا هم وارون تابع دوضابطه‌ای ببینیم.

۳۷۷ ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ;x\ge ۰\\ -\sqrt{-x} & ;x<۰\end{cases}$ کدام است؟ (داخل ۹۶)

۱) $-x^۲$ ۲) $x^۲$ ۳) $x|x|$ ۴) $-x|x|$

۳۷۸ ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\begin{cases}۳x+۱ & ;x>۱\\ ۲x+۲ & ;x\le ۱\end{cases}$ به‌صورت $f^{-۱}(x)=\begin{cases}a(x-۱) & ;x>c\\ bx-۱ & ;x\le c\end{cases}$ است. مقدار $f^{-۱}(\frac{b}{a})$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۳۷۹ اگر $f(x)=\begin{cases}x[x] & ;-۱<x<۰\\ ۲^x & ;۰\le x<۲\end{cases}$ باشد، ضابطهٔ وارون آن کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=\begin{cases}-x & ;۰<x<۱\\ \log_۲ x & ;۱<x\le ۴\end{cases}$ ۲) $f^{-۱}(x)=\begin{cases}-x & ;۰<x<۱\\ \log_۲ x & ;۱\le x<۴\end{cases}$

۳) $f^{-۱}(x)=\begin{cases}x & ;-۱<x<۰\\ \log_۲ x & ;۱\le x<۴\end{cases}$ ۴) $f^{-۱}(x)=\begin{cases}x & ;۰<x<۱\\ \log_۲ x & ;۱\le x<۴\end{cases}$

پاسخ یه روش خیلی خوب برای وارون کردن تابع‌های هموگرافیک داریم که برای حل تست‌های زیر ازش استفاده کنید و لذت ببرید.

۳۸۰ ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\frac{۳x+۲}{x-۱}+۲$ کدام است؟

۱) $\frac{x+۲}{x-۳}-۲$ ۲) $\frac{x}{x-۵}$ ۳) $\frac{x+۲}{x-۳}+۲$ ۴) $\frac{x}{x+۵}$

۳۸۱ تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{a\}$ و بُرد $\mathbb{R}-\{-۲\}$ مفروض است. اگر $f^{-۱}(x)=\frac{۵x-۳}{bx+۴}$ باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲/۵ ۳) -۴ ۴) ۵

IQ ۳۸۲ اگر $fof(x)=\frac{af(x)+۱}{۲f(x)-۱}$ و $f^{-۱}(۰)=-۲$ باشد، ضابطهٔ وارون تابع $g(x)=\frac{۴x+۱}{۲x+a}$ کدام است؟

۱) $\frac{-\frac{۱}{۲}x+۱}{۲x-۴}$ ۲) $\frac{-x+۲}{۲x-۴}$ ۳) $\frac{-۴x+۱}{۲x+۴}$ ۴) وارون‌پذیر نیست.

۳۸۳ تابع $f(2x+4)=\frac{4x-6}{2x+a}$ را در نظر بگیرید. اگر $f(x)=f^{-1}(x)$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -4 ○ ۲) -2 ○ ۳) 4 ○ ۴) 2 ○

۳۸۴ اگر $x=\frac{f(x)-3x}{f(x)+4}$ باشد، ضابطهٔ تابع $f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{x-1}{x+7}$ ○ ۲) $\frac{x}{x+7}$ ○ ۳) $\frac{x+1}{x-7}$ ○ ۴) $\frac{x}{x-7}$ ○

۳۸۵ ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$ به‌صورت $|x|<b$; $f^{-1}(x)=\frac{ax}{1-|x|}$ است. مقدار $a\times b$ کدام است؟

۱) -1 ○ ۲) 1 ○ ۳) -2 ○ ۴) 2 ○

برخورد f و f^{-1} و برخورد f^{-1} و g

سرنخ توی تست‌های زیر، می‌خوایم نقطهٔ برخورد f^{-1} و g رو بررسی کنیم.

۳۸۶ اگر $x\geq 1$; $f(x)=x^2-2x-3$ باشد، نمودارهای دو تابع f^{-1} و $g(x)=\frac{x-9}{2}$ با کدام طول متقاطع هستند؟ (تجربی داخل ۹۸)

۱) ۱۲ ○ ۲) ۱۵ ○ ۳) ۱۸ ○ ۴) ۲۱ ○

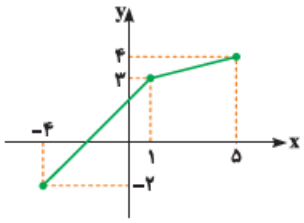
۳۸۷ اگر $x<\frac{3}{2}$; $f(x)=x^2-3x+1$ و $g^{-1}(x)=3x-4$ باشند، نمودارهای دو تابع f^{-1} و g در نقطه‌ای با کدام طول متقاطع‌اند؟

۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) -1 ○ ۴) -2 ○

۳۸۸ اگر $x\leq 2$; $f(x)=x^2-4x+1$ باشد، نمودار تابع $y=1-f^{-1}(x)$ و $g(x)=\sqrt{f(x)+3}$ در نقطهٔ A متقاطع‌اند. فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ○ ۲) $\sqrt{2}$ ○ ۳) $2\sqrt{13}$ ○ ۴) $\sqrt{6}$ ○

۳۸۹ نمودار تابع f با دامنهٔ $[-4,5]$ به‌صورت مقابل است. نمودارهای دو تابع f^{-1} و $g(x)=x+|x-2|$ در چند نقطه متقاطع هستند؟



۱) ۱ ○
۲) ۲ ○
۳) ۳ ○
۴) متقاطع نیستند. ○

سرنخ برای حل تست‌های مربوط به برخورد f و f^{-1} به صعودی بودن تابع f توجه کنید.

۳۹۰ اگر $f(x)=x^2+2x+1$ با دامنهٔ $(-1,+\infty)$ مفروض باشد، نمودارهای دو تابع f و f^{-1} در چند نقطه متقاطع‌اند؟ (داخل ۹۲)

۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۳ ○ ۴) غیرمتقاطع ○

۳۹۱ فرض کنید M نقطهٔ تلاقی منحنی $y=\sqrt{x+3}-1$ با تابع وارون خود باشد. فاصلهٔ نقطهٔ M از مبدأ مختصات، کدام است؟ (خارج ۱۴۰۰)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ○ ۲) $\sqrt{2}$ ○ ۳) 3 ○ ۴) $2\sqrt{2}$ ○

۳۹۲ نمودار تابع $f(x)=\frac{x+4}{x-2}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{2\}$ نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟ (خارج ۹۶)

۱) $-4,-1$ ○ ۲) $4,-1$ ○ ۳) $-4,1$ ○ ۴) $4,1$ ○

۳۹۳ فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع تابع $y=x^3+3x-12$ با وارون خود، از مبدأ مختصات کدام است؟ (خارج ۱۴۰۱)

۱) $2\sqrt{3}$ ○ ۲) $\sqrt{3}$ ○ ۳) $2\sqrt{2}$ ○ ۴) $\sqrt{2}$ ○

۳۹۴ نمودار وارون تابع $y=\log_4^{(2^{x+2}+32)}$ نمودار خود را در نقطهٔ A قطع می‌کند. فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ○ ۲) $3\sqrt{2}$ ○ ۳) $5\sqrt{2}$ ○ ۴) $3\sqrt{3}$ ○

۹ ترکیب تابع f و f^{-1} و ترکیب تابع f^{-1} و g

سرنخ به نظرتون fof^{-1} و $f^{-1}of$ با هم برابرند؟ بریم ببینیم با هم.

۳۹۵ تابع $f(x)=۲-\sqrt{x-۱}$ را در نظر بگیرید. کدام رابطه نادرست است؟

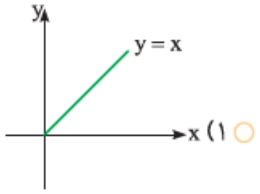
۱) $f^{-1}of(۱)=۱$ ۲) $(fof^{-1})(۱)=۱$ ۳) $f^{-1}of(۳)=۳$ ۴) $fof^{-1}(۳)=۳$

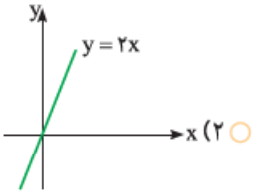
۳۹۶ در کدام تابع زیر رابطهٔ $(f^{-1}of)(x)=(fof^{-1})(x)$ برقرار نیست؟

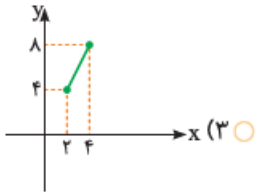
۱) $f(x)=x^۲-۴x+۶;x\geq ۲$ ۲) $f(x)=۱+۲^x$

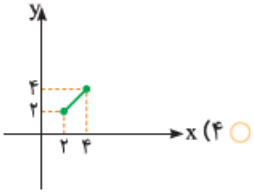
۳) $f(x)=۱+\frac{۱}{x-۱}$ ۴) $f(x)=۲+\sqrt{x-۲}$

۳۹۷ اگر $f(x)=۴x-x^۲;x\geq ۲$ باشد، نمودار تابع $y=(f^{-1}of)(x)+(fof^{-1})(x)$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۳۹۸ اگر $f^{-1}(۳x+۱)=g(\frac{x+۳}{۴})$ قابل تعریف باشد، مقدار $(fog)(۳)$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۲۸

۳۹۹ با توجه به ماشین مقابل، اگر $f(x)=۳-\sqrt{x+۱}$ باشد، آن‌گاه نمودار تابع $y=g(x)$ در کدام بازه زیر محور xها است؟

۱) $[-۱,۸)$ ۲) $(۸,+\infty)$

۳) $(۲,۳]$ ۴) $(۲,۴)$

۴۰۰ اگر $f(x)=\frac{\sqrt{۲}x}{۳x-\sqrt{۲}}$ باشد، حاصل $fofof(\sqrt{۲})$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۱۴۰۱)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۴

۴۰۱ اگر $f(x)=x+\sqrt{x}+۳$ باشد، نمودار دو تابع fof^{-1} و $y=\sqrt{-x+۶}$ در نقطه‌ای با کدام طول متقاطع هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) غیرمتقاطع‌اند.

سرنخ چندتا سؤال هم از وارون کردن ترکیب دو تابع ببینیم.

۴۰۲ دو تابع $f(x)=x^۳+۲$ و $g(x)=\frac{۱-x}{x+۲}$ را در نظر بگیرید. مقدار $(f^{-1}og)^{-1}(۲)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۸}{۱۱}$ ۲) $-\frac{۱۹}{۱۱}$ ۳) $-\frac{۲۰}{۱۱}$ ۴) $-\frac{۲۱}{۱۱}$

۴۰۳ اگر $f(x)=\frac{۱}{x-۱}-۵$ و $g(x)=\frac{x+۳}{x+۲}$ باشند، ضابطهٔ تابع $g^{-1}of^{-1}$ کدام است؟

۱) $x-۳$ ۲) $\frac{x+۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳x}{x-۱}$ ۴) $x+۳$

۴۰۴ اگر $(fog)(x)=\frac{۳x+۱}{x+۱}$ و $f^{-1}(۴)=۱$ باشد، مقدار $g^{-1}(۱)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۳ ۳) ۱ ۴) -۲

فصل اول: تابع

۱ ۳

نمودار موجود در گزینهٔ «۳»، خود نمایانگر یک تابع است.

هایلایت

تابع و تشخیص آن

اگر یک رابطه به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌مرتب‌های (x, y) باشد، هنگامی این رابطه یک تابع محسوب می‌شود که هیچ دو زوج‌مرتب متمایزی، دارای مؤلفهٔ اول یکسان نباشند؛ یعنی اگر دو زوج مرتب دارای مؤلفهٔ اول یکسان باشند، آنگاه مؤلفهٔ دوم آن‌ها نیز باید یکسان باشد.

۲ ۲

برای این‌که رابطهٔ داده شده نمایانگر یک تابع باشد، باید در زوج مرتب‌های $(5, 4a-b)$ و $(5, a-2b)$ مؤلفه‌های دوم با هم برابر باشند. همچنین در زوج مرتب‌های $(2, -4)$ و $(4, a+b)$ باید مؤلفه‌های دوم با هم برابر باشند.

$$\begin{cases} 4a-b=a-2b \\ a+b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases}$$

بنابراین حاصل $a-b=1-(-3)=4$ است.

۳ ۴

برای اینکه زوج مرتب f تابع نباشد، باید حالتی ایجاد کنیم که ورودی یکسان اما خروجی متفاوت باشد. یعنی:

$k=0 \Rightarrow f=\{(1,4),(2,4),(3,5),(4,9),(1,4)\}$ تابع هست.

$k=1 \Rightarrow f=\{(1,4),(2,4),(3,5),(4,9),(2,9)\}$ تابع نیست.

$k=2 \Rightarrow f=\{(1,4),(2,4),(3,5),(4,9),(3,16)\}$ تابع نیست.

$k=3 \Rightarrow f=\{(1,4),(2,4),(3,5),(4,9),(4,25)\}$ تابع نیست.

پس مقادیر قابل قبول k برای اینکه f تابع نباشد، برابر است با:

$k=\{1,2,3\} \Rightarrow$ مجموع مقادیر $k=6$

۴ ۳

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

الف و ت) از عضو a در نمودار (الف) و از عضو b در نمودار (ت) پیکانی خارج نشده؛ پس تابع نیستند.

ب) از عضو b، ۲ پیکان خارج شده است؛ پس تابع نیست.

پ) ازهرعضومجموعهٔ A دقیقاًیک‌پیکان‌خارج‌شده‌است؛پس‌تابع‌است.

۵ ۱

برای این‌که نمودار پیکانی داده شده، نمایانگر یک تابع باشد، باید $m^2-2m=3m-6$ و $3m-6=12-m^2$ باشد:

$$\begin{cases} m^2-2m=3m-6 \Rightarrow m^2-5m+6=0 \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=3 \end{cases} \\ 3m-6=12-m^2 \Rightarrow m^2+3m-18=0 \Rightarrow \begin{cases} m=-6 \\ m=3 \end{cases} \end{cases}$$

از اشتراک مقادیر به‌دست آمده، تنها مقدار $m=3$ قابل قبول است.

۶ ۴

به بررسی موارد داده شده می‌پردازیم:

الف) چون هر عدد مثبت، دارای ۲ ریشهٔ چهارم است، پس این رابطه تابع نیست.

ب) این رابطه بیانگر یک تابع نیست، زیرا برای هر عددی، دو عدد با اختلاف ۳ واحد می‌توان نسبت داد.

پ) می‌دانیم هر عدد فرد اول، دارای ۲ مقسوم‌علیه است. پس این رابطه تابع نیست.

۷ ۳

می‌دانیم یک رابطه، زمانی یک تابع است که به ازای یک ورودی x، تنها یک خروجی y حاصل شود، در گزینهٔ «۳» برای $x=0$ بی‌شمار خروجی y داریم.

$$[x]+[y]=0 \xrightarrow{x=0} [0]+[y]=0 \Rightarrow [y]=0 \Rightarrow 0 \le y < 1$$

پس این رابطه تابع نیست. باقی روابط موجود در گزینه‌ها، نمایانگر یک تابع هستند.

۸ ۳

تابع از A به B، شامل زوج مرتب‌هایی است که مؤلفه‌های اول آن‌ها، اعضای مجموعه A و مؤلفه‌های دوم آن‌ها، اعضای مجموعه B هستند. می‌توان این تابع را به‌صورت زیر نمایش داد:

$\{(a, \bigcirc), (b, \square), (c, \triangle)\}$

چون طبق سوال، این تابع باید حتماً شامل زوج مرتب $(c, 4)$ باشد، داریم:

$\{(a, \bigcirc), (b, \square), (c, 4)\}$

با توجه به تابع بالا، به جای مؤلفه دوم‌های $\bigcirc$ و $\square$، هر ۴ عضو مجموعهٔ B می‌توانند قرار بگیرند. پس در کل $4 \times 4 = 16$ تابع مختلف با این شرایط می‌توان نوشت.

۹ ۲

برای این‌که رابطهٔ داده شده نمایانگر یک تابع باشد، باید مقدار هر دو ضابطه در نقطهٔ $x=1$ با هم برابر باشند:

$$x=1: 2(1)^2+m(1)=\frac{3m^2-2}{1} \Rightarrow 2+m=3m^2-2$$

$$3m^2-m-4=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} m=-1 \\ m=\frac{4}{3} \end{cases}$$

۱۰ ۲

به ازای $x=1$، مقدار تابع از ضابطهٔ بالا و ضابطهٔ پایین باید برابر باشد:

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+3}+2a & ; |x| \le 1 \\ ax^2+5 & ; |x| \ge 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x=1} \sqrt{4}+2a=a+5 \Rightarrow a=3$$

حالا برای پیدا کردن $f(3)$ سراغ ضابطهٔ پایینی می‌رویم:

$$f(3)=3 \times 3^2+5=32$$

۱۱ **۱**

برای این‌که رابطهٔ داده شده نمایانگر یک تابع باشد، باید مقدار ضابطه‌های $ax+b$ و $bx^۲+a$ در نقطهٔ $x=۲$ با هم برابر باشند. همچنین مقدار ضابطه‌های $bx^۲+a$ و $(a-b)x+۸$ نیز باید در $x=۳$ با هم برابر باشند:

$$\begin{cases} a(۲)+b=b(۲)^۲+a \\ b(۳)^۲+a=(a-b)(۳)+۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a+b=۴b+a \\ ۹b+a=۳a-۳b+۸ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=۴ \\ b=\frac{۴}{۳} \end{cases}$$

بنابراین حاصل $a+b$ برابر است با:

$$a+b=۴+\frac{۴}{۳}=\frac{۱۲+۴}{۳}=\frac{۱۶}{۳}$$

۱۲ **۴**

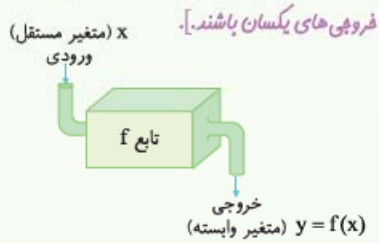
برای پیدا کردن $f(۵)$ باید در ضابطهٔ داده شده $x=۲$ قرار دهیم:

$$f(x+۳)=۳x+۱۴ \xrightarrow{x=۲} f(۵)=۲۰$$

هایلایت

مقدار تابع

می‌توانیم تابع را مانند ماشینی در نظر بگیریم که یک ورودی را دریافت می‌کند و به‌ازای آن یک خروجی تحویل می‌دهد [*هر چند ممکن است چند ورودی دارای فروجی‌های یکسان باشند.*].



منظور از $f(a)$، مقدار تابع f در نقطهٔ $x=a$ است. بنابراین برای محاسبهٔ مقدار تابع در $x=a$، باید در ضابطهٔ تابع x را برداریم و به جای آن a قرار دهیم.

اگر نمودار تابع f موجود باشد، $f(a)$ نشان‌دهندهٔ عرض نقطه‌ای روی نمودار تابع f با طول $x=a$ است.

۱۳ **۲**

در ضابطهٔ داده شده، به جای x، صفر قرار می‌دهیم:

$$۲f(x+۴)=f(۴)+x^۲+۵(x+۱)+۲ \xrightarrow{x=۰} ۲f(۴)=f(۴)+۷$$

$$\Rightarrow f(۴)=۷$$

۱۴ **۱**

برای پیدا کردن $g(۴)$ در تابع $g(۳x+۱)$ به جای $x=۱$ قرار می‌دهیم. پس باید سراغ ضابطهٔ پایینی برویم:

$$x<۲: g(۳x+۱)=x^۲ \xrightarrow{x=۱} g(۴)=۱^۲=۱$$

حالا برای پیدا کردن $g(۱۰)$ در تابع $g(۳x+۱)$ به جای $x=۳$ قرار می‌دهیم. پس باید سراغ ضابطهٔ بالایی برویم:

$$x\geq ۲: g(۳x+۱)=x-۲ \xrightarrow{x=۳} g(۱۰)=۱$$

بنابراین $g(۴)+g(۱۰)=۲$ است.

۱۵ **۳**

برای پیدا کردن $f(۳)$ در ضابطهٔ تابع، $x=۲$ و برای پیدا کردن $f(-۳)$ در ضابطهٔ تابع، $x=-۱$ قرار می‌دهیم:

$$x=۲\,;\, f(۳)=۶-a$$

$$x=-۱\,;\, f(-۳)=-۳-a$$

حالا، با توجه به این‌که $f(۳)+f(-۳)=۹$ است، پس:

$$(۶-a)+(-۳-a)=۹ \Rightarrow ۳-۲a=۹ \Rightarrow ۲a=-۶ \Rightarrow a=-۳$$

حالا سراغ پیدا کردن $f(a+۲)$ می‌رویم:

$$f(a+۲)=f(-۱)$$

کافی است در ضابطهٔ $f(۲x-۱)$، $x=۰$ قرار دهیم:

$$f(۲x-۱)=۳x-a \xrightarrow{x=۰} f(-۱)=-a=۳$$

۱۶ **۴**

می‌دانیم $\sqrt{۷+۲\sqrt{۱۲}}=\sqrt{(۲+\sqrt{۳})^۲}=۲+\sqrt{۳}$ است. حالا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم و سپس $x=۲+\sqrt{۳}$ را در آن جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(x)=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۸ \Rightarrow f(x)=(x-۲)^۳$$

$$\xrightarrow{x=۲+\sqrt{۳}} f(۲+\sqrt{۳})=(۲+\sqrt{۳}-۲)^۳=(\sqrt{۳})^۳=۳\sqrt{۳}$$

۱۷ **۲**

ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x^۲-۶x+۱۴}=\sqrt{(x-۳)^۲+۵}$$

$$\Rightarrow f(۳+\sqrt[۴]{۲۴})=\sqrt{(۳+\sqrt[۴]{۲۴}-۳)^۲+۵}=\sqrt{(\sqrt[۴]{۲۴})^۲+۵}$$

$$=\sqrt{\sqrt{۲۴}+۵}=\sqrt{۲\sqrt{۶}+۵}=\sqrt{(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^۲}=\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$$

۱۸ **۴**

با جای‌گذاری $x=۲$ و $x=\frac{۱}{۲}$ در تساوی $f(x)+۳f(\frac{۱}{x})=۱-x^۲$ داریم:

$$x=۲: f(۲)+۳f(\frac{۱}{۲})=-۳$$

$$x=\frac{۱}{۲}: f(\frac{۱}{۲})+۳f(۲)=\frac{۳}{۴}$$

ضابطهٔ پایینی را در -۳ ضرب می‌کنیم و دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(۲)+۳f(\frac{۱}{۲})=-۳ \\ -۹f(۲)-۳f(\frac{۱}{۲})=-\frac{۹}{۴} \end{cases} \Rightarrow -۸f(۲)=-\frac{۲۱}{۴} \Rightarrow f(۲)=\frac{۲۱}{۳۲}$$

۱۹ **۳**

در ضابطهٔ $(x+۲)f(x)-۳xf(x+۲)=۴x^۲-mx+۳m-۱$ یک بار $x=۰$ و یک بار $x=-۲$ قرار می‌دهیم:

$$x=۰: ۲f(۰)-۰=۳m-۱ \Rightarrow f(۰)=\frac{۳m-۱}{۲}$$

$$x=-۲: ۰+۶f(۰)=۱۶+۲m+۳m-۱ \Rightarrow f(۰)=\frac{۱۵+۵m}{۶}$$

حالا این دو مقدار را با هم برابر قرار می‌دهیم تا m به‌دست آید:

$$\frac{۳m-۱}{۲}=\frac{۱۵+۵m}{۶} \Rightarrow ۹m-۳=۱۵+۵m \Rightarrow ۴m=۱۸$$

$$\Rightarrow m=\frac{۹}{۲}$$

بنابراین $f(۰)=\frac{۳m-۱}{۲}=\frac{\frac{۲۷}{۲}-\frac{۲}{۲}}{۲}=\frac{۲۵}{۴}$ است.

۲۰ ۲

با توجه به ضابطهٔ پایینی تابع، مقدار $f(-1)$ را پیدا می‌کنیم:

$$x<1: f(x)=x+1 \Rightarrow f(-1)=0$$

پس $f(1+f(-1))=f(1)$ است. با توجه به ضابطهٔ بالایی تابع داریم:

$$x\geq 1: f(x)=4-f(x) \xrightarrow{x=1} f(1)=4-f(1)$$
$$\Rightarrow 2f(1)=4 \Rightarrow f(1)=2$$

۲۱ ۴

برای پیدا کردن طول نقاط برخورد با محور x ها، باید مشخص کنیم در چه نقاطی، $f(x)=0$ است:

$$x<0: f(x)=3x^2-12=0 \Rightarrow x^2=4 \xrightarrow{x<0} x=-2$$
$$0\leq x<3: f(x)=2x-4=0 \Rightarrow x=2$$
$$x\geq 3: f(x)=x^2-x-12=0 \Rightarrow (x-4)(x+3)=0$$
$$\xrightarrow{x\geq 3} x=4$$

پس مجموع طول نقاط برخورد برابر $4+2+(-2)=4$ است.

۲۲ ۳

با توجه به نمودار تابع f در صورت سؤال $f(-1)=-3$ و $f(2)=k$ است. پس با توجه به ضابطهٔ تابع g داریم:

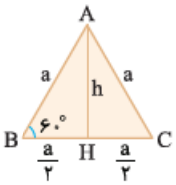
$$g(x)=\begin{cases}1+f(x) & ; \quad x>0 \\ f^2(x) & ; \quad x\leq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} g(2)=1+f(2)=1+k \\ g(-1)=f^2(-1)=9\end{matrix}$$

حالا با توجه به رابطهٔ $g(2)+g(-1)=14$ داریم:

$$9+1+k=14 \Rightarrow k=4$$

۲۳ ۳

ابتدا در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC با کمک $\sin 60^\circ$ داریم:



$$\sin 60^\circ=\frac{h}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a=\frac{2h}{\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow S=a^2\frac{\sqrt{3}}{4}=(\frac{2h}{\sqrt{3}})^2\times\frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$=\frac{4h^2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{3}h^2$$

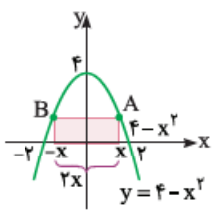
۲۴ ۱

اگر طول مستطیل را x و عرض آن را y فرض کنیم، داریم:

$$x=y+3 \Rightarrow y=x-3$$
$$P=2(x+y)=2(x+x-3)=4x-6 \Rightarrow x=\frac{P+6}{4}$$
$$S=xy=x(x-3) \Rightarrow S(P)=(\frac{P+6}{4})(\frac{P+6}{4}-3)$$
$$\Rightarrow S(P)=(\frac{P+6}{4})(\frac{P-6}{4})=\frac{P^2-36}{16}$$

۲۵ ۲

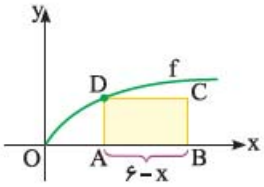
با توجه به شکل، نقاط $A(x,4-x^2)$ و $B(-x,4-x^2)$ دو رأس مستطیل هستند. پس یک ضلع مستطیل برابر $2x$ و یک ضلع دیگر $4-x^2$ است. بنابراین مساحت مستطیل برابر است با:



$$f(x)=2x(4-x^2)=8x-2x^3$$

۲۶ ۳

با توجه به این‌که طول نقطهٔ A برابر x و طول نقطهٔ B برابر ۶ است. پس $AB=6-x$ است. در ضمن نقطهٔ D به طول x روی تابع $f(x)=\sqrt{x}$ قرار دارد. پس $AD=\sqrt{x}$ است.



بنابراین مساحت مستطیل برابر است با:

$$S(x)=AD\times AB=\sqrt{x}(6-x)=6\sqrt{x}-x\sqrt{x}$$

۲۷ ۱

اگر شعاع نیم‌دایره‌ها را x و طول مستطیل را L در نظر بگیریم از آن‌جایی که محیط استادیوم برابر 80π است، پس:

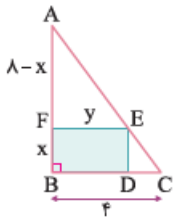
$$2L+2\pi x=80\pi$$
$$\Rightarrow L=40\pi-\pi x$$

حالا مساحت استادیوم را برحسب x به‌دست می‌آوریم:

$$S=L(2x)+\pi x^2=(40\pi-\pi x)(2x)+\pi x^2=\pi x(80-x)$$

۲۸ ۲

با توجه به قضیهٔ تالس داریم:



$$\frac{AF}{AB}=\frac{FE}{BC} \Rightarrow \frac{8-x}{8}=\frac{y}{4}$$
$$\Rightarrow y=-\frac{x}{2}+4$$
$$\Rightarrow S=xy=x(-\frac{x}{2}+4)=-\frac{x^2}{2}+4x$$

۲۹ ۴

چون دامنهٔ تابع f برابر $\mathbb{R}-\{-1,2\}$ است، پس $x=-1$ و $x=2$ ریشه‌های مخرج کسر هستند:

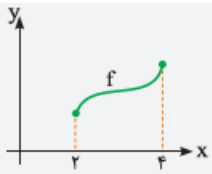
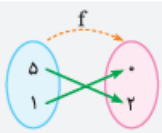
$$\begin{cases}x=-1 : 1-m+n=0 \Rightarrow m-n=1 \\ x=2 : 4+2m+n=0 \Rightarrow 2m+n=-4\end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases}m=-1 \\ n=-2\end{cases} \Rightarrow m+n=-3$$

هایلایت

دامنهٔ تابع

به مجموعهٔ ورودی‌های تابع f، دامنهٔ تابع f می‌گویند و آن را با D_f نشان می‌دهند.

مشخص کردن دامنهٔ تابع

نمودار در دستگاه مختصات: تصویر نمودار روی محور xها	 $D_f=[2,4]$
نمودار ون (پیکانی): مجموعه‌ای که از اعضای آن، پیکان خارج شده	 $D_f=\{1,5\}$
زوج مرتبی: مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های اول	$f=\{(1,2),(5,0)\} \Rightarrow D_f=\{1,5\}$

هایلایت

دامنهٔ توابع معروف

برای تعیین دامنهٔ تابع f با داشتن ضابطهٔ آن، به موارد زیر توجه کنید:

۱) دامنهٔ تابع چندجمله‌ای $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a$ برابر $\mathbb{R}$ است.

$f(x)=2x^3+4x^2-x-10\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

۲) چون عبارت‌های کسری به ازای ریشهٔ مخرج، تعریف‌نشده هستند؛ پس دامنهٔ آن‌ها برابر است با:

$D=\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$

$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{0,1\}$

۳) در رادیکال‌های با فرجهٔ زوج، باید عبارت زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر باشد.

$y=\sqrt{4-x}\Rightarrow 4-x\geq 0\Rightarrow x\leq 4\Rightarrow D_f=(-\infty,4]$

۴) چون $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ است، پس باید شرط $\cos x\neq 0$ برقرار باشد، بنابراین:

$D=\mathbb{R}-\{x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})\}$

$y=x+\tan x\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{x=k\pi+\frac{\pi}{2}\}$

۵) چون $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ است، پس باید شرط $\sin x\neq 0$ برقرار باشد، بنابراین $(k\in\mathbb{Z})$:

$D=\mathbb{R}-\{x=k\pi\}$

$y=5+2\cot x\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{x=k\pi\}$

۶) در توابع لگاریتمی، باید عبارت جلوی لگاریتم مثبت و مبنای لگاریتم مثبت و مخالف یک باشد.

$y=\log_{\bigcirc}\bigcirc\Rightarrow\begin{cases}\bigcirc>0\\ \bigcirc>0,\ \bigcirc\neq 1\end{cases}$

$y=\log_{(3-x)}(x-1)\Rightarrow\begin{cases}x-1>0\Rightarrow x>1\\ 3-x>0\Rightarrow 3>x\Rightarrow D_f=(1,2)\cup(2,3)\\ 3-x\neq 1\Rightarrow x\neq 2\end{cases}$

هنگام یافتن دامنه، نباید ضابطهٔ تابع را ساده کنید.

در توابع چندضابطه‌ای، دامنهٔ تابع از اجتماع دامنهٔ همهٔ ضابطه‌ها به‌دست می‌آید.

۳۰ ۲

مخرج کسر تابعی از درجهٔ دوم است، بنابراین $x=-3$، ریشهٔ مضاعف مخرج است و تابع مخرج کسر به صورت $3(x+3)^2$ می‌باشد:

$3(x+3)^2=3x^2+(2m-n)x+m+n$

$3x^2+18x+27=3x^2+(2m-n)x+m+n$

$\Rightarrow\begin{cases}2m-n=18\\ m+n=27\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=15\\ n=12\end{cases}\Rightarrow mn=180$

۳۱ ۲

$x=1$ و $x=b$ ریشه‌های مخرج کسر هستند، پس مخرج کسر را به‌صورت $(x-1)(x-b)$ در نظر می‌گیریم:

مخرج کسر: $(x-1)(x-b)=x^2-(1+b)x+b$

حالا این عبارت را با x^2-ax-2 مقایسه می‌کنیم. نتیجه می‌گیریم:

$\begin{cases}b=-2\\ 1+b=a\Rightarrow a=-2+1=-1\end{cases}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{-2}{-1}=2$

۳۲ ۲

ریشه‌های مخرج کسر را پیدا می‌کنیم:

$||x|-1|-2=0\Rightarrow||x|-1|=2\Rightarrow\begin{cases}|x|-1=2\Rightarrow|x|=3\\ |x|-1=-2\Rightarrow|x|=-1\ \times\end{cases}$

$\Rightarrow x=\pm 3$

پس دامنهٔ تابع f به‌صورت $D_f=\mathbb{R}-\{-3,3\}$ است. یعنی دو عدد صحیح -3 و 3 در دامنهٔ تابع حضور ندارند.

۳۳ ۳

باید ریشه‌های مخرج کسر را پیدا کنیم:

$[x]-f(x)=0\Rightarrow[x]=f(x)$

حالا با توجه به محدودهٔ x داریم:

$x>0:[x]=1\Rightarrow 1\leq x<2$

$x=0:[x]=0\Rightarrow x=0$

$x<0:[x]=-1\Rightarrow -1\leq x<0$

پس دامنهٔ تابع f به‌صورت بازهٔ $(-\infty,-1)\cup(0,1)\cup[2,+\infty)$ است که شامل ۳ عدد صحیح $x=-1,0,1$ نیست.

۳۴ ۱

باید عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد و مخرج کسرها نیز صفر نباشد:

$f(x)=\sqrt{\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}}\Rightarrow\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}\geq 0\Rightarrow\frac{-2}{x(x+2)}\geq 0$

$\Rightarrow x(x+2)<0\Rightarrow -2<x<0$

پس دامنهٔ این تابع فقط شامل عدد صحیح -1 است.

۳۵ ۲

عبارت زیر هر یک از رادیکال‌های فرجهٔ زوج را بزرگتر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$\Rightarrow D_f=[2,8]$

۱) $x-2\geq 0\Rightarrow x\geq 2$

۲) $16-2x\geq 0\Rightarrow x\leq 8$

پس $a=2$ و $b=8$ است. حالا مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x-8|<2$ را پیدا می‌کنیم:

$-2<x-8<2\Rightarrow 6<x<10\xrightarrow{\text{اعداد طبیعی}}x=7,8,9$

۳۶ ۲

عبارت زیر هر یک از رادیکال‌های فرجهٔ زوج *(رادیکال‌های صورت کسر)* باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

۱) $x+2\geq 0\Rightarrow x\geq -2$

۲) $6-x\geq 0\Rightarrow 6\geq x$

در ضمن عبارت $\frac{x+1}{x-3}$ زیر رادیکال فرجهٔ ۳ قرار دارد که شرطی برای دامنه ایجاد نمی‌کند. حالا ریشهٔ مخرج کسرها را پیدا می‌کنیم و از دامنه کنار می‌گذاریم:

۱) $\frac{x+1}{x-3} \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

۲) $x \neq 3$

پس دامنهٔ تابع به‌صورت $D_f = [-2,6] - \{-1,3\}$ است که مجموع عضوهای صحیح آن برابر است با:

$(-2)+0+1+2+4+5+6 = 16$

۳۷ **۳**

چون رادیکال در مخرج کسر قرار دارد، پس عبارت زیر رادیکال باید مثبت باشد *(اما صفر نمی‌تواند باشد.)*:

$|x+2|-|x+5|>0 \Rightarrow |x+2|>|x+5|$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2+4x+4 > x^2+10x+25$

$\Rightarrow -21 > 6x \Rightarrow -\frac{21}{6} > x \Rightarrow -3/5 > x$

دامنهٔ تابع شامل سه عدد صحیح منفی $-1, -2, -3$ نیست.

۳۸ **۳**

ابتدا تابع $f(-x)$ را پیدا می‌کنیم:

$f(-x) = \sqrt{-x+|-x+2|} = \sqrt{-x+|x-2|}$

برای تعیین دامنهٔ تابع f، باید عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$-x+|x-2| \geq 0 \Rightarrow |x-2| \geq x$

در ضمن می‌دانیم مجموعه جواب نامعادله $|U| \geq a$ از حل دو نامعادلهٔ $U \geq a$ و $U \leq -a$ به‌دست می‌آید:

$|x-2| \geq x \Rightarrow \begin{cases} x-2 \geq x \Rightarrow -2 \geq 0 \text{ تناقض} \\ x-2 \leq -x \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases}$

۳۹ **۲**

عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

$3x-|x^2-4x| \geq 0 \Rightarrow 3x \geq |x^2-4x|$

حالا با توجه به ریشه‌های درون قدرمطلق داریم:

۱) $x \leq 0$ یا $x \geq 4 : 3x \geq x^2-4x \Rightarrow x^2-7x \leq 0$

$\Rightarrow 0 \leq x \leq 7 \xrightarrow[\text{محدودهٔ x}]{\text{اشتراک با}} 4 \leq x \leq 7 \cup \{0\}$

۲) $0 < x < 4 : 3x \geq -x^2+4x \Rightarrow x^2-x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ \text{یا} \\ x \geq 1 \end{cases}$

$\xrightarrow[\text{محدودهٔ x}]{\text{اشتراک با}} 1 \leq x < 4$

از اجتماع بازه‌های به‌دست آمده از ۱ و ۲ دامنهٔ تابع به‌صورت بازهٔ $D_f = [1,7] \cup \{0\}$ است. پس بزرگترین عضو طبیعی دامنه برابر $x=7$ و کوچک‌ترین عضو طبیعی آن $x=1$ است و نسبت آن‌ها برابر $\frac{7}{1} = 7$ است.

۴۰ **۳**

عبارت زیر رادیکال یک سهمی است که باید همواره نامنفی باشد، یعنی دلتای عبارت $x^2-(m+1)x+2-m$ کوچکتر یا مساوی صفر است:

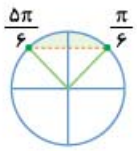
$\Delta \leq 0 \Rightarrow (m+1)^2-4(1)(2-m) \leq 0$

$\Rightarrow m^2+6m-7 \leq 0 \Rightarrow (m-1)(m+7) \leq 0 \Rightarrow -7 \leq m \leq 1$

پس به ازای ۹ مقدار صحیح m دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}$ است.

۴۱ **۲**

چون $2\sin x - 1$ زیر رادیکال با فرجهٔ ۲ قرار دارد، پس:



$2\sin x - 1 \geq 0 \Rightarrow \sin x \geq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$

بنابراین $D_f = [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ است.

۴۲ **۳**

چون $f(x) = 2^x$ است؛ پس $f(\frac{1}{x}) = 2^{\frac{1}{x}}$ بوده و برای تعیین دامنهٔ تابع $y = \sqrt{f(x) - f(\frac{1}{x})}$ داریم:

$f(x) - f(\frac{1}{x}) \geq 0 \Rightarrow 2^x \geq 2^{\frac{1}{x}} \Rightarrow x \geq \frac{1}{x} \Rightarrow x - \frac{1}{x} \geq 0$

$\Rightarrow \frac{x^2-1}{x} \geq 0 \Rightarrow D_f = [-1,0) \cup [1,+\infty)$

روش سریع‌تر چون $x=2$ در تابع صدق می‌کند، پس گزینه‌های «۲» و «۴» حذف می‌شوند. در ضمن $x=-2$ در تابع صدق نمی‌کند؛ پس گزینهٔ «۱» نیز حذف می‌شود.

۴۳ **۳**

عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

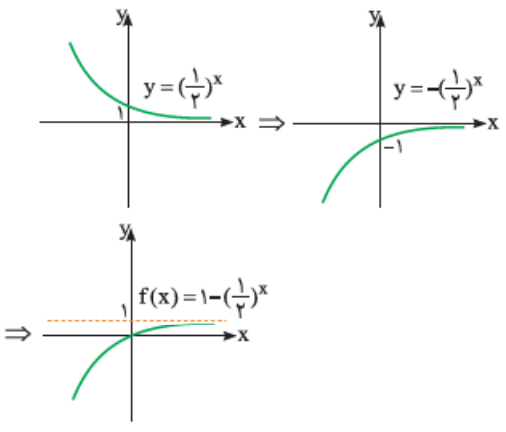
$4^x - 2^{x-1} \geq 0 \Rightarrow 2^{2x} \geq 2^{x-1} \Rightarrow 2x \geq x-1 \Rightarrow x \geq -1$

در ضمن مخرج کسر نباید صفر باشد. به ازای $x>0$ تابع $g(x)$ برابر ۱ است که باعث می‌شود مخرج کسر برابر صفر شود. پس آن را از دامنهٔ تابع کنار می‌گذاریم:

$D_f = [-1,0]$

۴۴ **۳**

ابتدا نمودار تابع $f(x) = 1-(\frac{1}{2})^x$ را رسم می‌کنیم:



حال برای تعیین دامنهٔ $y=\sqrt{xf(x)}$ باید $xf(x)\geq 0$ باشد:

$x\geq 0, f(x)\geq 0$: راست و بالای محور xها $\Rightarrow [0,+\infty)$

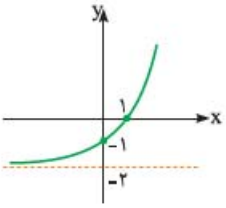
$x\leq 0, f(x)\leq 0$: چپ و پایین محور xها $\Rightarrow (-\infty,0]$

$\Rightarrow \xrightarrow{\cup} D=(-\infty,+\infty)$

روش سریع‌تر چون $x=2$ و $x=-2$ در تابع صدق می‌کنند؛ پس گزینهٔ «۳» درست است.

۴۵ **۴**

عبارت زیر رادیکال را به‌صورت $\frac{x}{x-2}\times f(x)$ در نظر می‌گیریم و آن را تعیین علامت می‌کنیم.



با توجه به این‌که نمودار تابع $f(x)=2^x-2$ به‌صورت مقابل است، داریم:

$$g(x)=\sqrt{\frac{x}{x-2}\times f(x)} \Rightarrow \frac{x}{x-2}\times f(x)\geq 0$$

x		۰		۱		۲	
$\frac{x}{x-2}$	+	۰	−		−	ت‌ن	+
$f(x)$	−		−	۰	+		+
$\frac{x}{x-2}\times f(x)$	−	۰	+	۰	−	ت‌ن	+

پس دامنهٔ تابع به‌صورت بازهٔ $[0,1]\cup(2,+\infty)$ می‌باشد که شامل بی‌شمار عدد طبیعی می‌باشد.

۴۶ **۲**

عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت باشد:

$$3-x>0\Rightarrow x<3$$

عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

$$2x+5\geq 0\Rightarrow x\geq -\frac{5}{2}$$

حالا ریشهٔ مخرج کسر را پیدا می‌کنیم و از دامنه کنار می‌گذاریم:

$$1-\log_2^{(3-x)}=0\Rightarrow \log_2^{(3-x)}=1\Rightarrow 3-x=2\Rightarrow x=1$$

پس دامنهٔ تابع به‌صورت $[-\frac{5}{2},1)\cup(1,3)$ است.

۴۷ **۱**

عبارت جلوی لگاریتم $\log_4(x^2-x-2)$ باید مثبت باشد:

$$x^2-x-2>0\Rightarrow (x-2)(x+1)>0\Rightarrow x<-1 \text{ یا } x>2$$

از طرفی عبارت زیر رادیکال باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$x^2-1\geq 0\Rightarrow x^2\geq 1\Rightarrow x\leq -1 \text{ یا } x\geq 1$$

در ضمن مخرج کسر یعنی $\sqrt{x^2-1}+1$ همواره مثبت است و فاقد ریشهٔ حقیقی است. از اشتراک بازه‌های به‌دست آمده، دامنهٔ تابع به‌صورت بازهٔ $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ است.

۴۸ **۱**

ابتدا دامنهٔ لگاریتم را تعیین می‌کنیم:

۱) $x^2-8x+15>0\Rightarrow (x-3)(x-5)>0\Rightarrow x<3$ یا $x>5$

۲) $x>0$ و $x\neq 1$

حالا سراغ مخرج کسر می‌رویم:

$$4-|3-x|>0\Rightarrow |3-x|<4\Rightarrow -4<x-3<4\Rightarrow -1<x<7$$

از اشتراک بازه‌های به‌دست آمده، دامنهٔ تابع به‌صورت بازهٔ $D_f=(0,1)\cup(1,3)\cup(5,7)$ است. اعداد صحیح دامنهٔ تابع $x=6$ و $x=2$ هستند که مجموع آن‌ها برابر ۸ است.

۴۹ **۳**

دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{2-\log_3(x^2-8x)}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

۱) $x^2-8x>0\Rightarrow x(x-8)>0\Rightarrow x<0$ یا $x>8$

۲) $2-\log_3(x^2-8x)\geq 0\Rightarrow \log_3(x^2-8x)\leq \log_3^9$

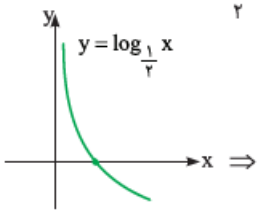
$\Rightarrow x^2-8x\leq 9$

$\Rightarrow x^2-8x-9\leq 0\Rightarrow (x-9)(x+1)\leq 0\Rightarrow -1\leq x\leq 9$

با اشتراک (۱) و (۲) دامنهٔ تابع برابر بازهٔ $[-1,0)\cup(8,9]$ به‌دست می‌آید که شامل ۲ عدد صحیح است.

۵۰ **۱**

چون $P(x)=\frac{x}{\log_{\frac{1}{2}}^x}$ زیر رادیکال با فرجهٔ زوج قرار دارد، پس باید نامنفی باشد، در ضمن با توجه به نمودار $y=\log_{\frac{1}{2}}^x$ داریم:



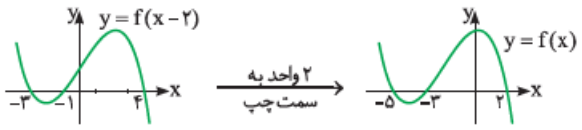
$\Rightarrow$

x		۰		۱	
x	−	۰	+		+
$\log_{\frac{1}{2}} x$			+	۰	−
$P(x)$	ت‌ن		+	ت‌ن	−

پس دامنهٔ تابع $f(x)$ بازهٔ $(0,1)$ می‌باشد که فاقد عدد صحیح است.

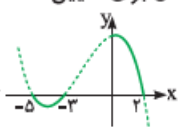
۵۱ **۴**

ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:



حال برای تعیین دامنهٔ $y=\sqrt{xf(x)}$ باید $xf(x)\geq 0$ باشد:

$\begin{cases} x\geq 0, f(x)\geq 0: \text{راست و بالای محور xها} \\ x\leq 0, f(x)\leq 0: \text{چپ و پایین محور xها} \end{cases} \Rightarrow$

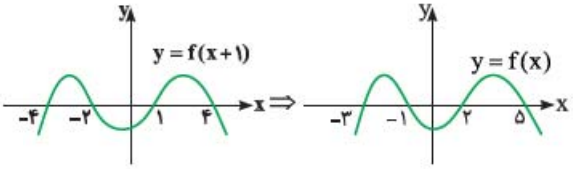


بنابراین دامنهٔ تابع به‌صورت بازهٔ $[-5,-3]\cup[0,2]$ است.

روش سریع‌تر با جایگذاری $x=-1$ در تابع به عبارت $\sqrt{-f(-1)}$ می‌رسیم. از آن‌جایی که $f(-1)$ مثبت است، پس عبارت زیر رادیکال منفی می‌شود و گزینه‌های «۱»، «۲» و «۳» حذف می‌شوند.

۵۲ ۴

نمودار تابع $y=f(x+1)$ را ۱ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست آید:



حالا دامنهٔ تابع $y=\sqrt{(x^2+4x+3)f(x)}$ را پیدا می‌کنیم:

$$(x^2+4x+3)f(x)\geq 0$$

x	$-\infty$	-3	-1	2	5	$+\infty$
x^2+4x+3		+ ۰	− ۰	+	+	+
$f(x)$		− ۰	+ ۰	− ۰	+ ۰	−
$(x^2+4x+3)f(x)$		− ۰	− ۰	− ۰	+ ۰	−

پس دامنهٔ تابع به‌صورت $[2,5]\cup\{-3,-1\}$ که شامل ۶ عدد صحیح است.

۵۳ ۱

با توجه به این‌که در عبارت $P(x)=-\frac{f(x)}{f(2+x)}$ ریشه‌های صورت $x=-2,0,1$ می‌باشد، پس ریشه‌های مخرج $x=-4,-2,-1$ بوده و برای تعیین علامت $P(x)$ داریم:

x	$-\infty$	-4	-2	-1	0	1	$+\infty$
$P(x)$		− ت‌ن	+ ت‌ن	+ ت‌ن	− ۰	+ ۰	−

$$\Rightarrow D_g=(-4,-2)\cup(-2,-1)\cup[0,1]$$

بنابراین دامنهٔ تابع $g(x)$ شامل ۳ عدد صحیح ۱، ۰ و -3 است.

۵۴ ۱

ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)=\log_2(x+3)$ را پیدا می‌کنیم:

$$x+3>0\Rightarrow x>-3$$

حالا عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم. برای تعیین علامت باید ریشه‌های صورت و مخرج کسر را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} g(x)=0\Rightarrow x=-4,-3,2,4 \\ 2-f(x)=0\Rightarrow f(x)=2\Rightarrow \log_2(x+3)=2\Rightarrow x=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{g(x)}{2-f(x)}\geq 0\Rightarrow$$

x	$-\infty$	-4	-3	1	2	4	$+\infty$
$g(x)$		۰ +	۰ −	−	− ۰	+ ۰	
$2-f(x)$		+	+ ۰	−	−		
$\frac{g(x)}{2-f(x)}$		ت‌ن +	ت‌ن −	ت‌ن +	۰	− ۰	

با توجه به دامنهٔ تابع $f(x)=\log_2(x+3)$، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\frac{g(x)}{2-f(x)}}$ برابر بازهٔ $(1,2]$ است که شامل یک عدد صحیح است.

۵۵ ۱

باید عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$f(x)g(x)-g^2(x)\geq 0\Rightarrow g(x)(f(x)-g(x))\geq 0$$

ریشه‌های $g(x)=0$ برابر $x=-3,4$ هستند. در ضمن نمودار دو تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در دو نقطهٔ $x=-2,3$ متقاطع‌اند، پس ریشه‌های $f(x)-g(x)=0$ برابر $x=-2,3$ هستند. حالا جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$	-3	-2	3	4	$+\infty$
$g(x)$		− ۰ +		+	+ ۰	−
$f(x)-g(x)$		+	+ ۰	− ۰	+	+
$g(x)(f(x)-g(x))$		− ۰ +	۰	− ۰	+ ۰	−

$$\Rightarrow D_y=[-3,-2]\cup[3,4]$$

مجموع بزرگترین و کوچکترین عضو دامنه برابر $4+(-3)=1$ است.

۵۶ ۴

بُرد تابع $y=\frac{1}{2}x+1$ برابر بازهٔ $[0,\frac{5}{2}]$ است، پس:

$$0\leq \frac{1}{2}x+1\leq \frac{5}{2}\Rightarrow -1\leq \frac{1}{2}x\leq \frac{3}{2}\Rightarrow -2\leq x\leq 3$$

دامنهٔ تابع شامل ۶ عدد صحیح $x=-2,-1,0,1,2,3$ است.

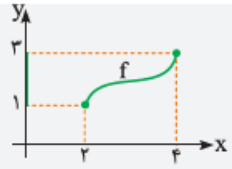
هایلایت

برد تابع

به مجموعهٔ خروجی‌هایی که از قرار دادن عضوهای دامنه در تابع f به‌دست می‌آید، بُرد تابع f می‌گویند و آن را با R_f نشان می‌دهند.

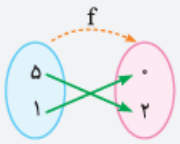
مشخص کردن بُرد تابع

نمودار در دستگاه مختصات: تصویر نمودار روی محور y ها



$R_f=[1,3]$

نمودار ون (پیکانی): مجموعه‌ای که به اعضای آن پیکان وارد شده



$R_f=\{0,2\}$

زوج مرتبی: مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های دوم

$f=\{(1,2),(5,0)\}\Rightarrow R_f=\{0,2\}$

۵۷ ۲

ابتدا دامنهٔ تابع را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{matrix}\sqrt{4-x}: 4-x\geq 0\Rightarrow 4\geq x \\ \sqrt{x-4}: x-4\geq 0\Rightarrow x\geq 4\end{matrix}\Rightarrow D_f=\{4\}$$

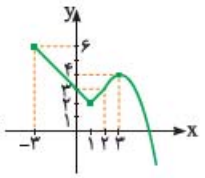
پس تنها عضو دامنهٔ تابع $\{4\}$ است. حالا بُرد تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f(4)=0+0+16-8+3=11$$

۵۸ **۳**

ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}|x-1|+2 & ; \ -3\le x<2\\ -x^2+6x-5 & ; \ 2\le x\end{cases}$$



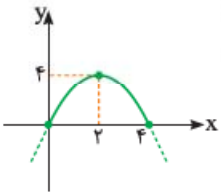
بنابراین برد تابع f برابر $(-\infty,6]$ است.

۵۹ **۲**

عبارت زیر رادیکال یعنی $4x-x^2$ باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$4x-x^2\ge 0\Rightarrow x(4-x)\ge 0\Rightarrow 0\le x\le 4$$

حالا به منحنی $y=4x-x^2$ در بازهٔ $0\le x\le 4$ نگاه کنید:



با توجه به این‌که محدودهٔ بُرد $y=4x-x^2$ در بازهٔ $0\le x\le 4$ برابر $0\le y\le 4$ است،

پس $0\le \sqrt{4x-x^2}\le 2$ است، بنابراین:

$$2\le 2+\sqrt{4x-x^2}\le 4$$

$$\Rightarrow R_f=[2,4]\Rightarrow b-a=2$$

۶۰ **۴**

عبارت زیر رادیکال، یک عبارت درجهٔ دوم همواره مثبت است. پس دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}$ است. حالا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x^2+4x+7}=\sqrt{(x+2)^2+3}$$

چون کمترین مقدار $y=(x+2)^2+3$ برابر ۳ است، پس:

کمترین مقدار a برابر $\sqrt{3}$ است $\Rightarrow R_f=[\sqrt{3},+\infty)$

۶۱ **۳**

دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}-\{0\}$ است. حالا ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^4+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}$$

با توجه به این‌که $x^2>0$ است، پس $x^2+\frac{1}{x^2}\ge 2$ است و بُرد تابع f برابر $[2,+\infty)$ است.

هایلایت

جمع هر عبارت حقیقی با معکوسش به‌صورت زیر است:

۱) $x>0\Rightarrow x+\frac{1}{x}\ge 2$

۲) $x<0\Rightarrow x+\frac{1}{x}\le -2$

الف) به همین روش بُرد تابع $f(x)=\frac{x^2}{x^4+1}$ کدام است؟

ب) به همین روش بُرد تابع $f(x)=|x|+\frac{1}{|x|+4}$ کدام است؟

۶۲ **۱**

ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^2+1+1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

چون $\sqrt{x^2+1}>0$ است، پس $\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\ge 2$ است و بُرد تابع f به‌صورت بازهٔ $[2,+\infty)$ است که شامل عدد طبیعی $x=1$ نیست.

۶۳ **۲**

می‌دانیم در تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ دامنهٔ تابع $\mathbb{R}-\{-\frac{d}{c}\}$ و بُرد آن $\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$ است.

پس بُرد تابع $f(x)=\frac{2x+1}{2x-1}$ برابر $\mathbb{R}-\{1\}$ است. حالا بُرد تابع $g(x)=\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\sqrt{x}\ge 0\Rightarrow 1+\sqrt{x}\ge 1\Rightarrow 0<\frac{1}{1+\sqrt{x}}\le 1$$

پس بُرد این تابع به‌صورت بازهٔ $(0,1]$ است.

۶۴ **۲**

ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^2+7x+12}{x^2-16}=\frac{(x+3)(x+4)}{(x-4)(x+4)}$$

$$=\frac{x+3}{x-4},\ D_f=\mathbb{R}-\{\pm 4\}$$

چون $x=-4$ جزء دامنهٔ تابع نیست پس $f(-4)=\frac{1}{8}$ هم جزء بُرد تابع f نیست. از طرفی می‌دانیم برد تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$ است، بنابراین برد تابع f شامل دو عدد $\frac{1}{8}$ و ۱ نیست.

$$R_f=\mathbb{R}-\{\frac{1}{8},1\}$$

۶۵ **۱**

می‌دانیم $0\le \cos^2 x\le 1$ است. در ضمن عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

$$-\cos^2 x\ge 0\Rightarrow \cos^2 x\le 0$$

پس نتیجه می‌گیریم فقط $\cos^2 x=0$ قابل قبول است. بنابراین:

$$f(x)=2^{\sqrt{-\cos^2 x}}=2^0=1$$

پس بُرد تابع f شامل یک عضو صحیح است: $R_f=\{1\}$

۶۶ **۳**

می‌دانیم $-1\le \cos x\le 1$ است، بنابراین:

$$-1\le\cos x\le 1\xrightarrow{\times(-1)}-1\le-\cos x\le 1\xrightarrow{+1}0\le 1-\cos x\le 2$$

$$\Rightarrow 1\le 2^{1-\cos x}\le 4\xrightarrow{-1}0\le 2^{1-\cos x}-1\le 3\Rightarrow 0\le y\le 3$$

پس برد تابع f شامل ۳ عدد طبیعی است.

۶۷ **۲**

ابتدا تابع را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y=\begin{cases}\frac{4x^2-6x}{x}; & x>0\\ \frac{-4x^2+6x}{x}; & x<0\end{cases}\Rightarrow y=\begin{cases}4x-6 & ; x>0\\ -4x+6 & ; x<0\end{cases}$$

۳۲۳ ۲

در میان گزینه‌ها، نمودار تابع $y=x^3-x+1$ از نقطهٔ $(\frac{1}{2},\frac{5}{8})$ می‌گذرد:

$$y=(\frac{1}{2})^3-\frac{1}{2}+1=\frac{1-4+8}{8}=\frac{5}{8}$$

پس وارون این تابع از نقطهٔ $(\frac{5}{8},\frac{1}{2})$ می‌گذرد.

هایلایت

۱ شرط وارون‌پذیری، یک‌به‌یک بودن است.

۲ اگر نقطهٔ (a,b) روی f باشد، نقطهٔ (b,a) روی f^{-1} است و برعکس.

$$f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$$

۳ دامنهٔ تابع f با بُرد تابع f^{-1} برابر است. همچنین بُرد تابع f نیز با دامنهٔ تابع f^{-1} برابر است. $R_{f^{-1}}=D_f, D_{f^{-1}}=R_f$

۴ نمودار f و f^{-1} نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه است.

۳۲۴ ۱

با توجه به نمودار، $f(-3)=5$ و $f(2)=0$ است، پس:

$$\begin{cases}f^{-1}(5)=-3\\ f^{-1}(0)=2\end{cases}\Rightarrow\frac{f^{-1}(5)}{f(a)+f^{-1}(0)}=-\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{-3}{f(a)+2}=-\frac{3}{4}$$

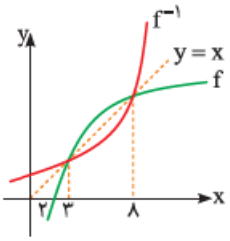
$$\Rightarrow f(a)+2=4\Rightarrow f(a)=2\xrightarrow{f(0)=2}a=0$$

۳۲۵ ۴

عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x-f^{-1}(x)\geq 0\Rightarrow x\geq f^{-1}(x)$$

با توجه به نمودار زیر، بازه‌ای که در آن مقادیر $y=f^{-1}(x)$ کم‌تر یا مساوی مقادیر $y=x$ باشد، برابر بازهٔ $[3,8]$ است.



هایلایت

برای رسم نمودار f^{-1} از روی نمودار تابع f، باید نمودار f را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم.

۳۲۶ ۲

چون g وارون f است، پس باید $f^{-1}(12)-f^{-1}(4)$ را به‌دست آوریم.

می‌توانیم تابع f را یک بار برابر ۴ و یک بار برابر ۱۲ بگذاریم:

$$\begin{cases}-x+\sqrt{-2x}=4\Rightarrow x=-2\\ -x+\sqrt{-2x}=12\Rightarrow x=-8\end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(4)-f^{-1}(12)=(-2)-(-8)=6$$

هایلایت

برای محاسبهٔ $f^{-1}(a)$ بهترین راه این است که معادلهٔ $f(x)=a$ را حل کنیم. جواب این معادله همان $f^{-1}(a)$ است.

به هور دیگه! طراح در کنکور تجربی خارج ۹۹ این سؤال رو اینجوری پرسید: «فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+2\sqrt{x}$ باشد، حاصل $g(3)+g(15)$ کدام است؟» جواب:

$$\begin{matrix}g(3)=f^{-1}(3)=1\\ g(15)=f^{-1}(15)=9\end{matrix}\xrightarrow{\text{جمع}}1+9=10$$

۳۲۷ ۳

چون $g(1)=f^{-1}(1)$ است، پس:

$$f(x)=x-2\sqrt{x}+1=1\xrightarrow{x\geq 1}x=4\Rightarrow g(1)=4$$

حال مقدار $g(4)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x-2\sqrt{x}+1=4\Rightarrow x=9\Rightarrow g(4)=9\Rightarrow g(g(1))=9$$

به هوره دیگه! طراح ممکن بود اینجوری بپرسه: «اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=1+x-2\sqrt{x}$ باشد، ضابطهٔ تابع g کدام است؟»

$$y=x-2\sqrt{x}+1=(\sqrt{x}-1)^2\Rightarrow\sqrt{y}=|\sqrt{x}-1|$$

$$\xrightarrow{x\geq 1}\sqrt{x}=\sqrt{y}+1\Rightarrow g(x)=(\sqrt{x}+1)^2$$

۳۲۸ ۴

ابتدا ضابطهٔ $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x-1)=\log_3^{(x+1)}\xrightarrow{x\to x+1}f(x)=\log_3^{(x+2)}$$

حالا سراغ محاسبهٔ $f^{-1}(g(4))$ می‌رویم. چون $g(4)=2\cos 2\pi=2$ است، پس باید $f^{-1}(2)$ را پیدا کنیم:

$$f(x)=2\Rightarrow\log_3^{(x+2)}=2\Rightarrow x+2=9\Rightarrow x=7$$

پس $f^{-1}(2)=7$ است.

به هوره دیگه! همین سؤالو با یک تابع نمایی هم ببینیم: «اگر $f(x-1)=2^{3x-6}+1$ و $g(x)=2\cos(\frac{\pi x}{2})$ باشد، مقدار $f^{-1}og(4)$ کدام است؟» که جوابش برابر است با: $f^{-1}(g(4))=f^{-1}(2)=\frac{1}{3}$

۳۲۹ ۳

می‌خواهیم حاصل $f(-\frac{2}{5})+g^{-1}(-\frac{2}{5})$ را پیدا کنیم. با فرض $f(-\frac{2}{5})=a$ و $g^{-1}(-\frac{2}{5})=b$ داریم:

$$1)\ f^{-1}(a)=-\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{a}{1+|a|}=-\frac{2}{5}\xrightarrow{a<0}\frac{a}{1-a}=-\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow 5a=-2+2a\Rightarrow 3a=-2\Rightarrow a=-\frac{2}{3}\Rightarrow f(-\frac{2}{5})=-\frac{2}{3}$$

$$2)\ g(b)=-\frac{2}{5}\Rightarrow\sqrt{b}-1=-\frac{2}{5}\Rightarrow\sqrt{b}=\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow b=\frac{9}{25}\Rightarrow g^{-1}(-\frac{2}{5})=\frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow(f+g^{-1})(-\frac{2}{5})=-\frac{2}{3}+\frac{9}{25}=\frac{-50+27}{75}=-\frac{23}{75}$$

به هوره دیگه! در آزمون مهر ۱۴۰۱ طراح اینجوری پرسید: «اگر $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$ باشد، حاصل $f^{-1}(\frac{5}{9})+f^{-1}(-\frac{3}{7})$ کدام است؟» جواب: $-\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{1}{2}$

۳۳۰ ۳

برای پیدا کردن $f^{-1}(-2)$ باید در تابع $f(x)=\begin{cases}6-2x & ; x<2\\ 4-x & ; x\geq 2\end{cases}$ ضابطهٔ پایینی را برابر ۲- بگذاریم:

$$4-x=-2\Rightarrow x=6\Rightarrow f^{-1}(-2)=6$$

برای پیدا کردن $g^{-1}(-5)$ باید در تابع $g(x)=\begin{cases}2x-3 & ;x<0\\ x-4 & ;x\geq 0\end{cases}$ ضابطهٔ بالایی را برابر ۵- بگذاریم:

$$2x-3=-5\Rightarrow x=-1\Rightarrow g^{-1}(-5)=-1$$

حالا حاصل عبارت خواسته شده را پیدا می‌کنیم:

$$f(g^{-1}(-5))+g(f^{-1}(-2))=f(-1)+g(6)=8+2=10$$

۳۳۱ ۳

مطابق شکل، نقاط $(-2,2),(0,3)$ روی نمودار تابع $y=f(2x-1)$ قرار دارند، پس در آن صدق می‌کنند:

$$(-2,2)\Rightarrow f(2\times -2-1)=2\Rightarrow f(-5)=2\Rightarrow f^{-1}(2)=-5$$

$$(0,3)\Rightarrow f(2\times 0-1)=3\Rightarrow f^{-1}(3)=-1$$

$$\Rightarrow \frac{f^{-1}(2)+f^{-1}(3)}{f(-5)}=\frac{(-5)+(-1)}{2}=\frac{-6}{2}=-3$$

۳۳۲ ۳

ابتدا با توجه به شکل صورت سؤال، ضابطهٔ توابع f و g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}-2x+2 & ;x\leq 0\\ -x+2 & ;x>0\end{cases},\ g(x)=-2x-2$$

حالا برای پیدا کردن $f^{-1}(-2)$ باید ضابطهٔ پایینی تابع f را برابر ۲- قرار دهیم:

$$-x+2=-2\Rightarrow x=4\Rightarrow f^{-1}(-2)=4$$

پس ساده‌شدهٔ عبارت مورد نظر برابر است با:

$$g(f^{-1}(-2))+g^{-1}(f(-1))=g(4)+g^{-1}(4)$$

برای پیدا کردن $g^{-1}(4)$ داریم:

$$g(x)=-2x-2=4\Rightarrow x=-3\Rightarrow g^{-1}(4)=-3$$

$$\Rightarrow g(4)+g^{-1}(4)=(-10)+(-3)=-13$$

۳۳۳ ۲

ابتدا مختصات نقطه برخورد را به کمک ضابطه خط به‌دست می‌آوریم:

$$10y-x=-10\xrightarrow{y=1}10-x=-10\Rightarrow x=20$$

پس مختصات نقطه برخورد تابع f^{-1} با خط برابر $(20,1)$ است و این نقطه روی تابع f^{-1} قرار دارد، یعنی $f^{-1}(20)=1$ است. داریم:

$$f^{-1}(20)=1\Rightarrow f(1)=20\Rightarrow (1)^3+6(1)^2+a(1)+1=20\Rightarrow a=12$$

۳۳۴ ۴

چون وارون تابع f خط $y=12-x$ را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع می‌کند، پس:

$$y=12-x\xrightarrow{y=10}10=12-x\Rightarrow x=2\Rightarrow (2,10)\in f^{-1}$$

در نتیجه $(10,2)\in f$ است، پس:

$$f(10)=2\Rightarrow \sqrt{10-2\sqrt{10m-1}}=2\Rightarrow 10-2\sqrt{10m-1}=4$$

$$\Rightarrow \sqrt{10m-1}=3\Rightarrow m=1\Rightarrow f(x)=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$$

$$\Rightarrow f(m+4)=f(5)=1$$

۳۳۵ ۴

چون $f^{-1}(g(a))=6$ است، پس $f(6)=g(a)$ است. در ضمن $f(6)=7$ است، پس:

$$g(a)=7\xrightarrow{(4,7)\in g}a=4$$

۳۳۶ ۳

در تابع f داریم، $f(\frac{1}{4})=-3$ و با توجه به این‌که $f(g^{-1}(a))=-3$ می‌توانیم نتیجه بگیریم $g^{-1}(a)=\frac{1}{4}$ بنابراین:

$$g^{-1}(a)=\frac{1}{4}\Rightarrow g(\frac{1}{4})=a$$

ضابطهٔ $g(x)=-|x|\sqrt{x}$ است، پس می‌توان نوشت:

$$g(\frac{1}{4})=-(\frac{1}{4})\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{8}$$

۳۳۷ ۲

چون $f^{-1}(g^{-1}(a))=8$ است، پس $g^{-1}(a)=f(8)$ است. از طرفی برای پیدا کردن $f(8)$، باید به سراغ ضابطهٔ بالایی تابع f برویم:

$$x\geq 3: f(x)=\sqrt{5x+9}\xrightarrow{x=8}f(8)=\sqrt{5\times 8+9}=7$$

بنابراین $g^{-1}(a)=7$ است، یعنی $g(7)=a$ است. با توجه به تابع g نتیجه می‌گیریم $a=3$ است.

۳۳۸ ۲

چون $f^{-1}(g(2a))=6$ است، پس $g(2a)=f(6)$ است، بنابراین با توجه به تابع‌های f و g داریم:

$$g(2a)=f(6)\xrightarrow{f(6)=3}g(2a)=3\Rightarrow\frac{2a}{2a-1}=3$$

$$\Rightarrow 6a-3=2a\Rightarrow 4a=3\Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

۳۳۹ ۴

فرض می‌کنیم $(g^{-1}of^{-1})(8)=\alpha$ باشد، پس:

$$g^{-1}(f^{-1}(8))=\alpha\Rightarrow g(\alpha)=f^{-1}(8)\ (1)$$

حال برای محاسبهٔ $f^{-1}(8)$ ضابطهٔ f را برابر ۸ می‌گذاریم:

$$8=\frac{2}{5}x-4\Rightarrow\frac{2}{5}x=12\Rightarrow x=30\Rightarrow f^{-1}(8)=30$$

بنابراین از (۱) داریم:

$$g(\alpha)=f^{-1}(8)=30\Rightarrow\alpha^3+\alpha=30\Rightarrow\alpha=3\Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(8))=3$$

۳۴۰ ۱

ابتدا $f^{-1}(20)$ را پیدا می‌کنیم:

$$x+\sqrt{x}=20\Rightarrow x=16\Rightarrow f^{-1}(20)=16$$

پس $g^{-1}(f^{-1}(20))=g^{-1}(16)$ است، پس ضابطهٔ g را برابر ۱۶ می‌گذاریم:

$$\frac{9x+6}{1-x}=16\Rightarrow 9x+6=16-16x\Rightarrow 25x=10$$

$$\Rightarrow x=\frac{2}{5}\Rightarrow g^{-1}(16)=\frac{2}{5}$$

۳۴۱ ۳

می‌دانیم $f(g^{-1}(-1))=-\frac{11}{3}$ است، پس ابتدا ضابطهٔ تابع f را برابر $-\frac{11}{3}$ می‌گذاریم:

$$\frac{2x+1}{3}=-\frac{11}{3}\Rightarrow 2x=-12\Rightarrow x=-6$$

پس $f(-۶)=-\frac{۱۱}{۳}$ است، بنابراین $g^{-۱}(-۱)=-۶$ است. یعنی $g(-۶)=-۱$ است:

$$g(-۶)=\frac{-۱۲+a}{a+۶}=-۱\Rightarrow -۱۲+a=-a-۶\Rightarrow ۲a=۶\Rightarrow a=۳$$

۳۴۲ گزینه ۱

$f^{-۱}=\{(۲,۱),(۵,۲),(۴,۳),(۶,۴)\}$ است، حالا خواهیم داشت:

$$x=۲:\frac{g(۲)}{g(f^{-۱}(۲))}=\frac{g(۲)}{g(۱)}\Rightarrow \times$$

$$x=۵:\frac{g(۵)}{g(f^{-۱}(۵))}=\frac{g(۵)}{g(۲)}=\frac{۶}{۳}=۲$$

$$x=۴:\frac{g(۴)}{g(f^{-۱}(۴))}=\frac{g(۴)}{g(۳)}=\frac{۲}{۱}=۲$$

$$x=۶:\frac{g(۶)}{g(f^{-۱}(۶))}=\frac{g(۶)}{g(۴)}\Rightarrow \times$$

پس تابع $\frac{g}{gof^{-۱}}$ به‌صورت $\{(۵,۲),(۴,۲)\}$ است.

۳۴۳ گزینه ۴

$g^{-۱}=\{(۳,۲),(۲,۴),(۶,۵),(۱,۳)\}$ است. حالا خواهیم داشت:

$$x=۱:g^{-۱}(f(۱))-f(۱)=g^{-۱}(۲)-f(۱)=۴-۲=۲$$

$$x=۲:g^{-۱}(f(۲))-f(۲)=g^{-۱}(۵)-f(۲)\Rightarrow \times$$

$$x=۳:g^{-۱}(f(۳))-f(۳)=g^{-۱}(۴)-f(۳)\Rightarrow \times$$

$$x=۴:g^{-۱}(f(۴))-f(۴)=g^{-۱}(۶)-f(۴)=۵-۶=-۱$$

پس برد تابع $(g^{-۱}of)-f$ برابر $\{۲,-۱\}$ است.

۳۴۴ گزینه ۱

ابتدا مقدار $g(۲)$ را به‌دست می‌آوریم، پس ضابطهٔ $g^{-۱}$ را برابر ۲ قرار می‌دهیم:

$$۱-x=۲\Rightarrow x=-۱\Rightarrow g(۲)=-۱$$

پس $f(g(۲))=f(-۱)$ است و داریم:

$$f(x+۱)=\frac{g(x)-۱}{x}\xrightarrow{x=-۲} f(-۱)=\frac{g(-۲)-۱}{-۲}$$

حالا برای به‌دست آوردن $g(-۲)$، تابع $g^{-۱}$ را برابر ۲- قرار می‌دهیم:

$$۱-x=-۲\Rightarrow x=۳\Rightarrow g(-۲)=۳$$

$$\Rightarrow f(-۱)=\frac{g(-۲)-۱}{-۲}=\frac{۳-۱}{-۲}=-۱$$

۳۴۵ گزینه ۱

فرض می‌کنیم $g^{-۱}(۳)=a$ باشد، پس $g(a)=۳$ است. حالا در ضابطهٔ fog به جای xها، a قرار می‌دهیم:

$$f(g(a))=a^۳g(a)+۴g(a)\xrightarrow{g(a)=۳} f(۳)=۳a^۳+۴\times ۳$$

از طرفی با توجه به ضابطهٔ تابع f داریم:

$$f(۳)=۳^۲+۴(۳)+۱۵=۳۶$$

$$\Rightarrow ۳a^۳+۱۲=۳۶\Rightarrow ۳a^۳=۲۴\Rightarrow a^۳=۸\Rightarrow a=۲$$

پس $g^{-۱}(۳)=a=۲$ است.

۳۴۶ گزینه ۳

چون $f(x^۳+۲x)=۲^x-۱۴$ است، پس $f^{-۱}(۲^x-۱۴)=x^۳+۲x$ است و با جای‌گذاری $x=۴$ مقدار $f^{-۱}(۲)$ به‌دست می‌آید:

$$x=۴: f^{-۱}(۲^۴-۱۴)=۴^۳+۲\times ۴\Rightarrow f^{-۱}(۲)=۷۲$$

۳۴۷ گزینه ۴

چون $f^{-۱}(\frac{x+۲}{x-۱})=x^۳-۱$ است، پس می‌توان نتیجه گرفت $f(x^۳-۱)=\frac{x+۲}{x-۱}$ است. حال چون $f(۷)$ را می‌خواهیم، پس داریم:

$$x^۳-۱=۷\Rightarrow x^۳=۸\Rightarrow x=۲$$

بنابراین با جای‌گذاری $x=۲$ در ضابطهٔ تابع داریم:

$$f(۲^۳-۱)=\frac{۲+۲}{۲-۱}\Rightarrow f(۷)=۴$$

۳۴۸ گزینه ۴

برای پیدا کردن نقطهٔ برخورد $f^{-۱}(x)$ و نیمساز ناحیهٔ دوم یعنی $y=-x\ ;\ x<۰$ از ویژگی تابع وارون استفاده می‌کنیم.

$$f^{-۱}(x)=-x\Rightarrow f(-x)=x\Rightarrow -x+\frac{۱}{۲x}=x$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲x}=۲x\Rightarrow ۴x^۲=۱\Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۴}\xrightarrow{x<۰} x=-\frac{۱}{۲}$$

۳۴۹ گزینه ۲

با فرض $g^{-۱}(۶)=a$ داریم:

$$g(a)=۶\Rightarrow f(a)+\sqrt{f(a)}=۶\Rightarrow f(a)=۴$$

حال چون $f^{-۱}(x)$ داده شده، پس می‌توانیم از $f(a)=۴$ نتیجه بگیریم $f^{-۱}(۴)=a$ است:

$$f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{۲x}\xrightarrow{x=۴} a=f^{-۱}(۴)=\sqrt[۳]{۸}=۲\Rightarrow g^{-۱}(۶)=۲$$

۳۵۰ گزینه ۴

با فرض $g^{-۱}(۱۶)=a$ داریم: $g(a)=۱۶\Rightarrow f(۳a-۴)=۱۶$

حال از $f(۳a-۴)=۱۶$ نتیجه می‌گیریم $f^{-۱}(۱۶)=۳a-۴$ است و خواهیم داشت:

$$f^{-۱}(x)=x+\sqrt{x}\xrightarrow{x=۱۶} ۳a-۴=f^{-۱}(۱۶)=۱۶+\sqrt{۱۶}=۲۰$$

$$\Rightarrow a=۸$$

بنابراین $g^{-۱}(۱۶)=۸$ است.

۳۵۱ گزینه ۱

نمودار هر تابع (به شرط وارون‌پذیر بودن) و وارون آن نسبت به خط $y=x$ قرینهٔ یکدیگرند. پس باید وارون تابع خطی داده شده را به‌دست آوریم. بنابراین کافی است جای x و y را عوض کنیم تا معادلهٔ خط d به‌دست آید:

$$۳y-۲x=۴\xrightarrow{\text{تعویض جای x و y}} d: ۳x-۲y=۴$$

$$\xrightarrow[x=۰]{\text{عرض از مبدأ}} y=-۲$$

روش سریع‌تر می‌توانیم بدون محاسبهٔ تابع وارون، در معادلهٔ خط اولیه به‌جای y صفر بگذاریم.

۳۵۲ ۴

برای پیدا کردن ضابطهٔ وارون f، نحوهٔ تشکیل تابع f را بررسی می‌کنیم.

$f: \boxed{-۳} \xrightarrow{\div ۲}$ $\qquad$ $f^{-۱}: \xleftarrow{\times ۲} \boxed{+۳}$

$\Rightarrow f^{-۱}(x) = ۲x+۳ \xrightarrow[\text{به پایین}]{\text{۶ واحد}} y = ۲x+۳-۶$

حالا نقطهٔ برخورد تابع حاصل را با تابع f پیدا می‌کنیم:

$$\frac{x-۳}{۲} = ۲x-۳ \Rightarrow x-۳ = ۴x-۶ \Rightarrow ۳x = ۳ \Rightarrow x = ۱$$

$$\Rightarrow f(۱) = -۱ \Rightarrow A(۱,-۱) \Rightarrow OA = \sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲} = \sqrt{۲}$$

هایلایت

برای وارون کردن توابعی که در ضابطهٔ آن‌ها یک x وجود دارد، یک راهکار جالب و سریع این است که ابتدا نحوهٔ تشکیل تابع f را پیدا کنید. سپس برای پیدا کردن ضابطهٔ وارون تابع، اعمال را به طور برعکس و از آخر به اول روی x انجام دهید. در جدول زیر، تعدادی از این اعمال و برعکس آن‌ها آورده شده:

+	−
×	÷
توان ۲	$\sqrt{\ }$
توان ۳	$\sqrt[۳]{\ }$
a^x	$\log_a x$

۳۵۳ ۳

با توجه به تابع $f(x) = \frac{۲}{۳}x + ۲$ داریم:

$f: \boxed{\times \frac{۲}{۳}} \xrightarrow{+۲}$ $\Rightarrow$ $f^{-۱}: \xleftarrow{\div \frac{۲}{۳}} \boxed{-۲}$

پس $f^{-۱}(x) = \frac{x-۲}{\frac{۲}{۳}} = \frac{۳x-۶}{۲}$ است. حالا معادلهٔ $f^{-۱}$ را مرتب می‌کنیم و فاصلهٔ نقطهٔ $A(۷,۱)$ را از آن پیدا می‌کنیم:

$$y = \frac{۳x-۶}{۲} \Rightarrow ۳x - ۲y - ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow AH = \frac{|۲۱-۲-۶|}{\sqrt{۳^۲ + (-۲)^۲}} = \frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}} = \sqrt{۱۳}$$

۳۵۴ ۲

با توجه به تابع $f(x) = ۲x-۱$ داریم:

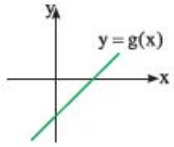
$f: \boxed{\times ۲} \xrightarrow{-۱}$ $\Rightarrow$ $f^{-۱}: \xleftarrow{\div ۲} \boxed{+۱}$

بنابراین $f^{-۱}(x) = \frac{x+۱}{۲}$ است و داریم:

$$g(x+۱) = f(x) - f^{-۱}(x) = ۲x-۱-\frac{x+۱}{۲} = \frac{۳x-۳}{۲}$$

حالا در تابع $g(x+۱)$ به جای x ها $x-۱$ قرار می‌دهیم تا به تابع $g(x)$ برسیم:

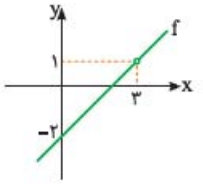
$$g(x+۱) = \frac{۳x-۳}{۲} \xrightarrow{x \Rightarrow x-۱} g(x) = \frac{۳(x-۱)-۳}{۲} = \frac{۳x-۶}{۲}$$

$\Rightarrow g(x) = \frac{۳}{۲}x - ۳ \Rightarrow$ 

از ناحیهٔ دوم نمی‌گذرد.

۳۵۵ ۴

ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{(x-۲)(x-۳)}{x-۳} = x-۲ \; ; \; x \neq ۳ \Rightarrow$$ 

عدد ۱ در محدودهٔ بُرد تابع f وجود ندارد، پس: $f^{-۱}(x) = x+۲ \; ; \; x \neq ۱$

۳۵۶ ۲

چون این دو خط نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم متقارن‌اند، پس وارون یکی از آن‌ها با دیگری برابر است. بنابراین در خط $۲x-۳y = b$ جای x و y را عوض می‌کنیم تا وارون آن یعنی $۲y-۳x = b$ به‌دست آید.

پس $۲y-۳x = b$ و $ax+by = ۸$ برابراند، پس: $\frac{a}{-۳} = \frac{b}{۲} = \frac{۸}{b}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{۲} = \frac{۸}{b} \Rightarrow b^۲ = ۱۶ \Rightarrow b = \pm ۴ \\ \frac{a}{-۳} = \frac{b}{۲} \Rightarrow ab = -۲۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = ۴ \Rightarrow a = -۶ \Rightarrow a+b = -۲ \\ b = -۴ \Rightarrow a = ۶ \Rightarrow a+b = ۲ \end{cases}$$

۳۵۷ ۲

با توجه به تابع $f(x) = \frac{۳x-۱}{a}$ داریم:

$f: \boxed{\times ۳} \xrightarrow{-۱} \boxed{\div a}$

$\Rightarrow f^{-۱}: \xleftarrow{\div ۳} \boxed{+۱} \xleftarrow{\times a}$

بنابراین $f^{-۱}(x) = \frac{ax+۱}{۳}$ است. حالا $f(۳f^{-۱}(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(۳f^{-۱}(x)) = f(ax+۱) = \frac{۳(ax+۱)-۱}{a} = \frac{۳ax+۲}{a} = ۳x + \frac{۲}{a}$$

$$\Rightarrow ۳x + \frac{۲}{a} = ۳x + ۵ \Rightarrow \frac{۲}{a} = ۵ \Rightarrow a = \frac{۲}{۵}$$

۳۵۸ ۱

نحوهٔ تولید تابع $f(x) = ۲ - \sqrt{x-۱}$ به‌صورت زیر است:

$f: \boxed{-۱} \xrightarrow{-\sqrt{\ }} \boxed{+۲}$

$f^{-۱}: \boxed{+۱} \xleftarrow{\text{توان ۲}} \boxed{-۲}$

پس $f^{-۱}(x) = (x-۲)^۲ + ۱$ است. در ضمن بُرد تابع f بازهٔ $[۲,-\infty)$ است، پس دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ نیز برابر همین بازه است.

روش سریع‌تر چون $f(۵) = ۰$ است، پس گزینه‌ای درست است که در آن $f^{-۱}(۰) = ۵$ باشد. فقط گزینهٔ (۱) این ویژگی را دارد.

۳۵۹ **۳**

ابتدا نمودار تابع $y=۲+\sqrt{x-۱}$ را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم، یعنی آن را وارون می‌کنیم. توجه کنید بُرد تابع f بازهٔ $[۲,+\infty)$ است:

y: $-۱ \to \sqrt{\ } \to +۲$

$y^{-۱}$: $+۱ \leftarrow$ توان ۲ $\leftarrow -۲$

$$\Rightarrow y^{-۱}=(x-۲)^۲+۱;\ x\geq ۲$$

حالا نمودار را ۲ واحد به سمت راست و ۳ واحد به پایین انتقال می‌دهیم.

$$y=(x-۲)^۲+۱ \xrightarrow[\text{۲ واحد راست}]{x\to(x-۲)} y=(x-۴)^۲+۱$$

$$\xrightarrow[\text{پایین}]{\text{۳ واحد}} g(x)=(x-۴)^۲+۱-۳$$

پس $g(x)=(x-۴)^۲-۲$ است و $g(۴)=-۲$ است.

۳۶۰ **۳**

با توجه به شکل صورت سؤال $f(x)=۱+\sqrt{x+۲}$ است. پس $a=۲$ و $b=۱$ می‌باشد. حالا، اگر نمودار تابع f را نسبت به محور yها قرینه کنیم، به تابع $y=۱+\sqrt{-x+۲}$ می‌رسیم که بُرد آن به‌صورت بازهٔ $[۱,+\infty)$ است. حالا نمودار حاصل را وارون می‌کنیم:

y: $\times -۱ \to +۲ \to \sqrt{\ } \to +۱$

$y^{-۱}$: $\div -۱ \leftarrow -۲ \leftarrow$ توان ۲ $\leftarrow -۱$

$$\Rightarrow y^{-۱}=۲-(x-۱)^۲;\ x\geq ۱$$

در نتیجه $g(x)=۲-(x-۱)^۲;\ x\geq ۱$ است و داریم:

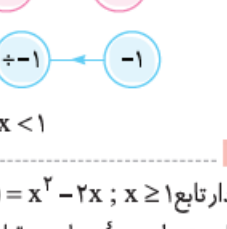
$$g(a+b)=g(۲+۱)=۲-(۳-۱)^۲=۲-۴=-۲$$

۳۶۱ **۴**

وقتی نمودار تابع $y=\sqrt[۳]{x}$ را ۲ واحد به راست و ۱ واحد به بالا منتقل کنیم به نمودار $y=۱+\sqrt[۳]{x-۲}$ می‌رسیم. حالا وارون تابع حاصل را پیدا می‌کنیم:

y: $-۲ \to \sqrt[۳]{\ } \to +۱$

$y^{-۱}$: $+۲ \leftarrow$ توان ۳ $\leftarrow -۱$ $\Rightarrow y^{-۱}=(x-۱)^۳+۲$



$\Rightarrow$ از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد $\Rightarrow$

یه بوره دیگه! طراح می تونست یکم تست رو جذاب تر بپرسه! اینجوری: «اگر نمودار وارون تابع $f(x)=x^۳-۳x^۲+۳x+a$ از نقطهٔ $(۲,۱)$ بگذرد، ضابطهٔ وارون آن کدام است؟»

پاسخ: $(۱,۲)\in f \Rightarrow a=۱ \Rightarrow f^{-۱}(x)=۱+\sqrt[۳]{x-۲}$

۳۶۲ **۲**

ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=(x^۲-۴x+۴)+۶x=x^۲+۲x+۴=(x+۱)^۲+۳$$

طول رأس این سهمی برابر $x=-۱$ است که در بازهٔ $x\geq -۱$ اکیداً صعودی است. حالا ضابطهٔ وارون تابع را در این بازه پیدا می‌کنیم:

f: $+۱ \to$ توان ۲ $\to +۳$

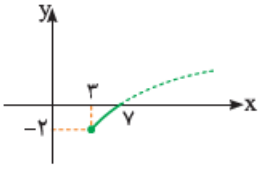
$f^{-۱}$: $-۱ \leftarrow \sqrt{\ } \leftarrow -۳$ $\Rightarrow f^{-۱}(x)=-۱+\sqrt{x-۳}$

یه بوره دیگه! طراح میتونه همین تست رو کمی ساده تر بپرسه: «ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=x^۲+۲x+۴;\ x\geq -۱$ کدام است؟»

یا اگه بخواد راه عددگذاری رو سفت تر کنه، اینجوری بپرسه: «ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=x^۲+۲x+۴;\ x\geq -۱$ به صورت $f^{-۱}(x)=a+\sqrt{x+b}$ است. مقدار $a\times b$ کدام است؟»

۳۶۳ **۱**

مطابق شکل نمودار تابع f در بازهٔ $[۳,۷]$ زیرمحور xها قرار دارد و محدودهٔ بُرد آن در این بازه به‌صورت $[-۲,۰)$ است:



حالا ضابطهٔ وارون تابع را پیدا می‌کنیم:

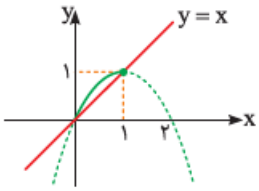
f: $-۳ \to \sqrt{\ } \to -۲$

$f^{-۱}$: $+۳ \leftarrow$ توان ۲ $\leftarrow +۲$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=(x+۲)^۲+۳;\ -۲\leq x\leq ۰$$

۳۶۴ **۴**

نمودار تابع f را در بازه‌ای که بالای نیمساز ربع اول و سوم است، در نظر می‌گیریم: بُرد تابع در این بازه به صورت $(۰,۱)$ است. حالا ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم و وارون آن را در این بازه پیدا می‌کنیم:



$$f(x)=-x^۲+۲x-۱+۱=-(x-۱)^۲+۱;\ ۰<x<۱$$

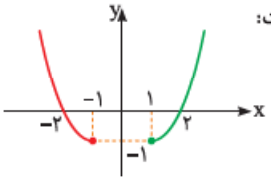
f: $-۱ \to$ توان ۲ $\to \times -۱ \to +۱$

$f^{-۱}$: $+۱ \leftarrow -\sqrt{\ } \leftarrow \div -۱ \leftarrow -۱$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=۱-\sqrt{۱-x};\ ۰<x<۱$$

۳۶۵ **۳**

وقتی نمودار تابع $f(x)=x^۲-۲x;\ x\geq ۱$ را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم، باید به جای همهٔ xها، $-x$ قرار دهیم. پس ضابطهٔ آن پس از قرینه نسبت به محور yها به صورت زیر است:



$$y=x^۲+۲x;\ x\leq -۱$$

$$\Rightarrow y=(x+۱)^۲-۱;\ x\leq -۱$$

حالا نمودار این تابع را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم یعنی آن را وارون می‌کنیم:

$y:$ (+۱) ← (توان ۲) ← (−۱)

$y^{-1}:$ (−۱) ← ($-\sqrt{}$) ← (+۱) $\Rightarrow y^{-1}=-1-\sqrt{x+1}$

۳۶۶ ۳

ابتدا باید ضابطهٔ تابع $y=f(x)$ را پیدا کنیم:

$$fog(x)=(2x-1)g(x)=(2x-1)(2x+1)=4x^2-1$$

حالا با فرض $g(x)=2x+1=t$ داریم:

$$x=\frac{t-1}{2}\Rightarrow f(g(x))=4x^2-1\Rightarrow f(t)=4(\frac{t-1}{2})^2-1=t^2-2t$$

پس $f(x)=x^2-2x$ است و طبق گفتهٔ صورت سؤال باید ضابطهٔ وارون آن را در $x\le 1$ پیدا کنیم:

$$f(x)=x^2-2x+1-1=(x-1)^2-1\ ;\ x\le 1$$

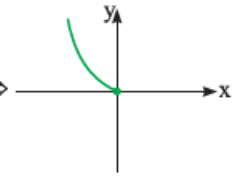
$f:$ (−۱) ← (توان ۲) ← (−۱)

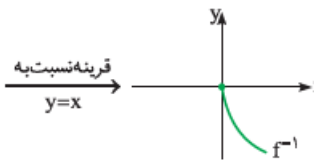
$f^{-1}:$ (+۱) ← ($-\sqrt{}$) ← (+۱) $\Rightarrow f^{-1}(x)=1-\sqrt{x+1}$

۳۶۷ ۱

می‌دانیم $f(x)=x^2\sqrt{x^2}=x^2|x|$ است که در بازهٔ $x\le 0$ نزولی است، پس:

$x\le 0: f(x)=-x^3\Rightarrow$

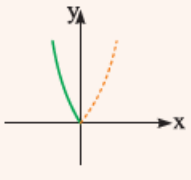




$\Rightarrow f^{-1}(x)=-\sqrt[3]{x}\ ;\ x\ge 0$

به بوره دیگه! *طراح می‌تونست از علامت جمع بین x^2 و $\sqrt{x^2}$ استفاده کنه: «تابع $f(x)=x^2+\sqrt{x^2}$ در یک بازهٔ نزولی است. ضابطهٔ وارون تابع در این بازه کدام است؟»*

$$f(x)=x^2+|x|=\begin{cases}x^2+x\ ;\ x>0\\ x^2-x\ ;\ x\le 0\end{cases}\xrightarrow{\text{رسم}}$$



$$\xrightarrow{\text{وارون}} y^{-1}=\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}\ ;\ x\ge 0$$

به بوره دیگه! *طراح می‌تونست از توان ۲ استفاده نکنه؛ «ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=x\sqrt{x}$ کدام است؟»*

$$f(x)=x^{\frac{3}{2}};x\ge 0\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2}$$

به بوره دیگه! *طراح می‌تونست از توان ۲ استفاده نکنه و همچنین بین x و $\sqrt{x}$ علامت جمع قرار بده! ببینیم: «ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x}$ کدام است؟»*

پاسخ: $f(x)=x+\sqrt{x}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=(\sqrt{x}+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=(\sqrt{x+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2})^2$$

۳۶۸ ۳

می‌دانیم اگر $f^{-1}(a)=b$ باشد، آنگاه $f(b)=a$ خواهد بود. بنابراین در یک عدد دلخواه رابطه را بررسی می‌کنیم:

$$f(8)=\frac{10}{4}-\frac{3}{2}=1\Rightarrow f^{-1}(1)=8$$

$$f^{-1}(1)=a(1)+a(\sqrt{1})=2a\Rightarrow 2a=8\Rightarrow a=4$$

۳۶۹ ۱

ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}=\sqrt{x-1}+1$$

$f:$ (−۱) ← ($\sqrt{}$) ← (+۱)

$f^{-1}:$ (+۱) ← (توان ۲) ← (−۱)

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=(x-1)^2+1=x^2-2x+2\ ;\ x\ge 1$$

روش سریع‌تر عددگذاری کنیم! چون $f(5)=3$ است، پس گزینه‌ای درست است که $f^{-1}(3)=5$ باشد. پس گزینهٔ (۱) درست است.

به بوره دیگه! *اگه طراح رادیکال بیرونی رو نذاره، باز هم برای وارون کردن می‌تونیم از اتحاد مربع دوجمله‌ای استفاده کنیم، مثلاً اینجوری بپرسه «ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=x+2\sqrt{x-2}+3$ کدام است؟»*

پاسخ: $f(x)=x+2\sqrt{x+2}+3=(\sqrt{x+2}+1)^2$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=(\sqrt{x}-1)^2-2$$

۳۷۰ ۳

ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

۱) $x\ge 0$ ۲) $\frac{1}{4}x-1\ge 0\Rightarrow x\ge 4\Rightarrow D_f=[4,+\infty)$

حالا ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x}\sqrt{\frac{1}{4}x-1}=\sqrt{\frac{1}{4}x^2-x}=\sqrt{(\frac{1}{2}x-1)^2-1}$$

نحوهٔ تولید تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:

$f:$ ($\times\frac{1}{2}$) ← (−۱) ← (توان ۲) ← (−۱) ← ($\sqrt{}$)

$f^{-1}:$ ($\div\frac{1}{2}$) ← (+۱) ← ($\sqrt{}$) ← (+۱) ← (توان ۲)

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=2\sqrt{x^2+1}+2$$

روش سریع‌تر میتونیم عددگذاری کنیم! چون $f(4)=0$ است، پس گزینه‌ای درست است که در آن $f^{-1}(0)=4$ باشد، پس گزینهٔ (۳) درست است.

۳۷۱ ۲

ضابطهٔ تابع را به‌صورت $y=|x+1|-|3x-6|$ ساده می‌کنیم:

$$y=\begin{cases}2x-7 & ; x\le -1\\ 4x-5 & ; -1<x<2\\ -2x+7 & ; x\ge 2\end{cases}\xrightarrow{\text{نزولی}} y=-2x+7\ ; x\ge 2$$

پس ضابطهٔ وارون تابع در بازه‌ای که نزولی است، به‌صورت $y^{-1}=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}\ ; x\le 3$ است.

به بوره دیگه! طراح می‌تونست خواستهٔ سوال رو کمی سفت‌تر کنه و اینجوری بپرسه: «نمودار وارون تابع در بازهٔ نزولی و نمودار تابع $y=x^2-3x$ در چند نقطه مشترک هستند؟» جواب: در یک نقطه به طول $x=-1$ مشترک‌اند.

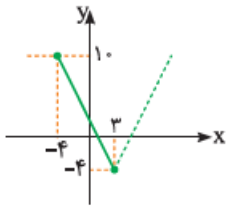
هایلایت

برای به‌دست آوردن وارون توابع قدرمطلقی، ابتدا باید تعیین کنیم تابع در کدام بازه یک‌به‌یک است. برای این منظور تابع را به‌صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم. سپس بازه‌هایی را که تابع در آن‌ها یک‌به‌یک است، تعیین کرده و ضابطهٔ وارون تابع را به‌دست می‌آوریم.

۳۷۲ ۴

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}10 & ; x<-4\\ -2x+2 & ; -4\le x\le 3\\ 2x-10 & ; x>3\end{cases}\Rightarrow$$



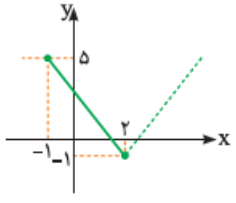
ضابطهٔ وارون تابع در بازهٔ اکیداً نزولی برابر $f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+1$ است.

از طرفی چون بُرد تابع f در این بازه برابر $-4\le y\le 10$ است، پس دامنهٔ تابع f^{-1} در این بازه به‌صورت $-4\le x\le 10$ است.

۳۷۳ ۳

ابتدا نمودار f را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}5 & ; x<-1\\ -2x+3 & ; -1\le x\le 2\\ 2x-5 & ; x>2\end{cases}\Rightarrow$$



ضابطهٔ وارون تابع در بازهٔ اکیداً نزولی برابر $f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\ ; -1\le x\le 5$ است. حال طول نقطهٔ برخورد منحنی f^{-1} و g را محاسبه می‌کنیم:

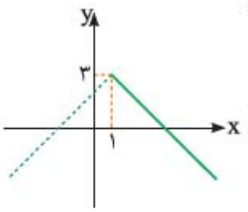
$$f^{-1}(x)=g(x)\Rightarrow -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=x+1\Rightarrow \frac{3}{2}x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

۳۷۴ ۴

ضابطهٔ $f(g(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(g(x))=3-\sqrt{x^2-2x+1}=3-\sqrt{(x-1)^2}=3-|x-1|$$

پس نمودار تابع fog به‌صورت زیر است:

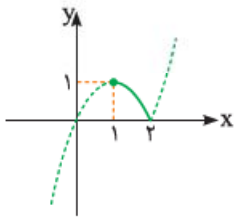


ضابطهٔ تابع در بازهٔ اکیداً نزولی به‌صورت $y=-x+4$ است و چون بُرد تابع در بازهٔ اکیداً نزولی برابر بازهٔ $(-\infty,3]$ است، پس ضابطهٔ وارون آن به‌صورت زیر است: $y=-x+4;x\le 3$

۳۷۵ ۳

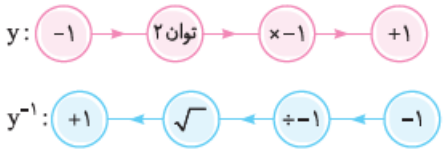
نمودار تابع $f(x)=x|x-2|$ را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}-x(x-2);x\le 2\\ x(x-2);x>2\end{cases}\Rightarrow$$



ضابطهٔ وارون تابع f در بازهٔ نزولی به‌صورت زیر است:

$$y=-x(x-2)=-x^2+2x-1+1=-(x-1)^2+1$$

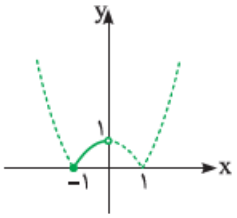


$$\Rightarrow f^{-1}(x)=1+\sqrt{1-x}$$

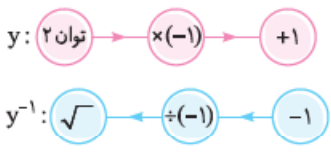
بُرد تابع f در این بازه برابر $0\le y\le 1$ است، پس دامنهٔ f^{-1} نیز برابر $0\le x\le 1$ است.

۳۷۶ ۴

چون $[x]=-1$ است، پس $-1\le x<0$ است. حالا نمودار تابع $y=|x^2-1|$ را رسم می‌کنیم:



محدودهٔ برد تابع در بازهٔ مورد نظر برابر بازهٔ $[0,1)$ است. حالا نحوهٔ تولید تابع $y=-x^2+1$ به‌صورت زیر است:

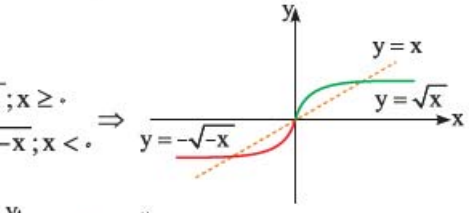


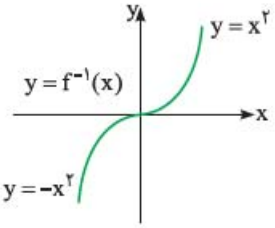
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=-\sqrt{1-x}\ ;0\le x<1$$

۳۷۷ ۳

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم، با توجه به این که وارون تابع‌های رادیکالی با فرجهٔ ۲، به شکل سهمی هستند خواهیم داشت:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\;;x\geq 0\\ -\sqrt{-x}\;;x<0\end{cases}\Rightarrow$$





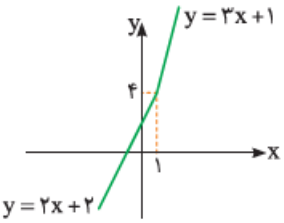
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=x|x|\;;x\in\mathbb{R}$$

یه هوره دیگه توی کنکور خارج از کشور سال ۹۲، طراح پرسید: «ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & ;x\neq 0\\ 0 & ;x=0\end{cases}$ کدام است؟» برای حل کافیه $|x|$ رو باز کنید که جواب میشه: $f^{-1}(x)=x|x|$

۳۷۸ ۲

نمودار تابع f به شکل زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}3x+1;x>1\\ 2x+2;x\leq 1\end{cases}$$



حالا با توجه به برد هر یک از ضابطه‌ها، ضابطهٔ وارون تابع به شکل زیر است:

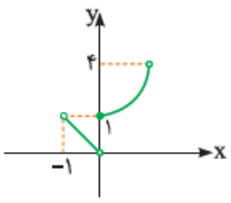
$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}(x-1);x>4\\ \frac{x}{2}-1;x\leq 4\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{3},b=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\frac{b}{a})=f^{-1}(\frac{3}{2})=\frac{\frac{3}{2}}{2}-1=-\frac{1}{4}$$

۳۷۹ ۲

بهتر است، نمودار تابع f را رسم کنیم. توجه کنید در ضابطهٔ بالایی، وقتی $-1<x<0$ است، پس $[x]=-1$ می‌باشد:

$$f(x)=\begin{cases}-x\;;-1<x<0\\ 2^x\;;0\leq x<2\end{cases}\Rightarrow$$



$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases}-x\;;0<x<1\\ \log_2^x\;;1\leq x<4\end{cases}$$

۳۸۰ ۲

ابتدا ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{3x+2+2x-2}{x-1}=\frac{5x}{x-1}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{x-5}$$

هایلایت

اگر تابع کسری $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ یک‌به‌یک باشد:

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

اگر $a+d=0$ باشد، وارون تابع با خود تابع برابر است.

۳۸۱ ۴

چون $f^{-1}(x)=\frac{5x-3}{bx+4}$ است، پس $f(x)=\frac{-4x-3}{bx-5}$ است. حالا چون بُرد f برابر $\mathbb{R}-\{-2\}$ است، پس:

$$\frac{-4}{b}=-2\Rightarrow b=2\Rightarrow f(x)=\frac{-4x-3}{2x-5}$$

از طرفی دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}-\{a\}$ است، پس:

$$a=\frac{5}{2}\Rightarrow ab=\frac{5}{2}\times 2=5$$

۳۸۲ ۴

$$f(f(x))=\frac{af(x)+1}{2f(x)-1}\Rightarrow f(x)=\frac{ax+1}{2x-1}$$

از طرفی چون $f^{-1}(0)=-2$ است، پس $f(-2)=0$ است:

$$f(-2)=\frac{-2a+1}{-4-1}=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

پس $g(x)=\frac{4x+1}{2x+\frac{1}{2}}$ است. چون صورت این کسر، مضربی از مخرج آن است، پس تابع g وارون‌پذیر نیست.

هایلایت

در توابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$، اگر صورت و مخرج کسر پس از فاکتورگیری با هم ساده شوند و عدد ثابت باقی بماند، تابع یک به یک نبوده و در نتیجه وارون‌پذیر نیست. این اتفاق در صورتی رُخ می‌دهد که $ad=bc$ باشد.

۳۸۳ ۴

ابتدا ضابطهٔ تابع $f(x)$ را پیدا می‌کنیم. برای این‌که $f(x)$ را پیدا کنیم باید در تساوی داده شده به جای xها عبارت $\frac{x-4}{2}$ قرار دهیم:

$$f(2\times\frac{x-4}{2}+4)=\frac{4\times\frac{x-4}{2}-6}{2\times\frac{x-4}{2}+a}\Rightarrow f(x)=\frac{2x-14}{x+a-4}$$

چون $f(x)=f^{-1}(x)$ است، پس: $(a-4)+(2)=0\Rightarrow a=2$

۳۸۴ ۲

ابتدا ضابطهٔ $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$x=\frac{f(x)-۳x}{f(x)+۴}\Rightarrow xf(x)+۴x=f(x)-۳x$$

$$\Rightarrow xf(x)-f(x)=-۷x\Rightarrow f(x)(x-۱)=-۷x$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{-۷x}{x-۱}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x}{x+۷}$$

۳۸۵ ۲

چون مخرج کسر بزرگ‌تر از صورت کسر است و هم‌چنین علامت آن همواره مثبت است، پس $\frac{x}{۱+|x|}<۱$ و $\frac{x}{۱+|x|}>-۱$ است. یعنی محدودهٔ بُرد تابع f به‌صورت $(-۱,۱)$ است. حالا ضابطهٔ وارون f را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x+۱}\;;x\geq ۰\\ \frac{x}{-x+۱}\;;x<۰\end{cases}\xrightarrow[\text{هموگرافیک}]{\text{طبق وارون}}f^{-۱}(x)=\begin{cases}\frac{-x}{x-۱}\;;۰\leq x<۱\\ \frac{-x}{-x-۱}\;;-۱<x<۰\end{cases}$$

می‌توانیم ضابطهٔ $f^{-۱}$ را به‌صورت زیر مرتب کنیم:

$$f^{-۱}(x)=\begin{cases}\frac{x}{۱-x}\;;۰\leq x<۱\\ \frac{x}{۱+x}\;;-۱<x<۰\end{cases}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x}{۱-|x|}\;;\underbrace{-۱<x<۱}_{|x|<۱}$$

با مقایسهٔ ضابطهٔ $f^{-۱}$ با صورت سؤال، نتیجه می‌گیریم $a=۱$ و $b=۱$ است و $a\times b=۱$ است.

۳۸۶ ۴

$$f(x)=x^۲-۲x-۳=(x-۱)^۲-۴\;;\;x\geq ۱$$

مراحل تولید تابع f به شکل زیر است:

$$f:\ -۱\xrightarrow{\text{توان ۲}}-۴$$

$$f^{-۱}:\ +۱\xleftarrow{+\sqrt{\ }}+۴\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۴}+۱$$

حالا نقاط تلاقی نمودارهای $f^{-۱}$ و g را به‌دست می‌آوریم:

$$f^{-۱}(x)=g(x)\Rightarrow\sqrt{x+۴}+۱=\frac{x-۹}{۲}\xrightarrow[\text{گزینه‌ها}]{\text{جای‌گذاری}}x=۲۱$$

۳۸۷ ۳

ابتدا نقطهٔ برخورد f و $g^{-۱}$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=g^{-۱}(x)\Rightarrow x^۲-۳x+۱=۳x-۴\Rightarrow x^۲-۶x+۵=۰$$

$$\xrightarrow[x<\frac{۳}{۲}]{\text{مجموع ضرایب برابر صفر}}\begin{cases}x=۱\xrightarrow{y=۳x-۴}y=-۱\Rightarrow A(۱,-۱)\\ x=۵\ \times\end{cases}$$

چون دو تابع f و $g^{-۱}$ در نقطهٔ $A(۱,-۱)$ متقاطع‌اند، پس دو تابع $f^{-۱}$ و g در نقطهٔ $A'(-۱,۱)$ متقاطع‌اند.

هایلایت

اگر دو تابع f و $g^{-۱}$ در نقطهٔ $A(a,b)$ متقاطع باشند، آن‌گاه دو تابع $f^{-۱}$ و g در نقطهٔ $A'(b,a)$ متقاطع‌اند.

۳۸۸ ۲

ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=x^۲-۴x+۱=(x-۲)^۲-۳\;;\;x\leq ۲$$

مراحل تولید تابع f به شکل زیر است:

$$f:\ -۲\xrightarrow{\text{توان ۲}}-۳$$

$$f^{-۱}:\ +۲\xleftarrow{-\sqrt{\ }}+۳\Rightarrow f^{-۱}(x)=۲-\sqrt{x+۳}$$

حالا نقاط تقاطع توابع $y=۱-f^{-۱}(x)$ و $y=\sqrt{f(x)+۳}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۱-f^{-۱}(x)=\sqrt{f(x)+۳}\Rightarrow\sqrt{x+۳}-۱=\sqrt{(x-۲)^۲}$$

$$\Rightarrow\sqrt{x+۳}-۱=|x-۲|\xrightarrow{x\leq ۲}\sqrt{x+۳}-۱=-(x-۲)$$

$$\Rightarrow\sqrt{x+۳}=-x+۳\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\ x=۶\ \times\end{cases}\xrightarrow{y=|x-۲|}y=۱$$

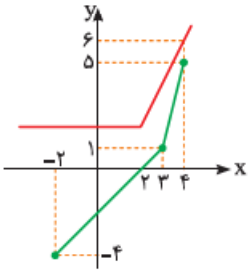
$$\Rightarrow A(۱,۱)\Rightarrow|OA|=\sqrt{۲}$$

۳۸۹ ۴

با توجه به نمودار تابع f و محدودهٔ دامنه و بُرد آن، ضابطهٔ $f^{-۱}$ را می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}x+۲\;;-۴\leq x\leq ۱\\ \frac{۱}{۴}x+\frac{۱۱}{۴},۱<x\leq ۵\end{cases}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\begin{cases}x-۲\;;-۲\leq x\leq ۳\\ ۴x-۱۱\;;۳<x\leq ۴\end{cases}$$

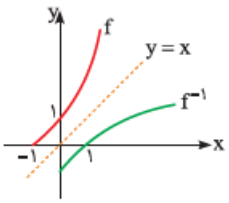
حالا نمودار دو تابع $f^{-۱}(x)$ و $g(x)=x+|x-۲|$ را رسم می‌کنیم:



⇒ متقاطع نیستند

۳۹۰ ۴

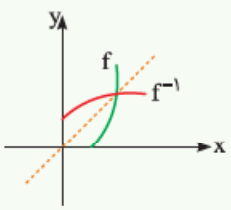
نمودار تابع $f(x)=x^۲+۲x+۱=(x+۱)^۲$ با دامنهٔ $(-۱,+\infty)$ بالای خط $y=x$ قرار دارد و هیچ نقطهٔ تلاقی با آن ندارد، پس f و $f^{-۱}$ همدیگر را قطع نمی‌کنند.



هایلایت

۱ برای پیدا کردن نقاط برخورد نمودارهای f و $f^{-۱}$، راهکار کلی این است که ضابطهٔ $f^{-۱}$ را به‌دست آوریم و سپس معادلهٔ $f(x)=f^{-۱}(x)$ را حل کنیم.

۲ در توابع اکیداً صعودی و توابع هموگرافیک نقاط برخورد f و $f^{-۱}$ [در صورت وجود]، همان نقاط برخورد f و خط $y=x$ است. پس در این توابع معادلهٔ $f(x)=x$ را حل می‌کنیم.



۳۹۱ ۲

تابع $f(x)=\sqrt{x+3}-1$ یک تابع اکیداً صعودی است. بنابراین برای پیدا کردن محل تقاطع این تابع با وارونش، معادلهٔ $f(x)=x$ را حل می‌کنیم:

$$\sqrt{x+3}-1=x \Rightarrow \sqrt{x+3}=x+1 \Rightarrow x+3=x^2+2x+1$$

$$\Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \xrightarrow{y=x} y=1 \\ x=-2 \ \times \end{cases}$$

پس فاصلهٔ نقطهٔ $M(1,1)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

$$|OM|=\sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$$

۳۹۲ ۲

چون تابع f یک تابع هموگرافیک است، پس برای مشخص کردن نقاط برخورد f و f^{-1} می‌توانیم معادلهٔ $f(x)=x$ را حل کنیم:

$$\frac{x+4}{x-2}=x \Rightarrow x+4=x^2-2x$$

$$\Rightarrow x^2-3x-4=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x=-1 \\ x=4 \end{cases}$$

۳۹۳ ۳

تابع $f(x)=x^3+3x-12$ از جمع دو تابع اکیداً صعودی $y=x^3$ و $y=3x-12$ به‌دست آمده، پس اکیداً صعودی است. بنابراین برای پیدا کردن محل برخورد این تابع با وارونش، معادلهٔ $f(x)=x$ را حل می‌کنیم:

$$x^3+3x-12=x \Rightarrow x^3+2x-12=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow A(2,2)$$

$$\Rightarrow OA=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$$

به همین دلیل! به همین دلیل! فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع تابع $f(x)=2x-3+\sqrt{x-1}$ با وارون خود، از مبدأ مختصات کدام است؟

پاسخ: $2\sqrt{2}$

۳۹۴ ۲

تابع $y=\log_4(2^{x+2}+32)$ از ترکیب دو تابع اکیداً صعودی $g(x)=2^{x+2}+32$ و $f(x)=\log_4 x$ به‌دست آمده (تابع fog) پس اکیداً صعودی است. پس برای پیدا کردن نقطهٔ برخورد این تابع با وارونش، داریم:

$$\log_4(2^{x+2}+32)=x \Rightarrow 4^x=2^{x+2}+32 \Rightarrow (2^x)^2-4\times(2^x)-32=0$$

$$\xrightarrow{2^x=t} t^2-4t-32=0 \Rightarrow \begin{cases} t=-4 \ \times \\ t=8 \Rightarrow 2^x=8 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

پس $A(3,3)$ است و فاصلهٔ آن از نقطهٔ $O(0,0)$ برابر $OA=3\sqrt{2}$ است.

۳۹۵ ۴

دامنهٔ تابع f به‌صورت بازهٔ $[1,+\infty)$ و برد تابع f برابر بازهٔ $(-\infty,2]$ است. درضمن می‌دانیم $fof^{-1}(x)=x;x\in R_f$ و $f^{-1}of(x)=x;x\in D_f$ است. حالا چون $x=3$ در برد تابع f قرار ندارد، پس $fof^{-1}(3)$ تعریف نشده است.

هایلایت

اگر تابع $f(x)$ وارون‌پذیر باشد، ترکیب f و f^{-1}، همواره تابعی همانی است:

	ضابطه	دامنه
حالت ۱	$(fof^{-1})(x)=x$	$D_{f^{-1}}=R_f$
حالت ۲	$(f^{-1}of)(x)=x$	$D_f=R_{f^{-1}}$

- نمودار تابع fof^{-1} و $f^{-1}of$ برابر نیمساز ناحیهٔ اول و سوم (یا بخشی از آن) است.
- شرط لازم و کافی برای برابر بودن fof^{-1} و $f^{-1}of$ آن است که $D_f=R_f$.
- اگر $(fog)(x)=(gof)(x)=x$ باشد، آن‌گاه f و g وارون یکدیگر هستند.

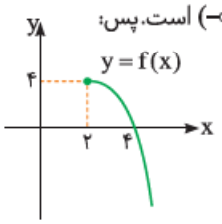
۳۹۶ ۲

برای این‌که تساوی داده شده برقرار باشد، باید f تابعی وارون‌پذیر با دامنه و برد یکسان باشد. در میان گزینه‌ها، دامنه و برد توابع موجود در گزینه‌های (۱) و (۴) به‌صورت بازهٔ $[2,+\infty)$ و دامنه و برد تابع گزینهٔ (۳) برابر $\mathbb{R}-\{1\}$ است. اما در گزینهٔ (۲) دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}$ و بُرد آن برابر $(1,+\infty)$ است.

۳۹۷ ۳

ابتدا نمودار تابع $f(x)=4x-x^2;x\geq 2$ را رسم می‌کنیم:

دامنهٔ تابع f برابر بازهٔ $[2,+\infty)$ و برد آن بازهٔ $(-\infty,4]$ است. پس:



$$\Rightarrow \begin{cases} f^{-1}of(x)=x;x\geq 2 \\ fof^{-1}(x)=x:x\leq 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y=(f^{-1}of)(x)+(fof^{-1})(x)=x+x=2x;2\leq x\leq 4$$

که نمودار این تابع در گزینهٔ (۳) آمده است.

۳۹۸ ۴

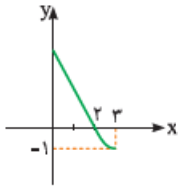
برای پیدا کردن $g(3)$، باید در تساوی داده شده به جای x عدد ۹ بگذاریم:

$$f^{-1}(3x+1)=g\left(\frac{x+3}{4}\right) \xrightarrow{x=9} f^{-1}(28)=g(3)$$

$$\Rightarrow f(g(3))=f(f^{-1}(28))=28$$

۳۹۹ ۳

چون ترکیب دو تابع f و g برابر x یعنی تابع همانی است، پس دو تابع f و g وارون یکدیگر هستند، یعنی $g(x)=f^{-1}(x)$ است. حالا نمودار تابع f و وارون آن را رسم می‌کنیم:



$$\Rightarrow g(x)=(x-3)^2-1 \ ; \ x\leq 3$$

به همین دلیل! به همین دلیل! به جای این‌که f و g را به شکل ماشین نمایش بدهد، می‌توانست بگوید اگر $f(x)=3-\sqrt{x+1}$ و ترکیب دو تابع f و g تابع همانی باشد، ضابطهٔ تابع g کدام است؟