

مقدمه مؤلفان

ویژگی‌های این کتاب و شیوه استفاده از آن:

- ۱ پاسخ سؤال‌ها در هر فصل با توجه به یک روند آموزشی نوشته شده است. معمولاً در سؤال‌های اول، راه‌حل‌ها تشریحی‌تر و با توضیح بیشتر است و هر چه که جلوتر می‌روید راه‌حل‌ها حرفه‌ای‌تر، سریع‌تر و با توضیح کم‌تر می‌شوند.
- ۲ در بعضی از سؤال‌ها **راه I**، **راه II** و ... آورده شده است. معمولاً **راه I** سریع‌ترین یا متداول‌ترین راه‌حل است و راه‌حل‌های بعدی برای توضیح شیوه‌های دیگر و یا نوع نگاه دیگری به سؤال با توجه به مباحث دیگر یا با توجه به نکاتی که در درس‌نامه گفته شده آورده شده‌اند.
- ۳ در پاسخ‌ها هر جا که لازم بوده **نکته** یا **اشاره** یا **خطره** داریم.
- نکته** به مفهوم مطلب، رابطه، فرمول یا ... است که باید بدانید تا بتوانید سؤال را سریع‌تر و بهتر حل کنید.
- اشاره** مثل یک تلنگر است که به شکل درست و مفهومی به سؤال نگاه کنید. گاهی وقت‌ها هم در **اشاره** سؤالی پرسیده‌ایم که باعث شود بیشتر با مفاهیم سؤال درگیر شوید.
- خطره** همان‌طور که از اسمش پیداست یک یادآوری سریع در مورد مفهوم، فرمول، رابطه یا ... آن مبحث درسی است.
- ۴ توصیه می‌کنیم برای حل تست‌ها:
- الف) تعداد معینی سؤال (مثلاً ۳۰ تا ۴۰) برای یک نشست انتخاب کنید.
- ب) با توجه به زمانی که برای این تست در نظر گرفته‌اید تست‌ها را حل کنید.
- پ) به پاسخ‌نامه کلیدی که در جلد درس‌نامه و سؤال آمده است مراجعه کنید و تست‌هایی را که زنده‌اید یا جواب نادرست داده‌اید مشخص کنید.
- ت) برگردید و سعی کنید اولاً تست‌هایی را که حل نکرده‌اید حل کنید و ثانیاً تست‌هایی را پاسخ نادرست داده‌اید دوباره بررسی کنید و ببینید آیا می‌توانید به پاسخ درست برسید.
- ث) حالا بیا بید سرآغ پاسخ‌نامه، پاسخ همه تست‌ها را حتی آن‌هایی را که درست پاسخ داده‌اید بررسی کنید. به **نکته** ها، **اشاره** ها، **راه I** و **راه II** توجه کنید تا هر چه را که لازم است درست یاد بگیرید.
- ۵ گاهی وقت‌ها ممکن است با دیدن راه‌حل یک تست که به نظر طولانی می‌رسد تعجب کنید یا ناامید شوید. حواستان باشد که در این کتاب بعضی از راه‌حل‌ها به علت این که لازم بوده همه چیز را خوب توضیح دهیم طولانی شده است و در عمل، هنگام حل سؤال لازم نیست این همه بنویسید.
- ۶ در بعضی از سؤال‌ها، از روش **عددگذاری** استفاده کرده‌ایم. سعی‌مان این بوده که در تست‌هایی از این روش استفاده کنیم که مناسب بوده و در عین حال تست و مفاهیمش این ویژگی را داشته باشند که در موارد مشابه از همین شیوه استفاده کنیم. به همین علت سعی کرده‌ایم در استفاده از **عددگذاری** زیاده‌روی و افراط نکنیم.
- کل پاسخ‌ها چند بار بررسی و ویرایش شده‌اند. سعی‌مان این بوده که کتاب بدون اشتباه باشد. اما حتماً طبق قوانین طبیعت ممکن است باز هم اشتباهاتی رخ داده باشد. اگر اشتباه، نقص یا نکته‌ای در کتاب دیدید لطفاً برایمان بنویسید و بفرستید. به ما در بهتر شدن این کتاب بسیار کمک می‌کنید. در هر مورد دیگر هم هر پیشنهادی داشتید خوشحال می‌شویم که بشنویم.
- هم‌چنین همکاران عزیز دیگری نیز با ارائه نظرات و پیشنهادات خود در مورد چاپ قبلی کتاب به ما در بازنویسی کتاب کمک کرده‌اند، از این دوستان، آقایان معین کریمی، حسین نادری، مصطفی کریمی، حمید گلزاری، ایمان کاظمی، عباس موسوی و فرزاد فتاحی نیز کمال تشکر را داریم.
- از تمام معلمان گرامی که از این کتاب استفاده می‌کنند نیز درخواست می‌کنیم هر نظری در مورد کتاب دارند برایمان بفرستند. حتماً برایمان بسیار ارزشمند و مؤثر است.

خوب و شاد و پیروز باشید.

۷	۱	درس ۱: رابطه و بازنمایی‌های یک رابطه
۱۴	۶۳	درس ۲: دامنه توابع
۲۲	۱۲۹	درس ۳: معرفی چند تابع خاص
۲۹	۱۸۴	درس ۴: تبدیل نمودارها
۴۱	۲۵۵	درس ۵: توابع چندجمله‌ای
۴۵	۲۷۹	درس ۶: اعمال جبری روی توابع
۵۰	۳۱۶	درس ۷: ترکیب توابع
۶۴	۴۰۸	درس ۸: توابع یکنوا
۷۲	۴۶۶	درس ۹: تابع یک‌به‌یک
۷۶	۴۹۱	درس ۱۰: تابع وارون
۹۱	۶۰۷	درس ۱۱: بُرد
۹۶	۶۵۰	درس ۱۲: تقسیم

۱۰۵	۷۱۸	درس ۱: رادیکان
۱۰۸	۷۴۰	درس ۲: نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه
۱۱۳	۷۸۱	درس ۳: دایره مثلثاتی
۱۱۸	۸۲۵	درس ۴: اتحادهای مثلثاتی مقدماتی
۱۲۳	۸۶۱	درس ۵: زاویه‌های متمم، مکمل، قرینه و هم‌پایان
۱۲۷	۸۹۲	درس ۶: اتحادهای مثلثاتی $\alpha \pm \beta$ ، 2α و ...
۱۴۳	۱۰۲۴	درس ۷: تابع متناوب
۱۴۷	۱۰۵۴	درس ۸: نمودار توابع سینوسی و کسینوسی
۱۵۴	۱۱۰۶	درس ۹: تانژانت
۱۵۸	۱۱۳۵	درس ۱۰: معادله مثلثاتی

۱۷۰	۱۲۱۶	درس ۱: همسایگی
۱۷۱	۱۲۲۸	درس ۲: فرایندهای حدی و قوانین محاسبه حد
۱۷۹	۱۳۰۲	درس ۳: رفع ابهام صفرصفرم $\left(\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}\right)$
۱۹۴	۱۴۱۸	درس ۴: حد بی‌نهایت
۲۰۰	۱۴۷۳	درس ۵: حد در بی‌نهایت
۲۰۸	۱۵۵۳	درس ۶: مجانب
۲۱۷	۱۶۱۸	درس ۷: پیوستگی

فصل اول تابع

فصل ۵ ریاضی دهم
فصل ۲ حسابان یازدهم
فصل ۱ حسابان دوازدهم

فصل دوم مثلثات

فصل ۲ ریاضی دهم
فصل ۴ حسابان یازدهم
فصل ۲ حسابان دوازدهم

فصل سوم حد، پیوستگی و مجانب

فصل ۵ حسابان یازدهم
فصل ۳ حسابان دوازدهم

۲۲۶	۱۶۸۳	درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق
۲۲۸	۱۷۱۶	درس ۲: قواعد مشتق‌گیری
۲۳۷	۱۸۰۲	درس ۳: مشتق‌گیری با چشم‌های باز (عامل صفرشونده - ساده کردن)
۲۴۳	۱۸۶۳	درس ۴: معادله خط مماس بر منحنی
۲۴۸	۱۸۹۵	درس ۵: مشتق چپ و راست - مشتق‌گیری در حضور براکت و قدرمطلق
۲۵۴	۱۹۴۰	درس ۶: پیوستگی و مشتق‌پذیری (در نقطه و بازه)
۲۵۷	۱۹۵۸	درس ۷: نقاط مشتق‌ناپذیر - نقاط گوشه‌ای - مماس قائم
۲۶۴	۲۰۱۷	درس ۸: دامنه و نمودار تابع مشتق
۲۶۶	۲۰۳۷	درس ۹: مشتق تابع مرکب
۲۷۵	۲۱۰۸	درس ۱۰: آهنگ تغییر

فصل چهارم مشتق

فصل ۴ حسابان دوازدهم

۲۷۷	۲۱۳۱	درس ۱: بررسی یکنوایی تابع به کمک مشتق
۲۸۲	۲۱۷۴	درس ۲: نقطه بحرانی
۲۸۸	۲۲۱۴	درس ۳: اکسترم‌های نسبی
۲۹۵	۲۲۶۷	درس ۴: اکسترم‌های مطلق
۳۰۰	۲۳۰۳	درس ۵: بهینه‌سازی
۳۰۷	۲۳۴۴	درس ۶: تقعر و نقطه عطف
۳۲۰	۲۴۳۰	درس ۷: رسم نمودار

فصل پنجم کاربرد مشتق

فصل ۵ حسابان دوازدهم

۳۲۷	۲۴۷۱	درس ۱: روش‌های حل معادله درجه دو
۳۳۹	۲۵۶۸	درس ۲: سهمی

فصل ششم معادله درجه دوم و سهمی

فصل ۴ ریاضی دهم

فصل ۱ حسابان یازدهم

۳۴۸	۲۶۳۵	درس ۱: معادلات گویا
۳۵۲	۲۶۶۴	درس ۲: معادلات رادیکالی
۳۵۶	۲۷۰۰	درس ۳: تعیین علامت و نامعادله

فصل هفتم معادله، نامعادله و تعیین علامت

فصل ۴ ریاضی دهم

فصل ۱ حسابان یازدهم

۳۶۱	۲۷۲۷	درس ۱: قدرمطلق
۳۷۱	۲۸۱۵	درس ۲: جزء صحیح

فصل هشتم قدرمطلق و جزء صحیح

فصل ۴ ریاضی دهم

فصل‌های ۱ و ۲ حسابان یازدهم

فصل نهم

توان‌های گویا و عبارتهای جبری

فصل ۳ ریاضی دهم

۳۷۸	۲۸۷۵	درس ۱: توان و ریشه
۳۷۹	۲۸۹۴	درس ۲: رادیکال و توان‌های گویا
۳۸۱	۲۹۱۱	درس ۳: اتحادها
۳۸۶	۲۹۵۹	درس ۴: گویاکردن مخرج کسرها

فصل دهم

توابع نمایی و لگاریتمی

فصل ۳ حسابان یازدهم

۳۸۸	۲۹۸۰	درس ۱: تابع نمایی
۳۹۵	۳۰۳۳	درس ۲: تابع لگاریتمی
۳۹۹	۳۰۶۷	درس ۳: ویژگی‌های لگاریتم
۴۰۲	۳۱۰۹	درس ۴: معادلات لگاریتمی
۴۰۵	۳۱۳۷	درس ۵: کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی

فصل یازدهم

الگو و دنباله

فصل ۱ ریاضی دهم

فصل ۱ حسابان یازدهم

۴۰۶	۳۱۴۷	درس ۱: الگوهای هندسی
۴۱۱	۳۱۸۷	درس ۲: دنباله حسابی
۴۱۷	۳۲۵۳	درس ۳: دنباله هندسی

فصل دوازدهم

هندسه تحلیلی

فصل ۱ حسابان یازدهم

۴۲۳	۳۳۰۶	درس ۱: هندسه تحلیلی
-----	------	---------------------

پاسخ‌نامه کلیدی



۴۰۹. گزینه ۲ تابع خطی زمانی اکیداً صعودی است که شیبش مثبت

باشد، پس: $-1 < a < 1 \Rightarrow |a| < 1 \Rightarrow a^2 < 1 \Rightarrow 1 - a^2 > 0$

عرض از مبدأ خط $f(x) = (1 - a^2)x + (a + 3)$ ، می‌شود $a + 3$.

به کمک $-1 < a < 1$ ، محدوده عرض از مبدأ درمی‌آید:

$$-1 < a < 1 \xrightarrow{+3} 2 < a + 3 < 4 \Rightarrow 2 < \text{عرض از مبدأ} < 4$$

۴۱۰. گزینه ۲ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ $y = \sqrt{ax + b}$ با شرط $a < 0$ ، اکیداً نزولی است، پس $y = \sqrt{-2x + 4}$

اکیداً نزولی می‌باشد.

۲ چون توان فرد است، منفی را می‌توانیم به داخل پرانتز ببریم:

$$y = -(2 - x)^3 - 1 = (x - 2)^3 - 1$$

توابع به فرم $y = a(x + \alpha)^3 + \beta$ با شرط $a > 0$ اکیداً صعودی هستند، پس

این تابع اکیداً صعودی است.

۳ تابع لگاریتمی $y = \log_{0.1} x$ ، چون مبنایش بین صفر و ۱ است، اکیداً

نزولی است.

۴ می‌دانیم $\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، پس با تابع نمایی $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$ طرفیم که

چون پایه‌اش بین ۰ و ۱ است، تابعی اکیداً نزولی محسوب می‌شود.

۴۱۱. گزینه ۲ تابع نمایی $y = A^x$ با شرط $A > 1$ ، تابعی صعودی (یا

اکیداً صعودی) است. پس در تابع $y = \left(\frac{k+1}{3-k}\right)^x$ ، باید پایه بزرگ‌تر از ۱ باشد:

$$\frac{k+1}{3-k} > 1 \Rightarrow \frac{k+1}{3-k} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{k+1-3+k}{3-k} > 0 \Rightarrow \frac{2k-2}{3-k} > 0$$

ریشه صورت ۱ و ریشه مخرج ۳ است. جدول تعیین علامت می‌کشیم:

	۱	۳	
	-	+	-

قسمت‌های مثبت را می‌خواهیم:

$$k \in (1, 3)$$

↓ ↓
a b

پس: $\max(b - a) = 3 - 1 = 2$

۴۱۲. گزینه ۲ برای آن که تابع $y = A^x$ نزولی باشد باید $0 < A \leq 1$ باشد.

اشاره اگر در صورت سؤال، می‌گفت تابع نمایی فلان، نزولی باشد،

شرطمان $0 < A < 1$ می‌شد. پس در تابع $f(x) = \left(\frac{3m+1}{4}\right)^x$ برای

نزولی شدن، باید:

$$0 < \frac{3m+1}{4} \leq 1 \xrightarrow{\times 4} 0 < 3m+1 \leq 4$$

$$\xrightarrow{-1} -1 < 3m \leq 3 \xrightarrow{\div 3} -\frac{1}{3} < m \leq 1$$

پس m دو مقدار صحیح دارد: صفر و ۱

۴۱۳. گزینه ۲ تابع آبشاری $y = |x - a| - |x - b|$ ، به شرطی که

ریشه قدرمطلق اولش بزرگ‌تر از ریشه قدرمطلق دوم باشد نزولی است (یعنی $a > b$):



در هر دو شرط بالا، اگر مساوی قرار دهیم، نمودارمان به یک تابع ثابت تبدیل می‌شود که هم صعودی است و هم نزولی. ریشه قدرمطلقها را حساب می‌کنیم:

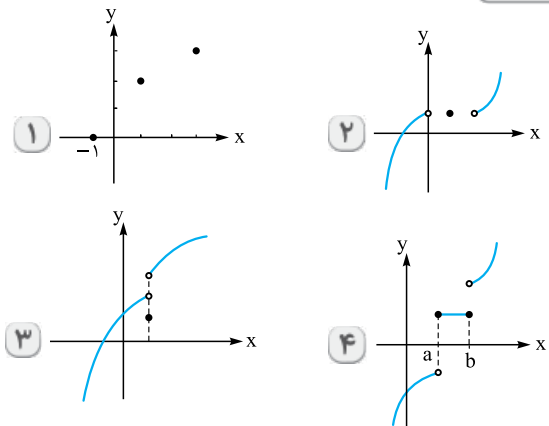
$$f(x) = |x + 2m - 1| - |x - m + 5|$$

ریشه: $-2m + 1$ ریشه: $m - 5$

شرط نزولی بودن را اعمال می‌کنیم:

$$-2m + 1 \geq m - 5 \Rightarrow -3m \geq -6 \Rightarrow m \leq 2$$

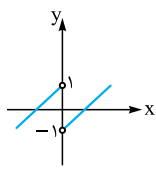
۴۰۸. گزینه ۴ نمودارها را کنار هم ببینید:



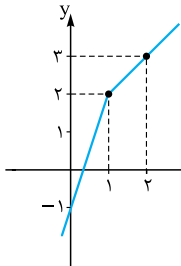
در گزینه‌های ۱ و ۲ وقتی از چپ به راست حرکت می‌کنیم، نمودار فقط رو به بالا رفته، پس صعودی اکیدند.

در ۳، ابتدا نمودار رو به بالا رفته و سپس در یک نقطه به پایین آمده، پس غیریکنواست.

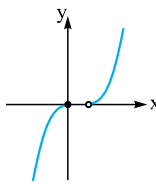
در ۴، نمودار یا رو به بالا رفته یا ثابت بوده، پس صعودی است ولی صعودی اکید نیست.



$$f(x) = x - \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x-1 & x > 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$$



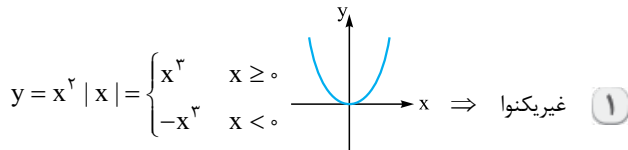
$$f(x) = 2x - |x-1| = \begin{cases} x+1 & x \geq 1 \\ 3x-1 & x < 1 \end{cases}$$



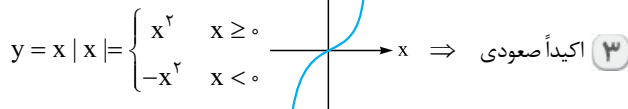
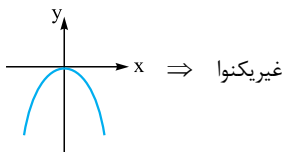
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ x^2 - 1 & x > 0 \end{cases}$$

با توجه به نمودارها، $f(x) = x - \frac{x}{|x|}$ غیریکنوا است و بقیه تابع‌ها صعودی اکید هستند.

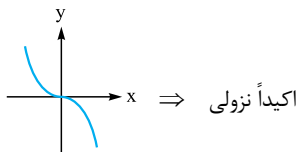
۴۱۹. گزینه ۴ نمودار تمام توابع را رسم می‌کنیم:



۲ شکل بالا را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. $y = -x^2 |x|$

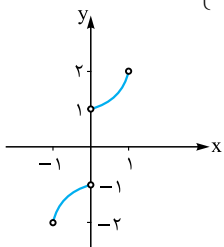


۴ شکل بالا را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. $y = -x |x|$



۴۲۰. گزینه ۱ با توجه به ریشه قدرمطلق ($x=0$)، تابع را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

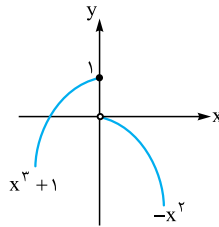
$$f(x) = x|x| + \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x(x) + \frac{x}{x} & x > 0 \\ x(-x) + \frac{x}{-x} & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ -x^2 - 1 & x < 0 \end{cases}$$



تابع را در دامنه $\{0\} - (-1, 1)$ رسم می‌کنیم:

نمودار f فقط رو به بالا حرکت کرده، پس صعودی اکید (یا صعودی) است.

۲



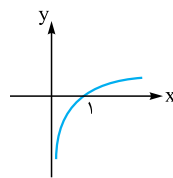
۴۱۴. گزینه ۳ اول نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

با توجه به نمودار، تابع ابتدا صعودی (در $x < 0$) رو به بالا و سپس نزولی (در $x > 0$) رو به پایین است.

۴۱۵. گزینه ۱ ابتدا ضابطه را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \log_r \sqrt[3]{x} = \log_r x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_r x$$

نمودار تابع $y = \log_r x$ به صورت روبه‌رو است: تابع صعودی اکید است.



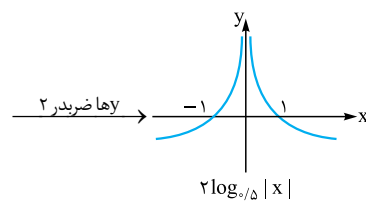
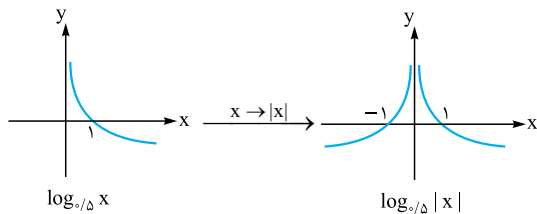
اگر عددی مثبت مثل $\frac{1}{3}$ در ضابطه ضرب شود، تغییری در یکنوایی ایجاد نمی‌کند.

۴۱۶. گزینه ۳

$$\begin{cases} \log x^2 = 2 \log |x| & (\text{توان زوج}) \\ \log x^3 = 3 \log x & (\text{توان فرد}) \end{cases}$$

نکته

ابتدا ضابطه را ساده می‌کنیم: $f(x) = \log_{5/5} x^2 = 2 \log_{5/5} |x|$ نمودار f را مرحله‌به‌مرحله رسم می‌کنیم:



چون تابع f، در قسمت‌هایی صعودی اکید ($x < 0$) و در قسمت‌هایی نزولی اکید است ($x > 0$)، پس غیریکنواست.

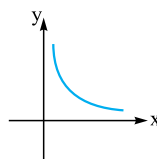
۴۱۷. گزینه ۴ دامنه تابع f را حساب می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x^2 > 0 \Rightarrow x > 0 \end{array} \right\} \cap \rightarrow x > 0 \Rightarrow D_f = (0, +\infty)$$

ضابطه f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{|x| \sqrt{x}} = \frac{1}{|x|} \xrightarrow{x > 0} f(x) = \frac{1}{x}$$

پس ضابطه f، به صورت $f(x) = \frac{1}{x}$ با دامنه $x > 0$ است.

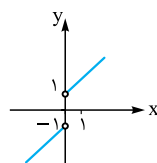


نمودارش به شکل روبه‌رو است:

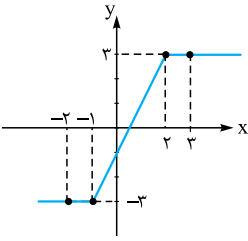
پس f، همواره نزولی است.

۴۱۸. گزینه ۲ نمودار هر یک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:

۱



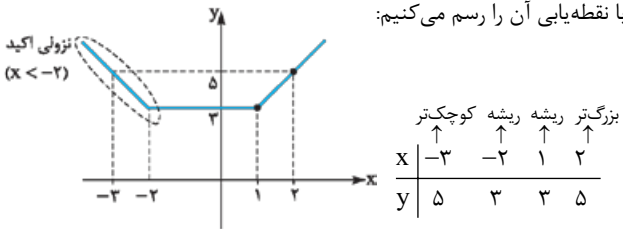
$$f(x) = \frac{|x|}{x} + x = \begin{cases} 1+x & x > 0 \\ -1+x & x < 0 \end{cases}$$



این تابع در بازه $[-1, 2]$ یا $(-1, 2)$ اکیداً صعودی است.

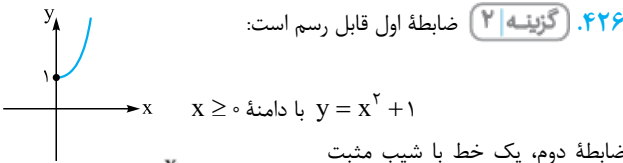
اشاره اگر جای «اکیداً صعودی» می‌گفت «صعودی»، جواب \mathbb{R} می‌شد.

۴۲۵. گزینه ۱ تابع $f(x) = |x+2| + |x-1|$ یک تابع گلدانی است.

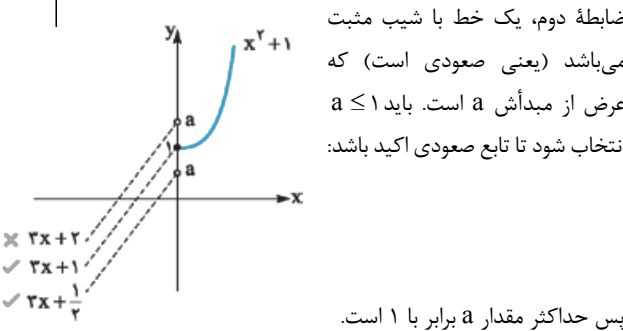


با نقطه‌یابی آن را رسم می‌کنیم:

پس f در بازه $(-\infty, -2)$ نزولی اکید است.



۴۲۶. گزینه ۲ ضابطه اول قابل رسم است:

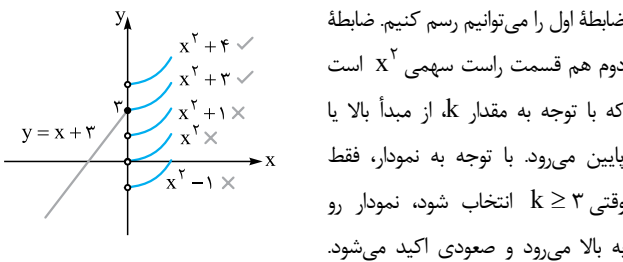


ضابطه دوم، یک خط با شیب مثبت می‌باشد (یعنی صعودی است) که عرض از مبدأش a است. باید $a \leq 1$ انتخاب شود تا تابع صعودی اکید باشد:

پس حداکثر مقدار a برابر با ۱ است.

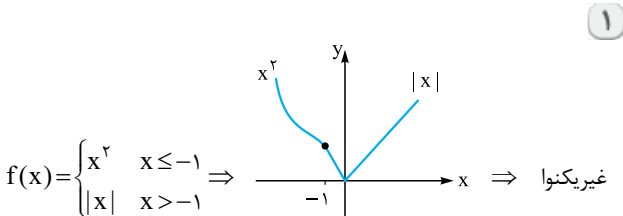
۴۲۷. گزینه ۳ به ازای $x \leq 0$ ، عبارت داخل قدرمطلق منفی می‌شود، پس ضابطه بالا این‌جوری می‌شود: $4 - |x-1| = 4 - (-x+1) = x+3$

ضابطه تا این‌جا به شکل $f(x) = \begin{cases} x+3 & x \leq 0 \\ x^2+k & x > 0 \end{cases}$ درآمد.

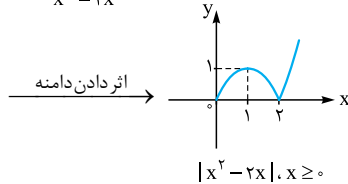
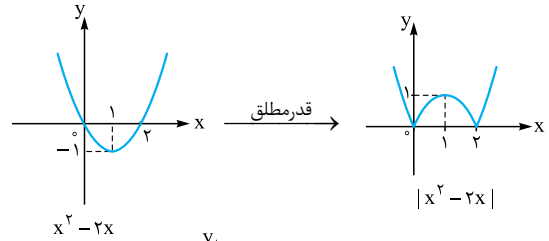


ضابطه اول را می‌توانیم رسم کنیم. ضابطه دوم هم قسمت راست سهمی x^2 است که با توجه به مقدار k ، از مبدأ بالا یا پایین می‌رود. با توجه به نمودار، فقط وقتی $k \geq 3$ انتخاب شود، نمودار رو به بالا می‌رود و صعودی اکید می‌شود.

۴۲۸. گزینه ۳ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -1 \\ g(x) & x > -1 \end{cases}$ را به ازای هر کدام از گزینه‌ها رسم می‌کنیم:



۴۲۱. گزینه ۳ ابتدا سهمی $y = x(x-2)$ را با داشتن ریشه‌هایش $(x=2, x=0)$ و دهانه رو به بالا رسم می‌کنیم. بعد که قدرمطلق را اثر می‌دهیم، قسمت‌های زیر محور x ها قرینه می‌شوند:



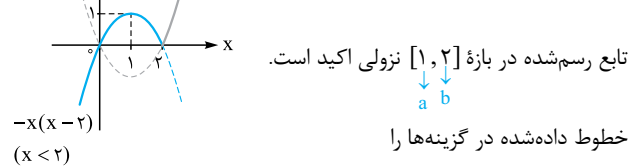
نمودار آخر در بازه $(1, 2)$ یا $[1, 2]$ نزولی اکید است، پس:

$$\max(b-a) = 2-1 = 1$$

۴۲۲. گزینه ۳ اول تابع را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

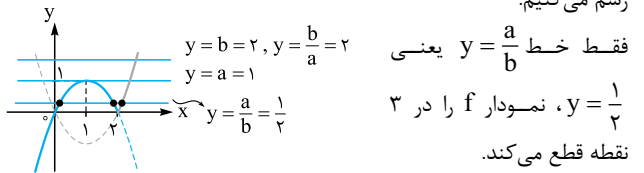
$$y = x|x-2| = \begin{cases} x(x-2) & x \geq 2 \\ -x(x-2) & x < 2 \end{cases}$$

هر دو ضابطه سهمی با ریشه‌های صفر و ۲ هستند. نمودار را رسم می‌کنیم:



تابع رسم‌شده در بازه $[1, 2]$ نزولی اکید است.

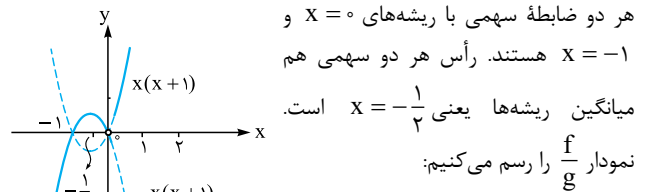
خطوط داده‌شده در گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:



۴۲۳. گزینه ۲ تابع $\frac{f}{g}$ را می‌نویسیم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 + x^2}{|x|} = \begin{cases} \frac{x^2 + x^2}{x} & x > 0 \\ \frac{x^2 + x^2}{-x} & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 + x & x > 0 \\ -(x^2 + x) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x(x+1) & x > 0 \\ -x(x+1) & x < 0 \end{cases}$$



هر دو ضابطه سهمی با ریشه‌های $x=0$ و $x=-1$ هستند. رأس هر دو سهمی هم میانگین ریشه‌ها یعنی $x = -\frac{1}{2}$ است. نمودار $\frac{f}{g}$ را رسم می‌کنیم:

پس تابع $\frac{f}{g}$ در بازه $(-\frac{1}{2}, 0)$ نزولی است.

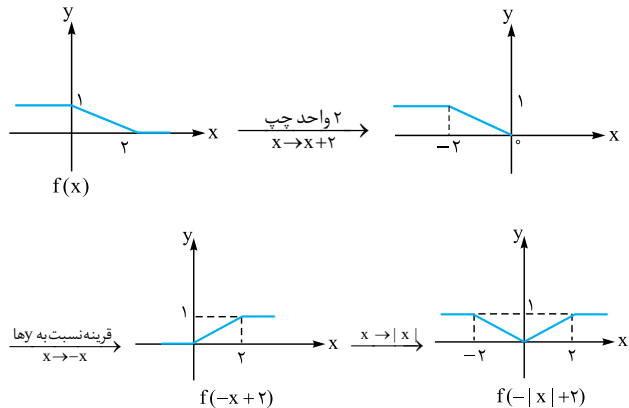
۴۲۴. گزینه ۳ نمودار رسم می‌کنیم. اگر یادتان باشد شکل این توابع، آبخاری می‌شد! کافی است چهارتا نقطه بدهیم:

x	-2	-1	2	3
y	-3	-3	3	3

۴۳۲. گزینه ۴ با توجه به ضابطه $g(x) = -|x| + 2$ ، ضابطه fog به

صورت مقابل می‌شود: $f(g(x)) = f(-|x| + 2)$

مرحله به مرحله از نمودار $f(x)$ به $f(-|x| + 2)$ می‌رسیم.



نمودار نهایی در بین گزینه‌های داده شده در بازه $(1, 5)$ صعودی است (چون یا ثابت بوده یا رو به بالا حرکت کرده).

۴۳۳. گزینه ۴ اگر جای x^2 ، $|x|$ را بنویسیم، ضابطه f ساده می‌شود:

$$f(x) = \frac{|x| + x^2}{1 + |x|} = \frac{|x| + |x|^2}{1 + |x|} = \frac{|x|(1 + |x|)}{1 + |x|} = |x|$$

با توجه به این که مخرج f ریشه نداشت، پس دامنه هم \mathbb{R} می‌ماند.

با توجه به $f(x) = |x|$ و $g(x) = 2x^2 + x - 1$ ، ضابطه fog را تشکیل

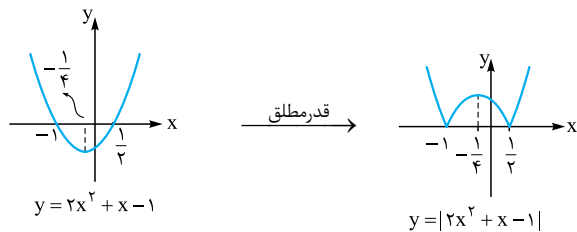
$$f(g(x)) = |g(x)| = |2x^2 + x - 1|$$

می‌دهیم:

اول سهمی $y = 2x^2 + x - 1$ را رسم می‌کنیم و بعد قدرمطلق را اثر می‌دهیم.

با توجه به رابطه $a + c = b$ ، ریشه‌های سهمی -1 و $\frac{1}{2}$ هستند.

طول رأس برابر است با: $x_S = \frac{-1 + \frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$



با توجه به منفی بودن $-a^2$ و $-b^2$ ، باید دنبال یک بازه دو سر منفی باشیم.

تابع نهایی در بازه $[-1, -\frac{1}{4}]$ صعودی است، پس:

$$\begin{cases} -a^2 = -1 \Rightarrow a = \pm 1 \\ -b^2 = -\frac{1}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

بیشترین مقدار $b - a$ زمانی است که $b = \frac{1}{2}$ و $a = -1$ باشد:

$$\frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2} = 1.5$$

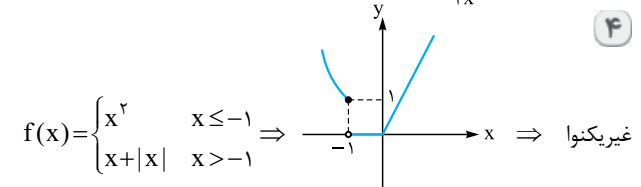
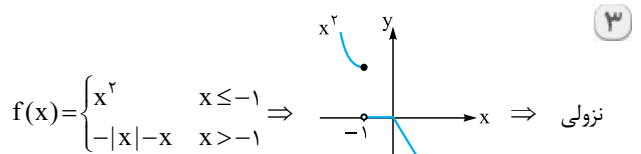
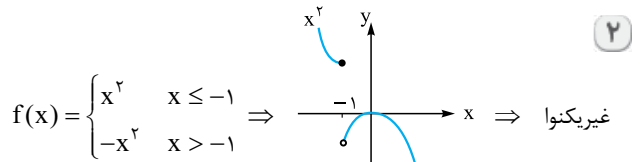
۴۳۴. گزینه ۲ ضابطه اول f را ساده تر می‌نویسیم:

$$\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

پس کل ضابطه f به این صورت می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{ادغام ضابطه اول و سوم}} \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

با داشتن ضابطه $g(x) = x^2 - x$ ، ضابطه fog را تشکیل می‌دهیم.



۴۲۹. گزینه ۳ در توابع $|x|$ خط \pm خط y شرط اکیداً یکنوایی آن است

که شیب هر دو ضابطه، هم علامت باشد.

۱ $y = |2x| + x = \begin{cases} 2x + x & x \geq 0 \\ -2x + x & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

۲ $y = |2x - 4| - x = \begin{cases} (2x - 4) - x & x \geq 2 \\ (-2x + 4) - x & x < 2 \end{cases} = \begin{cases} x - 4 & x \geq 2 \\ -3x + 4 & x < 2 \end{cases}$

۳ $y = |x + 1| + 2x = \begin{cases} (x + 1) + 2x & x \geq -1 \\ -(x - 1) + 2x & x < -1 \end{cases} = \begin{cases} 3x + 1 & x \geq -1 \\ x - 1 & x < -1 \end{cases}$

۴ $y = |x - 1| + x = \begin{cases} (x - 1) + x & x \geq 1 \\ -(x - 1) + x & x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 2x - 1 & x \geq 1 \\ 1 & x < 1 \end{cases}$

فقط در ۳، شیب هر دو ضابطه هم علامت (هر دو مثبت) شد، پس اکیداً یکنواست.

نشانه در ۴، شیب یکی از ضابطه‌ها ۲ و شیب دیگری صفر شد،

پس صعودی (یکنوا) است ولی اکید نیست.

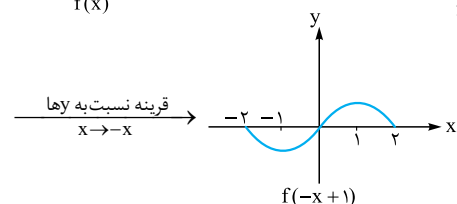
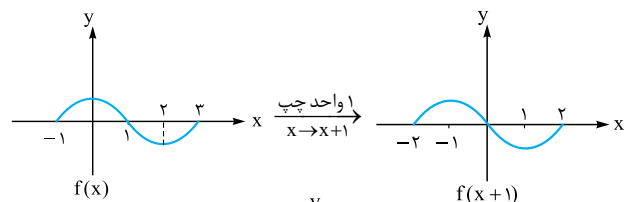
۴۳۰. گزینه ۳ برای آن که تابع $|x| \pm$ خط $y = ax + 4$ تابعی غیریکنوا باشد

باید شیب ضابطه‌هایش هم علامت نباشد.

با توجه به ضابطه $|ax + 4| - \frac{x}{2} + 1$ ، شیب ضابطه‌ها $a - \frac{1}{2}$ و $a + \frac{1}{2}$ است. برای هم علامت نبودن، باید ضربشان منفی شود:

$$(a - \frac{1}{2})(a + \frac{1}{2}) < 0 \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$$

۴۳۱. گزینه ۴ مرحله به مرحله از نمودار $f(x)$ به $f(-x + 1)$ می‌رسیم.



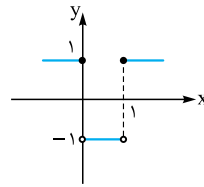
تابع نهایی در بازه‌های $[-2, -1]$ و $[1, 2]$ اکیداً نزولی است.



جای تمام x های ضابطه $f, x^2 - x$ قرار می دهیم:

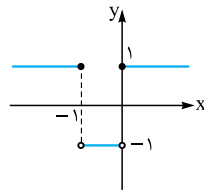
$$f(g(x)) = \begin{cases} 1 & x^2 - x \geq 0 \\ -1 & x^2 - x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x \geq 1 \text{ یا } x \leq 0 \\ -1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

نمودار $f \circ g$ را رسم می کنیم:



نمودار بالا را ۱ واحد به چپ می بریم تا به

نمودار $(f \circ g)(x+1)$ برسیم:



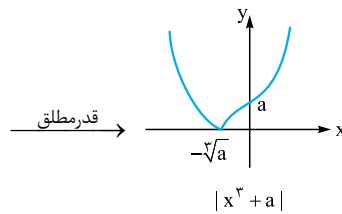
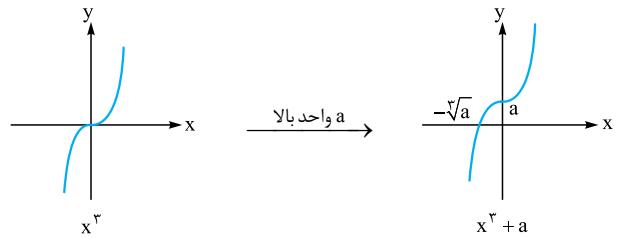
تابع نهایی در بازه $(-1, +\infty)$ رو به بالا یا

ثابت است، پس صعودی است. در نتیجه

کمترین مقدار a برابر -1 است.

۴۳۵. گزینه ۲ نمودار تابع $y = x^3 + a$ ، همان نمودار تابع $y = x^3$ که a واحد بالا (چون $a \in \mathbb{N}$) رفته است. پس نمودار $f(x) = |x^3 + a|$ این شکلی

می شود:



برای به دست آوردن محل برخورد با محور x ها، y را صفر می دهیم:

$$x^3 + a = 0 \Rightarrow x^3 = -a \Rightarrow x = -\sqrt[3]{a}$$

تابع نهایی در بازه $(-\infty, \sqrt[3]{a}]$ و هر بازه ای که زیرمجموعه اش باشد، نزولی اکید است.

پس الان $(-\infty, a-2)$ باید زیرمجموعه $(-\infty, \sqrt[3]{a})$ باشد، یعنی $a-2$ باید

کوچک تر یا مساوی از $-\sqrt[3]{a}$ باشد: $a-2 \leq -\sqrt[3]{a} \Rightarrow a + \sqrt[3]{a} - 2 \leq 0$

برای حل نامعادله، تغییر متغیر $\sqrt[3]{a} = t$ را می دهیم:

$$t^3 + t - 2 \leq 0 \rightarrow \text{بر } t-1 \text{ بخش پذیری}$$

$$(t-1)(t^2+t+2) \leq 0 \rightarrow \begin{matrix} \text{پرانتر دوم} \\ \text{همواره مثبت} \end{matrix} \rightarrow t-1 \leq 0$$

$$\Rightarrow t \leq 1 \xrightarrow{t=\sqrt[3]{a}} \sqrt[3]{a} \leq 1 \Rightarrow a \leq 1$$

پس a فقط یک مقدار طبیعی $a=1$ را می تواند داشته باشد.

۴۳۶. گزینه ۲ زوج مرتبها را از x کوچک به بزرگ مرتب می کنیم:

$$(1, 1), (\sqrt[3]{2}, m^2 - 2), (3, 6), (10, 20)$$

در تابع اکیدا صعودی، با افزایش x ها، باید y ها هم زیاد شوند:

$$1 < m^2 - 2 < 6 < 20$$

فقط باید $1 < m^2 - 2 < 6$ را حل کنیم:

$$1 < m^2 - 2 < 6 \xrightarrow{+2} 3 < m^2 < 8$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} < |m| < 2\sqrt{2} \xrightarrow{\substack{\sqrt{3} \approx 1.7 \\ 2\sqrt{2} \approx 2.8}} \begin{cases} 1.7 < m < 2.8 \\ \text{یا} \\ -2.8 < m < -1.7 \end{cases}$$

پس m فقط دو مقدار صحیح ± 2 را می گیرد.

۴۳۷. گزینه ۴ زوج مرتبها را از x کوچک به بزرگ مرتب می کنیم:

$$(-1, a+1), (1, 3a+1), (2, 4a+3)$$

در تابع صعودی، با افزایش x ها، باید y ها زیاد شوند یا ثابت بمانند:

$$\underbrace{a+1 \leq 3a+1 \leq 4a+3}_{(2)}$$

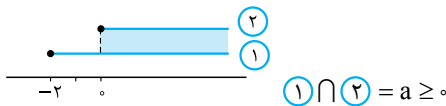
$$\underbrace{a+1 \leq 3a+1}_{(1)}$$

نامعادله بالا به دو نامعادله تقسیم می شود:

$$1) a+1 \leq 3a+1 \Rightarrow 2a \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$$

$$2) 3a+1 \leq 4a+3 \Rightarrow a \geq -2$$

اشتراک می گیریم:



۴۳۸. گزینه ۳ برای تشکیل $f+g$ ، اول دامنه اش را حساب می کنیم:

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{-3, 1, 5\}$$

در x های مشترک، مقدار $f+g$ را پیدا می کنیم:

$$\begin{cases} x = -3: f(-3) + g(-3) = m + 12 \\ x = 1: f(1) + g(1) = (m^2 - 1) + 1 = m^2 \\ x = 5: f(5) + g(5) = -m + 2 \end{cases}$$

در تابع نزولی با افزایش x ها، باید مقادیر y کم شوند یا ثابت بمانند:

$$\underbrace{-m+2 \leq m^2 \leq m+12}_{(2)}$$

$$\underbrace{-m+2 \leq m^2}_{(1)}$$

دو نامعادله را حل می کنیم:

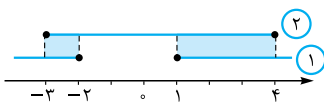
$$1) m^2 \geq -m+2 \Rightarrow m^2 + m - 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (m+2)(m-1) \geq 0 \xrightarrow{\text{نابین ریشه ها}} m \geq 1 \text{ یا } m \leq -2$$

$$2) m^2 \leq m+12 \Rightarrow m^2 - m - 12 \leq 0$$

$$\Rightarrow (m-4)(m+3) \leq 0 \xrightarrow{\text{بین}} -3 \leq m \leq 4$$

اشتراک می گیریم:



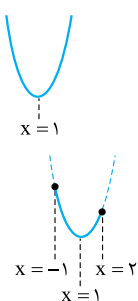
$$\textcircled{1} \cap \textcircled{2} = [-3, -2] \cup [1, 4]$$

$$\xrightarrow{\text{اعداد صحیح}} \{-3, -2, 1, 2, 3, 4\} \Rightarrow \text{مقدار } 6$$

۴۳۹. گزینه ۲ طول رأس سهمی $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ مهم است:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{6} = 1$$

دهانه هم که رو به بالاست. پس شکلش این جوری است:



بازه $[-1, 2]$ را روی سهمی مشخص می کنیم:

قسمت باقی مانده، ابتدا نزولی و سپس صعودی است.

حالا بین جواب‌های دو حالت، اجتماع می‌گیریم:

$$(1) \cup (2) = (0, 2] \cup \emptyset = (0, 2]$$

ضابطه سهمی را با داشتن ریشه‌هایش می‌نویسیم:

$$y = a(x-6)(x+2)$$

$$6 = a(-6)(2) \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$$

می‌گذرد، پس: $(0, 6)$

در نتیجه ضابطه سهمی به این شکل می‌شود:

$$f(x) = \frac{-1}{2}(x-6)(x+2) = \frac{-1}{2}x^2 + 2x + 6$$

$$g(x) = kx^2 + 4(\frac{-1}{2}x^2 + 2x + 6)$$

حالا ضابطه g را تشکیل می‌دهیم:

$$= kx^2 - 2x^2 + 8x + 24 = (k-2)x^2 + 8x + 24$$

می‌دانیم توابع درجه ۲، یکنوا نیستند، پس برای آن‌که g یکنوا باشد باید ضریب

$$k-2=0 \Rightarrow k=2$$

x^2 صفر باشد:

$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$

ریشه مخرج را حساب می‌کنیم: **گزینه ۴**

پس تابع در بازه‌های $(-\infty, 3)$ و $(3, +\infty)$ یکنواست.

با توجه به بازه یکنوایی $(-\infty, a)$ ، حداکثر a برابر ۳ است. (دقت کنید که چون

$$ad - bc = -7 < 0$$

پس تابع روی هر کدام از بازه‌ها نزولی است.)

$$y = \frac{-1}{x-2}$$

ریشه مخرج تابع y را پیدا می‌کنیم. **گزینه ۱**

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

پس تابع در بازه‌های $(-\infty, 2)$ و $(2, +\infty)$ اکیداً یکنواست.

با توجه به بسته بودن انتهای بازه $(-\infty, a]$ ، حداکثر مقدار صحیح a عدد ۱ است نه ۲.

(دقت کنید که $ad - bc = 1 > 0$ ، پس تابع در هر یک از بازه‌های

$$(-\infty, +\frac{d}{c}), (+\frac{d}{c}, +\infty)$$

صعودی است.)

$ad - bc$ باید مثبت باشد. **گزینه ۱**

$$1) y = \frac{x-1}{x+3} \Rightarrow ad - bc = 3+1=4 \checkmark$$

$$2) y = \frac{2x-3}{x+1} \Rightarrow ad - bc = 2+3=5 \checkmark$$

$$3) y = \frac{-x+1}{x+3} \Rightarrow ad - bc = -3-1=-4 \times$$

$$4) y = \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow ad - bc = -2-1=-3 \times$$

در بین دو گزینه باقی‌مانده باید چک کنیم، ریشه مخرج تابع، داخل بازه $(-2, +\infty)$ نباشد.

$$1) y = \frac{x-1}{x+3} \xrightarrow{x=-2} -3 \notin (-2, +\infty) \times$$

$$2) y = \frac{2x-3}{x+1} \xrightarrow{x=-1} -1 \in (-2, +\infty) \times$$

پس جواب، **۱** است.

ریشه مخرج را حساب می‌کنیم: **گزینه ۴**

$$2x - a = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2}$$

کافی است ریشه مخرج در بازه $(1, +\infty)$ نباشد، پس باید از $\frac{a}{2}$ کوچک‌تر یا

$$\frac{a}{2} \leq 1 \Rightarrow a \leq 2$$

مساوی باشد:

چون می‌خواهیم تابع اکیداً یکنوا باشد، پس تابع ما نباید تابع ثابت باشد.

گزینه ۴ دامنه تابع از حل نامعادله $|x-1| < 2$ به دست می‌آید:

$$|x-1| < 2 \Rightarrow -2 < x-1 < 2 \xrightarrow{+1} -1 < x < 3$$

ریشه‌های سهمی $f(x) = x^2 - 2x - 3$ را حساب می‌کنیم:

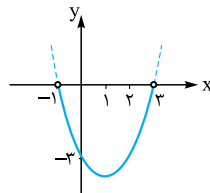
$$(x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$x_S = \frac{3+(-1)}{2} = 1$$

طول رأس هم میانگین ریشه‌ها است:

$$y_S = f(1) = -4$$

سهمی را رسم می‌کنیم:



در دامنه داده‌شده، سهمی غیریکنوا است

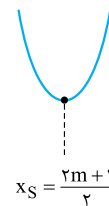
و چون زیر محور x هاست، پس مقادیرش

منفی است.

طول رأس سهمی برابر است با: **گزینه ۴**

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{2m+1}{2}$$

ضریب x^2 مثبت است، پس دهانه سهمی رو به بالاست:



برای آن که سهمی در بازه $[-1, 2]$ غیریکنوا باشد،

باید x_S در این بازه قرار گیرد:

$$-1 < x_S < 2 \Rightarrow -1 < \frac{2m+1}{2} < 2$$

$$\xrightarrow{\times 2} -2 < 2m+1 < 4 \xrightarrow{-1} -3 < 2m < 3$$

$$\xrightarrow{\div 2} -\frac{3}{2} < m < \frac{3}{2}$$

اول طول رأس سهمی $y = (\frac{1}{m})x^2 - x + 3$ را پیدا می‌کنیم: **گزینه ۲**

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2(\frac{1}{m})} = \frac{m}{2}$$

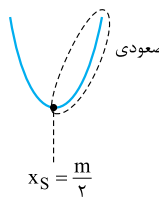
می‌کنیم:

چون علامت a را نداریم، باید در دو حالت بررسی کنیم:

(۱) ضریب x^2 یعنی $\frac{1}{m}$ مثبت باشد

($m > 0$). در این حالت سهمی این‌شکلی

است:



برای آن که در بازه $[1, +\infty)$ صعودی باشد باید ۱ یا روی رأس باشد یا بعد از

$$1 \geq \frac{m}{2} \Rightarrow m \leq 2$$

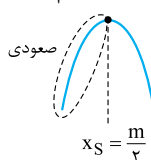
رأس، پس:

از اشتراک دو شرط $m > 0$ و $m \leq 2$ به $0 < m \leq 2$

می‌رسیم.

(۲) ضریب x^2 یعنی $\frac{1}{m}$ منفی باشد ($m < 0$). در این

حالت سهمی این‌شکلی است:



که با کمی دقت متوجه می‌شویم که امکان ندارد تابع در بازه $[1, +\infty)$ صعودی

باشد، چون تابع در بازه $[\frac{m}{2}, +\infty)$ نزولی است، هر چه که باشد باز هم امکان

ندارد که با $[1, +\infty)$ اشتراکی پیدا نکند! پس این حالت کلاً اتفاق نمی‌افتد.



گزینه ۱ | ۴۵۲ با توجه به ضابطه $f(x) = -x^2 + 2$ ، می‌فهمیم f تابعی اکیداً نزولی است.

نامعادله را به شکل روبه‌رو می‌نویسیم:
 $f(f(x)) > f(x^2)$
 با حذف f ها، جهت نامساوی عوض می‌شود:
 $f(x) < x^2$
 حالا جای $f(x)$ ، ضابطه‌اش را می‌نویسیم:

$-x^2 + 2 < x^2 \Rightarrow x^2 + x^2 - 2 > 0$
 عبارت $x^2 + x^2 - 2$ به ازای $x = 1$ صفر می‌شود، پس بر $x - 1$ بخش‌پذیر است. اگر $x^2 + x^2 - 2$ را بر $x - 1$ تقسیم کنیم، خارج قسمت $x^2 + 2x + 2$ می‌شود، پس:
 $x^2 + x^2 - 2 > 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 + 2x + 2) > 0$
 چون دلتای $x^2 + 2x + 2$ منفی و ضریب x^2 مثبت است، پس همواره مثبت است و می‌توانیم حذفش کنیم:

$(x - 1)(x^2 + 2x + 2) > 0 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

گزینه ۱ | راه ۱ | ۴۵۳ برای f یک نمودار اکیداً نزولی که محور x ها را در ۳ قطع کند، رسم می‌کنیم:
 برای دامنه تابع رادیکالی g ، باید زیرش را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم:
 $xf(x) \geq 0$

برای رسم جدول تعیین علامت، ریشه‌های عبارت را پیدا می‌کنیم:

جدول می‌کشیم:

x	-	۰	۳	+
$f(x)$	+	+	+	-
کل	-	+	-	-

پس: $D_g = [0, 3]$

راه ۲ | ۴۵۴ می‌توانیم برای f یک تابع مثال بزنیم. ساده‌ترین تابع، تابع خطی است پس $f(x) = -x + 3$ را در نظر می‌گیریم (+۳) را برای این نوشتیم که تابع، محور x ها را در نقطه $x = 3$ قطع کند. حالا دامنه تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ را پیدا می‌کنیم:
 $y = \sqrt{x(-x + 3)}$
 $x(-x + 3) \geq 0$

تعیین علامت x $- \infty$ 0 3 $+\infty$

x	-	۰	۳	+
$f(x)$	+	+	+	-
کل	-	+	-	-

راه ۱ | ۴۵۴ برای f یک نمودار اکیداً صعودی که محور x ها را در ۲ قطع کند، رسم می‌کنیم:
 برای دامنه تابع رادیکالی $g(x) = \sqrt{(x^2 - x)f(x)}$ ، باید زیرش را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$(x^2 - x)f(x) \geq 0 \Rightarrow x(x - 1)f(x) \geq 0$

جدول تعیین علامت می‌کشیم:

x	-	۰	۱	۲	+
$f(x)$	-	-	-	+	+
$(x^2 - x)$	+	-	+	+	+
کل	-	+	-	+	+

پس: $D_g = [0, 1] \cup [2, +\infty)$ دامنه g و شامل تمام اعداد طبیعی می‌باشد.

برای آن که تابع $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ثابت نباشد، باید شرط $ad - bc \neq 0$ داشته باشد، پس در تابع $f(x) = \frac{x + 1}{2x - a}$ باید:

$(-1)(-a) - (1)(2) \neq 0 \Rightarrow -a - 2 \neq 0 \Rightarrow a \neq -2$
 از دو شرط $a \leq 2$ و $a \neq -2$ به مجموعه $\{-2\} - (-\infty, 2]$ می‌رسیم.

گزینه ۳ | ۴۴۸ از آن جایی که تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{2x + b}{3x + d}$ در بازه‌های $(-\infty, -2)$ و $(-2, +\infty)$ یکنوا اکید است، نتیجه می‌گیریم عدد -2 ، ریشه مخرج است:
 $3(-2) + d = 0 \Rightarrow d = 6$
 تا این‌جا ضابطه f به شکل $f(x) = \frac{2x + b}{3x + 6}$ درآمد. این تابع، محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند: $b = -2$
 $f(1) = 0 \Rightarrow 2 + b = 0 \Rightarrow b = -2$ و $d = 6$ ، یکنوایی گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

نزولی اکید \rightarrow نمایی با پایه بین صفر و ۱ $y = 6^{-x} = (\frac{1}{6})^x$ **۱**

نزولی اکید \rightarrow نمودار $y = -2x^3$ **۲**

۳ $y = 6x - 2|x| = \begin{cases} 4x & x \geq 0 \\ 8x & x < 0 \end{cases}$

چون شیب هر دو ضابطه مثبت شد و تابع ناپیوستگی ندارد، پس صعودی اکید است.

نزولی اکید \rightarrow شیب منفی $y = -2x + 6$ پس جواب **۳** است.

گزینه ۴ | ۴۴۹ چون f نزولی است، پس بعد از حذف f ، جهت نامساوی عوض می‌شود: $2a - 1 < 5 - a \xrightarrow{\text{تغییر جهت}} 2a - 1 > 5 - a \Rightarrow 3a < 6 \Rightarrow a < 2$

گزینه ۳ | ۴۵۰ برای دامنه تابع رادیکالی g ، باید زیرش را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم: $f(2x + 1) - f(x - 2) \geq 0 \Rightarrow f(2x + 1) \geq f(x - 2)$
 حالا باید بگوییم چون f نزولی است، پس با حذف f ها، جهت عوض می‌شود:
 $f(2x + 1) \geq f(x - 2) \xrightarrow{f \text{ نزولی}} 2x + 1 \leq x - 2 \Rightarrow x \leq -3$
 پس، $D_g = (-\infty, -3]$

گزینه ۱ | ۴۵۱ $f(x) = \frac{-x + 1}{x}$ یک تابع هموگرافیک است. $ad - bc = (-1)(0) - (1)(1) = -1$ را حساب می‌کنیم:
 ریشه مخرج هم $x = 0$ است.
 پس این تابع در بازه‌های قبل و بعد ریشه مخرج، اکیداً نزولی است.

با توجه به این که $1 + x^2$ و $3 + x^2$ هر دو بزرگ‌تر از صفر هستند، پس هر دو در شاخه $(0, +\infty)$ قرار دارند. می‌خواهیم نمودار تابع $f(1 + x^2)$ بالای نمودار $f(3 + x^2)$ باشد:
 $f(1 + x^2) > f(3 + x^2)$

چون f اکیداً نزولی است (در شاخه $(0, +\infty)$)، پس با حذف f ها، جهت عوض می‌شود:
 $1 + x^2 < 3 + x^2 \Rightarrow x^2 - x^2 - 2 < 0$

جمله مشترک $\rightarrow (x^2 - 2)(x^2 + 1) < 0$
 همواره مثبت

$\Rightarrow x^2 - 2 < 0 \Rightarrow x^2 < 2 \Rightarrow |x| < \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$
 فقط بازه $(-1, 1)$ ، زیرمجموعه بازه $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ است.

۴۵۷. گزینه ۲ همه جملات را بررسی می‌کنیم:

(الف) جمع تابع صعودی و نزولی، نامشخص است یعنی می‌تواند صعودی یا نزولی یا ثابت یا غیریکنوا شود. مثلاً اگر $f(x) = 3x + 1$ و $g(x) = -x - 1$ باشد، آن وقت $(f+g)(x) = 2x$ که تابعی صعودی است.

(ب) جمع صعودی اکید و صعودی، تابعی صعودی اکید است.

(پ) اگر g نزولی باشد، آن‌گاه $-g$ صعودی است، پس:

$$f - g = f + (-g) = \text{صعودی اکید} + \text{صعودی اکید} = \text{صعودی اکید}$$

(ت) اگر f صعودی اکید و g تابعی ثابت باشد، fg می‌تواند صعودی اکید یا نزولی اکید یا ثابت باشد:

$$f(x) = x, g(x) = 2 \Rightarrow (fg)(x) = 2x \Rightarrow \text{صعودی اکید}$$

$$f(x) = x, g(x) = -2 \Rightarrow (fg)(x) = -2x \Rightarrow \text{نزولی اکید}$$

$$f(x) = x, g(x) = 0 \Rightarrow (fg)(x) = 0 \Rightarrow \text{ثابت}$$

پس دو جمله (ب) و (پ) درست بودند.

۴۵۸. گزینه ۲ با فرض $g(x) = -x^3$ ، جای $f(-x^3)$ می‌توانیم بنویسیم $f \circ g$.

سؤال گفته f اکیداً نزولی است، از طرفی $g(x) = -x^3$ هم اکیداً نزولی است. با توجه به این که ضرب دو عدد منفی، عددی مثبت است: $(-)(-) \Rightarrow (+)$

$f, g \Rightarrow fog$
صعودی نزولی نزولی پس:

۴۵۹. گزینه ۴ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

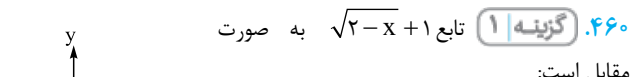
۱) $f(x) + \sqrt{x} = \text{صعودی} + \text{صعودی} = \text{صعودی}$

۲) $g \circ g(x) \Rightarrow (-) \times (-) \times (+) = (+) \Rightarrow \text{صعودی}$

۳) $g(x^2) \Rightarrow (-) \times \text{نامشخص} \Rightarrow \text{نامشخص}$

۴) $(f \circ g \circ f)(x) \Rightarrow (+) \times (-) \times (+) \times (+) = - \Rightarrow \text{نزولی}$

۴۶۰. گزینه ۱ تابع $\sqrt{2-x} + 1$ به صورت مقابل است:



این تابع، اکیداً نزولی است و مقادیرش تغییر علامت نمی‌دهند (چون بالای محور x هاست)، پس

$\frac{1}{\sqrt{2-x} + 1}$ تابعی اکیداً صعودی می‌شود.

۴۶۱. گزینه ۲ برای f یک ضابطه در نظر می‌گیریم؛ مثلاً $y = -(2^x)$.

f نزولی اکید و زیر محور x هاست.

حالا دو ضابطه را تشکیل می‌دهیم و با مقایسه مقادیر در $x = 1$ و $x = 2$ ، وضعیت یکنوایی را مشخص می‌کنیم (چون در گزینه‌ها غیریکنوا نداریم، مشکلی پیش نمی‌آید).

$$g(x) = -x \cdot f(x) = x \cdot 2^x \Rightarrow \begin{cases} g(1) = 2 \\ g(2) = 8 \end{cases} \Rightarrow \text{اکیداً صعودی}$$

$$h(x) = \frac{1}{f(-x)} = \frac{1}{-2^{-x}} = \frac{1}{-(\frac{1}{2})^x} \Rightarrow \text{اکیداً نزولی}$$

۴۶۲. گزینه ۱ با توجه به نمودار، $f(x)$ تابعی اکیداً نزولی است، پس

$-f(x)$ تابعی اکیداً صعودی است. از طرفی جمع دو تابع اکیداً صعودی، تابعی

اکیداً صعودی است:

$$\underbrace{\sqrt{x}}_{\text{اکید صعودی}} + \underbrace{(-f(x))}_{\text{اکید صعودی}} = \text{اکید صعودی}$$

راه II

می‌توانیم برای f یک تابع ساده (مثلاً خطی) مثال بزنیم که اکیداً صعودی باشد و محور طول‌ها را در نقطه $x = 2$ قطع کند یعنی $f(x) = x - 2$ ، حالا دامنه تابع $y = \sqrt{(x^2 - x)f(x)}$ را پیدا می‌کنیم:

$$y = \sqrt{(x^2 - x)(x - 2)} = \sqrt{x(x - 1)(x - 2)}$$

$$x(x - 1)(x - 2) \geq 0$$

حالا جدول تعیین علامت می‌کشیم:

x		۰	۱	۲	
		-	+	-	+
		جواب		جواب	

$$D_g = [0, 1] \cup [2, +\infty)$$

پس:

۴۵۵. گزینه ۴ عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) \geq 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) \geq f(x)$$

$f(x) = 2^x$ تابعی اکیداً صعودی است، پس با حذف f ها، علامت برنمی‌گردد:

$$\frac{1}{x} \geq x$$

نامعادله به دست آمده را حل می‌کنیم:

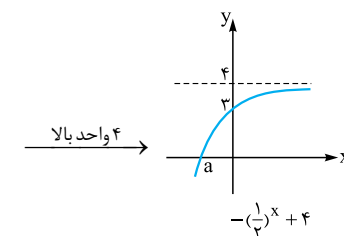
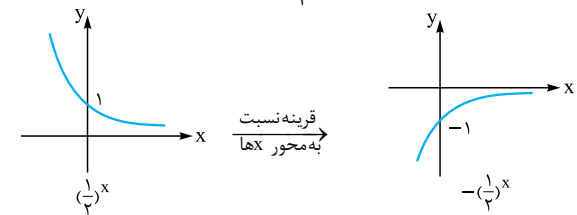
$$\frac{1}{x} - x \geq 0 \Rightarrow \frac{1 - x^2}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{(1-x)(1+x)}{x} \geq 0$$

جدول تعیین علامت می‌کشیم:

x		-۱	۰	۱	
		+	-	+	-
		جواب		جواب	

پس: $(-\infty, -1] \cup (0, 1]$

۴۵۶. گزینه ۲ نمودار تابع $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 4$ را می‌کشیم:



محل برخورد تابع نهایی با محور x ها مهم است:

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^x + 4 = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \Rightarrow x = -2$$

پس f تابعی اکیداً صعودی با ریشه $x = -2$ است.

برای محاسبه دامنه تابع رادیکالی $g(x) = \sqrt{x f(x)}$ ، زیرش را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x f(x) \geq 0$$

جدول تعیین علامت می‌کشیم:

		-۲	۰		
x		-	-	+	
$f(x)$		-	+	+	
کل		+	-	+	
		جواب		جواب	

$$D_g = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty) = \mathbb{R} - (-2, 0)$$

پس:

برای به دست آوردن بُرد تابع اکیداً صعودی که ناپیوستگی ندارد، مقادیر تابع را در نقاط ابتدا و انتهای دامنه حساب می‌کنیم. دامنه \sqrt{x} بازه $[0, +\infty)$ و دامنه f ، بازه $(2, 5)$ است که اشتراکشان $(2, 5)$ می‌شود، پس:

$$g(x) = \sqrt{x} - f(x) \xrightarrow{\text{برد}} \begin{cases} g(2) = \sqrt{2} - f(2) = \sqrt{2} - 3 \\ g(5) = \sqrt{5} - f(5) = \sqrt{5} + 1 \end{cases}$$

پس بردمان محدوده $[\sqrt{2} - 3, \sqrt{5} + 1]$ است که تقریباً $[-1/6, 3/2]$ می‌شود. الان اگر براکت بگیریم، بردمان شامل $3, 2, 1, 0, -1, -2$ می‌شود.

۴۶۳. گزینه ۴ دقت کنید دامنه‌های هر دو تابع محدود است. هر دو تابع

را بررسی می‌کنیم.

$$(1) \quad f(x) = \frac{-1}{x} + \sqrt{x} \quad \text{دامنه } f \text{ بازه } (0, +\infty) \text{ است.}$$

نمودار $y = \frac{-1}{x}$ در این بازه به صورت روبه‌رو است:

$$f(x) = \frac{-1}{x} + \sqrt{x} \Rightarrow \text{صعودی صعودی}$$

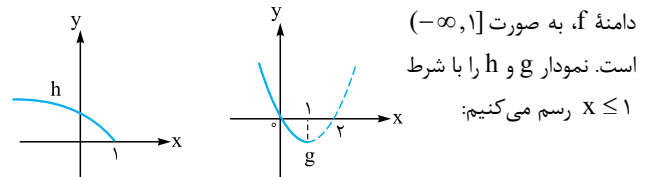
$$(2) \quad g(x) = |x| + \sqrt{-x} \quad \text{دامنه } g, \text{ بازه } (-\infty, 0] \text{ است.}$$

پس جای $|x|$ می‌توانیم $-x$ قرار دهیم:

$$g(x) = -x + \sqrt{-x} \Rightarrow \text{نزولی نزولی}$$

۴۶۴. گزینه ۲ تابع f را به صورت جمع دو تابع $g(x) = x^2 - 2x$ و

$$f(x) = \underbrace{x^2 - 2x}_{g(x)} + \underbrace{\sqrt{1-x}}_{h(x)} \quad \text{می‌بینیم: } h(x) = \sqrt{1-x}$$



دامنه f ، به صورت $(-\infty, 1]$

است. نمودار g و h را با شرط

$x \leq 1$ رسم می‌کنیم:

هر دو تابع، اکیداً نزولی هستند. چون جمع دو تابع اکیداً نزولی، تابعی اکیداً نزولی است، پس f اکیداً نزولی است.

۴۶۵. گزینه ۲ دامنه تابع f را حساب می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{x} \Rightarrow x \geq 0 \\ \sqrt[3]{x^2 - 1} \xrightarrow{\text{مخرج}} x \neq \pm 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = [0, 1) \cup (1, +\infty)$$

در دو بازه $[0, 1)$ و $(1, +\infty)$ ، یکنوایی تابع را بررسی می‌کنیم.

(۱) تابع $y = 2\sqrt{x}$ در هر دو بازه بالا صعودی اکید است.

(۲) تابع $y = \frac{-3}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$ را مرحله‌به‌مرحله بررسی می‌کنیم:

$$y = \sqrt[3]{x^2 - 1} \xrightarrow{\sqrt[3]{\quad}} y = x^2 - 1 \quad \text{صعودی اکید}$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} \xrightarrow{x - \frac{3}{2}} y = \frac{-3}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

$$y = \frac{-3}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} \quad \text{صعودی اکید}$$

از طرفی می‌دانیم مجموع دو تابع صعودی اکید، تابعی صعودی اکید است، پس

$$f(x) = \underbrace{2\sqrt{x}}_{\text{صعودی اکید}} + \underbrace{\frac{-3}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}}_{\text{صعودی اکید}} \quad \text{تابع } f(x) \text{ صعودی اکید است.}$$