درس دوم: بخش‌پذیری در اعداد صحیح

چرا می‌گوییم عدد ۶ بر ۲ بخش‌پذیر است اما عدد ۵ بر ۲ بخش‌پذیر نیست؟ پاسخ ساده است، چون $\frac{۶}{۳}$ برابر ۲ است که عددی صحیح است ولی $\frac{۵}{۲}$ برابر ۲/۵ است که صحیح نیست. بنابراین می‌توانیم بگوییم اگر کسر $\frac{a}{b}$ عددی صحیح شود a بر b بخش‌پذیر است. یعنی اگر داشته باشیم $\frac{a}{b} = q$ $(q \in \mathbb{Z})$ می‌توانیم بگوییم a بر b بخش‌پذیر است. اما در تعریف بخش‌پذیری، این رابطه به دلایلی طرفین‌وسطین می‌شود.

یعنی:

عدد a را بر b بخش‌پذیر می‌گویند هرگاه $a = bq$.

قبل از این‌که بحث را ادامه دهیم یک چیز مهمی که باید دربارهٔ عدد بگوییم این است که منظور از عدد در بخش نظریهٔ اعداد، عددهای صحیح است.

مثلاً نمی‌توانیم بگوییم $\sqrt{۶}$ بر $\sqrt{۲}$ بخش‌پذیر است.

اما گفتیم هرگاه $a = bq$ یعنی a بر b بخش‌پذیر است.

برای مثال از تساوی $۲ \times ۵ = ۱۰$ می‌توان نتیجه گرفت ۱۰ بر ۲ بخش‌پذیر است و هم‌چنین ۱۰ بر ۵ نیز بخش‌پذیر است. حالا یک مفهومی وجود دارد که تقریباً برعکس مفهوم بخش‌پذیری است. یعنی وقتی می‌گوییم ۱۰ بر ۵ بخش‌پذیر است، می‌توانیم بگوییم ۵ می‌شمارد یا عاد می‌کند ۱۰ را.

به طور کلی وقتی داریم $a = bq$، می‌توانیم بگوییم a بر b بخش‌پذیر است و b می‌شمارد a را.

b می‌شمارد یا عاد می‌کند a را، هرگاه داشته باشیم $a = bq$ و می‌نویسیم: $b \mid a$

$$b \mid a \iff a = bq$$

خُب! خوب است حالا یک ذره از این مفهوم بخش‌پذیری و عادکردن سؤال حل کنیم تا راحت‌تر جا بیفتد.

- هر یک از رابطه‌های $۱۵ \mid x$ و $x \mid ۹۰$ به ازای چند عدد طبیعی دورقمی برقرار است؟ به ازای چند عدد طبیعی دورقمی هر دو رابطه برقرار است؟

$۱۵ \mid x$ دقیقاً یعنی چی؟ یک کمی قبل دیدیم که رابطهٔ عادکردن، یک تساوی معادل داشت، یعنی با توجه به رابطهٔ: $b \mid a \iff a = bq$ می‌توان نوشت:

$$۱۵ \mid x \Rightarrow x = ۱۵q$$

خب حالا قرار است x یک عدد طبیعی دورقمی باشد، پس:

$$۱۰ \le ۱۵q \le ۹۹ \Rightarrow \frac{۱۰}{۱۵} \le q \le \frac{۹۹}{۱۵} \Rightarrow q = ۱,۲,۳,۴,۵,۶$$

پس رابطه به ازای ۶ عدد برقرار است. اگر بخواهیم این عددها را پیدا کنیم، کافی است جای q مقادیر بالا را قرار دهیم. در این صورت:

$$x = ۱۵,۳۰,۴۵,۶۰,۷۵,۹۰$$

همان‌طور که می‌بینید، این‌ها مضارب ۱۵ هستند، به بیان دیگر رابطهٔ $۱۵ \mid x$ یعنی این‌که x بر ۱۵ بخش‌پذیر است یا این‌که «x یک مضرب ۱۵» است.

اما برسیم به رابطهٔ $x \mid ۹۰$.

این‌جا xهایی به درد ما می‌خورد که ۹۰ بر آن‌ها بخش‌پذیر باشد، خب ۹۰ به چه عددهای دورقمی بخش‌پذیر است؟ ۹۰، ۴۵، ۳۰، ۱۸، ۱۵، ۱۰ این عددها در حقیقت مقسوم‌علیه‌های طبیعی دورقمی ۹۰ هستند.

اگر بخواهیم x عددی باشد که در هر دو رابطهٔ $x \mid 15$ و $x \mid 90$ صدق کند، یعنی از یک طرف x باید مضرب ۱۵ باشد و از طرف دیگر باید x یک شمارنده یا مقسوم‌علیه ۹۰ باشد.

در این حالت عددهای قابل قبول که همان اشتراک دو حالت قبلی هستند، عبارت‌اند از ۹۰، ۴۵، ۳۰ و ۱۵.

اگر داشته باشیم $x \mid a$ یعنی x مضرب a است. یا به عبارت دیگر x بر a بخش‌پذیر است.

اگر داشته باشیم $a \mid x$ یعنی x شمارنده یا مقسوم‌علیه a است یا به عبارت دیگر a بر x بخش‌پذیر است.

تست **اگر a عددی طبیعی باشد رابطهٔ $a+1 \mid a^2-1$ .... رابطهٔ $a+1 \mid a^2+3a+2$ ....**

۱) همواره برقرار است و ـ نیز همواره برقرار است.

۲) همواره برقرار است ولی ـ به ازای همهٔ مقادیر a برقرار نیست.

۳) به ازای همهٔ مقادیر a برقرار نیست ولی ـ همواره برقرار است.

۴) به ازای همهٔ مقادیر a برقرار نیست و ـ نیز به ازای همهٔ مقادیر a برقرار نیست.

پاسخ **گزینهٔ ۲** دیدیم که رابطهٔ $a \mid b$ زمانی برقرار است که عدد صحیحی مثل q پیدا شود به طوری که $a = bq$. حالا با توجه به این‌که $a^2-1=(a-1)(a+1)$. الان ضرب دو عدد $(a-1)$ و $(a+1)$ شده a^2-1 پس می‌توان نتیجه گرفت $a-1 \mid a^2-1$ و $a+1 \mid a^2-1$.

پس رابطهٔ اول برقرار است.

اما با توجه به این‌که: $a^2+3a+2=(a+1)(a+2)$ می‌توان نتیجه گرفت $a+1 \mid a^2+3a+2$ و $a+2 \mid a^2+3a+2$. اما رابطهٔ $a^2+3a+2 \mid a+1$ به ازای همهٔ مقادیر a برقرار نیست. برای مثال اگر $a=1$ باشد باید $2 \mid 6$ که این رابطه نادرست است.

برای تشخیص این‌که یک رابطهٔ عادکردن درست است یا نه، یک کار ساده می‌شود کرد. کافی است رابطهٔ عادکردن را نود درجه خلاف جهت عقربه‌های ساعت بچرخانید تا یک کسر به وجود آید. حالا اگر حاصل این کسر عددی صحیح شد، رابطه درست و اگر نشد رابطه درست نیست. برای مثال بیایید درستی یا نادرستی رابطه‌های زیر را بررسی کنیم:

الف) $18 \mid -6$ ب) $3^3 \mid 3^5$ پ) $0 \mid a^2+1$

خُب! با توجه به چیزی که گفتیم، هر یک از رابطه‌ها را به یک کسر تبدیل می‌کنیم.

الف) $\frac{18}{-6}=-3$ -3 عددی صحیح است پس رابطه درست است.

ب) $\frac{3^3}{3^5}=\frac{1}{9}$ $\frac{1}{9}$ عددی صحیح نیست، پس رابطه درست نیست.

پ) $\frac{0}{a^2+1}=0$ صفر عددی صحیح است، پس رابطه درست است.

تست **چند عدد طبیعی سه‌رقمی وجود دارد که بر ۵۵ بخش‌پذیر باشد؟**

۱) ۱۶   ۲) ۱۷   ۳) ۱۸   ۴) ۱۹

پاسخ **گزینهٔ ۲** با توجه به آن‌چه گفتیم اگر بر ۵۵ بخش‌پذیر باشد، یعنی $55 \mid x$ داریم: $55 \mid x \Rightarrow x=55q$

می‌خواهیم x سه‌رقمی باشد، بنابراین: $100 \le 55q < 1000 \Rightarrow 1/8 \le q < 18/1$

بنابراین q از ۲ تا ۱۸ می‌تواند تغییر کند. می‌دانیم تعداد عددهای بزرگ‌تر مساوی عدد a و کوچک‌تر مساوی عدد b برابر است با $b-a+1$. بنابراین:

$18-2+1=17$

اما یک جور دیگر هم می‌شود به این سؤال پاسخ داد که کمی کوتاه‌تر است. اما قبل از آن یک نکته:

به این سؤال ساده توجه کنید: ۳۰ سیب را بین ۷ نفر تقسیم می‌کنیم، به هر کدام چند سیب می‌رسد؟

نه! سرکارتان نگذاشته‌ام. یک هدفی دارم از این سؤال. جواب که ساده است: $\left[\frac{30}{7}\right]=4$

نتیجه‌ای که می‌خواستم از این سؤال بگیرم این بود که:

تعداد مضارب طبیعی عدد a که کوچک‌تر مساوی عدد n است برابر است با: $\left[\frac{n}{a}\right]$

حالا در سؤال قبل می‌خواستیم مضارب سه‌رقمی عدد ۵۵ را حساب کنیم. برای این کار کافی است مضارب ۵۵ را در فاصلهٔ ۱ تا ۹۹۹ حساب کنیم ولی چون فقط مضارب سه‌رقمی ۵۵ را می‌خواهیم پیدا کنیم باید آن قسمتی را که زیادی حساب کرده‌ایم، کم کنیم. یعنی:

$\boxed{1,2,3,\ldots,99,\boxed{100,101,\ldots,999}}$

$$\left[\frac{999}{55}\right]-\left[\frac{99}{55}\right]=18-1=17$$

بگذارید، این کار را کمی تمرین کنیم.

مثال هر یک از مجموعه‌های زیر چند عضو دارد؟

الف) $\{x \in \mathbb{N} : ۷ | x , ۲۱۰ < x < ۶۳۰\}$

ب) $\{x \in \mathbb{N} : ۸ | x , ۳۲۰ \le x < ۸۰۰\}$

پ) $\{x \in \mathbb{N} : ۹ | x , ۵۴۰ < x \le ۹۹۰\}$

ت) $\{x \in \mathbb{N} : ۱۱ | x , ۲۲۰ \le x \le ۱۰۰۱\}$

حل الف) بازهٔ $۲۱۰ < x < ۶۳۰$ است. یعنی: ۲۱۱,۲۱۲,...,۶۲۹. برای پیداکردن مضارب ۷ در این فاصله یک بار مضارب طبیعی ۱ تا ۶۲۹ را پیدا می‌کنیم سپس مضارب ۷ را در قسمتی که زیادی حساب کرده‌ایم، کم می‌کنیم. یعنی:

$\boxed{۱,۲,...,۲۱۰, \boxed{۲۱۱,۲۱۲,...,۶۲۹}}$

$$\left[\frac{۶۲۹}{۷}\right] - \left[\frac{۲۱۰}{۷}\right] = ۸۹ - ۳۰ = ۵۹$$

ب) با توجه به این‌که $۳۲۰ \le x < ۸۰۰$ بازهٔ موردنظر ما ۳۲۰,۳۲۱,...,۷۹۹ است. بنابراین:

$\boxed{۱,۲,...,۳۱۸,۳۱۹, \boxed{۳۲۰,۳۲۱,...,۷۹۹}}$

$$\left[\frac{۷۹۹}{۸}\right] - \left[\frac{۳۱۹}{۸}\right] = ۹۹ - ۳۹ = ۶۰$$

دقت کنید که ما می‌خواهیم مضارب ۸ را از ۳۲۰ تا ۷۹۹ حساب کنیم. بنابراین خود ۳۲۰ را باید جزء اعدادی که می‌خواهیم حساب کنیم. یعنی مضارب ۸ را در ۳۱۹ عدد اول حذف کنیم.

پ) بازهٔ موردنظر $۵۴۰ < x \le ۹۹۰$ است، یعنی ما مضارب ۹ را در بازهٔ ۵۴۱,...,۹۹۰ می‌خواهیم. همانند آن‌چه در قسمت‌های قبل انجام دادیم، داریم:

$\boxed{۱,۲,...,۵۴۰, \boxed{۵۴۱,...,۹۹۰}}$

$$\left[\frac{۹۹۰}{۹}\right] - \left[\frac{۵۴۰}{۹}\right] = ۱۱۰ - ۶۰ = ۵۰$$

دقت کنید که اگر یک عدد جابه‌جا در براکت‌ها قرار دهیم جوابمان غلط می‌شود. بنابراین خیلی مهم است که حدود این بازه‌ای را که می‌خواهیم درست تشخیص دهیم.

ت) در این قسمت $۲۲۰ \le x \le ۱۰۰۱$ است. یعنی باید مضارب ۱۱ را از ۲۲۰ تا ۱۰۰۱ حساب کنیم و حواستان باشد که خود دو عدد ۲۲۰ و ۱۰۰۱ را هم باید حساب کنیم. چون هر دوشان مضرب ۱۱ هستند. یعنی یک بار مضارب ۱۱ را از یک تا ۱۰۰۱ حساب می‌کنیم و بعد مضارب ۱۱ را در آن بخشی که نمی‌خواهیم یعنی ۱ تا ۲۱۹ کم می‌کنیم.

$\boxed{۱,...,۲۱۹, \boxed{۲۲۰,۲۲۱,...,۱۰۰۱}}$

$$\left[\frac{۱۰۰۱}{۱۱}\right] - \left[\frac{۲۱۹}{۱۱}\right] = ۹۱ - ۱۹ = ۷۲$$

در این مدل سؤال‌ها اگر خیلی علاقه‌مند به فرمول هستید، یک پیشنهادی برای شما دارم. اول با توجه به حدود x بازه را مشخص کنید. برای مثال دیدیم که در قسمت (پ)، $۲۲۰ \le x \le ۱۰۰۱$ است. یعنی بازهٔ موردنظر $\boxed{۲۲۰,۲۲۱,...,۱۰۰۱}$ است.

حالا آخرین عدد قابل قبول که این‌جا ۱۰۰۱ است را بگذارید در صورت جزءصحیح اول و از اولین عدد قابل قبول بازه که ۲۲۰ است یکی کم کنید و بگذارید صورت جزءصحیح دوم.

$$\boxed{\text{در حالت کلی:} \left[\frac{\text{آخرین عدد بازه}}{n}\right] - \left[\frac{\text{اولین عدد بازه منهای یک}}{n}\right]}$$

(۱) قبل از این‌که برسیم به ویژگی‌های بخش‌پذیری، بد نیست به چند مثال دیگر از مفهوم بخش‌پذیری و رابطهٔ عادکردن توجه کنیم.

تست به ازای چند عدد صحیح مانند x هر دو رابطهٔ $۱۲ | x$ و $x | ۲۴۰$ برقرار است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ گزینهٔ ۱ از رابطهٔ $۱۲ | x$ می‌فهمیم که x مضرب ۱۲ است، یعنی می‌توانیم هر عددی که بر ۱۲ بخش‌پذیر است را به جای x قرار دهیم، عددهایی مثل $۰, \pm۱۲, \pm۲۴, \pm۳۶, ...$ اما آیا ما همهٔ این عددها را می‌خواهیم؟ نه، فقط آن دسته از عددها را می‌خواهیم که در رابطهٔ $x | ۲۴۰$ نیز صدق کنند.

حالا یا باید یکی‌یکی این مضارب ۱۲ را چک کنیم و ببینیم کدام آن‌ها شمارندهٔ ۲۴۰ هم هست یا نه (که البته واضح است راه خوبی نیست.) یا این‌که:

$$۱۲ | x \Rightarrow x = ۱۲q$$

حالا x را در رابطهٔ $x | ۲۴۰$ جایگزین می‌کنیم:

$$۱۲q | ۲۴۰ \Rightarrow q | ۲۰$$

خب، کار ساده‌تر شد. کافی است مقسوم‌علیه‌های ۲۰ را پیدا کنیم. ۲۰ بر چه عددهایی بخش‌پذیر است؟

$$\pm۱, \pm۲, \pm۴, \pm۵, \pm۱۰, \pm۲۰$$

یعنی به ازای ۱۲ عدد این رابطه برقرار است.

تست به ازای چند عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱۰ و کوچک‌تر از ۲۰ مانند x، رابطهٔ $x \mid 10!$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ گزینهٔ۴ می‌دانیم $1\times2\times3\times\cdots\times8\times9\times10=10!$ اگر رابطهٔ $x \mid 10!$ را به صورت کسر نشان دهیم این‌طوری می‌شود:

$$\frac{10!}{x}=\frac{10\times9\times\cdots\times2\times1}{x}$$

یکی‌یکی عددها را بررسی می‌کنیم. مشخص است که اگر جای x عدد ۱۱ را قرار دهیم، کسر ساده نمی‌شود، چون ۱۱ را با هیچ چیزی نمی‌شود ساده کرد. اما اگر جای x عدد ۱۲ را قرار دهیم با توجه به این‌که $12=6\times2$ کسر ساده می‌شود، یعنی $12 \mid 10!$ به همین ترتیب $10!$ بر عددهای زیر نیز بخش‌پذیر است.

$18=9\times2$ $16=8\times2$ $15=5\times3$ $14=7\times2$

تست کوچک‌ترین مقدار n برای آن‌که رابطهٔ $715 \mid n!$ برقرار باشد، چه مجموع ارقامی دارد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۱۱ ۴) ۱۳

پاسخ گزینهٔ۲ کلید پاسخ‌دادن به این سؤال این است که ۷۱۵ را تجزیه کنیم: $715=5\times11\times13$

حالا اگر رابطهٔ $715 \mid n!$ را به صورت یک کسر بنویسیم، داریم: $\frac{n!}{715}=\frac{n!}{5\times11\times13}$

خب حالا باید کوچک‌ترین عدد فاکتوریلی را پیدا کنیم که هر سه عدد ۵، ۱۱ و ۱۳ را در تجزیه‌اش داشته باشد. به نظر شما اگر جای n عدد $11!$ را قرار دهیم رابطه درست می‌شود؟ معلوم است که نه، چون ۱۳ توی مخرج باقی می‌ماند. اما اگر $n=13$ باشد $13!$ هم عامل ۵ دارد، هم عامل ۱۱ دارد و هم عامل ۱۳، بنابراین پاسخ سؤال $13!$ است که مجموع ارقام عدد ۱۳ برابر است با $1+3=4$.

ویژگی‌های بخش‌پذیری

رابطهٔ $6 \mid 12$ را در نظر بگیرید. کسر معادل این رابطه $\frac{12}{6}$ است که عددی صحیح است. می‌دانیم اگر یک عدد صحیح را در یک عدد صحیح دیگر ضرب کنیم، حاصل عددی صحیح می‌شود. برای مثال $\frac{12}{6}\times5=10$ که عددی صحیح است. حالا اگر همین را به صورت یک رابطهٔ عادکردن نشان دهیم، این‌طوری می‌شود:

$$6 \mid 12 \xrightarrow{\text{سمت راست}\times5} 6 \mid 60$$

در حالت کلی می‌شود گفت سمت راست رابطهٔ عادکردن را می‌توان در هر عدد صحیحی ضرب کرد. یعنی:

$$\boxed{a \mid b \Rightarrow a \mid mb}$$

اما سمت چپ را چه‌طور؟ آیا سمت چپ رابطهٔ عادکردن را هم می‌شود در هر عددی ضرب کنیم؟ پاسخ منفی است.

برای مثال به همین رابطهٔ $6 \mid 12$ نگاه کنید، اگر سمت چپ آن را در ۵ ضرب کنیم به رابطهٔ $30 \mid 12$ می‌رسیم که نادرست است. اما با سمت چپ رابطهٔ عادکردن چه کار می‌توانیم بکنیم؟ فرض کنید $15 \mid x$ این یعنی این‌که x یک عددی است که بر ۱۵ بخش‌پذیر است. مثل ۱۵، ۳۰، ۴۵، ۶۰ و … .

خُب مشخص است عددهایی که بر ۱۵ بخش‌پذیرند همگی بر ۵ هم بخش‌پذیرند. همین‌طور همه‌شان بر ۳ نیز بخش‌پذیرند. بنابراین از $15 \mid x$ می‌توان نتیجه گرفت $5 \mid x$ و $3 \mid x$. به بیان دیگر سمت چپ رابطهٔ عادکردن را می‌توانیم به مقسوم‌علیه‌های عدد داده‌شده تقسیم کنیم و آب هم از آب تکان نخورد.

$$a \mid b \Rightarrow \text{هر یک از مقسوم‌علیه‌های } a \mid b$$

البته یک‌جور دیگری هم می‌توانیم این را به زبان ریاضی نشان دهیم که کمی شیک‌تر است:

$$\boxed{ab \mid c \Rightarrow \begin{cases} a \mid c \\ b \mid c \end{cases}}$$

پس به عنوان یک نتیجه‌گیری کلی یادتان باشد، وقتی یک رابطهٔ عادکردن دارید، سمت راست آن را در هر عددی (البته می‌دانید که منظورمان عدد صحیح است) دلتان می‌خواهد ضرب کنید و سمت چپ آن را به شمارنده‌هایش تقسیم کنید.

تست از رابطهٔ $2a^2 \mid b^3$ کدام نتیجه‌گیری درست نیست؟

۱) $a^2 \mid b^3$ ۲) $2a^2 \mid b^4$ ۳) $a^2 \mid b^6$ ۴) $a \mid b$

پاسخ گزینهٔ۴ ۱ درست است. زیرا گفتیم می‌توانیم سمت چپ را به شمارنده‌های عدد تقسیم کنیم. این‌جا نیز سمت چپ رابطهٔ $2a^2 \mid b^3$ را به ۲ تقسیم کرده‌ایم. در ۲ سمت راست رابطهٔ $2a^2 \mid b^3$ را در b ضرب کرده‌ایم که با توجه به این‌که دیدیم می‌شود سمت راست یک رابطهٔ عادکردن را در هر عددی ضرب کرد پس این رابطه نیز درست است. در ۳ هر دو کار با هم انجام شده. یعنی هم سمت چپ رابطهٔ $2a^2 \mid b^3$ تقسیم بر ۲ شده و هم سمت راست آن در b^3 ضرب شده.

اما ۴ همیشه درست نیست. برای مثال اگر $b=8$ و $a=16$ باشد. $b^3=512$ و $2a^2=512$ یعنی $2a^2 \mid b^3$ اما $a \nmid b$.

می‌دانیم اگر $\frac{a}{b}$ عددی صحیح باشد $(\frac{a}{b})^n$ نیز عددی صحیح است، هم‌چنین اگر $(\frac{a}{b})^n$ عددی صحیح باشد $\frac{a}{b}$ نیز صحیح است. (با برهان خلف می‌توان ثابت کرد.) بنابراین:

$$\boxed{\begin{array}{l} a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n \\ a^n \mid b^n \Rightarrow a \mid b \end{array}}$$

مثال ثابت کنید اگر a و b دو عدد صحیح باشند و $a^4 \mid b^7$، آن‌گاه $a^5 \mid b^9$.

حل

$$a^4 \mid b^7 \xrightarrow{\text{به توان ۵}} a^{20} \mid b^{35} \xrightarrow{b\times\text{سمت راست}} a^{20} \mid b^{36}$$

$$(a^5)^4 \mid (b^9)^4 \xrightarrow{\text{ریشهٔ چهارم می‌گیریم}} a^5 \mid b^9$$

تست از رابطهٔ $x^3 \mid y^5$ کدام رابطه نتیجه می‌شود؟

۱) $x^5 \mid y^8$ ۲) $x^7 \mid y^{11}$ ۳) $x^8 \mid y^{13}$ ۴) $x^{10} \mid y^{17}$

پاسخ **گزینهٔ ۴** برای جواب‌دادن به این مدل تست‌ها یا باید مثل سؤال قبلی تلاش کرد یکی‌یکی گزینه‌ها را ثابت کنید یا با مثال نقض رد کنید. اما یک راه ساده‌تری هم وجود دارد که بد نیست یاد بگیرید. در این مدل سؤال‌ها سعی کنید دو طرف رابطهٔ داده‌شده را یکسان کنید. یعنی چه‌جوری؟ برای مثال در این سؤال داریم $x^3 \mid y^5$ ساده‌ترین راه برابرکردن دو طرف، این است که x و y را هر دو برابر یک فرض کنیم. که البته فایده‌ای ندارد چون به ازای $x=1$ و $y=1$ همهٔ گزینه‌ها درست می‌شوند.

اما اگر بخواهیم دو طرف با هم برابر باشند می‌شود یک کاری کرد، x و y را به صورت یک عدد توان‌دار با یک پایهٔ دلخواه فرض می‌کنیم (برای سادگی کار می‌شود پایه را ۲ گرفت) و توان‌ها را جابه‌جا می‌کنیم. یعنی در این‌جا چون توان x سه است y را برابر 2^3 و چون توان y پنج است x را برابر 2^5 می‌گیریم $x=2^5\ ,\ y=2^3$

با این کار $x^3=(2^5)^3=2^{15}$ و $y^5=(2^3)^5=2^{15}$. حالا با این عددها گزینه‌ها را چک می‌کنیم:

۱ $x^5 \mid y^8 \Rightarrow (2^5)^5 \mid (2^3)^8 \Rightarrow 2^{25} \nmid 2^{24}$

۲ $x^7 \mid y^{11} \Rightarrow (2^5)^7 \mid (2^3)^{11} \Rightarrow 2^{35} \nmid 2^{33}$

۳ $x^8 \mid y^{13} \Rightarrow (2^5)^8 \mid (2^3)^{13} \Rightarrow 2^{40} \nmid 2^{39}$

۴ $x^{10} \mid y^{17} \Rightarrow (2^5)^{10} \mid (2^3)^{17} \Rightarrow 2^{50} \mid 2^{51}$ ✓

برای اثبات ۴ می‌توانیم این کار را هم بکنیم:

$$x^3 \mid y^5 \xrightarrow{\text{به توان ۱۰}} x^{30} \mid y^{50} \xrightarrow{y\times\text{سمت راست}} x^{30} \mid y^{51} \Rightarrow (x^{10})^3 \mid (y^{17})^3 \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} x^{10} \mid y^{17}$$

چند ویژگی دیگر از رابطهٔ عادکردن:

$$\boxed{\begin{array}{l} a \mid b\ ,\ b \mid c \Rightarrow a \mid c \\ a \mid b\ ,\ a \mid c \Rightarrow a \mid mb+nc \\ a \mid b\ ,\ b \neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b| \end{array}}$$

اثبات این ویژگی‌ها ساده است و در کتاب درسی آمده است. برای مثال دومی را که به نظر سخت‌تر است ثابت می‌کنیم:

$$\begin{cases} a \mid b \Rightarrow b=aq \xrightarrow{\times m} mb=maq \\ a \mid c \Rightarrow c=aq' \xrightarrow{\times n} nc=naq' \end{cases} \xrightarrow{+} mb+nc=maq+naq' \Rightarrow \underbrace{mb+nc=a(mq+nq')}_{*} \Rightarrow a \mid mb+nc$$

(*) توجه کنید این‌جا از تعریف عادکردن استفاده کردیم. دیدیم که وقتی $10=2\times 5$ است، می‌شود نتیجه گرفت $5 \mid 10$. حالا هم ضرب دو عدد a و $mq+nq'$ شده $mb+nc$، پس می‌شود نتیجه گرفت $a \mid mb+nc$.

چند ویژگی دیگر از عادکردن هست که خوب است این‌ها را نیز با هم مرور کنیم:

همهٔ عددها بر ۱ و ۱− بخش‌پذیرند. $\pm 1 \mid a$

هر عددی بر خودش و قرینه‌اش بخش‌پذیر است. $\pm a \mid a$

صفر بر همهٔ عددها بخش‌پذیر است. $a \mid 0$

تنها عددهایی که ۱ را می‌شمارند ۱ و ۱− اند. $a \mid 1 \Rightarrow a=\pm 1$

هر عدد اول فقط بر خودش و قرینه‌اش و یک و منهای یک بخش‌پذیر است. $a \mid p \Rightarrow a=\pm 1, \pm p \Rightarrow$ عدد اول اوسا p

در مورد رابطهٔ $0|0$ خوب است یک توضیحی بدهیم. در اول این درس گفتیم در تعریف رابطهٔ بخش‌پذیری زمانی می‌گوییم a بر b بخش‌پذیر است که $a = bq$ و رابطه را طرفین‌وسطین شده داده‌اند. علت این است که بتوانند با این تعریف ثابت کنند صفر بر خودش بخش‌پذیر است: $0 = 0 \times q \Rightarrow 0|0$

حالا وقت آن است که چند سؤال از ویژگی‌های رابطهٔ عادکردن ببینیم.

تست اگر $a > 1$ عدد طبیعی باشد و دو عدد $8m + 3$ و $7m + 5$ بر a بخش‌پذیر باشند، a کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۳ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

پاسخ گزینهٔ ۴

$$a \mid 8m+3$$
$$a \mid 7m+5$$

برای حذف‌کردن m، سمت راست رابطهٔ بالایی را در ۷ و سمت راست رابطهٔ پایینی را در ۸ ضرب می‌کنیم. داریم:

$$a \mid 8m+3 \xrightarrow{\text{سمت راست}\times 7} a \mid 56m+21$$
$$a \mid 7m+5 \xrightarrow{\text{سمت راست}\times 8} a \mid 56m+40$$

حالا از ویژگی $a \mid b , a \mid c \Rightarrow a \mid mb+nc$ استفاده می‌کنیم. سمت چپ هر دو رابطه یکسان است، می‌توانیم سمت راست‌ها را از هم کم کنیم.

$$\begin{cases} a \mid 56m+21 \\ a \mid 56m+40 \end{cases} \Rightarrow a \mid 19 \Rightarrow a = \pm 1 , \pm 19$$

با توجه به این‌که $a > 1$ است پس a فقط می‌تواند ۱۹ باشد.

تست به ازای چند عدد صحیح مانند x رابطهٔ $3x+1 \mid 5x+2$ برقرار است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ ۱ دیدیم که هر عددی خودش را می‌شمارد، بنابراین $3x+1 \mid 3x+1$. از طرفی می‌خواهیم $3x+1 \mid 5x+2$، مثل بالا تلاش می‌کنیم جملهٔ xدار را در عبارت سمت راست حذف کنیم.

$$3x+1 \mid 3x+1 \xrightarrow{\text{سمت راست}\times 5} 3x+1 \mid 15x+5$$
$$3x+1 \mid 5x+2 \xrightarrow{\text{سمت راست}\times 3} 3x+1 \mid 15x+6$$
$$\xrightarrow{(-)} 3x+1 \mid 1 \Rightarrow \begin{cases} 3x+1 = 1 \Rightarrow x = 0 \\ 3x+1 = -1 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \quad \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

بنابراین رابطه فقط به ازای یک مقدار صحیح x برقرار است.

تست بزرگ‌ترین مقدار x که به ازای آن رابطهٔ $x-3 \mid 5x^2+2$ برقرار است، چه مجموع ارقامی دارد؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۱ ۳) ۷ ۴) ۵

پاسخ گزینهٔ ۴ دوباره مثل سؤال قبل:

$$x-3 \mid x-3$$
$$x-3 \mid 5x^2+2$$

دوباره برنامه این است که سمت راست‌ها را یک‌کاری کنیم تا برسیم به یک عدد (یعنی جملهٔ xدار را حذف کنیم). چند راه وجود دارد. اولین چیزی که به ذهن می‌رسد این است که سمت راست رابطهٔ اولی را در 5x ضرب کنیم.

$$x-3 \mid x-3 \xrightarrow{\text{سمت راست}\times 5x} x-3 \mid 5x^2-15x$$

از طرفی $x-3 \mid 5x^2+2$، از این دو رابطه داریم:

$$\begin{matrix} x-3 \mid 5x^2-15x \\ x-3 \mid 5x^2+2 \end{matrix} \xrightarrow{(-)} x-3 \mid 15x+2$$

خب تا این‌جا جملهٔ x^2دار را از سمت راست تساوی حذف کردیم حالا جملهٔ xدار را حذف می‌کنیم:

$$\begin{matrix} x-3 \mid x-3 \\ x-3 \mid 15x+2 \end{matrix} \xrightarrow{\text{سمت راست}\times 15} \begin{matrix} x-3 \mid 15x-45 \\ x-3 \mid 15x+2 \end{matrix} \xrightarrow{(-)} x-3 \mid 47$$

چون بزرگ‌ترین مقدار x را می‌خواهیم:

$$x-3 = 47 \Rightarrow x = 50$$

اما یک جور سریع‌تری و در یک مرحله هم می‌شد همان اول کار $5x^2$ را حذف کرد. نگاه کنید:

$$x-3 \mid x-3 \xrightarrow{\text{سمت راست}\times 5(x+3)} x-3 \mid 5(x^2-9)$$

از طرفی:

$$\begin{matrix} x-3 \mid 5x^2-45 \\ x-3 \mid 5x^2+2 \end{matrix} \Rightarrow x-3 \mid 47$$

ولی یک نکتهٔ تستی هم بد نیست یاد بگیرید. در این مدل سؤال‌ها اگر ریشهٔ عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار دهیم، سؤال خیلی سریع و ساده‌تر حل می‌شود.

$$x-3 = 0 \Rightarrow x = 3 \xrightarrow{\text{۳ را در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم}} 5\times(3)^2+2 = 47$$

این همان عددی است که عبارت سمت چپ آن را می‌شمارد. یعنی:

$$x-3 \mid 47 \Rightarrow x-3 = 47 \Rightarrow x = 50$$

برای پیداکردن مقادیر صحیح x در رابطهٔ مثل $x-a \mid f(x)$ کافی است ریشهٔ عبارت سمت چپ یعنی a را در عبارت سمت راست قرار دهیم و به رابطهٔ $x-a \mid f(a)$ برسیم.

مثال ثابت کنید بزرگ‌ترین مقدار x که در رابطهٔ $4x+3 \mid 3x^2+1$ صدق می‌کند عدد ۱۰ است.

حل خب این یکی به نظر سؤال سخت‌تری است. دو رابطه را می‌نویسیم:

$4x+3 \mid 4x+3$ هر عددی خودش را می‌شمارد

$4x+3 \mid 3x^2+1$

باید متغیر را در عبارت سمت راست حذف کنیم تا به یک عدد برسیم. در عبارت پایینی جملهٔ xدار وجود ندارد و فقط یک $3x^2$ داریم. بنابراین اگر عبارت بالا را در مزدوجش ضرب کنیم، آن‌جا هم جملهٔ xدار به وجود نمی‌آید.

$$4x+3 \mid 4x+3 \xrightarrow{\times(4x-3)} 4x+3 \mid 16x^2-9$$

حالا ضرایب را برابر می‌کنیم تا بتوانیم از هم کم کنیم:

$$4x+3 \mid 16x^2-9 \xrightarrow{\times 3} 4x+3 \mid 48x^2-27$$
$$4x+3 \mid 3x^2+1 \xrightarrow{\times 16} 4x+3 \mid 48x^2+16$$
$$\xrightarrow{(-)} 4x+3 \mid 43$$

چون بیشترین مقدار را می‌خواهیم:

$$4x+3=43 \Rightarrow 4x=40 \Rightarrow x=10$$

یک چیزی هم بد نیست یواشکی یادتان بدهم (البته مثال نقض هم دارد ولی خیلی جاها هم کار می‌کند). در این مدل سؤال‌ها هم می‌شود ریشهٔ عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار داد. فقط چون ریشه کسری است وقتی آن را در عبارت سمت راست قرار می‌دهید باید مخرج‌مشترک بگیرید و صورت کسر را به دست بیاورید. عبارت سمت چپ، صورت کسر عبارت سمت راست را می‌شمارد. برای مثال در این سؤال: $4x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{4}$

$-\frac{3}{4}$ را در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم: $(-\frac{3}{4})^2 \times 3+1=\frac{27}{16}+1=\frac{43}{16}$

همان‌طور که می‌بینید صورت کسر عدد ۴۳ است. عبارت سمت چپ ۴۳ را می‌شمارد، بنابراین $4x+3 \mid 43$ و بقیه‌اش هم مثل بالا.

تست چند نقطه روی منحنی به مختصات $yx=y+2x+1$ وجود دارد که هر دو مولفهٔ x و y در آن عددهایی طبیعی باشند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ **گزینهٔ۳** ابتدا y را برحسب x به دست می‌آوریم:

$$yx=y+2x+1 \Rightarrow yx-y=2x+1 \Rightarrow y(x-1)=2x+1 \Rightarrow y=\frac{2x+1}{x-1}$$

اگر قرار باشد y عددی طبیعی باشد، یعنی کسر $\frac{2x+1}{x-1}$ باید عددی طبیعی باشد و یک کسر زمانی عددی صحیح است که صورتش بر مخرجش بخش‌پذیر باشد یا به بیان دیگر مخرجش صورتش را بشمارد. پس:

$x-1 \mid 2x+1$

مقادیر x را از این رابطه پیدا می‌کنیم:

$$x-1 \mid x-1 \xrightarrow{\text{سمت‌راست}\times 2} x-1 \mid 2x-2$$
$$x-1 \mid 2x+1$$
$$\xrightarrow{(-)} x-1 \mid 3$$

$\Rightarrow x-1=1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=\frac{5}{1}=5$ ✓

$x-1=-1 \Rightarrow x=0$ طبیعی نیست.

$x-1=3 \Rightarrow x=4 \Rightarrow y=\frac{9}{3}=3$ ✓

$x-1=-3 \Rightarrow x=-2$ طبیعی نیست.

پس دو نقطهٔ $\begin{vmatrix}2\\5\end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix}4\\3\end{vmatrix}$ روی این منحنی‌اند و در آن x و y هر دو عددهایی طبیعی‌اند.

تست به ازای چند عدد صحیح رابطهٔ $5x+1 \mid x^3+2$ برقرار است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ۲** خب! این سؤال با سؤال‌های قبلی فرق دارد. همین‌طور که می‌بینید عبارت سمت چپ یک چندجمله‌ای درجه۳ است. یک راه پاسخ‌گویی به این سؤال‌ها مثل سؤال‌های قبل حذف‌کردن جملات xدار و رسیدن به یک عدد است، اما راه ساده‌تری هم برای جواب‌دادن به این سؤال‌ها وجود دارد. واضح است که رشد عبارت x^3+2 از $5x+1$ سریع‌تر است. یعنی به ازای عددهای کوچک مثل صفر, $1, 2, -1, \ldots$ ممکن است قدرمطلق $5x+1$ بزرگ‌تر از $|x^3+2|$ باشد. اما وقتی $|x|$ بزرگ باشد قطعاً $|5x+1|$ از $|x^3+2|$ کم‌تر خواهد بود. پس فقط کافی است درستی این رابطه را به ازای عددهای کوچک چک کنیم.

$x=0 \Rightarrow 2 \mid 1$ نادرست است.

$x=1 \Rightarrow 3 \mid 6$ ✓

$x=2 \Rightarrow 10 \mid 11$ نادرست است.

و مشخص است به ازای $x \ge ۳$ حتماً $x^۳ + ۲$ بزرگ‌تر از $۵x + ۱$ است و رابطه نادرست خواهد بود. حالا در عددهای منفی بررسی می‌کنیم:

$x = -۱ \Rightarrow ۱ \mid -۴$ ✓

$x = -۲ \Rightarrow -۶ \mid -۹$ نادرست است.

و به ازای $x \le -۳$ نیز مشخص است که $|۵x+۱|$ کوچک‌تر از $|x^۳+۲|$ است و رابطه برقرار نیست. پس فقط به ازای $x = ۱$ و $x = -۱$ رابطه برقرار است.

مثال اگر $۷ \mid ۳k + ۲$ ثابت کنید: $۴۹ \mid ۹k^۲ - ۹k - ۱۰$.

حل عبارت $۹k^۲ - ۹k - ۱۰$ را تجزیه می‌کنیم:

$$۹k^۲ - ۹k - ۱۰ = (۳k+۲)(۳k-۵)$$

می‌دانیم $۷ \mid ۳k + ۲$ بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} ۷ \mid ۳k+۲ \\ ۷ \mid ۷ \end{array}\right. \xrightarrow{(-)} ۷ \mid ۳k-۵$$

به راحتی می‌توان ثابت کرد:

$$a \mid b \,,\, c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$$

بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} ۷ \mid ۳k+۲ \\ ۷ \mid ۳k-۵ \end{array}\right. \Rightarrow ۴۹ \mid (۳k+۲)(۳k-۵)$$

تست اگر x و y دو عدد صحیح باشند، به طوری که $۲a + ۳b \mid ۳a + ۷b$ کدام گزینه درست نیست؟

۱) $۲a+۳b \mid ۵a$ ۲) $۲a+۳b \mid ۵b$ ۳) $۲a+۳b \mid a-b$ ۴) $۲a+۳b \mid a+b$

پاسخ گزینهٔ ۴ این سؤال‌ها، سؤال‌های ساده‌ای نیستند. چون باید تک‌تک گزینه‌ها را بررسی کنیم. سمت راست ۱ فقط متغیر a وجود دارد بنابراین سعی می‌کنیم b را از سمت راست رابطهٔ داده‌شده در صورت سؤال حذف کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} ۲a+۳b \mid ۲a+۳b \xrightarrow{\times ۷} ۲a+۳b \mid ۱۴a+۲۱b \\ ۲a+۳b \mid ۳a+۷b \xrightarrow{\times ۳} ۲a+۳b \mid ۹a+۲۱b \end{array}\right. \xrightarrow{(-)} ۲a+۳b \mid ۵a$$

پس ۱ درست است. با توجه به این‌که در ۲ در سمت راست فقط b وجود دارد، این بار a را حذف می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} ۲a+۳b \mid ۲a+۳b \xrightarrow{\times ۳} ۲a+۳b \mid ۶a+۹b \\ ۲a+۳b \mid ۳a+۷b \xrightarrow{\times ۲} ۲a+۳b \mid ۶a+۱۴b \end{array}\right. \xrightarrow{(-)} ۲a+۳b \mid ۵b$$

خب حالا تلاش کنیم ۳ یا ۴ را ثابت کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} ۲a+۳b \mid ۳a+۷b \\ ۲a+۳b \mid ۲a+۳b \xrightarrow{\times ۲} ۲a+۳b \mid ۴a+۶b \end{array}\right. \xrightarrow{(-)} ۲a+۳b \mid a-b$$

پس ۳ نیز درست است.

خُب به نظر می‌رسد به اندازهٔ کافی از بخش‌پذیری و ویژگی‌های آن سؤال حل کردیم و بقیه‌اش را در تمرین‌ها ببینید.

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک

d را بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b می‌گویند و می‌نویسند $(a,b) = d$ هر وقت دوتا اتفاق بیفتد:

۱ d مقسوم‌علیه هر دو عدد باشد، یعنی $d \mid a$ و $d \mid b$.

۲ در بین همهٔ مقسوم‌علیه‌ها (شمارنده‌ها)ی مشترک، عدد d بزرگ‌تر از همه باشد. یعنی اگر مثلاً c هم یک مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد است و $c \mid a$ و $c \mid b$، آن‌گاه $c \le d$ باشد، این‌جوری خیالمان راحت می‌شود که d بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد یا خودمانی‌ترش همان ب.م.م دو عدد است.

برای مثال اگر بخواهیم (۱۲,۱۸) را پیدا کنیم، داریم:

مجموعه مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۲ = {۱,۲,۳,۴,۶,۱۲}

مجموعه مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۸ = {۱,۲,۳,۶,۹,۱۸}

م.م یا مقسوم‌علیه‌های مشترک ۱۲ و ۱۸ = {۱,۲,۳,۶}

که در میان م.م‌ها یا مقسوم‌علیه‌های مشترک ب یا بزرگ‌ترین آن‌ها عدد ۶ است.

برای پیداکردن بزرگ‌ترین شمارندهٔ مشترک دو یا چند عدد می‌شود همانند مثال قبل مجموعه مقسوم‌علیه‌های عددها را نوشت و از میان مشترک‌ها بزرگ‌ترینشان را انتخاب کرد که البته در مورد عددهای بزرگ کار سختی است، کار دیگری که می‌شود کرد این است که:

برای پیداکردن ب.م.م دو یا چند عدد، عددها را تجزیه کرده، عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در هم ضرب می‌کنیم.

برای مثال اگر بخواهیم (۱۴۴,۳۰۰) را حساب کنیم، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} ۱۴۴ = ۲^۴ \times ۳^۲ \\ ۳۰۰ = ۲^۲ \times ۳ \times ۵^۲ \end{array}\right. \Rightarrow (۱۴۴,۳۰۰) = ۲^۲ \times ۳ = ۱۲$$

دو عدد a و b را نسبت به هم اول می‌گویند هرگاه $(a,b) = ۱$ باشد.

مثال ثابت کنید عدد طبیعی n هر چه باشد دو عدد $۹n+۴$ و $۱۱n+۵$ همواره نسبت به هم اول‌اند.

حل ب.م.م دو عدد را d می‌نامیم. داریم:

$$(۱۱n+۵,۹n+۴)=d \Rightarrow \begin{cases} d\,|\,۹n+۴ \xrightarrow{\text{سمت‌راست}\times ۱۱} d\,|\,۹۹n+۴۴ \\ d\,|\,۱۱n+۵ \xrightarrow{\text{سمت‌راست}\times ۹} d\,|\,۹۹n+۴۵ \end{cases} \xrightarrow{(-)} d\,|\,۱ \Rightarrow d=۱$$

تست اگر $(a,۶)=۳$ باشد، فرم کلی a برحسب متغیر $x\in\mathbb{Z}$ به کدام صورت است؟

۱) $۳x$ ۲) $۶x$ ۳) $۶x+۳$ ۴) $۹x+۶$

پاسخ **گزینهٔ ۳** وقتی $(a,۶)=۳$ شده است، یعنی $۳\,|\,a$ و در نتیجه a بر ۳ بخش‌پذیر است. اما اگر a زوج باشد چون می‌دانیم بر ۳ هم بخش‌پذیر است، یعنی بر ۶ بخش‌پذیر است که در آن صورت $(a,۶)$ برابر ۶ می‌شود نه ۳. پس a یک عددی است که بر ۳ بخش‌پذیر است ولی بر ۲ بخش‌پذیر نیست. یعنی حاصل‌ضرب ۳ در یک عدد فرد است که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$a=۳(۲x+۱)=۶x+۳$$

کوچک‌ترین مضرب مشترک

با یک مثال شروع می‌کنیم. به نظر شما کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد ۱۲ و ۱۵ چه عددی است (واضح است که منظورمان در عددهای طبیعی است).

مجموعه مضارب طبیعی دو عدد را می‌نویسیم:

مجموعه مضارب طبیعی ۱۲ $=\{۱۲,۲۴,۳۶,۴۸,۶۰,۷۲,۸۴,۹۶,۱۰۸,۱۲۰,۱۳۲,...\}$

مجموعه مضارب طبیعی ۱۵ $=\{۱۵,۳۰,۴۵,۶۰,۷۵,۹۰,۱۰۵,۱۲۰,۱۳۵,۱۵۰,...\}$

مضرب‌های طبیعی مشترک ۱۲ و ۱۵ $=\{۶۰,۱۲۰,...\}$

که مشخص است کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ بالا عدد ۶۰ است. همان‌طور که می‌بینید این عدد ۶۰ این‌جا دو ویژگی دارد. اول این‌که مضرب هر دو عدد است یعنی بر هر دو عدد بخش‌پذیر است یا به بیان دیگر هر دو عدد ۱۲ و ۱۵ عدد ۶۰ را می‌شمارند: $۱۲\,|\,۶۰$ و $۱۵\,|\,۶۰$ و دوم این‌که در میان همهٔ مضارب طبیعی مشترک ۱۲ و ۱۵ مثل ۱۲۰ و ۱۸۰ و ... این عدد ۶۰ از همه کوچک‌تر است.

عدد طبیعی c را ک.م.م دو عدد ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $[a,b]=c$ هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

(یعنی c بر هر دو عدد بخش‌پذیر باشد و مضرب‌شان باشد.) ۱ $a\,|\,c\,,\,b\,|\,c$

۲ $\forall m>۰\,,\,a\,|\,m\,,\,b\,|\,m \Rightarrow c\le m$

(یعنی اگر m هم یک مضرب‌مشترک دو عدد بود، c از m کوچک‌تر باشد که بتوانیم بگوییم ک.م.م است.)

برای به دست آوردن ک.م.م دو یا چند عدد کافی است عددها را تجزیه کرده عوامل مشترک را با توان بزرگ‌تر در عوامل غیرمشترک ضرب کنیم.

تست مجموع ارقام کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ $\{x\in\mathbb{N}:۲۴\,|\,x\,,\,۳۰\,|\,x\}$ چه عددی است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ **گزینهٔ ۱** در واقع ک.م.م دو عدد ۲۴ و ۳۰ را باید پیدا کنیم. داریم:

$$[۲۴,۳۰]=[۲^۳\times ۳\,,\,۲\times ۳\times ۵]=۲^۳\times ۳\times ۵=۱۲۰$$

با استفاده از تعاریف ب.م.م و ک.م.م به راحتی می‌توان ثابت کرد:

۱ $a\,|\,b \Rightarrow \begin{cases}(a,b)=|a| \\ [a,b]=|b|\end{cases}$

۲ $(a,b)[a,b]=|ab|$

تست اگر m عددی صحیح باشد، حاصل $([a,a^۴],(a^۲,a^۳))$ کدام است؟

۱) a ۲) $a^۲$ ۳) $|a|$ ۴) $a^۴$

پاسخ **گزینهٔ ۲** می‌دانیم $a^۳\,|\,a^۲$، پس $(a^۲,a^۳)=|a^۲|=a^۲$. همچنین چون $a\,|\,a^۴$، پس $[a,a^۴]=|a^۴|=a^۴$. بنابراین حالا چون $a^۲\,|\,a^۴$ پس: $(a^۲,a^۴)=a^۲$.

$$([a,a^۴],(a^۲,a^۳))=(a^۴,a^۲)$$

قضیهٔ تقسیم و کاربردها

از دبستان به یاد دارید که در تقسیم عدد a بر b بین مقسوم و مقسوم‌علیه، باقی‌مانده و خارج‌قسمت رابطهٔ روبه‌رو برقرار است: $a = bq + r$

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \hline - & q \\ r & \end{array}$$

فرض کنید بخواهیم ۳۰ سکه را بین ۷ نفر تقسیم کنیم. اگر من تقسیم را این‌طوری انجام دهم به نظرتان درست است؟

$$\begin{array}{r|l} ۳۰ & ۷ \\ \hline -۲۱ & ۳ \\ ۹ & \end{array}$$

می‌دانیم $۹ + ۳ \times ۷ = ۳۰$ یعنی تساوی درست است.

اما مشخص است که یک چیزی این‌جا غلط است. بله! این‌جا سه سیب به ۷ نفر داده‌ایم و ۹ سیب باقی مانده که این غلط است. چرا که این ۹ سیب باقی‌مانده از تعداد افراد بیشتر است. یعنی می‌شود نفری یک سیب دیگر به این ۷ نفر داد و ۲ سیب باقی بماند، یعنی تقسیم درست این‌طوری است:

$$\begin{array}{r|l} ۳۰ & ۷ \\ \hline -۲۸ & ۴ \\ ۲ & \end{array}$$

حالا درست شد. هدف از طرح این مثال این بود که در تقسیم a بر b فقط تساوی $a = bq + r$ کافی نیست و باقی‌مانده هم باید از مقسوم‌علیه کم‌تر باشد. هم‌چنین می‌دانیم باقی‌مانده نمی‌تواند منفی باشد. مثلاً نمی‌توانیم ۵ سیب به هر نفر بدهیم و ۵ سیب باقی بماند! بنابراین $۰ \le r < b$.

بنابراین:

اگر a عدد صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت در تقسیم عدد a بر b، عددهای منحصربه‌فرد r و q یافت می‌شوند به طوری که $a = bq + r$ و $۰ \le r < b$.

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \hline & \mathbf{q} \\ \mathbf{r} & \end{array}$$

در این حالت به q خارج‌قسمت، به r باقی‌مانده، به a مقسوم و به b مقسوم‌علیه می‌گویند.

- **دقت کنید که b عددی طبیعی، q و a عددهای صحیح و r عددی حسابی است.**

مثال **در یک تقسیم اگر ۸۳ واحد به مقسوم اضافه کنیم، ۷ واحد به خارج‌قسمت اضافه شده و یک واحد از باقی‌مانده کم می‌شود. مقسوم‌علیه این تقسیم کدام است؟**

حل

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \hline & q \\ r & \end{array} \Rightarrow a = bq + r \,,\, ۰ \le r < b$$

حالا گفته به مقسوم ۸۳ واحد اضافه شده یعنی a تبدیل شده به $a + ۸۳$، به خارج‌قسمت ۷ واحد اضافه شده یعنی شده $q + ۷$ و از باقی‌مانده یکی کم شده یعنی باقی‌ماندهٔ جدید شده $r - ۱$، داریم:

$$a + ۸۳ = b(q + ۷) + r - ۱$$
$$a = bq + r$$

دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$$۸۳ = ۷b - ۱ \Rightarrow ۷b = ۸۴ \Rightarrow b = ۱۲$$

تست **در تقسیم عددی بر ۹ باقی‌مانده برابر ۷ شده است. اگر ۶۶ واحد به مقسوم اضافه کنیم، خارج‌قسمت .... واحد اضافه شده و باقی‌مانده برابر .... می‌شود.**

۱) ۷، صفر ۲) ۷، ۸ ۳) ۸، ۸ ۴) ۸، ۱

پاسخ **گزینهٔ ۴**

$$\begin{array}{l|l} a & ۹ \\ \hline & q \\ ۷ & \end{array} \Rightarrow a = ۹q + ۷$$

۶۶ واحد به مقسوم اضافه شده است. اگر به طرفین تساوی بالا ۶۶ واحد اضافه کنیم، داریم:

$$a + ۶۶ = ۹q + ۷۳$$

می‌دانیم در تقسیم، باقی‌مانده باید کم‌تر از ۹ باشد. بنابراین باید یک کاری کنیم که آن عدد ۷۳ به صورت یک مضرب ۹ و یک عدد کوچک‌تر از ۹ دربیاید.

$$a + ۶۶ = ۹q + ۷۲ + ۱ = ۹(q + ۸) + ۱$$

تقسیم یک عدد مثبت بر یک عدد مثبت دیگر را قبلاً بارها دیده‌ایم. الان می‌خواهیم ببینیم پیداکردن خارج‌قسمت و باقی‌مانده در تقسیم یک عدد منفی بر یک عدد مثبت چگونه است. به این سؤال ساده توجه کنید.

مثال **باقی‌مانده و خارج‌قسمت تقسیم ۴۱- را بر ۷ به دست آورید.**

حل خب اگر عدد ۴۱+ بود پاسخ ساده بود:

$$\begin{array}{r|l} ۴۱ & ۷ \\ \hline -۳۵ & ۵ \\ ۶ & \end{array}$$

که همه چیز هم در آن درست است. یعنی:

$$۴۱=۷\times۵+۶$$

و باقی‌مانده که ۶ است از مقسوم‌علیه یعنی ۷ کم‌تر است. اما اگر بنویسیم:

$$\begin{array}{r|l} -۴۱ & ۷ \\ \hline -\ -۳۵ & -۵ \\ -۶ & \end{array}$$

داریم:

$$-۴۱=۷\times(-۵)-۶$$

که ۶- را به عنوان باقی‌مانده نمی‌توانیم قبول کنیم، چون‌که باقی‌مانده نمی‌تواند منفی باشد. این‌جا باید یک q و rی پیدا کنیم که در رابطهٔ $-۴۱=۷q+r$ صدق کند و $۰\le r<۷$ باشد.

$$\begin{array}{r|l} -۴۱ & ۷ \\ \hline \_\_\_ & q \\ r & \end{array}$$

خب یک راه این است که در تساوی بالا به سمت راست تساوی یک عدد ۷ (یعنی به اندازهٔ مقسوم‌علیه) اضافه و کم کنیم:

$$-۴۱=۷\times(-۵)-۶+۷-۷$$

۷- آخر را با ۷ی که در ۵- ضرب شده فاکتور می‌گیریم و ۷ مثبت را با ۶- جمع می‌کنیم. داریم:

$$-۴۱=۷\times(-۵-۱)+(۷-۶)\ \Rightarrow\ -۴۱=۷\times(-۶)+۱$$

خب! حالا شد. همان‌طور که می‌بینید عدد باقی‌مانده ۱ است که بین صفر و ۷ است.

بنابراین خارج‌قسمت برابر ۶- و باقی‌مانده ۱ است. اما یک راه فرمولی هم برای پیداکردن خارج‌قسمت و باقی‌مانده وجود دارد که شاید ساده‌تر باشد و فرقی نمی‌کند عددها مثبت یا منفی باشند.

در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b داریم:

$$\mathbf{q=\left\lfloor \frac{a}{b}\right\rfloor}$$

$$\mathbf{r=a-bq}$$

برای مثال در سؤال قبل می‌خواستیم باقی‌مانده و خارج‌قسمت تقسیم ۴۱- را بر ۷ پیدا کنیم. این یعنی $a=-۴۱$ و $b=۷$ است. داریم:

$$q=\left\lfloor \frac{-۴۱}{۷}\right\rfloor=\lfloor -۵/۸\rfloor=-۶$$

$$r=a-bq=-۴۱-۷\times(-۶)=-۴۱+۴۲=۱$$

یک روش دیگری هم برای پیداکردن باقی‌مانده و خارج‌قسمت در عددهای منفی وجود دارد که البته همان روش اول است اما کمی سریع‌تر است. این‌جوری که وقتی می‌خواهیم باقی‌ماندهٔ یک عدد منفی را بر یک عدد مثبت به دست آوریم، اگر عدد منفی بر عدد مثبت بخش‌پذیر باشد که باقی‌مانده و خارج‌قسمت مشخص است. برای مثال باقی‌مانده و خارج‌قسمت تقسیم ۴۲- بر ۷ به ترتیب برابر صفر و ۶- است. اما اگر عدد منفی بر عدد مثبت بخش‌پذیر نبود، شما بیایید منفی‌بودن مقسوم را بی‌خیال شوید و آن را به صورت مثبت بر مقسوم‌علیه منفی تقسیم کنید و خارج‌قسمت و باقی‌مانده را در این حالت به دست آورید بعد با استفاده از این دو رابطهٔ باقی‌مانده و خارج‌قسمت واقعی را پیدا کنید.

باقی‌مانده $r=b-$ (باقی‌مانده در حالتی که عدد مثبت باشد)

خارج‌قسمت $q=-($خارج‌قسمت در حالتی که عدد مثبت باشد $+۱)$

برای مثال وقتی می‌خواهیم باقی‌مانده و خارج‌قسمت ۴۱- را بر ۷ به دست آوریم، اول می‌آییم خود ۴۱ را بر ۷ تقسیم می‌کنیم و خارج‌قسمت و باقی‌مانده را به دست می‌آوریم. یعنی:

$$\begin{array}{r|l} ۴۱ & ۷ \\ \hline -۳۵ & ۵ \\ ۶ & \end{array}$$

حالا با استفاده از رابطهٔ داده‌شده باقی‌مانده و خارج‌قسمت واقعی را پیدا می‌کنیم. همان‌طور که می‌بینید، باقی‌مانده وقتی ۴۱ را مثبت فرض کرده‌ایم ۶ و خارج‌قسمت ۵ شده، بنابراین:

$$r=۷-۶=۱$$

$$q=-(۱+۵)=-۶$$

مثال اگر باقی‌ماندهٔ a در تقسیم بر ۱۲ برابر ۷ و خارج‌قسمت آن q باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $5a+37$ بر ۱۵ و خارج‌قسمت این تقسیم را برحسب q به دست آورید.

حل اول رابطهٔ تقسیم را می‌نویسیم:

$$a \,\big|\, 12,\ \text{خارج‌قسمت } q,\ \text{باقی‌مانده } 7 \Rightarrow a = 12q+7$$

پس مقدار $5a+37$ را برحسب q به دست می‌آوریم:

$$5a+37 = 5(12q+7)+37 = 60q+35+37 = 60q+72$$

حالا باید باقی‌مانده و خارج‌قسمت $60q+72$ را بر ۱۵ به دست آوریم. بهترین راه به دست آوردن خارج‌قسمت، استفاده از جزءصحیح است. (ببینید وقتی می‌خواهیم خارج‌قسمت یک چیزی را بر یک چیز دیگر به دست آوریم، کافی است جزءصحیح این چیز را به آن چیز دیگر حساب کنیم!) داریم:

$$\text{خارج‌قسمت} = \left\lfloor \frac{60q+72}{15} \right\rfloor = \lfloor 4q+4/8 \rfloor = 4q+4$$

پس خارج‌قسمت جدید برحسب q برابر $4q+4$ است. حالا باقی‌ماندهٔ $60q+72$ را بر ۱۵ به دست می‌آوریم. دقت کنید که $60q+72$ جمع دو مقدار به دست آمده، یکی $60q$ و یکی ۷۲، می‌شود تک‌تک باقی‌ماندهٔ هر کدام را به ۱۵ به دست آورده و حاصل را با هم جمع کنیم. مشخص است که $60q$ بر ۱۵ بخش‌پذیر است، یعنی باقی‌ماندهٔ آن بر ۱۵ برابر صفر است. *(پس این‌که هیچی!)* می‌ماند باقی‌ماندهٔ ۷۲ به ۱۵ که ۱۲ است:

$$72 \,\big|\, 15:\quad 72-60 = 12,\ \text{خارج‌قسمت } 4$$

بنابراین باقی‌مانده $60q+72$ بر ۱۵ برابر ۱۲ است. البته یک‌جور دیگر هم می‌شد باقی‌مانده و خارج‌قسمت $60q+72$ را بر ۱۵ به دست آورد:

$$60q+72 = 60q+60+12 = 15(q+4)+12$$

مشخص است که خارج‌قسمت جدید $q+4$ و باقی‌مانده ۱۲ است.

تست اگر باقی‌مانده و خارج‌قسمت m و n بر ۱۳ به ترتیب برابر ۷ و ۱۱ باشد، باقی‌ماندهٔ $5m-7n$ بر ۱۳ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) -42

پاسخ گزینهٔ ۳

$$m \,\big|\, 13,\ q,\ 7 \Rightarrow m=13q+7$$
$$n \,\big|\, 13,\ q',\ 11 \Rightarrow n=13q'+11$$
$$\Rightarrow 5m-7n = 5(13q+7)-7(13q'+11) = 65q+35-91q'-77 = 65q-91q'-42$$

حالا باید باقی‌ماندهٔ $65q-91q'-42$ را بر ۱۳ به دست آوریم. با توجه به این‌که $65q$ و $-91q'$ بر ۱۳ بخش‌پذیرند، بنابراین باقی‌ماندهٔ آن‌ها در تقسیم بر ۱۳ برابر صفر است و فقط می‌ماند پیداکردن باقی‌ماندهٔ -42 بر ۱۳ و از روش سوم که ساده‌تر است استفاده می‌کنیم. اول -42 را مثبت فرض می‌کنیم و باقی‌ماندهٔ ۴۲ را بر ۱۳ به دست می‌آوریم:

$$42 \,\big|\, 13:\quad 42-39 = 3,\ \text{خارج‌قسمت } 3$$

حالا از رابطهٔ «باقی‌مانده وقتی عدد مثبت باشد $- b =$ باقی‌مانده» باقی‌ماندهٔ واقعی را پیدا می‌کنیم:

$$r = 13-3 = 10$$

اما اگر می‌خواستیم به صورت مستقیم هم باقی‌ماندهٔ $65q-91q'-42$ را بر ۱۳ به دست آوریم، می‌شد:

$$65q-91q'-42 = 65q-91q'-52+10 = 13\underbrace{(5q-7q'-4)}_{\text{خارج‌قسمت}} + \underbrace{10}_{\text{باقی‌مانده}}$$

تست مجموع ارقام بزرگ‌ترین عددی که در تقسیم بر ۵۰ باقی‌ماندهٔ آن ۵ برابر خارج‌قسمت آن باشد، کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) نمی‌توان تعیین کرد.

پاسخ گزینهٔ ۳ عدد را a فرض می‌کنیم. می‌خواهیم باقی‌مانده، پنج برابر خارج‌قسمت باشد، یعنی $r=5q$ داریم:

$$a \,\big|\, 50,\ q,\ 5q \Rightarrow a = 50q+5q = 55q$$

ممکن است فکر کنیم خب q هر چه بزرگ‌تر باشد، عدد هم بزرگ‌تر می‌شود و ما می‌توانیم هر چه‌قدر دلمان می‌خواهد q را بزرگ بگیریم. اما این‌طور نیست. یادتان باشد در رابطهٔ تقسیم، باقی‌مانده یک شرطی هم داشت که: $0 \le r < b$. بنابراین در این‌جا $0 \le 5q < 50$ و در نتیجه $q < 10$ یعنی q حداکثر می‌تواند ۹ باشد.

$$q_{max} = 9 \Rightarrow a_{max} = 9\times 55 = 495 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 4+9+5 = 18$$

تست باقی‌ماندهٔ تقسیم $24k$ بر ۱۳۲ برابر کدام‌یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۱۴۴ ۲) ۶۰ ۳) ۶۶ ۴) ۸۰

پاسخ گزینهٔ ۲

$$\begin{array}{r|l} 24k & 132 \\ \hline & q \\ \underline{\quad} & \\ r & \end{array} \Rightarrow 24k = 132q + r\ ,\ 0 \le r < 132$$

$$r = -132q + 24k = 12(-11q + 2k)$$

همان‌طور که می‌بینید r مضرب ۱۲ است. پس باید در میان گزینه‌ها دنبال عددی بگردیم که مضرب ۱۲ بوده و از ۱۳۲ کم‌تر باشد که فقط ۶۰ چنین ویژگی‌ای دارد.

افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک قضیهٔ تقسیم

می‌دانیم در تقسیم بر ۲، دو دسته عدد داریم. عددهای زوج که آن‌ها را با $2k$ نشان می‌دهیم و عددهای فرد که با $2k+1$ نشان می‌دهیم.
به همین ترتیب در تقسیم به ۳ عددها می‌توانند سه نوع باقی‌ماندهٔ مختلف داشته باشند. یعنی یا بر ۳ بخش‌پذیر باشند که در این صورت می‌توان آن‌ها را به فرم $3k$ نوشت یا بر ۳ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ داشته باشند، یعنی به فرم $3k+1$ باشند و بالأخره یا در تقسیم به ۳ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ داشته باشند که در این صورت آن‌ها را به فرم $3k+2$ می‌توان نوشت.

تست دو عدد فرد در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده‌های یکسانی دارند. اگر این دو عدد را در هم ضرب کنیم، فرم کلی عدد به دست آمده برحسب k به کدام صورت است؟

۱) $4k+1$ ۲) $4k+3$ ۳) $8k+3$ ۴) $4k+1$ یا $4k+3$

پاسخ گزینهٔ ۱ عددها در تقسیم بر ۴ در یکی از چهار دستهٔ مقابل قرار می‌گیرند:

$4k \Rightarrow$ زوج است. $\qquad 4k+1$

$4k+2 \Rightarrow$ زوج است. $\qquad 4k+3$

چون گفته دو عدد فردند و در تقسیم به چهار باقی‌ماندهٔ یکسانی دارند، پس یا هر دو به فرم $4k+1$اند و یا هر دو به فرم $4k+3$. اگر هر دو عدد به فرم $4k+1$ باشند، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a = 4k+1 \\ b = 4k'+1 \end{array}\right\} \Rightarrow ab = 16kk' + 4k + 4k' + 1 = 4(4kk' + k + k') + 1 = 4q + 1$$

و اگر هر دو عدد به فرم $4k+3$ باشند، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a = 4k+3 \\ b = 4k'+3 \end{array}\right\} \Rightarrow ab = 16kk' + 12k + 12k' + 9 = 4(4kk' + 3k + 3k' + 2) + 1 = 4q' + 1$$

یعنی در هر دو حالت حاصل‌ضرب دو عدد به فرم $4k+1$ است.

مثال ثابت کنید مربع هر عدد فرد در تقسیم به ۸ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.

حل همان‌طور که در سؤال قبل دیدید، در تقسیم بر ۴، چهار دسته عدد وجود دارد که عددهای فرد در آن به صورت $4k+1$ یا $4k+3$ است. در هر دو حالت مربع عدد را پیدا می‌کنیم:

$$a = 4k+1 \Rightarrow a^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 8(2k^2 + k) + 1 = 8q + 1$$

$$a = 4k+3 \Rightarrow a^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 8\underbrace{(2k^2 + 3k + 1)}_{q'} + 1 = 8q' + 1$$

تست a در تقسیم به ۲ باقی‌مانده‌ای برابر ۱، b در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ و c در تقسیم بر ۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۳ دارد. باقی‌ماندهٔ $a^2+b^2+c^2$ در تقسیم به ۸ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ گزینهٔ ۴ با توجه به اطلاعات داده‌شده عددهای a، b و c را می‌توان به فرم‌های زیر نوشت:

$$a = 2k+1 \qquad b = 4k+2 \qquad c = 6k+3$$

مشخص است که عددهای a و c فرد است. بنابراین با توجه به آن‌چه در سؤال قبل ثابت کردیم باقی‌ماندهٔ a^2 و c^2 در تقسیم بر ۸ برابر ۱ است، می‌ماند پیداکردن باقی‌ماندهٔ b^2 در تقسیم بر ۸.

$$b = 4k+2 \Rightarrow b^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 8(2k^2 + 2k) + 4 = 8q + 4$$

همان‌طور که می‌بینید b^2 در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده‌ای برابر ۴ دارد. بنابراین:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (8k+1) + (8k'+4) + (8k''+1) = 8(k + k' + k'') + 6$$

پس باقی‌ماندهٔ $a^2+b^2+c^2$ در تقسیم بر ۸ برابر ۶ است.

مثال **ثابت کنید هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم بر ۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ یا ۵ دارد.**

حل می‌دانیم عددها را می‌توان در تقسیم بر ۶ به یکی از ۶ فرم مقابل نوشت:

$۶k$ مضرب ۶ است.

$۶k+۱$

$۶k+۲$ زوج است.

$۶k+۳$ مضرب ۳ است.

$۶k+۴$ زوج است.

$۶k+۵$

اول نیست.

بنابراین فقط در حالت‌های $۶k+۱$ و $۶k+۵$ عدد می‌تواند اول باشد.

مثال **اگر باقی‌ماندهٔ a بر ۷ و ۸ به ترتیب برابر ۲ و ۵ باشد، باقی‌ماندهٔ a بر ۵۶ چند است؟**

حل این‌جور سؤال‌ها را در فصل بعد و بعد از آموختن هم‌نهشتی راحت‌تر می‌توانید پاسخ دهید اما نمونه‌های ساده‌اش را (مثل این سؤال) با استفاده از الگوریتم تقسیم می‌توان جواب داد:

$$a = ۷q+۲ \xrightarrow{\text{طرفین}\times ۸} ۸a = ۵۶q+۱۶$$

$$a = ۸q'+۵ \xrightarrow{\text{طرفین}\times ۷} ۷a = ۵۶q'+۳۵$$

$$\xrightarrow{-} ۸a-۷a = ۵۶q+۱۶-۵۶q'-۳۵ = ۵۶\underbrace{(q-q')}_{k}-۱۹$$

$$\Rightarrow a = ۵۶k-۵۶+۳۷ \Rightarrow a = ۵۶(k-۱)+۳۷$$

پس باقی‌ماندهٔ a در تقسیم به ۵۶ برابر ۳۷ است.

حالا بدون اتلاف وقت خیلی سریع تمرین‌های تشریحی ۱۶ تا ۳۶ و تست‌های ۴۴ تا ۱۴۵ را حل کن.

درس دوم: بخش‌پذیری در اعداد صحیح

۱۶- اگر a، b و c سه عدد طبیعی باشند، به طوری که $abc \mid ab + c$، ثابت کنید بیشترین مقدار $a + b + c$ برابر ۵ است.

۱۷- اگر $b^5 \mid a^7$ ثابت کنید $b^8 \mid a^{11}$ و با یک مثال نقض نشان دهید $b^9 \mid a^{13}$ نادرست است.

۱۸- ثابت کنید اگر $x^3 \mid 128$، آن‌گاه $x^5 \mid 2^{14}$.

۱۹- اگر a عددی صحیح باشد به طوری که $11 \mid 3a + 2$ ثابت کنید: $121 \mid 24a^2 + 43a + 18$.

۲۰- دو عدد طبیعی پیدا کنید به طوری که حاصل‌ضرب آن‌ها از دو برابر عدد کوچک‌تر به علاوهٔ عدد بزرگ‌تر ۱۵ واحد بیشتر باشد.

۲۱- ثابت کنید هیچ مقدار صحیحی مانند x وجود ندارد که به ازای آن $x^2 + 2$ بر $5x + 3$ بخش‌پذیر باشد.

۲۲- به ازای چند عدد طبیعی $n > 2$ رابطهٔ $n^3 - n \mid (n-2)!$ برقرار است؟

۲۳- ثابت کنید اگر a و b عددهایی طبیعی باشند و $ab \mid a + b$ و a عددی اول باشد، آن‌گاه $b = a^2 - a$.

۲۴- بزرگ‌ترین عضو مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{N} : x \mid 80 \,,\, x \mid 300\}$ را به دست آورده، پیدا کنید این مجموعه چند عضو دورقمی دارد؟

۲۵- اگر $(a, 60) = 10$ باشد، دربارهٔ تعداد عوامل ۲، ۳ و ۵ عدد a چه می‌توان گفت؟

۲۶- به ازای چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ مانند x رابطهٔ $[x, 15] = 60$ برقرار است؟

۲۷- باقی‌مانده و خارج‌قسمت تقسیم a بر ۲۴ به ترتیب برابر ۱۷ و q است باقی‌ماندهٔ $5a + 41$ بر ۲۰ و خارج‌قسمت این تقسیم برحسب q کدام است؟

۲۸- اگر باقی‌ماندهٔ a بر ۳۳ برابر ۲۱ و باقی‌ماندهٔ b بر ۲۲ برابر ۱۹ باشد، باقی‌ماندهٔ $3a - 5b$ بر ۱۱ چند است؟

۲۹- عدد a مضرب ۸ است و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۲۴ برابر r شده است. اگر ۳۳ واحد به a اضافه کنیم، خارج‌قسمت دو واحد اضافه می‌شود. دربارهٔ باقی‌ماندهٔ جدید چه می‌توان گفت؟

۳۰- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a و b بر ۴ به ترتیب برابر ۱ و ۲ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^2 + (a+b)^4 + (b-a)^6$ بر ۸ چند است؟

۳۱- چند نقطه روی منحنی به معادلهٔ $yx^2 - 2x^3 - y - 1 = 0$ وجود دارد که هر دو مولفهٔ آن عددهایی صحیح باشد؟

۳۲- ثابت کنید اگر P عددی اول باشد، معادلهٔ $xy + x + y = p - 1$ در $\mathbb{N}$ جواب ندارد.

۳۳- ثابت کنید مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم به ۲۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.

۳۴- اگر $۱۳ \mid ۵a + ۷b$ ثابت کنید $۱۳ \mid ۲a - ۵b$.

۳۵- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی مانند x رابطهٔ $۱۳ \mid x^۲ + x + ۱$ برقرار است؟

۳۶- اگر باقی‌ماندهٔ x بر ۱۶ و ۱۵ به ترتیب برابر ۷ و ۲ باشد، باقی‌ماندهٔ x بر ۱۲۰ چند است؟

درس دوم: بخش‌پذیری در اعداد صحیح

۴۴- چند عدد صحیح وجود دارد که در میان عددهای صحیح فقط بر خودش و ۱ بخش‌پذیر باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۴۵- اگر $a \mid c$ و $ab \mid c$ کدام گزینه درست است؟ (۷۹)

۱) $b \mid c$ ۲) $a+b \mid c$ ۳) $a-b \mid c$ ۴) $a^۲ \mid c$

۴۶- اگر $a \mid a-b$ آن‌گاه: (۷۹)

۱) $a \mid a-b$ ۲) $b \mid a-b$ ۳) $a \mid b$ ۴) $a-b \mid b$

۴۷- اگر $ab \mid ۶$:

۱) هم a بر ۶ بخش‌پذیر است و هم b.
۲) دست‌کم یکی از مقادیر a یا b بر ۶ بخش‌پذیر است.
۳) ممکن است نه a بر ۶ بخش‌پذیر باشد و نه b.
۴) a دست‌کم بر یکی از عددهای ۲ یا ۳ بخش‌پذیر است.

۴۸- حاصل‌ضرب دو عدد به فرم $۷k+۳$ به کدام فرم است؟

۱) $۷q+۱$ ۲) $۷q+۲$ ۳) $۷q+۳$ ۴) $۷q-۱$

۴۹- اگر $۳a+۴b \mid ۲a+۳b$، چندتا از رابطه‌های $a \mid ۲a+۳b$، $a-b \mid ۲a+۳b$ و $۲a-۳b \mid ۲a+۳b$ همواره درست است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۰- اگر $a \mid x-y$ و $a \mid z-t$ کدام گزینه درست است؟

۱) $a \mid xt-yz$ ۲) $a \mid xt+yz$ ۳) $a \mid xy+yt$ ۴) $a \mid (x+y)(z+t)$

۵۱- اگر $a^۳ \mid ۴۸$ و $b^۲ \mid ۳۷۵$، کم‌ترین مقدار $a+b$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۴)

۱) ۲۱ ۲) ۲۷ ۳) ۸۱ ۴) ۸۷

۵۲- اگر $a^۲ \mid ۱۰۸$ کدام گزینه درست نیست؟

۱) $۱۸ \mid a$ ۲) $۱۲ \mid a$ ۳) $۴ \mid a^۲$ ۴) $۲۷ \mid a^۲$

۵۳- اگر $a \mid ۱۸$ و $b \mid ۱۸$، آن‌گاه کدام رابطه درست نیست؟ $(a,b \in \mathbb{N})$ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) $۶ \mid b$ ۲) $a \mid ۳b$ ۳) $a \mid ۵۴$ ۴) $۳a \mid b$

۵۴- رابطهٔ $a^۲-a-۱ \mid ۱$ به ازای چند عدد صحیح a برقرار است؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۵- اگر $a^۲ \mid a+b$، آن‌گاه کدام رابطهٔ زیر، لزوماً صحیح نیست؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) $a^۲ \mid b^۲$ ۲) $a \mid ۳b-۲a$ ۳) $a^۲ \mid a-b$ ۴) $a^۲ \mid a^۲+b^۲$

۵۶- اگر a و b عددهایی طبیعی باشند و $ab \mid a+b$، کدام‌یک از نتیجه‌گیری‌های زیر لزوماً درست نیست؟

۱) $a \mid b$ ۲) $a \mid ۲$ ۳) $۲a \mid b+۲$ ۴) $b \mid a+۲$

۵۷- اگر $a^۲ \mid b^۳$ کدام نتیجه‌گیری درست نیست؟

۱) $a^۵ \mid b^۸$ ۲) $a^۳ \mid b^۵$ ۳) $a^۷ \mid b^{۱۰}$ ۴) $a^۴ \mid b^۷$

۵۸- اگر $a^۲+۲a+۱ \mid b^۵$، کدام گزینه درست است؟

۱) $a+۱ \mid b^۲$ ۲) $a+۱ \mid b^۳$ ۳) $a^۳+۳a^۲+۳a+۱ \mid b^۶$ ۴) $a^۳+۳a^۲+۳a+۱ \mid b^۷$

۵۹- اگر $a \mid b+۳$ و $a \mid c-۲$، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $bc+۱$ بر a، همواره برابر کدام است؟ $(a \geq ۵)$ (کانون فرهنگی آموزش ۹۵)

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) $a-۵$ ۴) صفر

۶۰- چند عدد دورقمی طبیعی مانند a وجود دارد به طوری که $a \mid ۱۰$ و $a \nmid ۱۵$؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۶۱- بزرگ‌ترین مقدار x برای آن‌که $x-2 \mid 7x+5$، چه مجموع ارقامی دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۶۲- اگر $a \neq 1$ عددی طبیعی باشد به طوری که $a \mid 5m+4$ و $a \mid 2m+3$ در این صورت a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

۶۳- اگر $a \mid b+2$ و $a \mid b^3+1$، کدام گزینه درست است؟

۱) $a \mid b+1$ ۲) $a \mid b^2+1$ ۳) $a \mid 7$ ۴) $a \mid 5$

۶۴- به ازای چند عدد صحیح مانند x رابطهٔ $3x+2 \mid 5x+7$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶۵- به ازای چند عدد طبیعی مانند x رابطهٔ $0 \mid x^7-4x^5-x^3+4x$ برقرار است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۶- به ازای چند عدد طبیعی مانند x رابطهٔ $x^3+1 \mid x^2+1$ برقرار است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۶۷- چند مقدار صحیح n وجود دارد به گونه‌ای که $n+6$ بر n^2+2 بخش‌پذیر باشد؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۶۸- چند نقطه روی منحنی به معادلهٔ $2yx+2=3x-y$ وجود دارد که هر دو مولفهٔ آن عددهایی صحیح باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۶۹- چند عدد صحیح وجود دارد که ۴ برابرش به علاوهٔ یک بر ۳ برابرش منهای یک بخش‌پذیر باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷۰- اگر فقط به ازای دو عدد صحیح x رابطهٔ $x-2 \mid x^2-a$ برقرار باشد، a چند مقدار صحیح مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشتر از ۲

۷۱- بزرگ‌ترین مقدار a برای آن‌که هر دو رابطهٔ $a \mid 3m+1$ و $a \mid m^2+2$ برقرار باشد، کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۳ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

۷۲- به ازای کدام مقدار m اگر a عدد طبیعی باشد و هر دو عدد $9k+m$ و $7k+6$ را بشمارد، فقط دو مقدار برای a وجود دارد؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۱۰

۷۳- کدام‌یک از عددهای زیر می‌تواند اول باشد؟ $(n>3)$

۱) $n!+3$ ۲) $n!+n-1$ ۳) $n!-n+1$ ۴) $n!+n+1$

۷۴- چندتا از عددهای $100!+12$، $100!+31$ و $100!+97$ اول است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷۵- باقی‌ماندهٔ تقسیم $8!+7!-6!$ بر ۲۱۰ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۹۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۸۰

۷۶- بزرگ‌ترین عدد طبیعی دورقمی n که به ازای آن هر دو رابطهٔ $12 \mid 6n+30$ و $21 \mid 6n+30$ برقرار باشد، کدام است؟

۱) ۹۱ ۲) ۹۳ ۳) ۹۵ ۴) ۹۶

۷۷- اگر $5 \mid 2n+1$، عبارت $14n^2+19n+6$ همواره بر کدام عدد زیر، بخش‌پذیر است؟ $(n \in \mathbb{Z})$ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) ۱۰ ۲) ۲۵ ۳) ۱۵ ۴) ۳۰

۷۸- اگر x عددی طبیعی باشد از دو رابطهٔ $x \mid 24$ و $x \mid 30$ نتیجه می‌شود .... و از دو رابطهٔ $24 \mid x$ و $30 \mid x$ نتیجه می‌شود ....

۱) $x \mid 3$ ، $120 \mid x$ ۲) $x \mid 3$ ، $240 \mid x$ ۳) $x \mid 6$ ، $120 \mid x$ ۴) $x \mid 6$ ، $240 \mid x$

۷۹- عددهای $a>1$، $b>1$ و $a \neq b$ هر دو فقط دارای دو مقسوم‌علیه طبیعی هستند. اگر رابطه‌های $a \mid 30$ و $b \mid 30$ برقرار باشد، $a+b$ برابر کدام‌یک از عددهای زیر نمی‌تواند باشد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۸۰- اگر $x \mid 12$ و $x \mid 20$ و x عددی طبیعی باشد، x .... مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد که بزرگ‌ترین آن .... است.

۱) ۲، ۴ ۲) ۳، ۴ ۳) ۲، ۸ ۴) ۴، ۴

۸۱- بزرگ‌ترین شمارندهٔ مشترک دو عدد $4n+1$ و $8n+6$ کدام است؟

۱) همواره ۱ ۲) ۱ یا ۲ ۳) ۱ یا ۲ یا ۴ ۴) ۲ یا ۴

۸۲- اگر $[a,۴]=۱۲$ و $[b,۴]=۱۲$ و $۰<a<۱۲$ و $۰<b<۱۲$ و $a\neq b$ ، $a+b$ کدام است؟

۱) همواره ۶ ۲) ۶ یا ۹ ۳) همواره ۹ ۴) ۹ یا ۱۲

۸۳- عدد $۲n+۱$ نسبت به کدام‌یک از عددهای زیر ممکن است اول نباشد؟

۱) $۲n-۱$ ۲) $۴n+۱$ ۳) $۵n+۱$ ۴) $۶n+۱$

۸۴- مجموعهٔ $\{x\in\mathbb{N} : x|۷۲ , x|۸۴\}$ چند عضو دورقمی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۸۵- کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ $\{x\in\mathbb{N} , ۱۵|x , ۵۰|x\}$ برابر .... و این مجموعه .... عضو سه‌رقمی دارد.

۱) ۷۵، ۳ ۲) ۷۵، ۶ ۳) ۱۵۰، ۳ ۴) ۱۵۰، ۶

۸۶- اگر $d=(۵۴,۹۰)$ و $x\in\mathbb{N}$ و $x|۵۴$ و $x|۹۰$ و $x<d$ ، چند مقدار برای x وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۸۷- حاصل $(۲^۹,[-۶,۶^۳])$ کدام است؟

۱) $۲^۳$ ۲) $۲^۶$ ۳) $۲^۹$ ۴) $۲^۹\times ۳^۳$

۸۸- اگر m عددی طبیعی باشد، حاصل $[(m^۳,m^۷),[m^۵,m^۲]]$ کدام است؟

۱) $m^۲$ ۲) $m^۳$ ۳) $m^۵$ ۴) $m^۷$

۸۹- اگر $(a,b)=d$ ، حاصل $([d,a^۲],([a,b],a))$ کدام است؟

۱) a ۲) $a^۲$ ۳) $[a,b]$ ۴) $|a|$

۹۰- چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۵۰ مانند a وجود دارد که فرد باشد و مضرب ۳ نباشد؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۹

۹۱- اگر $(a,۶)=۳$ ، باقی‌ماندهٔ $۳a+۲$ بر ۹ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۹۲- به ازای چند عدد طبیعی و دورقمی n، دو عدد به صورت $۲۵n+۹$ و $۱۱n+۴$ نسبت به هم اول‌اند؟ *(سراسری ۸۹)*

۱) ۸۶ ۲) ۸۷ ۳) ۸۹ ۴) ۹۰

۹۳- اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی n، دو عدد $۱۲n+۷$ و $۵n-۲$ نسبت به هم اول نباشند، آن‌گاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد کدام است؟

۱) ۵۹ ۲) ۶۷ ۳) ۸۳ ۴) ۸۹ *(۸۸)*

۹۴- به ازای چند عدد طبیعی n، هر دو عدد $۷n+۵$ و $۱۱n+۲$ مقسوم‌علیه مشترک برابر ۳ دارند؟ *(۹۱)*

۱) هیچ عدد ۲) یک عدد ۳) دو عدد ۴) بی‌شمار عدد

۹۵- به ازای مقادیر مختلف $a>۳$ بزرگ‌ترین مقدار بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $۱۵a+۳$ و $۱۵a-۱۲$ کدام است؟ *(۹۰)*

۱) ۱۵ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۵

۹۶- حاصل $(۱۳!+۵ , ۱۴!-۸)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۱۳

۹۷- اگر $-۱۰۷=۷q+r$ و $۰\le r<۷$ باشد، $r-q$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۲۲ ۴) ۲۳

۹۸- در تقسیم عدد a بر ۶۳ باقی‌مانده ۱۷ است. اگر ۶۰ واحد به a اضافه کنیم، باقی‌مانده و خارج‌قسمت چه تغییری می‌کند؟ *(۸۵)*

۱) سه واحد کم می‌شود ـ یک واحد اضافه می‌شود. ۲) سه واحد اضافه می‌شود ـ یک واحد اضافه می‌شود.

۳) سه واحد اضافه می‌شود ـ تغییر نمی‌کند. ۴) سه واحد کم می‌شود ـ دو واحد اضافه می‌شود.

۹۹- در تقسیم a بر ۲۳، باقی‌مانده برابر r شده است. اگر ۴۱ واحد به a اضافه کنیم، باقی‌مانده برابر صفر می‌شود، خارج‌قسمت چه تغییری می‌کند؟

۱) تغییر نمی‌کند. ۲) یکی اضافه می‌شود. ۳) ۲تا اضافه می‌شود. ۴) ۳تا اضافه می‌شود.

۱۰۰- اگر باقی‌ماندهٔ a بر ۱۷ برابر ۵ باشد، باقی‌ماندهٔ $۳a+۴$ بر ۱۷ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۱۹

۱۰۱- اگر $x=۱۳k+۳$ و $y=۱۳k'+۱۱$ باشد، باقی‌ماندهٔ $۵x-۳y$ بر ۱۳ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۰۲- اگر در تقسیم اعداد طبیعی a و $a+۱۰۰$ بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده‌ها به ترتیب برابر با ۱۰ و ۱۱ باشند، کم‌ترین مقدار b کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۳۳ ۳) ۶۶ ۴) ۹۹ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)*

۱۰۳- اگر $a-۱$ مضرب ۶ و $a+۱$ مضرب ۸ باشد، باقی‌ماندهٔ $a^۲-۲$ بر ۲۴ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲۳ ۴) ۴۷

۱۰۴- اگر $a=۱۵k+۴$ باشد، خارج‌قسمت تقسیم $۸a-۷۱$ بر ۲۰ کدام است؟

۱) $۸k-۱$ ۲) $۸k-۲$ ۳) $۶k-۱$ ۴) $۶k-۲$

۱۰۵- خارج‌قسمت $۲۱-!۲۰$ بر ۲۰ کدام است؟

۱) $۲۰!-۱$ ۲) $۲۰!-۲$ ۳) $۱۹!-۱$ ۴) $۱۹!-۲$

۱۰۶- چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰۰ وجود دارد که در تقسیم بر ۳۵ باقی‌مانده‌شان ۵ برابر خارج‌قسمت آن‌ها باشد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۰۷- اگر a و b اعداد صحیح متمایز و مثبتی باشند به طوری که باقی‌ماندهٔ تقسیم هر کدام از آن‌ها بر ۲۳، دو برابر مکعب خارج‌قسمت باشد، آن‌گاه $۲a+b$ کدام می‌تواند باشد؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۵)*

۱) ۶۲ ۲) ۲۵ ۳) ۱۴۹ ۴) ۸۷

۱۰۸- در تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۷ باقی‌ماندهٔ تقسیم از مربع خارج‌قسمت آن ۲ واحد کم‌تر است. بزرگ‌ترین مقدار a مضرب کدام عدد است؟ *(۸۴)*

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۱۰۹- مجموع ارقام بزرگ‌ترین عددی که در تقسیم بر ۴۷ باقی‌مانده توان دوم خارج‌قسمت است، کدام است؟ *(۸۵)*

۱) ۱۶ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۱۱۰- چند عدد طبیعی مانند b وجود دارد که در تقسیم عدد ۱۳۷ به b باقی‌مانده برابر ۱۶ شود؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشتر از ۲

۱۱۱- اگر در تقسیم عدد طبیعی a بر b، باقی‌مانده بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد و $b \mid a-۱$، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^۲$ بر b کدام است؟ $(b>۱)$ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۶)*

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) به a بستگی دارد.

۱۱۲- چند عدد طبیعی مانند b وجود دارد که در تقسیم عدد ۱۷۱ بر b خارج‌قسمت برابر ۹ شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۳- در تقسیم a بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده، ۳۴ و خارج‌قسمت، عدد طبیعی است. چند جواب طبیعی کم‌تر از ۷۰ برای a وجود دارد؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۵)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۴- عدد a نه مضرب ۳ است و نه مضرب ۲، باقی‌ماندهٔ آن در تقسیم بر ۱۲، چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۱۵- اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b \mid a^۲+۴$ باقی‌ماندهٔ $a^۲+b^۲+a^۲b^۲$ بر ۸ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱۶- باقی‌ماندهٔ $۱^۲+۵^۲+۹^۲+\cdots+۹۷^۲$ بر ۸ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۱۷- کدام‌یک از عددهای زیر می‌تواند اختلاف مکعب‌های دو عدد متوالی باشد؟

۱) ۳۲۹ ۲) ۳۳۱ ۳) ۳۳۴ ۴) ۳۳۷

۱۱۸- اگر k عددی صحیح باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $k^۲+۱$ بر ۵، کدام عدد نمی‌تواند باشد؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)*

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۱۱۹- اگر a و b دو عدد صحیح فرد باشند، آن‌گاه بزرگ‌ترین عددی که $a^۴-b^۴$ همواره بر آن بخش‌پذیر است، کدام است؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)*

۱) ۸۰ ۲) ۴۰ ۳) ۹۶ ۴) ۱۶

۱۲۰- اگر $۹^n \mid ۲۷^m$ و $a^n \mid ۶۴^m$، کم‌ترین مقدار طبیعی a چه مجموع ارقامی دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۲۱- به ازای چند عدد طبیعی n، هر دو عدد $\frac{n+۳}{۵}$ و $\frac{n^۳+۲n}{۱۰}$ اعداد صحیح هستند؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)*

۱) هیچ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

۱۲۲- بزرگ‌ترین مقدار صحیح کسر $\frac{x^۳+۵}{۲x+۱}$ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۹ ۳) ۱۴۱ ۴) ۱۷۶