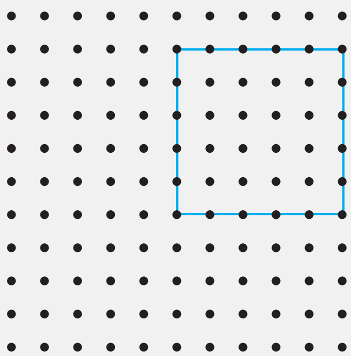
۱

نمادها و اصول اولیه شمارش

۱-۱ اصل جمع و ضرب

پرسش **مربع‌های صاف و نقطه‌ها**

در شکل ۱-۱ تعدادی نقطه مشاهده می‌کنید. در هر ردیف و در هر ستون ۱۱ نقطه وجود دارد. اصطلاحاً به این شکل یک شبکه‌ی ۱۱ × ۱۱ از نقاط می‌گویند. چند مربع صاف (موازی با اضلاع صفحه) وجود دارد که رئوسش از این نقاط باشد؟

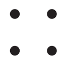


شکل ۱-۱

چه چیزی در مسئله شما را گیج کرده است؟

- با توجه به تعداد زیاد نقطه‌ها، احتمالاً تعداد خیلی زیادی نیز مربع خواهیم داشت. پس یکی‌یکی شمردن مربع‌ها کمی غیرمنطقی به نظر می‌رسد. در این صورت چگونه باید مربع‌ها را شمرد؟

بیایید اول تعداد نقطه‌ها را کم‌تر کنیم. مثلاً در هر سطر و ستون تنها ۲ نقطه باشد (مطابق شکل ۱-۲) به وضوح در این شکل تنها یک مربع می‌توان ساخت.



شکل ۱-۲

حال فرض کنید در هر سطر و ستون ۳ نقطه باشد.

سؤال. در این حالت چند مربع وجود خواهد داشت؟

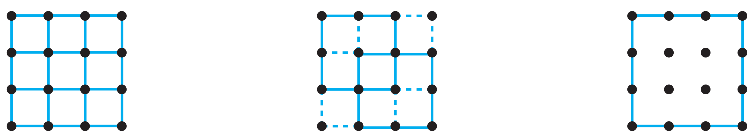
پاسخ. در این حالت باید ۵ مربع در شکل پیدا کرده باشید (توجه کنید که تنها مربع‌های صاف را می‌شماریم).

شکل ۱-۳

حال یک نقطه‌ی دیگر نیز به هر سطر و ستون اضافه کنید. یعنی در هر سطر و ستون ۴ نقطه داشته باشیم.

سؤال. در این حالت چند مربع وجود دارد؟

پاسخ. در این حالت باید ۱۴ مربع در شکل پیدا کرده باشید. همان‌طورکه در شکل ۱-۴ مشاهده می‌کنید، ۱ مربع بزرگ ۳ × ۳، ۴ مربع ۲ × ۲ و ۹ مربع ۱ × ۱ در شکل وجود دارد.

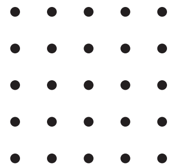


شکل ۱-۴

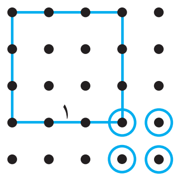
سؤال. یک نقطه‌ی دیگر نیز به هر سطر و ستون اضافه می‌کنیم تا هر سطر و ستون شامل ۵ نقطه شوند. نقاط را رسم کنید و بدون این‌که خطی روی این نقاط بکشید، به این سؤال پاسخ دهید: در این حالت چند نوع (از اندازه‌های مختلف) مربع خواهیم داشت؟ از هر کدام چقدر؟

برای پاسخ به این سؤال، از پاسخ قسمت‌های قبل کمک بگیرید. سعی کنید تمامی مربع‌ها را تصور کنید.

پاسخ. با توجه به این‌که در این حالت بزرگ‌ترین مربع ۴ × ۴ است، پس ۴ نوع مربع خواهیم داشت. (۱ × ۱، ۲ × ۲، ۳ × ۳ و ۴ × ۴) همچنین واضح است که تنها یک مربع ۴ × ۴ در شکل ۱-۵ وجود دارد. برای مربع‌های ۳ × ۳ نیز احتمالاً هر ۴ مربع را پیدا کردید. توجه کنید که تنها ۴ نقطه‌ای که در شکل ۱-۶ علامت زده شده‌اند، می‌توانند رأس پایین راست یک مربع ۳ × ۳ باشند. به همین دلیل تنها ۴ مربع با این اندازه وجود دارد.



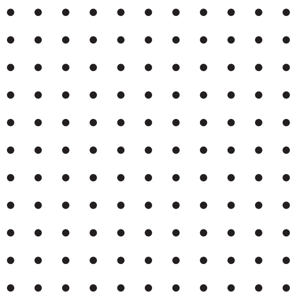
شکل ۱-۵



شکل ۱-۶

همچنین ۹ مربع ۲ × ۲ و ۱۶ مربع ۱ × ۱ نیز در این شکل می‌توان پیدا کرد. پس درکل ۳۰ مربع (صاف) در این شکل وجود دارد.

الان دیگر می‌توانیم به سؤال اصلی خودمان بازگردیم . دو مرتبه نقاط ۱۱ × ۱۱ را رسم می‌کنیم (شما دیگر لازم نیست رسم کنید).



شکل ۱-۷

حال بدون این‌که خطی روی این نقاط بکشید، بگویید از هر اندازه‌ای، چند مربع وجود دارد. اعداد خود را درون جدول زیر بنویسید.

اندازه	۱ × ۱	۲ × ۲	۳ × ۳	۴ × ۴	۵ × ۵	۶ × ۶	۷ × ۷	۸ × ۸	۹ × ۹	۱۰ × ۱۰
تعداد									۴	۱

اگر به درستی تمامی اعداد را پیدا کرده باشید، مجموعشان ۳۸۵ خواهد شد. یعنی ۳۸۵ مربع در شکل ۱-۷ وجود دارد.

درسنامه اصل جمع چیست؟

در حل این مسئله از **اصل جمع** استفاده شده است. یعنی برای شمارش تعداد موجودات، می‌توانیم آن‌ها را بر اساس خاصیتی به چند دسته تقسیم کنیم و تعداد اعضای هر دسته را پیدا کنیم و در نهایت مقادیر به‌دست آمده را با هم جمع بزنیم. این گفته معادل قاعده‌ی زیر است:

فرض کنید $A_1, A_2, \cdots, A_n$ چند زیرمجموعه از یک مجموعه‌ی متناهی A باشند، به طوری که هیچ دوتایی از این زیرمجموعه‌ها اشتراکی نداشته و اجتماع این زیرمجموعه‌ها کل A باشد. آن‌گاه

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

پرسش **Computer**

به چند حالت در شکل زیر با دو حرکت مورب به سمت راست و چپ، کلمه COMPUTER را می‌توان ساخت؟

$$\begin{array}{c} C \\ OO \\ MMM \\ PPPP \\ UUUUU \\ TTTTTT \\ EEEEEEE \\ RRRRRRRR \end{array}$$

یکی از مسیرهایی که این کلمه را می‌سازد در شکل ۱-۸ نشان داده شده است.

$$\begin{array}{c} C \\ O\ O \\ M\ M\ M \\ P\ P\ P\ P \\ U\ U\ U\ U\ U \\ T\ T\ T\ T\ T\ T \\ E\ E\ E\ E\ E\ E\ E \\ R\ R\ R\ R\ R\ R\ R\ R \end{array}$$

شکل ۱-۸

چه چیزی در مسئله شما را گیج کرده است؟

- مسیرها زیادند و شمردن تک‌تک‌شان کار سختی است.

در این سؤال نیز از حالات کوچک‌تر شروع می‌کنیم تا ایده‌ای برای شمارش پیدا کنیم.

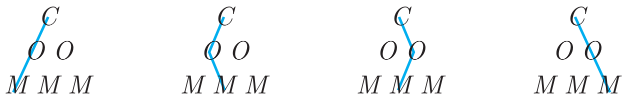
سؤال. تمامی مسیرهای مربوط به ساختن کلمه‌ی CO را رسم کنید.

پاسخ.

شکل ۱-۹

سؤال. تمامی مسیرهای مربوط به ساختن کلمه‌ی COM رسم کنید.

پاسخ.



شکل ۱-۱۰

سؤال. بدون این‌که شکل جدیدی رسم کنید، فکر می‌کنید چند مسیر برای ساختن کلمه‌ی COMP وجود دارد؟

در سؤال قبلی به نحوه‌ی امتداد پیدا کردن مسیرهای مربوط به COM نسبت به مسیرهای کلمه‌ی CO دقت کنید.

پاسخ. همان‌طور که مشاهده می‌کنید، هر کدام از مسیرهای قسمت اول (CO) را توانستیم به دو طریق امتداد دهیم. یکی به سمت پایین ـ چپ و دیگری به سمت پایین ـ راست. همین روند برای ساختن بقیه‌ی حروف نیز صحیح است. یعنی در هر مرحله، بدون توجه به این‌که در مراحل قبلی چگونه حرکت کردیم، به دو گونه می‌توانیم مسیر را ادامه دهیم. یکی این‌که به سمت پایین ـ چپ حرکت کنیم و دیگری آن‌که به سمت پایین ـ راست حرکت کنیم. در نتیجه تعداد مسیرهای کلمه‌ی COMP، دو برابر تعداد مسیرهای کلمه‌ی COM یعنی ۸ عدد خواهد بود.

سؤال. به چند طریق می‌توان کلمه‌ی COMPUTER را ساخت؟

پاسخ. همان‌طور که گفتیم برای اضافه کردن هر حرف جدیدی، در هر وضعیتی که باشیم، ۲ انتخاب داریم. پس ۱۶ طریق برای ساختن کلمه‌ی COMPU، ۳۲ طریق برای کلمه‌ی COMPUT، ۶۴ طریق برای کلمه‌ی COMPUTE و ۱۲۸ طریق برای کلمه‌ی COMPUTER داریم. پس پاسخ مسئله، ۱۲۸ است.

درسنامه اصل ضرب چیست؟

در حل این سؤال از **اصل ضرب** استفاده شد. یعنی برای شمارش، مسئله را به چند بخش تقسیم کردیم (در این مسئله به ۷ انتخاب چپ یا راست) و تعداد حالات را مستقلاً برای هر بخش به‌دست آورده و در هم ضرب کردیم. این اصل در واقع بیان می‌کند اگر اتفاق A_1 به a_1 طریق مختلف، اتفاق A_2 به a_2 طریق مختلف ...، اتفاق A_n به a_n طریق مختلف ممکن باشد، به طوری که این اتفاق‌ها مستقل از هم باشند و رخ دادن یکی به حالت خاصی از دیگری بستگی نداشته باشد؛ تعداد کل راه‌های ممکن که اتفاقات A_1 تا A_n پشت سر هم رخ دهند برابر است با $a_1 a_2 \cdots a_n$. این گفته معادل این قاعده است:

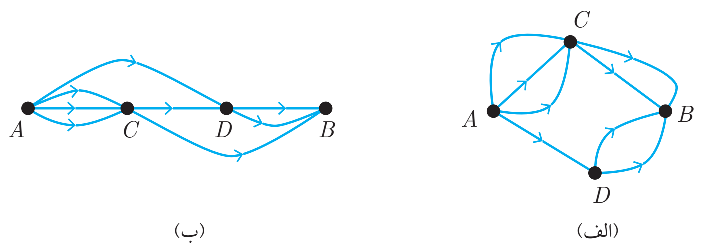
مجموعه‌های متناهی $A_1, A_2, \cdots, A_n$ را در نظر بگیرید. مجموعه‌ی X را مجموعه‌ی همه‌ی nتایی‌های $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ بگیرید به طوری که به ازای هر i، $x_i \in A_i$ باشد در این صورت،

$$|X| = |A_1|.|A_2|\cdots|A_n|$$

تمرین‌های بخش ۱-۱

۱. پروفسور آلفا، بتا، گاما و دلتا می‌خواهند در یک آزمون شفاهی ترکیبیات به دانشجویی به نام Pi پذیرش دهند. پروفسورها بر روی ۴ صندلی در یک ردیف نشسته‌اند. پروفسور آلفا و دلتا به عنوان مسئولان کمیته‌ی امتحان، باید کنار یکدیگر بنشینند. پروفسور گاما نیز به عنوان مشاور این دانشجو، باید کنار مسئولین کمیته‌ی امتحان بنشیند. به چند طریق پروفسورها می‌توانند بنشینند؟

۲. در هر کدام از شکل‌های زیر به چند طریق می‌توان با حرکت روی خطوط، از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B رفت؟



شکل ۱-۱۱

۳. **(الف)** چند عدد چهاررقمی با ارقام ۰، ۱، ۲ و ۳ وجود دارد؟

(ب) در چند تا از این اعداد، ارقام تکراری نیست؟

(ج) چند عدد با این ارقام وجود دارد که بر ۳ بخش‌پذیر باشد؟

۴. چند عدد چهاررقمی بزرگ‌تر از ۵۷۳۱ با ارقام متمایز وجود دارد؟

۵. چند عدد ۳ رقمی با ارقام متمایز وجود دارد به طوری‌که مجموع ارقام آن برابر با ۷ باشد؟

۶. با جابه‌جایی حروف کلمه‌ی «کامپیوتر» چند کلمه‌ی جدید (نه لزوماً با معنا) می‌توان ساخت؟ در چند تا از این کلمات دو حرف «و» و «ر» مجاور هم باشند؟

۱-۲ آشنایی با دو نماد

پرسش — **دنباله‌های عددی**

دنباله‌های زیر، چند جمله‌ی ابتدایی از یک دنباله‌ی نامتناهی از اعداد هستند که با یک رابطه‌ی ساده‌ی ریاضی توصیف می‌شوند. اول سعی کنید عدد بعدی دنباله‌های زیر را حدس بزنید. سپس یک رابطه‌ی کلی برای توصیف دنباله بیان کنید.

۱) ۳, ۸, ۱۵, ۲۴, ۳۵, ?

۲) ۱۱, ۱۹, ۱۴, ۲۲, ۱۷, ۲۵, ?

سعی کنید اعداد بعدی دنباله‌ها را پیدا کنید، سپس ادامه‌ی متن را بخوانید.

دنباله‌ی اول: احتمالاً متوجه شدید که عدد بعدی این دنباله، ۴۸ است. در واقع اول ۵ واحد به ۳ اضافه شده است. سپس ۷ واحد به ۸، سپس ۹ واحد به ۱۵ و در نهایت ۱۱ واحد به ۲۴ اضافه شده است. پس منطقاً در مرحله‌ی بعد ۱۳ واحد به ۳۵ می‌بایست اضافه شود و در نتیجه مقدار بعدی دنباله برابر با ۴۸ خواهد بود.

اگر بیش‌تر دقت کنید، متوجه می‌شوید که هر کدام از این اعداد یک واحد از یک عدد مجذور کامل کم‌تر هستند. به عبارت دیگر عضو اول این دنباله $۲^۲ - ۱$ است، عضو دوم آن $۳^۲ - ۱$ است و به همین ترتیب می‌توان گفت که عضو ششم آن، $۷^۲ - ۱$ است. به طور کلی‌تر، عضو k آن، $k^۲ - ۱$ است و بدین ترتیب یک رابطه‌ی کلی برای توصیف اعضای این دنباله بیان می‌شود.

دنباله‌ی دوم: عضو بعدی این دنباله ۲۰ است. در واقع این دنباله به این شکل است که یک مرحله ۸ واحد افزایش پیدا می‌کند و مرحله‌ی بعد ۵ واحد کاهش پیدا می‌کند و دوباره مرحله‌ی بعد ۸ واحد افزایش پیدا می‌کند. حال باید مانند قبل یک رابطه‌ی کلی برای اعضای آن پیدا کنیم.

سؤال. اعضای این دنباله را $b_۱, b_۲, b_۳, \cdots$ بنامید. سعی کنید برای مقدار b_k یک رابطه بر حسب k پیدا کنید.

پاسخ. همان‌طور که مشاهده می‌کنید،

$$b_۳ - b_۱ = b_۵ - b_۳ = b_۷ - b_۵ = b_۹ - b_۷ = \cdots = ۳$$
$$b_۴ - b_۲ = b_۶ - b_۴ = b_۸ - b_۶ = b_{۱۰} - b_۸ = \cdots = ۳$$

در نتیجه به رابطه‌ی زیر برای b_kها دست پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} b_k = \frac{۳}{۲}(k-۱) + ۱۱ & k \text{ فرد} \\ b_k = \frac{۳}{۲}(k-۲) + ۱۹ & k \text{ زوج} \end{cases}$$

در این دو مثال متوجه شدید اگر یک دنباله‌ی نامتناهی را همانند دنباله‌های صورت سؤال به فردی معرفی کنیم، او مجبور خواهد بود بقیه اعضای دنباله را حدس بزند. پس برای این‌که بدون ابهام بخواهیم دنباله‌ای را معرفی کنیم، لازم است تمامی اعضای آن را به صورت شفاف مشخص کنیم.

برای دنباله‌های متناهی نیز این مسئله وجود دارد. به طور مثال دنباله‌ی $۱, ۲, ۳, \cdots, ۱۰$ ممکن است از لحاظ عرفی، همان اعداد ۱ تا ۱۰ تلقی شوند، اما این بیان از لحاظ ریاضی مشخص نکرده است که این دنباله، مثلاً دنباله‌ی $۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۱۰$ نیست. صرفاً ما حدس می‌زنیم منظور دنباله‌ی $a_i = i$ برای $i = ۱$ تا ۱۰ بوده است (این را به شکل $\{a_i = i\}_{i=۱}^{i=۱۰}$ نیز نمایش می‌دهند.)

حال در صورتی که یک دنباله متناهی از اعداد به صورت کامل مشخص باشد، می‌توان اعضای آن را با هم جمع یا در هم ضرب کرد. برای نمایش جمع یا ضرب اعضای یک دنباله، از نمادهای $\sum$ و $\prod$ (به این نمادها به‌ترتیب «سیگما» و «پای» گفته می‌شود) کمک گرفته می‌شود.

مثال ۱-۲-۱ همان دنباله‌ی اخیر $a_i = i$ برای $i = ۱$ تا ۱۰ را در نظر بگیرید.

$$\sum_{i=۱}^{۱۰} a_i$$

عبارت فوق حاصل‌جمع اعداد $a_۱$ تا $a_{۱۰}$ را نمایش می‌دهد. بدین شکل که از $i = ۱$ تا $i = ۱۰$، مقادیر a_i را با هم جمع می‌کند. یعنی همان $a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴ + \cdots + a_{۱۰}$ ولی بدون ابهام از این‌که منظور از «...» آیا واقعاً $a_۵ + a_۶ + a_۷ + a_۸ + a_۹$ بوده است یا خیر. حال در این مورد که $a_i = i$ است، می‌توان این حاصل‌جمع را به شکل زیر نیز نمایش داد.

$$\sum_{i=۱}^{۱۰} i$$

یعنی حاصل‌جمع اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰.

مثال ۱-۲-۲. عبارت زیر را به صورت جمع چند عدد بنویسید و حاصل را محاسبه کنید.

$$\sum_{i=1}^{5} 2$$

عبارت فوق حاصل‌جمع اعضای یک دنباله ۵ عضوی را نشان می‌دهد که تمامی اعضای آن ۲ هستند.
در نتیجه عبارت فوق برابر است با

$$2+2+2+2+2=10$$

مثال ۱-۲-۳. عبارت زیر را به صورت جمع چند عدد بنویسید و حاصل را محاسبه کنید.

$$\sum_{i=1}^{5} 2i$$

عبارت فوق حاصل‌جمع اعضای یک دنباله‌ی ۵عضوی را نشان می‌دهد که عضو iام آن، $2i$ است.
یعنی حاصل‌جمع اعداد زوج ۲ تا ۱۰.

$$2+4+6+8+10=30$$

مثال ۱-۲-٤. مقدار صریح عبارات زیر را به‌دست آورید.

۱. $\sum_{i=1}^{5} ki$ **۲.** $\sum_{i=1}^{5}(i+x)$ **۳.** $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} ij$

حل:

۱.

$$\sum_{i=1}^{5} ki = k+2k+3k+4k+5k=15k$$

توجه کنید که عبارت فوق برابر است با $k\sum_{i=1}^{5} i$.

۲.

$$\sum_{i=1}^{5}(i+x)=(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)+(x+5)=15+5x$$

۳.

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} ij=\sum_{j=1}^{5} j+\sum_{j=1}^{5} 2j+\sum_{j=1}^{5} 3j=\sum_{j=1}^{5} j+2\sum_{j=1}^{5} j+3\sum_{i=1}^{5} j=6\sum_{j=1}^{5} j$$

$$=6(1+2+3+4+5)=90$$

نماد $\prod$ پای. $\prod$ برای نمایش حاصل‌ضرب اعضای یک دنباله به کار می‌رود. مفهوم این نماد در عبارات زیر نشان داده شده است:

$$\prod_{i=1}^{5} i = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$$

$$\prod_{i=1}^{5} a_i = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$$

در تمرینات با خواص بیش‌تری از این دو نماد آشنا می‌شوید.

تمرین‌های بخش ۱-۲

۱. عبارات زیر را به صورت حاصل‌جمع یا حاصل‌ضرب اعداد نمایش دهید.

(الف) $\sum_{r=1}^{4} r$ (د) $\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k}$ (ز) $\prod_{k=1}^{4} \frac{1}{k}$

(ب) $\sum_{r=1}^{4} r^2$ (ه) $\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{2k+1}$ (ح) $\prod_{k=1}^{4} \frac{1}{k^3}$

(ج) $\sum_{r=1}^{4} (-1)^r r^2$ (و) $\sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ (ط) $\prod_{k=1}^{4} (3 + \frac{1}{k^3})$

۲. حاصل‌جمع‌ها و حاصل‌ضرب‌های زیر را به کمک نماد $\sum$ یا $\prod$ نمایش دهید.

(الف) $4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19$ (ج) $k \times 2k \times 3k \times 4k \times 5k \times 6k$

(ب) $2^4 + 2^7 + 2^{10} + 2^{13} + 2^{16} + 2^{19}$ (د) $\frac{3}{5} \times \frac{4}{6} \times \frac{5}{7} \times \frac{6}{8} \times \frac{7}{9} \times \frac{8}{10}$

(ه) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \cdots + \frac{1}{9900}$

۳. حاصل عبارت زیر را پیدا کنید.

(الف) $\prod_{k=1}^{10} \frac{2k+5}{2k+3}$ (ج) $\sum_{k=1}^{n} 2^k$

(ب) $\sum_{k=1}^{6} 2 \times 3^k$ (د) $\prod_{k=0}^{7} (1 + \frac{1}{2^{2^k}})$

۴. در این تمرین می‌خواهیم حاصل عبارت $\sum_{k=1}^{n} k$ را بر حسب n محاسبه کنیم.

(الف) برای هر n طبیعی ثابت کنید:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)$$

(ب) با توجه به قسمت پیش نشان دهید

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

۵. در این تمرین می‌خواهیم حاصل عبارت $\sum_{k=1}^{n} k^2$ را بر حسب n محاسبه کنیم.

(الف) به کمک تمرین قبلی برای هر n طبیعی ثابت کنید:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} &= n \times 1 + (n-1) \times 2 + \cdots + 1 \times n \\ &= (n+1)\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2\end{aligned}$$

(ب) با توجه به قسمت پیش نشان دهید

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

۶. در این تمرین می‌خواهیم حاصل عبارت $\sum_{k=1}^{n} k^3$ را بر حسب n محاسبه کنیم.

(الف) به کمک تمرین قبلی برای هر n طبیعی ثابت کنید:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} &= n \times 1^2 + (n-1) \times 2^2 + \cdots + 1 \times n^2 \\ &= (n+1)\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k^3\end{aligned}$$

(ب) با توجه به قسمت پیش نشان دهید:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

۷. حاصل عبارت زیر را محاسبه کنید برای محاسبه از تساوی‌های موجود در سؤالات ۴، ۵ و ۶ استفاده کنید.

(الف) $\sum_{k=1}^{10} 3k$ (د) $\sum_{k=1}^{10} (k+1)(k+2)$

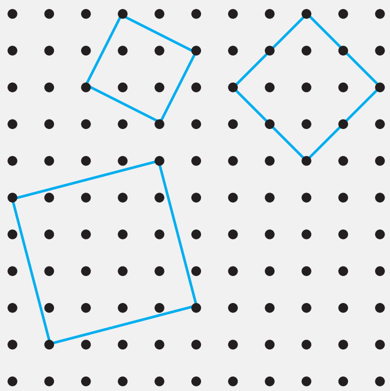
(ب) $\sum_{k=1}^{10} 3k+2$ (هـ) $\sum_{k=1}^{10} k(k+1)(k+2)$

(ج) $\sum_{k=1}^{10} k^2+2$

۱-۳ مسئله‌ای از اصل جمع و ضرب

پرسش مربع‌های کج

در شکل سؤال «مربع‌های صاف و نقطه‌ها»، درکل چند مربع (با احتساب مربع‌های کج) وجود دارد؟



شکل ۱-۱۲

چه چیزی در مسئله شما را گیج کرده است؟

- تنوع مربع‌ها در این سؤال بیش‌تر از سؤال «مربع‌های صاف و نقطه‌ها» است. آیا در این‌جا نیز می‌توان همانند آن سؤال، مربع‌ها را دسته‌بندی و تعداد اعضای دسته‌ها را تک‌تک محاسبه کرد؟

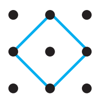
- برای شمارش تعداد مربع‌های ناصاف از یک نوع، آیا از روشی همانند روشی که در سؤال قبلی وجود داشت، می‌توان استفاده کرد؟ اگر نه آیا روش کلی دیگری می‌توان پیدا کرد؟

برای پاسخ دادن به این سؤالات، همانند قبل ابتدا مسئله را در حالات کوچک‌تر بررسی می‌کنیم. برای شبکه نقاط ۲ × ۲، به وضوح مربع کجی وجود ندارد و تنها یک مربع صاف وجود دارد. پس بررسی را از حالت ۳ × ۳ شروع می‌کنیم.

سؤال. در حالت ۳ × ۳ در کل چند مربع در شکل وجود دارد؟

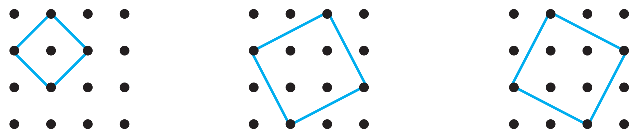
تعداد را پیدا کرده، سپس ادامه‌ی مطلب را بخوانید.

پاسخ. همان‌طور که مشاهده کردید، علاوه بر ۵ مربعی که در مسئله‌ی قبلی (سؤال «مربع‌های صاف و نقطه‌ها») پیدا کرده بودید، یک مربع کج وجود دارد. پس در کل ۶ مربع وجود دارد.



شکل ۱-۱۳

سؤال. در حالت ۴ × ۴ در کل چند مربع وجود دارد؟



مربع ناصاف نوع سوم — مربع ناصاف نوع دوم — مربع ناصاف نوع اول

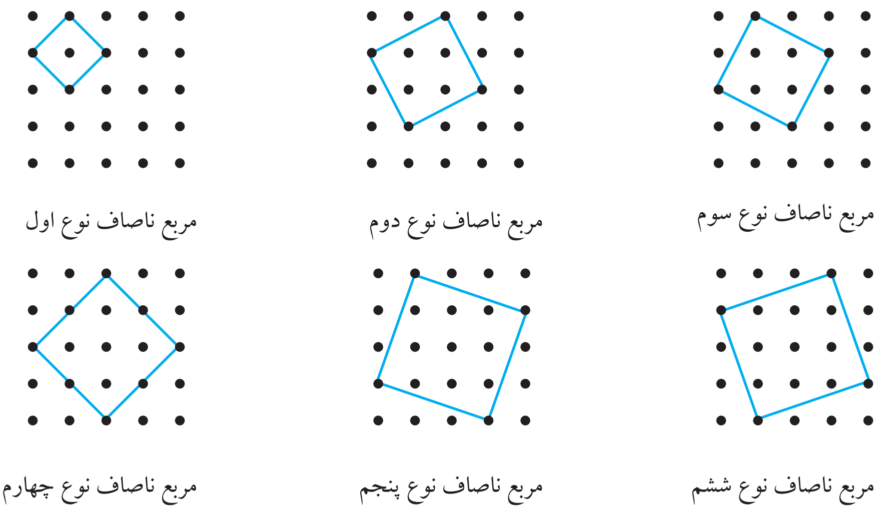
شکل ۱-۱۴

پاسخ. در کل به غیر از ۱۴ مربع صافی که قبلاً پیدا کرده بودیم، ۶ مربع کج نیز مشاهده می‌شوند. ۴ عدد از این مربع‌ها مشابه شکل سمت چپ هستند (که این نوع مربع‌ها را نوع ۱ نام‌گذاری کردیم). ۲ مربع دیگر نیز مشاهده می‌شوند. که طول اضلاعشان با هم برابر است، اما نحوه‌ی قرارگیری‌شان در شکل متفاوت است. به عبارت دیگر از انتقال یکدیگر به‌دست نمی‌آیند. اگر ملاک دسته‌بندی را طول ضلع مربع‌ها قرار دهیم، مربع نوع ۲ و ۳ هر دو در یک دسته خواهند بود و اگر ملاک را همسان بودن (یعنی بتوان آن‌ها را از انتقال یکدیگر به‌دست آورد) قرار دهیم، در دو دسته‌ی مختلف خواهند بود. حال سؤال گیج کننده در این‌جا این است که اولاً آیا نحوه‌ی دسته‌بندی اهمیتی در پیدا کردن جواب دارد؟ ثانیاً اگر اهمیت دارد، کدام‌یک از این دسته‌بندی‌ها مناسب‌تر هستند؟

به وضوح برای شمارش، مخصوصاً شمارش‌های پیچیده‌ای مثل این، نحوه‌ی دسته‌بندی بسیار اهمیت دارد، اما دسته‌بندی مناسب را در مراحل بعد پیدا خواهیم کرد. فعلاً این مربع‌های کج را از ۳ نوع متفاوت در نظر بگیرید. در صورت لزوم بعداً این انواع را در هم‌ادغام می‌کنیم.

سؤال. در حالت ۵ × ۵ درکل چند مربع وجود دارد؟

تمامی انواع مربع‌های کج را پیدا کنید و همانند حالات قبل نمایش دهید. از هر یک از این انواع چند مربع وجود دارد؟



شکل ۱-۱۵

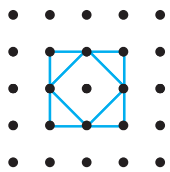
همان‌طورکه قبلاً دیده بودیم، ۳۰ مربع صاف در این جدول وجود دارد. علاوه بر این ۳۰ مربع صاف، ۶ نوع مربع کج در شکل دیده می‌شوند که تعداد هر یک از آن‌ها در جدول زیر برای شبکه ۳ × ۳، ۴ × ۴ و ۵ × ۵ نوشته شده است.

نوع	۳ × ۳	۴ × ۴	۵ × ۵
۱	۱	۴	۹
۲	...	۱	۴
۳	...	۱	۴
۴	...	...	۱
۵	...	...	۱
۶	...	...	۱

آیا در تعداد مربع‌های یک نوع در شبکه‌های مختلف، نظام آشنایی را مشاهده نمی‌کنید؟ مخصوصاً در تعداد مربع‌های نوع ۱ دقت کنید.

فکر می‌کنید چند مربع نوع ۱ در شبکه ۶×۶ وجود داشته باشد؟ خوب است که حدستان را واقعاً آزمایش کنید و از درستی آن مطمئن شوید. سعی کنید دلیلی برای این امر پیدا کنید.

همان‌طور که احتمالاً حدس زدید، تعداد مربع‌های نوع ۱ برای یک شبکه‌ی $n \times n$، $(n-۲)^۲$ است. در واقع همواره تعداد مربع‌های نوع ۱ با تعداد مربع‌های صاف ۲×۲ برابر است. علت این امر را در شکل زیر مشاهده می‌کنید.



شکل ۱-۱۶

همان‌طور که در شکل فوق مشاهده می‌کنید، در درون هر مربع ۲×۲، یک مربع از نوع ۱ وجود دارد. همچنین رئوس هر مربع نوع ۱ نیز روی اضلاع یک مربع ۲×۲ صاف قرار دارند. پس یک تناظر یک‌به‌یک بین مربع‌های نوع اول و مربع‌های ۲×۲ وجود دارد و در نتیجه‌ی آن،همواره تعداد مربع‌های صاف ۲×۲ با تعداد مربع‌های نوع ۱ برابر است.

سؤال. برای مربع‌های نوع ۲ و ۳ آیا نکته‌ی مشابهی وجود دارد؟

پاسخ. اگر دقت کنید، به رابطه‌ی مشابهی بین مربع‌های نوع ۲ و مربع‌های ۳×۳ پی می‌برید. یعنی در هر شبکه تعداد این دو نوع مربع با هم برابر است. به همین ترتیب می‌توان گفت تعداد مربع‌های نوع ۳ نیز با تعداد مربع‌های ۳×۳ صاف برابر است. پس در نتیجه درون هر مربع ۳×۳ دقیقاً دو مربع کج وجود دارد که ۴ رأس آن‌ها روی اضلاعش قرار گرفته‌اند.

به همین ترتیب نیز می‌توانید ببینید که در درون هر مربع ۴×۴ نیز یک مربع نوع ۴، یک مربع نوع ۵ و یک مربع نوع ۶ وجود دارد.

سؤال. در یک مربع صاف ۵×۵، چند نوع مربع کج وجود دارد که رئوسشان بر روی اضلاع آن قرار داشته باشد؟ به طور کلی در یک مربع صاف $k \times k$ چند نوع مربع کج وجود دارد که رئوسشان بر روی اضلاع آن باشد؟

پاسخ. به طورکلی می‌توانید بررسی کنید که در هر مربع صاف $k \times k$، $k - ۱$ مربع ناصاف وجود دارد که رئوسشان بر روی اضلاع آن باشد.

سؤال. یک شبکه‌ی نقطه‌ای ۶×۶ برای خود رسم کنید. بدون رسم شکل دیگری، تعداد مربع‌های آن را (اعم از صاف و کج) محاسبه کنید.

از نتایجی که تا به حال به‌دست آورید استفاده کنید و از محاسبه نترسید!

در قبل تعداد هرکدام از انواع مربع‌های صاف را به‌دست آوردیم. حال هم تعداد مربع‌های کج در درون هرکدام از این مربع‌های صاف را می‌دانیم. پس تعداد کل مربع‌ها را می‌توان از رابطه‌ی زیر حساب کرد:

$$۵^۲ + ۴^۲(۱ + ۱) + ۳^۲(۱ + ۲) + ۲^۲(۱ + ۳) + ۱^۲(۱ + ۴) = ۱۰۵$$

سؤال. بدون رسم شکل، مسئله را برای شبکه‌ی ۱۱×۱۱ حل کنید.

پاسخ. طبق مطالب گفته شده، تعداد مربع‌ها طبق رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است:

$$\sum_{k=۱}^{۱۰} k(۱۱ - k)^۲ = ۱ \times ۱۰^۲ + ۲ \times ۹^۲ + \cdots + ۱۰ \times ۱^۲$$

حال کافی است که این مجموع را محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=۱}^{۱۰} k(۱۱ - k)^۲ &= \sum_{k=۱}^{۱۰} k^۳ - ۲۲k^۲ + ۱۲۱k \\
&= \sum_{k=۱}^{۱۰} k^۳ - ۲۲\sum_{k=۱}^{۱۰} k^۲ + ۱۲۱\sum_{k=۱}^{۱۰} k \\
&= \left(\frac{۱۰ \times ۱۱}{۲}\right)^۲ - ۲۲\left(\frac{۱۰ \times ۱۱ \times ۲۱}{۶}\right) + ۱۲۱\left(\frac{۱۰ \times ۱۱}{۲}\right) \\
&= ۳۰۲۵ - ۸۴۷۰ + ۶۶۵۵ = ۱۲۱۰
\end{aligned}$$

پس پاسخ ۱۲۱۰ مربع است.

۱-٤ تمرینات پایانی

۱. دانش‌آموزی یک کیف بسیار مجهز دارد که جیب اصلی آن دارای ۳ قفل رمزی دورقمی است. این دانش‌آموز فراموش کار رمزهای کیفش را به صورت دقیق به خاطر نمی‌آورد. فقط می‌داند که هر ۳ عدد رمز آن از ۴۰ کم‌تر هستند و ۲ تا از رمزهای آن ۱۷ و ۲۴ بودند (نمی‌داند این رمزها مربوط به کدام قفل بود). به طور متوسط در هر ۱ ثانیه او می‌تواند یک ترکیب رمز را امتحان کند. حداکثر چه زمانی طول می‌کشد تا او رمز را پیدا کند؟ توجه کنید تا زمانی که ۳ رمز صحیح نباشند، کیف باز نمی‌شود.

۲. چند عدد ۵رقمی مانند $\overline{abcde}$ وجود دارد که ارقام b و d برابر با مجموع ارقام مجاورشان باشند؟

۳. در یک مدرسه n دبیر تدریس می‌کنند. این دبیرها را با شماره‌های $۱, ۲, \cdots, n$ شماره‌گذاری می‌کنیم. می‌دانیم دبیر iام، $i + ۱$ نفر از دانش‌آموزان را می‌شناسد. هر دانش‌آموز را ممکن است بیش از یک دبیر بشناسند. هر یک از دبیرها می‌خواهد یک دانش‌آموز را به عنوان نماینده خود انتخاب کنند به شرطی که او را بشناسد. در ضمن دو دبیر نماینده‌ی یکسان انتخاب نمی‌کنند. ثابت کنید این کار حداقل به ۲^n روش مختلف امکان‌پذیر است.

٤. میزهای یک کلاس مانند یک جدول ۵×۵ چیده شده‌اند و توسط حداکثر ۲۵ دانش‌آموز پر می‌شوند. دانش‌آموزان طوری روی صندلی نشسته‌اند که برای هر دانش‌آموزی یا تمامی میزهای هم‌ردیفش یا تمامی میزهای هم‌ستونش پر شده است. چند ساختار برای نشستن دانش‌آموزان در کلاس ممکن است؟ توجه کنید که با جابه‌جایی دو دانش‌آموز ساختار جدیدی تولید نمی‌شود.

۵. به چند طریق می‌توان خانه‌های جدولی ۱۰×۱۵ را با اعداد ۰ و ۱ پر کرد به طوری که مجموع هر چهار عدد متوالی در یک سطر یا یک ستون عددی زوج باشد؟

۶. عدد طبیعی n را در نظر بگیرید، که $n = p_۱^{\alpha_۱} p_۲^{\alpha_۲} \cdots p_k^{\alpha_k}$ تجزیه به عوامل اول n است. نشان دهید

$$(۲\alpha_۱ + ۱)(۲\alpha_۲ + ۱)\cdots(۲\alpha_k + ۱)$$

زوج مرتب (a, b) از اعداد طبیعی وجود دارد که کوچک‌ترین مضرب مشترک‌شان برابر n است.

۷. تعداد توابع $f : \{۱, ۲, \cdots, ۱۹۹۹\} \to \{۲۰۰۰, ۲۰۰۱, ۲۰۰۲, ۲۰۰۳\}$ را بیابید که $\sum_{i=۱}^{۱۹۹۹} f(i)$ فرد باشد.

۸. فرض کنید A یک مجموعه n عضوی باشد. تعداد kتایی‌های $(A_۱, A_۲, \cdots, A_k)$ از زیرمجموعه‌های A را بیابید ($A_۱, A_۲, \cdots, A_k$ همگی زیرمجموعه‌هایی از A هستند) که $A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_k = A$.

۹. در بسط عبارت

$$(۱ + x + x^{۲} + \cdots + x^{۲۷})(۱ + x + x^{۲} + \cdots + x^{۱۴})^{۲}$$

ضریب جمله $x^{۲۸}$ چند است؟

۱۰. چند عدد طبیعی کوچک‌تر از $۱۰^{۹}$ وجود دارد که رقم ۰ نداشته باشد و مجموع ارقامش برابر ۱۰ باشد؟

۱۱. به چند طریق می‌توان $n - ۳$ قطر یک nضلعی منتظم را طوری رسم کرد که اولاً همدیگر را داخل nضلعی قطع نکنند، ثانیاً هرکدام از مثلث‌های به وجود آمده دست کم یک ضلع مشترک با nضلعی داشته باشد؟

۱۲. n چوب با طول‌های $۱, ۲, \cdots, n$ در دست داریم. چند نوع مثلث غیرهمنهشت می‌توانیم با استفاده از سه تا از این چوب‌ها بسازیم؟

۱۳. در ماتریس A با ابعاد $n \times n$، درایه‌ی واقع در سطر i و ستون j را a_{ij} می‌نامیم. ماتریس A را پر مغز می‌نامیم، هرگاه همه‌ی درایه‌های A برابر ۰ و ۱ باشند و به ازای هر k سطر متمایز مانند $p_{۱}, p_{۲}, \cdots, p_{k}$ حداقل یک عدد مانند j وجود داشته باشد که $a_{p_{۱}j} + a_{p_{۲}j} + \cdots + a_{p_{k}j}$ عددی فرد باشد. چند ماتریس $n \times n$ پر مغز وجود دارد؟