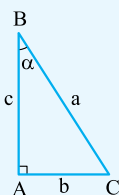


## ...مثلثات...

### نسبت‌های مثلثاتی در مثلث



در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$ ،  $(\hat{A} = 90^\circ)$ ، نسبت‌های مثلثاتی به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\sin \alpha = \frac{b}{a} = \text{مقابل به وتر}$$

$$\cos \alpha = \frac{c}{a} = \text{مجاور به وتر}$$

$$\tan \alpha = \frac{b}{c} = \text{مقابل به مجاور}$$

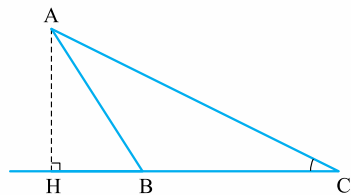
$$\cot \alpha = \frac{c}{b} = \text{مجاور به مقابل}$$

**نکته** نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف در جدول زیر آورده شده است:

| $\alpha$      | $3^\circ$            | $45^\circ$           | $60^\circ$           | $90^\circ$ | $90^\circ$ | $180^\circ$ | $270^\circ$ | $360^\circ$ |
|---------------|----------------------|----------------------|----------------------|------------|------------|-------------|-------------|-------------|
| $\sin \alpha$ | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 0          | 1          | 0           | -1          | 0           |
| $\cos \alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 1          | 0          | -1          | 0           | 1           |
| $\tan \alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | 0          | x          | 0           | x           | 0           |
| $\cot \alpha$ | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | x          | 0          | x           | 0           | x           |

(سراسری ۹۹)

**تست** در شکل زیر، فرض کنید  $\sin C = \frac{5}{13}$  و  $CH = 9$ ، اندازه ارتفاع  $AH$  کدام است؟



۳/۲۵ (۱)

۳/۵ (۲)

۳/۶ (۳)

۳/۷۵ (۴)

**پاسخ** - گزینه «۴»

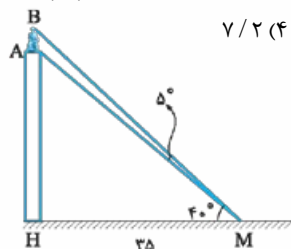
$$\sin C = \frac{AH}{AC} = \frac{5}{13} \Rightarrow \begin{cases} AH = 5a \\ AC = 13a \end{cases} \xrightarrow{\text{فیناغورس}} HC = 12a \xrightarrow{HC=9} 12a = 9 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$\text{پس: } AH = 5a = \frac{15}{4} = 3/75$$

**تست** ناظری به فاصله ۳۵ متر از پای ستونی که بر روی آن مجسمه‌ای قرار دارد، ایستاده است، زاویه رؤیت آننها و ابتدای مجسمه با سطح

(سراسری ۹۴)

افقی  $45^\circ$  و  $40^\circ$  درجه است. ارتفاع مجسمه کدام است؟  $(\tan 40^\circ = 0/8)$



۷/۲ (۴)

۷ (۳)

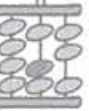
۶/۴ (۲)

۶ (۱)

**پاسخ** - گزینه «۳» ابتدا یک شکل فرضی رسم می‌کنیم:

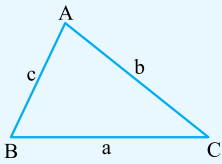
$$\tan 45^\circ = \frac{BH}{MH} = 1 \Rightarrow BH = MH = 35$$

$$\tan 40^\circ = \frac{AH}{MH} \Rightarrow 0/8 = \frac{35 - AB}{35} \Rightarrow AB = 7$$



### روابط طولی در مثلث

در مثلث ABC، مطابق شکل روبه‌رو، می‌توان روابط زیر را بیان نمود:



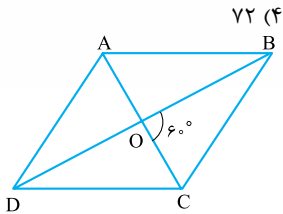
۱  $S = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2}ba \sin \hat{C} = \frac{1}{2}ac \sin \hat{B}$     ۲  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$  (قضیه کسینوس‌ها)

۳  $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$  (قضیه سینوس‌ها)

**تست** - اندازه دو قطر از متوازی‌الاضلاع ۱۲ و  $۸\sqrt{3}$  واحد است. این دو قطر با زاویه  $۶۰^\circ$  درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

(سراسری ۹۶)

کدام است؟



۷۲ (۴)

۶۴ (۳)

۵۴ (۲)

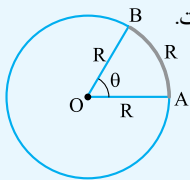
۴۸ (۱)

**پاسخ** - گزینه «۴»

مساحت هر چهارضلعی که توسط رسم قطرهای داخل متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید با هم برابر است.

$$S = 4S_{OBC} = 4 \times \frac{1}{2} \times OB \times OC \times \sin 60^\circ = 2 \times 6 \times 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 72$$

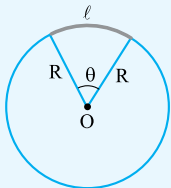
### واحدهای اندازه‌گیری زاویه و طول کمان



درجه: اگر محیط دایره‌ای را به  $360^\circ$  کمان مساوی تقسیم کنیم، اندازه زاویه مرکزی روبه‌روی هر کدام از این کمان‌ها،  $1^\circ$  درجه است.

رادیان: اگر در دایره‌ای به شعاع R، کمانی به طول R جدا کنیم، اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن،  $1$  رادیان است.

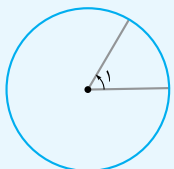
$$\theta = 1 \text{ rad}, \quad 1 \text{ rad} \approx 57^\circ$$



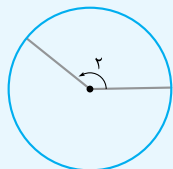
طول کمان: طول کمان مقابل به زاویه  $\theta$  (برحسب رادیان) در دایره‌ای به شعاع R برابر است با:  $R\theta$ .

مثلاً اگر  $\theta = 1$  رادیان باشد، آن‌گاه  $l = R$  است.

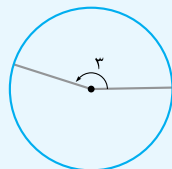
**تذکره** - با توجه به این که یک رادیان، تقریباً  $57^\circ$  است، پس می‌توان زوایای  $1, 2, \dots$  و  $6$  رادیان را به صورت زیر در یک دایره، نمایش داد:



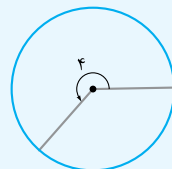
$\theta = 1 \text{ rad}$



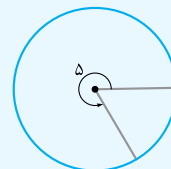
$\theta = 2 \text{ rad}$



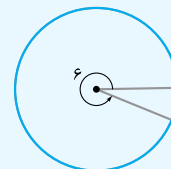
$\theta = 3 \text{ rad}$



$\theta = 4 \text{ rad}$



$\theta = 5 \text{ rad}$

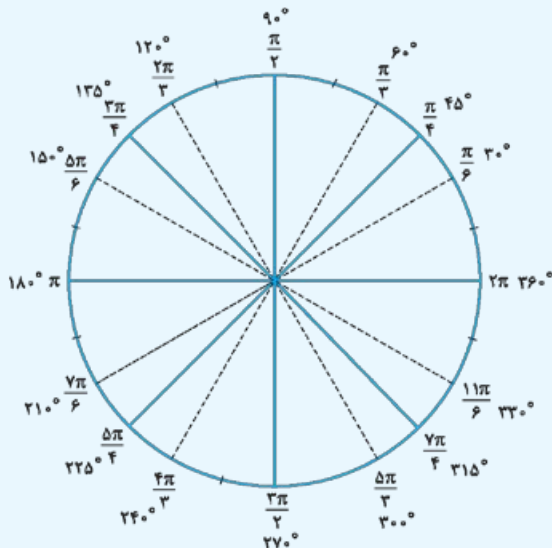


$\theta = 6 \text{ rad}$

◀ **تبدیل درجه به رادیان** اگر زاویه‌ای D درجه و R رادیان باشد،

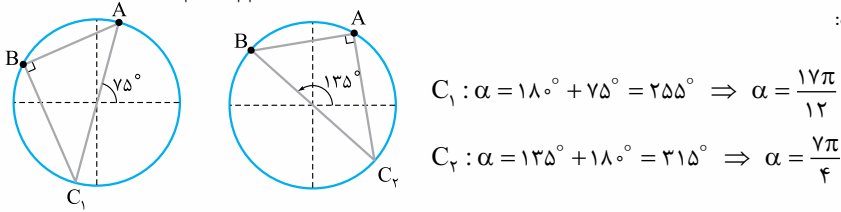
$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

در شکل داده‌شده، زوایای معروف، برحسب درجه و رادیان بیان شده‌اند:

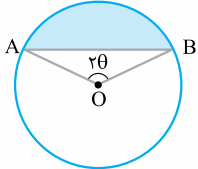


**تست** - انتهای کمان‌های مقابل به زوایای  $\frac{\Delta\pi}{12} + 2k\pi$  و  $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$  بر روی دایره مثلثاتی، سه رأس یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند.  $\alpha$  کدام می‌تواند باشد؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

**پاسخ** - گزینه «۲» به شرطی مثلث قائم‌الزاویه است که دو رأس آن، دو سر قطر دایره باشد. دقت کنید که  $\frac{5\pi}{12}$  و  $\frac{3\pi}{4}$  معادل  $75^\circ$  و  $135^\circ$  هستند. دو حالت می‌توان در نظر گرفت:



**تست** - فرض کنید  $\theta$  برحسب رادیان و  $4\sin\theta = 2\theta$  باشد. اگر در شکل زیر شعاع دایره برابر ۶ باشد، محیط ناحیه رنگی چه قدر است؟

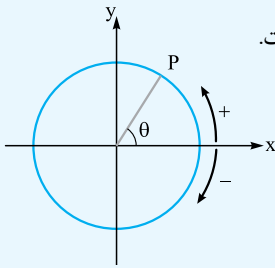


- ۱۵۰ (۱)
- ۱۸۰ (۲)
- ۲۱۰ (۳)
- ۲۴۰ (۴)

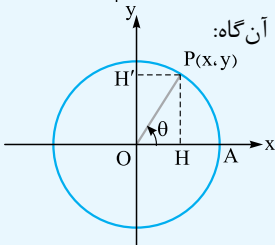
**پاسخ** - گزینه «۳» در مثلث متساوی‌الساقینی به زاویه رأس  $\alpha$  و ساق‌های برابر  $a$  طول قاعده مثلث برابر است با:  $2a \sin \frac{\alpha}{2}$   
 کمان:  $\widehat{AB} = R \times 2\theta = 12\theta$   
 پس محیط شکل رنگی برابر  $90 + 12\theta = 210$  است.

### دایره مثلثاتی

دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱، به طوری که جهت مثبت آن خلاف جهت عقربه‌های ساعت است.



نسبت‌های مثلثاتی در دایره اگر نقطه  $P(x, y)$  روی دایره مثلثاتی مطابق شکل مقابل قرار داشته باشد، آن‌گاه:



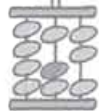
$$\left. \begin{aligned} x &= OH = \cos \theta \\ y &= PH = \sin \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(\cos \theta, \sin \theta)$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

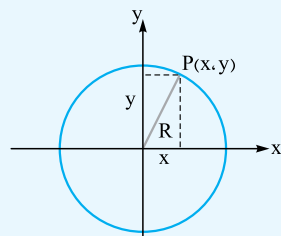
توجه کنید که زاویه  $\theta$  در جهت مثبت مثلثاتی و از  $OA$  شروع به حرکت می‌کند. بنابراین در هر ناحیه، با توجه به علامت  $x$  و  $y$  در آن ناحیه، علامت نسبت‌های مثلثاتی مشخص می‌شود.

| ناحیه اول | ناحیه دوم | ناحیه سوم | ناحیه چهارم |
|-----------|-----------|-----------|-------------|
|           |           |           |             |





| ناحیه اول       | ناحیه دوم       | ناحیه سوم       | ناحیه چهارم     |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $x > 0, y > 0$  | $x < 0, y > 0$  | $x < 0, y < 0$  | $x > 0, y < 0$  |
| $\sin \theta$ + | $\sin \theta$ + | $\sin \theta$ - | $\sin \theta$ - |
| $\cos \theta$ + | $\cos \theta$ - | $\cos \theta$ - | $\cos \theta$ + |
| $\tan \theta$ + | $\tan \theta$ - | $\tan \theta$ + | $\tan \theta$ - |
| $\cot \theta$ + | $\cot \theta$ - | $\cot \theta$ + | $\cot \theta$ - |



**نکته** اگر نقطه  $P(x, y)$  روی دایره مثلثاتی واقع باشد، آن گاه  $x^2 + y^2 = 1$  است.

در حالت کلی اگر نقطه  $P(x, y)$  روی دایره‌ای به شعاع  $R$  و مرکز مبدأ مختصات واقع باشد، آن گاه:  
 $x^2 + y^2 = R^2$

**تست** - نقطه  $P(1-2a, a)$  مطابق شکل روی دایره مثلثاتی قرار دارد. مقدار  $\tan \theta$  کدام است؟

(1)  $-\frac{3}{4}$   
 (2)  $-\frac{4}{3}$   
 (3)  $-\frac{3}{5}$   
 (4)  $-\frac{4}{5}$

**پاسخ** - گزینه «۲» مختصات نقطه  $P$  به صورت  $(\cos \theta, \sin \theta)$  است.

$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$

$(1-2a)^2 + a^2 = 1 \Rightarrow 5a^2 - 4a = 0 \Rightarrow a = \frac{4}{5} \Rightarrow P(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

**تست** - اگر  $\frac{\pi}{12} \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{12}$  و  $\sin 2\alpha = \frac{2}{1-2m}$  باشد، حدود  $m$  کدام است؟

(1)  $-\frac{1}{2} \leq m < \frac{1}{2}$   
 (2)  $m \leq -\frac{3}{4}$   
 (3) فقط  $m = -\frac{3}{4}$   
 (4)  $-\frac{3}{4} \leq m \leq -\frac{1}{4}$

**پاسخ** - گزینه «۴» دقت کنید که  $\frac{\pi}{6} \leq 2\alpha \leq \frac{5\pi}{6}$  است پس مقدار  $\sin 2\alpha$  حداقل برابر  $\frac{1}{2}$  و حداکثر برابر ۱ است.

$\frac{1}{2} \leq \sin 2\alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{2}{1-2m} \leq 1 \xrightarrow{1-2m > 0} 2 \leq 1-2m \leq 4 \Rightarrow -\frac{3}{4} \leq m \leq -\frac{1}{4}$

جواب به دست آمده در شرط  $1-2m > 0$  هم صدق می‌کند.

### نسبت‌های مثلثاتی کمان‌های $\frac{k\pi}{p} \pm \alpha$ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

ابتدا به حالت‌های خاص زیر توجه کنید:

|   |   |
|---|---|
| $\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \cos \alpha$  | $\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) = -\sin \alpha$ |
| $\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha) = -\cot \alpha$ | $\cot(\frac{\pi}{4} + \alpha) = -\tan \alpha$ |
| $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$           | $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$           |
| $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$            | $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$            |
| $\sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha$           | $\cos(2\pi + \alpha) = \cos \alpha$           |
| $\tan(2\pi + \alpha) = \tan \alpha$           | $\cot(2\pi + \alpha) = \cot \alpha$           |

|  |  |
|--|--|
| $\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \cos \alpha$ | $\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \sin \alpha$ |
| $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \cot \alpha$ | $\cot(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \tan \alpha$ |
| $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$           | $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$          |
| $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$          | $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$          |
| $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$         | $\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$          |
| $\tan(2\pi - \alpha) = -\tan \alpha$         | $\cot(2\pi - \alpha) = -\cot \alpha$         |



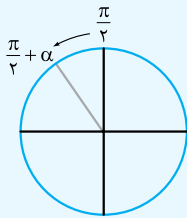
$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha & \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha & \cot(-\alpha) &= -\cot \alpha \end{aligned}$$

**نکته** برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی  $\frac{k\pi}{\nu} \pm \alpha$  دو مرحله لازم است:

۱ اگر  $k$  صحیح و زوج باشد، نسبت مثلثاتی عوض نمی‌شود ولی اگر  $k$  صحیح و فرد باشد، نسبت مثلثاتی عوض می‌شود.

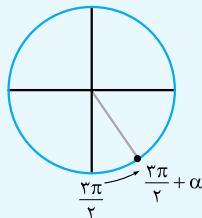
۲ با فرض کوچک بودن  $\alpha$  (حتی اگر کوچک نباشد) و یافتن ناحیه‌ای که  $\frac{k\pi}{\nu} \pm \alpha$  در آن ناحیه قرار می‌گیرد، علامت نسبت مثلثاتی داده شده را به عنوان علامت جواب در نظر می‌گیریم.

به طور مثال:



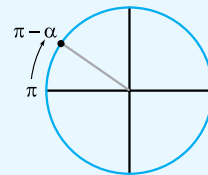
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

ناحیه دوم، سینوس مثبت



$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$$

ناحیه چهارم، سینوس منفی



$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

ناحیه دوم، تانژانت منفی

(سراسری ۹۸)

**تست** حاصل عبارت  $\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$  کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$-\frac{1}{4} \quad (۱)$$

$$\sin\frac{17\pi}{3} = \sin\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right) = \cos\left(-3\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) = \tan\left(5\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \sin\left(-2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

**پاسخ** گزینه «۳»

(سراسری ۹۱)

**تست** اگر  $\tan \theta = 0/2$  باشد، مقدار  $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$  کدام است؟

$$3 \quad (۴)$$

$$2 \quad (۳)$$

$$1/2 \quad (۲)$$

$$-3 \quad (۱)$$

$$P = \frac{\sin \theta - (-\cos \theta)}{\sin \theta - (-\sin \theta)} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + \sin \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{2 \sin \theta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cot \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{0/2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$$

**پاسخ** گزینه «۴»

**نکته** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  دو زاویه متمم باشند، آن‌گاه:  $\sin \alpha = \cos \beta$  ،  $\cos \alpha = \sin \beta$  ،  $\tan \alpha = \cot \beta$  ،  $\cot \alpha = \tan \beta$   
و اگر  $\alpha$  و  $\beta$  مکمل هم باشند، آن‌گاه:  $\sin \alpha = \sin \beta$  ،  $\cos \alpha = -\cos \beta$  ،  $\tan \alpha = -\tan \beta$  ،  $\cot \alpha = -\cot \beta$

**تست** اگر  $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right) = 1$  حاصل  $\alpha + \beta$  کدام می‌تواند باشد؟

$$\frac{11\pi}{12} \quad (۴)$$

$$\frac{7\pi}{3} \quad (۳)$$

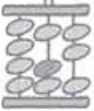
$$\frac{\pi}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{7\pi}{12} \quad (۱)$$

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\tan\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right)} = \cot\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right)$$

**پاسخ** گزینه «۱» اگر  $x + y = \frac{\pi}{2}$  باشد، آن‌گاه  $\tan x = \cot y$  است.

یکی از حالت‌های ممکن آن است که  $(\alpha + \frac{\pi}{4}) + (\beta - \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{2}$  باشد، بنابراین  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$  یکی از جواب‌ها می‌تواند باشد.



**تست** حاصل عبارت  $P = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{3\pi}{9} + \dots + \cos \frac{9\pi}{9}$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) صفر

**پاسخ** - گزینه «۳» اگر  $\alpha + \beta = \pi$  باشد، آن گاه  $\cos \alpha = -\cos \beta$  است.

زوایای  $\frac{\pi}{9}$ ،  $\frac{2\pi}{9}$ ،  $\frac{4\pi}{9}$  و  $\frac{5\pi}{9}$  به ترتیب با زوایای  $\frac{8\pi}{9}$ ،  $\frac{7\pi}{9}$ ،  $\frac{6\pi}{9}$  و  $\frac{5\pi}{9}$  مکمل اند، پس مجموع کسینوس‌های آن‌ها برابر صفر است.

$$\cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9} = 0, \quad \cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} = 0, \quad \cos \frac{3\pi}{9} + \cos \frac{6\pi}{9} = 0, \quad \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} = 0$$

از طرفی  $\cos \frac{9\pi}{9} = -1$  پس حاصل عبارت P برابر -۱ است.

### اتحادهای مثلثاتی

اتحادهای مقدماتی اتحادهای ابتدایی و اصلی در مبحث مثلثات به صورت زیر می‌باشند:

۱  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

۲  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

۳  $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

۴  $\tan x \cdot \cot x = 1$

۵  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

۶  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

(سراسری ۹۸)

**تست** اگر  $\tan \alpha = \frac{4}{3}$  و انتهای کمان  $\alpha$  در ربع سوم باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\sin\left(\frac{9\pi}{4} + \alpha\right) \cos\left(\frac{7\pi}{4} - \alpha\right) - \tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right)$$

۰/۴۸ (۴)

۰/۲۷ (۳)

-۰/۵۲ (۲)

-۱/۲۳ (۱)

**پاسخ** - گزینه «۳» ابتدا سایر نسبت‌های مثلثاتی را پیدا می‌کنیم:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \xrightarrow{\text{ناحیه سوم}} \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \xrightarrow{\text{ناحیه سوم}} \sin \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$P = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4} - \pi\right) = \cos \alpha (-\sin \alpha) + \cot \alpha = -\frac{3}{5} \left(+\frac{4}{5}\right) + \frac{3}{4} = 0/27$$

(سراسری ۹۸)

**تست** اگر  $\frac{\pi}{4} < x < \pi$  باشد، حاصل عبارت  $\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x\right)$  کدام است؟

$\cos x$  (۴)

$\cos^2 x$  (۳)

$-\cos x$  (۲)

$-\cos^2 x$  (۱)

**پاسخ** - گزینه «۱» دقت کنید که x در ناحیه دوم است و  $\cos x$  در این ناحیه منفی است.

$$P = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} \left(\frac{1 - \sin^2 x}{\sin x}\right) = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{|\cos x|} \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin x} = -\sin x \times \frac{\cos^2 x}{\sin x} = -\cos^2 x$$

**نکته** به کمک اتحادهای اصلی، می‌توان اتحادهای زیر را نتیجه گرفت:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$$

**تست** اگر  $\tan x + \cot x = \frac{5}{2}$  باشد، حاصل عبارت  $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^6 x + \cos^6 x}$  کدام است؟

$\frac{17}{13}$  (۴)

$\frac{14}{13}$  (۳)

$\frac{7}{12}$  (۲)

$\frac{5}{12}$  (۱)

**پاسخ** - گزینه «۴»

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{5}{2} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{2}{5}$$







حال، هر یک از عبارتهای صورت و مخرج را محاسبه می‌کنیم. دقت کنید که صرف نظر از نکته صفحه قبل، سعی می‌کنیم، فرمول‌های داده‌شده را اثبات کنیم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \xrightarrow{\text{به توان } 2} \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \xrightarrow{\text{به توان } 3} \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^4 x \cos^2 x + 3\cos^4 x \sin^2 x = 1$$

$$\Rightarrow \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x (\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1) = 1 \Rightarrow \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$$

$$P = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^6 x + \cos^6 x} = \frac{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x}{1 - 3\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1 - 2(\frac{4}{25})}{1 - 3(\frac{4}{25})} = \frac{17}{13}$$

نسبت‌های مثلثاتی  $2\alpha$  اتحادهای مثلثاتی زوایای دو برابر کمان عبارت‌اند از:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

نکته فرمول‌های زیر که به فرمول‌های طلایی معروف‌اند، در حل سؤالات کاربرد زیادی دارند:

$$2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$$

$$2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

(سراسری ۹۵)

تست اگر  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{4}$  باشد، مقدار  $\cos(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha)$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{3}{4}$  (۲)  $-\frac{1}{8}$  (۳)  $\frac{3}{8}$  (۴)  $\frac{3}{4}$

پاسخ گزینه «۱» دو طرف تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم و  $\sin 2\alpha$  را محاسبه می‌کنیم:

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{16} \Rightarrow 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{16} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{15}{16}$$

$$\cos(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha) = -\sin 2\alpha = -\frac{15}{16}$$

(سراسری ۹۵)

تست اگر  $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2}$  باشد، مقدار  $\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2})$  کدام است؟

(۱)  $-2$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $2$

پاسخ گزینه «۱» از اتحادهای زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \\ 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}) = -\cot \frac{\alpha}{2} = -2$$

(سراسری ۱۴۰۰)

تست اگر زاویه  $\alpha$  در ناحیه سوم دایره مثلثاتی و  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$  باشد، مقدار  $\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{4}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot 2\alpha}$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{96}{175}$  (۲)  $\frac{1056}{175}$  (۳)  $\frac{96}{175}$  (۴)  $-\frac{1056}{175}$

پاسخ گزینه «۲» ابتدا دقت کنید که چون  $\alpha$  ناحیه سوم است پس  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$  و  $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$  است.

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2(-\frac{3}{5})(-\frac{4}{5}) = \frac{24}{25} \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{7}{24}$$

$$P = \frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cot 2\alpha} = \frac{\frac{24}{25} + \frac{4}{5}}{\frac{7}{24}} = \frac{24 \times 24}{7 \times 25} = \frac{1056}{175}$$

حال، حاصل عبارت را پیدا می‌کنیم:

(سراسری ۹۶)

تست حاصل  $\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ}$  کدام است؟

(۱)  $2$  (۲)  $\sqrt{6}$  (۳)  $2\sqrt{2}$  (۴)  $2\sqrt{3}$





پاسخ - گزینه «۳»

$$P = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = 4(\cos 15^\circ - \sin 15^\circ)$$

$$P^2 = 16(\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ - 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ) = 16(1 - \sin 30^\circ) = 16(1 - \frac{1}{2}) = 8 \Rightarrow P = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$\tan \alpha - \cot \alpha = -2 \cot 2\alpha$$

نکته به دو اتحاد فرعی مقابل توجه کنید:

(سراسری ۹۶)

تست - اگر  $\tan x = \frac{4}{3}$  باشد، مقدار  $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}$  کدام است؟

$$\frac{3}{2} \text{ (۴)}$$

$$\frac{4}{3} \text{ (۳)}$$

$$-\frac{3}{2} \text{ (۲)}$$

$$-\frac{3}{4} \text{ (۱)}$$

پاسخ - گزینه «۲» صرف نظر از نکته بالا، سعی می‌کنیم فرمول‌های داده شده را اثبات کنیم:

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} - \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{-\cos(2 \times \frac{x}{2})}{\frac{1}{2} \sin(2 \times \frac{x}{2})} = \frac{-2 \cos x}{\sin x} = -2 \cot x = -2 \times \frac{3}{4} = -\frac{3}{2}$$

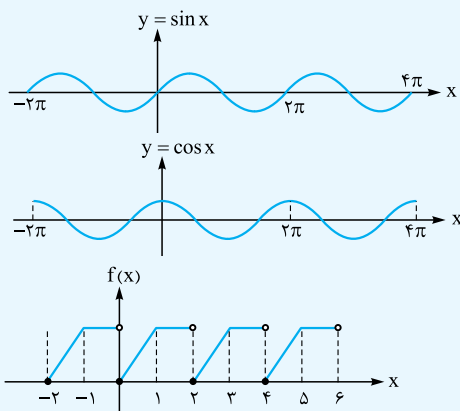
## نمودار توابع مثلثاتی

دوره تناوب تابع  $f$  را متناوب می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند  $T$  موجود باشد به طوری که برای هر  $x \in D_f$  داشته باشیم:

$$x \pm T \in D_f, \quad f(x + T) = f(x)$$

کوچک‌ترین عدد مثبت  $T$  با این خاصیت را، دوره تناوب  $f$  می‌نامیم.

به نمودارهای زیر توجه کنید:



$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$$

$$\cos(x \pm 2\pi) = \cos x$$

$$f(x \pm 2) = f(x)$$

نکته دوره تناوب برخی توابع خاص به صورت زیر است:

| تابع   | دوره تناوب         |
|--|--------------------|
| $\sin(ax + b)$ , $\cos(ax + b)$  | $\frac{2\pi}{ a }$ |
| $\sin^2(ax + b)$ , $\cos^2(ax + b)$<br>$ \sin(ax + b) $ , $ \cos(ax + b) $ | $\frac{\pi}{ a }$  |
| $\tan(ax + b)$ , $\cot(ax + b)$  |                    |

(سراسری ۹۸)

تست - دوره تناوب تابع با ضابطه  $f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x)$  کدام است؟

$$\pi \text{ (۴)}$$

$$2 \text{ (۳)}$$

$$1 \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (۱)}$$

$$f(x) = -2 \cot(2\pi x) \quad T = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

پاسخ - گزینه «۱» با توجه به فرمول  $\tan \theta - \cot \theta = -2 \cot 2\theta$  حل می‌کنیم:



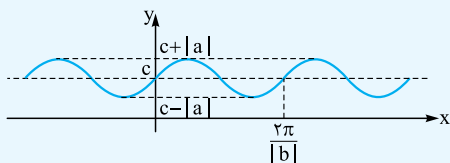
**نکته** اگر دوره تناوب تابع  $y = f(x)$  برابر  $T$  باشد، دوره تناوب تابع  $y = c + kf(ax + b)$  برابر  $\frac{T}{|a|}$  است.

**مثال** دوره تناوب تابع  $y = f(x)$  برابر ۶ است. مقدار مثبت  $a$  را به گونه‌ای بیابید که دوره تناوب تابع  $y = 1 + f(\frac{x}{a})$  از دوره تناوب تابع  $y = 1 - f(\frac{x}{a})$  ده واحد کم‌تر باشد.

**پاسخ** دوره تناوب  $1 + f(\frac{x}{a})$  برابر  $\frac{6}{a}$  و دوره تناوب  $1 - f(\frac{x}{a})$  برابر  $\frac{6}{a}$  است.

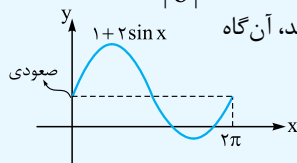
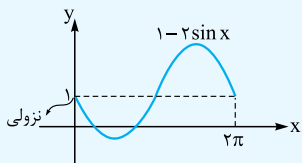
$$\frac{6}{a} = 6a - 10 \Rightarrow 3a^2 - 5a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

**نمودار تابع  $y = c + a \sin bx$**  نمودار این تابع به صورت زیر است:

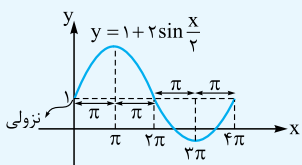


ویژگی‌های نمودار:

۱ ماکزیمم تابع برابر  $c + |a|$ ، مینیمم تابع برابر  $c - |a|$  و دوره تناوب تابع برابر  $\frac{2\pi}{|b|}$  است.



۲ در مجاورت محور  $y$ ها (خط  $x = 0$ ) اگر نمودار تابع، اکیداً صعودی باشد، آن‌گاه  $ab > 0$  و اگر اکیداً نزولی باشد،  $ab < 0$  است.



۳ خط  $y = c$  نمودار تابع را در یک دوره تناوب، به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کند که طول هر قسمت  $\frac{T}{4}$  است.

$$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi, \quad \frac{T}{4} = \pi$$

۴ فاصله بین دو نقطه ماکزیمم متوالی یا مینیمم متوالی، یک دوره تناوب است.

**مثال** مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب تابع  $y = 3 - 7 \sin(2\pi x)$  را بیابید.

$$\max = c + |a| = 3 + |-7| = 10$$

$$\min = c - |a| = 3 - |-7| = -4$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

**مثال** تابع مثلثاتی به فرم  $y = c + a \sin bx$  مثال بنویسید که مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب آن به ترتیب ۷، -۱ و  $4\pi$  باشد.

$$\begin{cases} \max = c + |a| = 7 \\ \min = c - |a| = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ |a| = 4 \end{cases}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 3 \pm 4 \sin(\frac{1}{2}x)$$

**تست** در تابع مثلثاتی  $y = a - (2a + 2) \sin(\frac{\pi}{a}x)$  مقدار ماکزیمم از سه برابر دوره تناوب آن چهار واحد کم‌تر است. مقدار مینیمم این تابع چه قدر است؟ ( $a > 0$ )

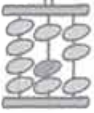
$$-6 \quad (4) \qquad -4 \quad (3) \qquad -3 \quad (2) \qquad -2 \quad (1)$$

$$\max = a + |2a + 2|$$

**پاسخ** گزینه «۳»

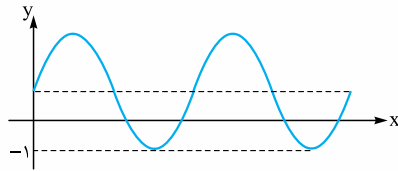
$$\begin{cases} T = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{a}|} = 2|a| \\ \min = a - |2a + 2| \end{cases} \Rightarrow a + |2a + 2| = 6|a| - 4 \xrightarrow{a > 0} 3a + 2 = 6a - 4 \Rightarrow a = 2$$

پس مینیمم برابر  $a - |2a + 2| = 2 - 6 = -4$  است.



(سراسری ۹۷)

تست شکل زیر، نمودار تابع  $y = 1 + a \sin(b\pi x)$  در بازه  $(0, \frac{4}{3})$  است.  $a + b$  کدام است؟



- ۱) ۳
- ۲) ۴
- ۳) ۵
- ۴) ۶

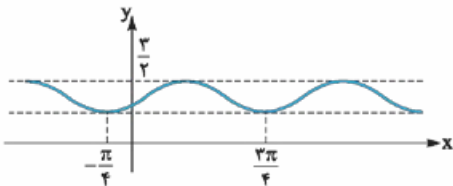
پاسخ گزینه «۳» در اطراف  $x = 0$  تابع صعودی است، پس  $ab > 0$  است. حال هر دو را مثبت فرض کنید:  
نمودار تابع در دو دوره تناوب رسم شده است پس  $T = \frac{2}{3}$  است.

$$T = \frac{2}{3} = \frac{2\pi}{|b\pi|} \Rightarrow b = 3$$

$$\min = -1 \Rightarrow 1 - |a| = -1 \Rightarrow 1 - a = -1 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a + b = 5$$

(سراسری ۹۸)

تست شکل زیر نمودار تابع  $y = 1 + a \sin 2bx \cos bx$  است.  $a + b$  کدام است؟



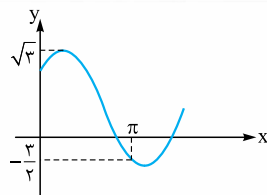
- ۱) ۱
- ۲) ۳/۲
- ۳) ۲
- ۴) ۳

پاسخ گزینه «۳» ضابطه تابع را به صورت  $y = 1 + \frac{a}{2} \sin 2bx$  می‌نویسیم. چون نمودار تابع در اطراف  $x = 0$ ، صعودی است، پس  $ab > 0$  است. با توجه به گزینه‌ها، هر دو را مثبت فرض می‌کنیم:

$$T = \frac{3\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \pi \Rightarrow \pi = \frac{2\pi}{|2b|} \Rightarrow b = 1$$

$$\max = \frac{3}{2} \Rightarrow 1 + |\frac{a}{2}| = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow a + b = 2$$

نکته اگر  $|\theta| < \frac{\pi}{2}$  باشد، آن‌گاه ویژگی‌های تابع  $f(x) = c + a \sin(bx + \theta)$  همانند همان ویژگی‌هایی است که در مورد  $y = c + a \sin bx$  بیان کرده بودیم.



(سراسری ۹۸)

تست شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$  است.  $b$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ۲)  $\frac{3}{2}$
- ۳)  $\sqrt{3}$
- ۴) ۲

پاسخ گزینه «۳» در اطراف  $x = 0$  تابع صعودی است پس  $b > 0$  است.

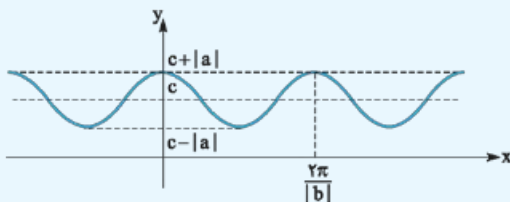
$$1) \max = a + |b| = a + b = \sqrt{3}$$

$$2) f(\pi) = -\frac{3}{2} \Rightarrow a + b \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\frac{3}{2} \Rightarrow a - \frac{b\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = \sqrt{3} \\ 2a - b\sqrt{3} = -3 \end{cases} \Rightarrow -2b - b\sqrt{3} = -2\sqrt{3} - 3 \Rightarrow b = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

پس به یک دستگاه می‌رسیم:

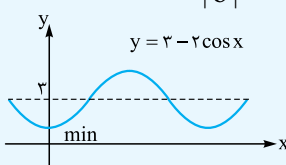
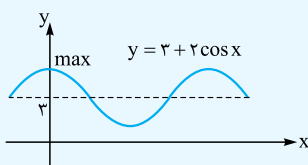
نمودار تابع  $y = c + a \cos bx$  نمودار این تابع به صورت مقابل است:

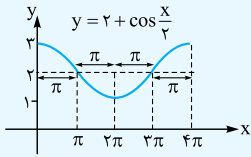


ویژگی‌های نمودار:

۱) ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب تابع به ترتیب برابر  $c + |a|$ ،  $c - |a|$  و  $\frac{2\pi}{|b|}$  است.

۲) بر روی محور  $y$ ، اگر ماکزیمم داشته باشیم، علامت  $a$  مثبت و اگر مینیمم داشته باشیم، علامت  $a$  منفی است. (علامت  $b$  تأثیری در نمودار ندارد.)



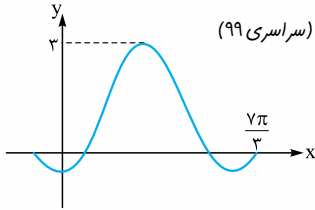


$$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$$

۳ خط  $y = c$  نمودار تابع را در یک دوره تناوب، به چهار قسمت

مساوی تقسیم می‌کند:

۴ فاصله بین دو نقطهٔ ماکزیمم متوالی یا مینیمم متوالی، یک دورهٔ تناوب است.



تست - شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ  $y = a + b \sin(\frac{\pi}{3} + x)$  است. مقدار  $b$  کدام است؟ (سراسری ۹۹)

- ۲ (۱)
- ۱ (۲)
- ۱ (۳)
- ۲ (۴)

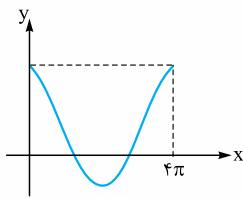
پاسخ - گزینهٔ «۴» ضابطهٔ تابع را به صورت  $y = a + b \cos x$  می‌نویسیم. چون روی محور  $y$ ها، مینیمم وجود دارد پس  $b < 0$  است.

$$\max = a + |b| = a - b = 3$$

$$0 = a + b \cos \frac{\pi}{3} = a + \frac{b}{2}$$

از طرفی نمودار تابع از نقطهٔ  $(\frac{\pi}{3}, 0)$  عبور کرده است، پس:

$$\begin{cases} a - b = 3 \\ a + \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \text{ از حل دستگاه داریم } b = -2 \text{ و } a = 1.$$



تست - شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع  $y = \frac{1}{3} + 2 \cos mx$  است. مقدار تابع در نقطه‌ای به طول

(سراسری ۹۶)

$x = \frac{16\pi}{3}$  کدام است؟

- $\frac{1}{3}$  (۱)
- $\frac{1}{2}$  (۲)
- صفر (۴)
- ۱ (۳)

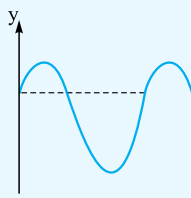
پاسخ - گزینهٔ «۱» دورهٔ تناوب تابع برابر  $4\pi$  است.

$$T = 4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|m|} = 4\pi \Rightarrow |m| = \frac{1}{2}$$

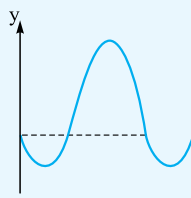
$$y = \frac{1}{3} + 2 \cos(\frac{1}{2}x)$$

$$y(\frac{16\pi}{3}) = \frac{1}{3} + 2 \cos \frac{8\pi}{3} = \frac{1}{3} + 2(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{3}$$

نکته - فرض کنید  $b > 0$  و  $|\theta| < \frac{\pi}{2}$  باشد، در این صورت نمودار  $y = c + a \cos(bx + \theta)$  به یکی از صورت‌های زیر است:

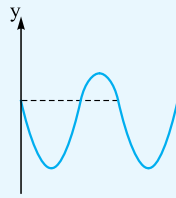


$a > 0$  و  $\theta < 0$

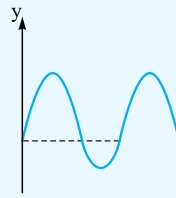


$a < 0$  و  $\theta < 0$

انتقال به راست



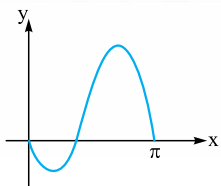
$a > 0$  و  $\theta > 0$



$a < 0$  و  $\theta > 0$

انتقال به چپ

به بیان دیگر: اگر در سمت راست محور  $y$ ها اول مینیمم داشته باشد، آن‌گاه  $a\theta > 0$  و اگر اول ماکزیمم داشته باشد، آن‌گاه  $a\theta < 0$  است. ( $b > 0$ )



تست - قسمتی از نمودار تابع  $y = 1 + a \cos(bx - \frac{\pi}{3})$  به صورت مقابل است. حاصل  $a - b$  کدام است؟

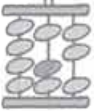
- ۴ (۲)
- ۱ (۱)
- صفر (۴)
- ۴ (۳)

پاسخ - گزینهٔ «۳» نمودار تابع از مبدأ عبور کرده است.

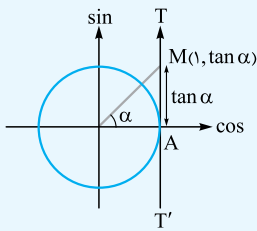
$$y(0) = 0 \Rightarrow 1 + a \cos(-\frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow a = -2$$

چون  $a < 0$  و در سمت راست محور  $y$ ها، ابتدا  $\min$  داریم پس  $b > 0$  است.

$$T = \pi \Rightarrow \pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a - b = -4$$



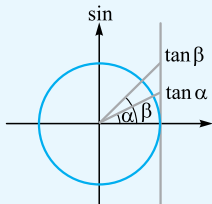
## تابع تانژانت



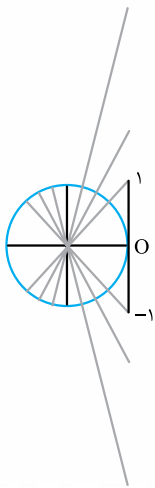
در دایره مثلثاتی شکل مقابل، خط  $x = 1$  را محور تانژانت می‌نامیم. نقطه  $A$  مبدأ این محور و جهت مثبت محور، از پایین به بالا است.

در این صورت، اگر انتهای کمان روبه‌رو به  $\alpha$ ، در ناحیه اول و سوم باشد،  $\tan \alpha$  مثبت و اگر در ناحیه دوم و چهارم باشد،  $\tan \alpha$  منفی است.

**نکته** در هر یک از چهار ناحیه دایره مثلثاتی مقدار  $\tan \alpha$  اکیداً صعودی است.



$$0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \alpha < \tan \beta$$



**تست** اگر  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$  و  $\tan x = \frac{3}{2m-3}$  باشد، حدود  $m$  کدام است؟

$$m > 3 \quad (1)$$

$$0 < m < \frac{3}{2} \quad (2)$$

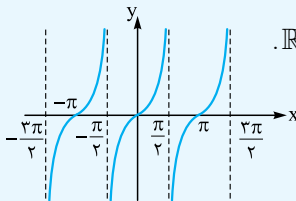
$$\frac{3}{2} < m < 3 \quad (3)$$

$$0 < m < 3, m \neq \frac{3}{2} \quad (4)$$

**پاسخ** گزینه «۴» با توجه به دایره مثلثاتی و محور تانژانت‌ها، معلوم می‌شود  $\tan x > 1$  و  $\tan x < -1$  است، پس  $|\tan x| > 1$  است.

$$\left| \frac{3}{2m-3} \right| > 1 \Rightarrow |2m-3| < 3 \Rightarrow -3 < 2m-3 < 3 \Rightarrow 0 < m < 3, m \neq \frac{3}{2}$$

**نمودار تابع  $\tan x$**  تابع  $y = \tan x$  تابعی است با دامنه  $D = \{x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$  و برد  $\mathbb{R}$ .

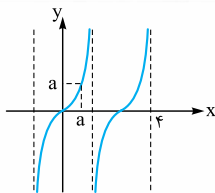


این تابع متناوب و دوره تناوب آن برابر  $\pi$  است و نمودار آن به صورت مقابل است:

این تابع در بازه  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  اکیداً صعودی است (ولی در اجتماع دو بازه  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  و  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  غیریکنواست).

**تذکره** در حالت کلی دوره تناوب تابع  $y = a \tan(bx + \alpha)$  برابر  $\frac{\pi}{|b|}$  است.

**تست** قسمتی از نمودار تابع  $y = -a \tan(b\pi x)$  به صورت مقابل است. مقدار  $a$  کدام است؟



$$\frac{4}{3} \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$1 \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

**پاسخ** گزینه «۲» با توجه به شکل،  $a > 0$  است و چون تابع در اطراف مبدأ صعودی است پس  $-ab > 0$  و در نتیجه  $b < 0$  است.

$$y = a \tan(-b\pi x)$$

در  $x = \frac{1}{4}$  تابع تانژانت برای دومین بار در سمت راست، تعریف نشده است، پس:

$$-b\pi x = \frac{3\pi}{4} \xrightarrow{x = \frac{1}{4}} -\frac{3}{4}b\pi = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow b = -\frac{3}{4}$$

$$y(a) = a \Rightarrow a = -a \tan\left(-\frac{3\pi}{4} a\right) \Rightarrow \tan \frac{3\pi a}{4} = 1$$

$$\text{اولین جواب: } \frac{3\pi a}{4} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$



**تست** تابع  $f(x) = 2 \tan\left(\frac{3}{4}\pi x\right)$  در بازه  $(-a, a)$  اکیداً صعودی است. حداکثر  $a$  کدام است؟

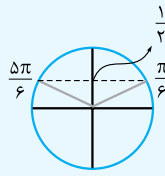
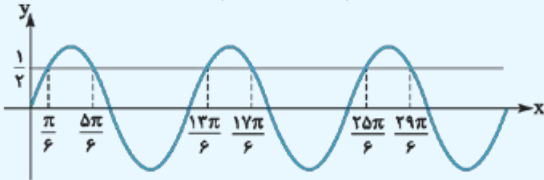
- (۱)  $\frac{1}{3}$       (۲)  $\frac{2}{3}$       (۳)  $\frac{1}{6}$       (۴)  $\frac{3}{2}$

**پاسخ** گزینه «۱» تابع تنازنت در بازه  $\left(-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}\right)$  اکیداً یکنواست. پس  $a$  حداکثر برابر نصف دوره تناوب است.  
 $a = \frac{1}{4}T = \frac{1}{4} \frac{\pi}{\left|\frac{3}{4}\pi\right|} = \frac{1}{3}$

معادلات مثلثاتی

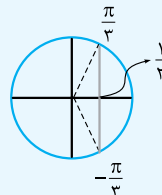
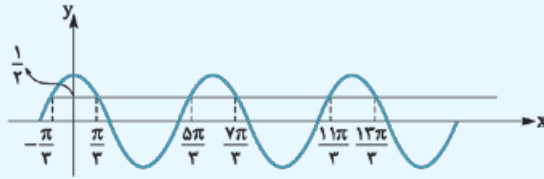
**۱** در بازه  $[0, 2\pi]$ ، دو زاویه یافت می‌شود که سینوس آن‌ها برابر  $\frac{1}{2}$  است. پس معادله  $\sin x = \frac{1}{2}$  در این بازه دو جواب  $x = \frac{\pi}{6}$  و  $x = \frac{5\pi}{6}$  دارد.

اما به دلیل متناوب بودن سینوس، می‌توانیم تمام جواب‌های معادله  $\sin x = \frac{1}{2}$  را به صورت  $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$  و  $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$  نمایش دهیم.



**نتیجه** جواب‌های کلی معادله مثلثاتی  $\sin x = \sin \alpha$  به صورت روبه‌رو است:  
 $\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$

**۲** جواب‌های معادله مثلثاتی  $\cos x = \frac{1}{2}$  در بازه  $[-\pi, \pi]$  عبارتند از  $\frac{\pi}{3}$  و  $-\frac{\pi}{3}$  و تمام جواب‌های این معادله به صورت  $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  است.



**نتیجه** جواب‌های کلی معادله مثلثاتی  $\cos x = \cos \alpha$  به صورت مقابل است:  
 $x = \pm \alpha + 2k\pi$

(سراسری ۹۸)

**تست** مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $4 \sin x \sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{5\pi}{2}$       (۲)  $2\pi$       (۳)  $4\pi$       (۴)  $5\pi$

**پاسخ** گزینه «۴»

$$4 \sin x (-\cos x) = 1 \Rightarrow -2 \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \xrightarrow{k=1,2} x = \frac{11\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \\ 2x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \xrightarrow{k=0,1} x = \frac{7\pi}{12}, \frac{19\pi}{12} \end{cases}$$

$$\text{جمع جواب‌ها: } S = \frac{11\pi}{12} + \frac{23\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} + \frac{19\pi}{12} = \frac{60\pi}{12} = 5\pi$$

(سراسری ۱۳۰۰)

**تست** تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی  $\cos^2 x - \sin^2 x \cos 3x = 1$  در فاصله  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

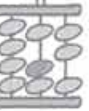
- (۱) ۱      (۲) ۳      (۳) ۵      (۴) ۶

**پاسخ** گزینه «۴» توجه کنید در حل معادلات، اگر خواستید دو طرف تساوی را به عبارتی مانند  $A$  ساده کنید باید  $A = 0$  را هم در نظر بگیرید.

$$-\sin^2 x \cos 3x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow -\sin^2 x \cos 3x = \sin^2 x$$

$$\begin{cases} \sin^2 x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi \\ -\cos 3x = 1 \Rightarrow 3x = \pi, 3\pi, 5\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

پس ۶ جواب دارد.



**نکته** در معادلات زیر کافی است نسبت مثلثاتی عوض شود یا این که زاویه آن قرینه شود؛ مثلاً:

$$1 \quad \sin \alpha = -\sin \beta \Rightarrow \sin \alpha = \sin(-\beta) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi - \beta \\ \alpha = 2k\pi + \pi + \beta \end{cases}$$

$$2 \quad \cos \alpha = -\cos \beta \Rightarrow \cos \alpha = \cos(\pi - \beta) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \pi - \beta \\ \alpha = 2k\pi - \pi + \beta \end{cases}$$

$$3 \quad \sin \alpha = \cos \beta \Rightarrow \sin \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \beta \\ \alpha = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} + \beta \end{cases}$$

$$4 \quad \sin \alpha = -\cos \beta \Rightarrow \sin \alpha = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} - \beta \\ \alpha = 2k\pi + \pi - \frac{3\pi}{2} + \beta \end{cases}$$

**تست** - جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$  با شرط  $x \neq k\pi$  که در آن  $k$  عدد صحیح است، کدام است؟ (سراسری ۹۹)

$$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad (4) \quad x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \quad (3) \quad x = \frac{2k\pi}{3} \quad (2) \quad x = \frac{k\pi}{3} \quad (1)$$

**پاسخ** - گزینه «۴» از ویژگی‌های  $\cos \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$  استفاده می‌کنیم.

$$\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4} - x) \Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - x + 2k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \pi - (\frac{\pi}{4} - x) + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \\ x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

طبق فرض، جواب  $x = \pi + 2k\pi$  قابل قبول نیست.

**تست** - جواب کلی معادله مثلثاتی  $\cos 3x + \cos x = 0$  باشد،  $\cos x \neq 0$  کدام است؟ (سراسری ۹۸)

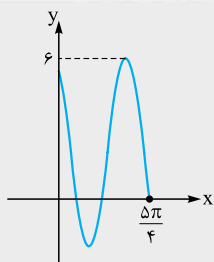
$$x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (4) \quad x = k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (3) \quad x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (2) \quad x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

**پاسخ** - گزینه «۲» از ویژگی  $-\cos x = \cos(\pi - x)$  استفاده می‌کنیم:

$$\cos 3x = -\cos x = \cos(\pi - x) \Rightarrow \begin{cases} 3x = \pi - x + 2k\pi \\ 3x = -(\pi - x) + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

چون  $\cos x \neq 0$  است، پس  $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$  است.

**نکته** تحلیل و حل برخی از سؤالات نمودارهای مثلثاتی، نیاز به حل معادله مثلثاتی دارد.



**مثال** - نمودار تابع  $f(x) = a - 4 \sin(bx - \frac{\pi}{3})$  در بازه  $[0, \frac{\Delta\pi}{4}]$  به صورت مقابل است. مقدار  $b$  را بیابید.

**پاسخ** - ماکزیمم تابع برابر  $a + 4$  است، پس  $a = 2$  است. چون در  $x = 0$  تابع نزولی است پس  $-4b < 0$

و  $b > 0$  است.  $x = \frac{\Delta\pi}{4}$  سومین نقطه برخورد تابع با محور  $x$ ها است.

$$y = 0 \Rightarrow 0 = 2 - 4 \sin(b \frac{\Delta\pi}{4} - \frac{\pi}{3}) \Rightarrow \sin(\frac{\Delta b \pi}{4} - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$$

$$\text{جواب سومین جواب: } 2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{\Delta\pi b}{4} - \frac{\pi}{3} \Rightarrow b = 2$$

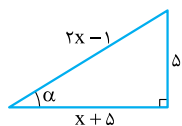




# پرستش‌های چهارگزینه‌ای

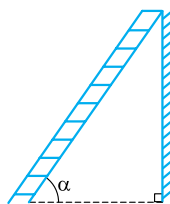
## نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه

۷۳۴- در شکل مقابل، مقدار  $\cos \alpha$  کدام است؟



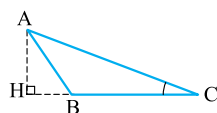
- |                     |                     |
|---------------------|---------------------|
| $\frac{1}{3}$ (۲)   | $\frac{5}{13}$ (۱)  |
| $\frac{12}{13}$ (۴) | $\frac{13}{15}$ (۳) |

۷۳۵- نردبامی مطابق شکل در کنار یک دیوار قرار گرفته است. اگر طول نردبام  $1/25$  برابر ارتفاع دیوار باشد، مقدار تانژانت زاویه‌ای که نردبام با زمین می‌سازد، چه قدر است؟



- |                   |                   |
|-------------------|-------------------|
| $\frac{3}{4}$ (۲) | $\frac{2}{3}$ (۱) |
| $\frac{3}{2}$ (۴) | $\frac{4}{3}$ (۳) |

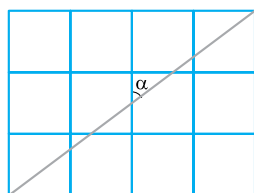
۷۳۶- در مثلث ABC شکل مقابل  $\cos C = 0/8$  است. اگر  $AH = 18$  باشد، طول پاره خط CH چه قدر است؟



- |        |        |
|--------|--------|
| ۲۸ (۲) | ۲۴ (۱) |
| ۳۶ (۴) | ۳۲ (۳) |

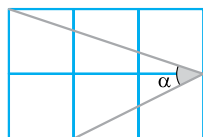
۷۳۷- یک موشک در ارتفاع ۲۰ متری از سطح زمین با زاویه  $30^\circ$  پرتاب می‌شود. پس از طی ۸۰۰ متر در همین راستا در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار می‌گیرد؟

- |                        |         |                   |         |
|------------------------|---------|-------------------|---------|
| $400\sqrt{3} + 20$ (۴) | ۴۲۰ (۳) | $400\sqrt{3}$ (۲) | ۴۰۰ (۱) |
|------------------------|---------|-------------------|---------|



۷۳۸- اگر اندازه هر ضلع مربع کوچک یک واحد باشد، مقدار  $\sin \alpha$  کدام است؟

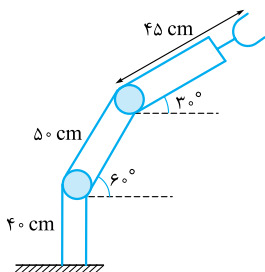
- |                   |                   |
|-------------------|-------------------|
| $\frac{2}{3}$ (۲) | $\frac{1}{2}$ (۱) |
| $\frac{4}{5}$ (۴) | $\frac{3}{4}$ (۳) |



۷۳۹- هر ضلع مربع کوچک ۱ واحد است. مقدار  $\sin \alpha$  کدام است؟

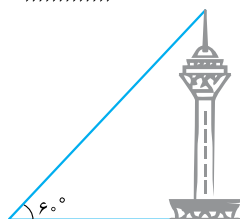
- |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|
| $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۲) | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱) |
| $\frac{1}{2}$ (۴)        | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳) |

۷۴۰- در روبات شکل مقابل فاصله نوک گیره از سطح زمین چند سانتی‌متر است؟ ( $\sqrt{3} \sim 1/7$ )



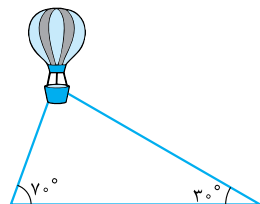
- |            |
|------------|
| ۱۰۳ (۱)    |
| ۱۰۳/۲۵ (۲) |
| ۱۰۵ (۳)    |
| ۱۰۵/۲۵ (۴) |

۷۴۱- طاهایا به نوک برج میلاد با زاویه  $60^\circ$  نگاه می‌کند. اگر ارتفاع برج میلاد را ۴۳۵ متر فرض کنیم، طاهایا چند متر از برج دور شود تا نوک برج را با زاویه  $30^\circ$  نگاه کند؟

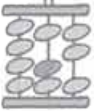


- |                   |
|-------------------|
| $290\sqrt{3}$ (۱) |
| $270\sqrt{3}$ (۲) |
| ۴۳۵ (۳)           |
| ۳۶۰ (۴)           |

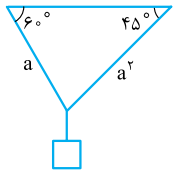
۷۴۲- یک بالن مطابق شکل به وسیله دو طناب به زمین بسته شده است. اگر طول یکی از طناب‌ها ۱۸ باشد، طول طناب دوم کدام است؟ ( $\sin 70^\circ = 0/9$ )



- |        |        |
|--------|--------|
| ۱۰ (۲) | ۹ (۱)  |
| ۱۲ (۴) | ۱۱ (۳) |

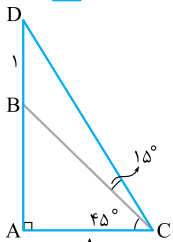


۷۴۳- جسمی با دو طناب مطابق شکل آویزان است.  $a$  کدام است؟



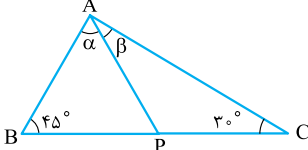
- (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 (۲)  $\frac{1}{2}$   
 (۳)  $\sqrt{3}$   
 (۴)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$

۷۴۴- در شکل مقابل اندازه  $AB$  کدام است؟



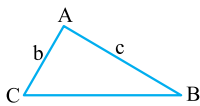
- (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 (۲)  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$   
 (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$   
 (۴)  $\sqrt{3} + \frac{1}{2}$

۷۴۵- در شکل مقابل  $BP = 2PC$  است. حاصل  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$  کدام است؟



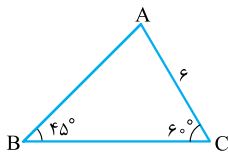
- (۱)  $\sqrt{2}$   
 (۲)  $2\sqrt{2}$   
 (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$   
 (۴)  $\sqrt{3}$

۷۴۶- در شکل مقابل،  $b \cos C + c \cos B = 4$  و مساحت مثلث برابر ۱۶ است. اندازه ارتفاع وارد بر ضلع  $BC$  چه قدر است؟



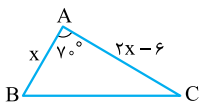
- (۱) ۴  
 (۲) ۸  
 (۳) ۱۲  
 (۴) ۱۶

۷۴۷- مساحت شکل مقابل کدام است؟



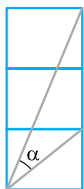
- (۱)  $\frac{9\sqrt{3}+27}{2}$   
 (۲)  $\frac{9\sqrt{3}+18}{2}$   
 (۳)  $\frac{18\sqrt{3}+9}{2}$   
 (۴)  $\frac{18\sqrt{3}+27}{2}$

۷۴۸- مساحت مثلث  $ABC$  در شکل مقابل برابر ۳۶ است.  $x$  کدام است؟ ( $\sin 70^\circ = 0.9$ )



- (۱) ۵  
 (۲) ۶  
 (۳) ۷  
 (۴) ۸

۷۴۹- اندازه ضلع هر مربع برابر ۱ واحد است.  $\sin \alpha$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{1}{2}$   
 (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$   
 (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$   
 (۴)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$

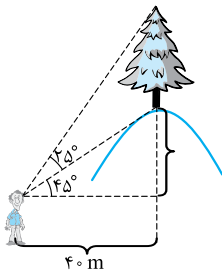
۷۵۰- در متوازی‌الاضلاعی اندازه دو قطر ۱۰ و ۱۸ و زاویه بین دو قطر  $150^\circ$  است. مساحت متوازی‌الاضلاع کدام است؟

- (۱) ۴۵  
 (۲) ۹۰  
 (۳)  $45\sqrt{3}$   
 (۴)  $90\sqrt{3}$

۷۵۱- اگر مساحت یک شش‌ضلعی منتظم برابر  $6\sqrt{3}$  باشد، اندازه قطر کوچک آن کدام است؟

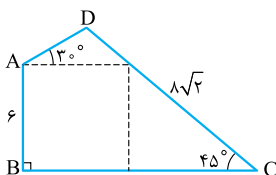
- (۱)  $\sqrt{3}$   
 (۲)  $2\sqrt{3}$   
 (۳) ۲  
 (۴) ۴

۷۵۲- ناظری مطابق شکل به درختی که بر روی تپه‌ای قرار دارد نگاه می‌کند. ارتفاع درخت کدام است؟ ( $\tan 70^\circ = 2/75$ )

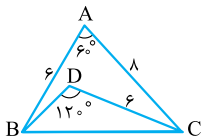


- (۱) ۴۰  
 (۲) ۶۰  
 (۳) ۷۰  
 (۴) ۸۰

۷۵۳- در شکل مقابل،  $CD = 8\sqrt{2}$  و  $AB = 6$  می‌باشد. طول  $AD$  کدام است؟



- (۱) ۳  
 (۲) ۴  
 (۳)  $3\sqrt{2}$   
 (۴)  $4\sqrt{2}$

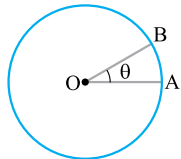


۷۵۴- در شکل مقابل، مساحت مثلث BDC چه قدر است؟

(۲)  $3\sqrt{3}$   
(۴)  $2\sqrt{3}$

(۱)  $6\sqrt{3}$   
(۳)  $4\sqrt{3}$

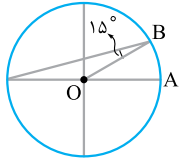
### طول کمان و روابط قطاع



۷۵۵- در دایره شکل مقابل طول کمان AB،  $\frac{1}{3}$  شعاع دایره است. زاویه theta چند درجه است؟

(۲)  $\frac{3^\circ}{\pi}$   
(۴)  $6^\circ$

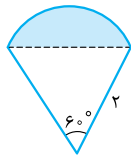
(۱)  $\frac{6^\circ}{\pi}$   
(۳)  $3^\circ$



۷۵۶- شعاع دایره مقابل برابر ۱۲ است. اندازه کمان AB کدام است؟

(۲)  $\frac{\pi}{3}$   
(۴)  $2\pi$

(۱)  $\frac{\pi}{6}$   
(۳)  $\pi$



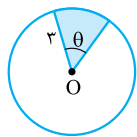
۷۵۷- در شکل مقابل، مساحت قسمت رنگی کدام است؟

(۲)  $\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$

(۱)  $\frac{4\pi}{3} - 2\sqrt{3}$

(۴)  $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

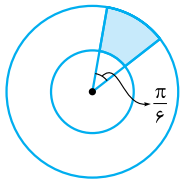
(۳)  $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$



۷۵۸- در شکل مقابل، محیط و مساحت قسمت رنگی از لحاظ عددی با هم برابر است. theta برحسب رادیان کدام است؟

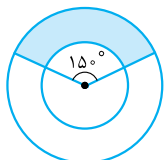
(۲) ۴  
(۴)  $\frac{\pi}{4}$

(۱) ۳  
(۳)  $\frac{\pi}{3}$



۷۵۹- در شکل مقابل، دو دایره هم‌مرکز و شعاع آن‌ها ۴ و ۸ است. مساحت ناحیه رنگی کدام است؟

(۱)  $2\pi$   
(۲)  $3\pi$   
(۳)  $4\pi$   
(۴)  $6\pi$



۷۶۰- در شکل مقابل دو دایره هم‌مرکز و شعاع آن‌ها ۳ و ۸ است. محیط ناحیه رنگی کدام است؟

(۲)  $5 + 25\frac{\pi}{2}$

(۱)  $10 + 25\frac{\pi}{2}$

(۴)  $10 + 55\frac{\pi}{6}$

(۳)  $5 + 55\frac{\pi}{6}$

### دایره مثلثاتی

۷۶۱- انتهای کمان مربوط به زاویه  $215^\circ$  با انتهای کمان مربوط به کدام زاویه زیر در یک ناحیه دایره مثلثاتی قرار ندارد؟

(۴)  $-\frac{11\pi}{4}$

(۳)  $\frac{13\pi}{5}$

(۲)  $-\frac{7\pi}{6}$

(۱)  $\frac{2\pi}{3}$

۷۶۲- دو زاویه theta و  $49^\circ$  در یک ناحیه دایره مثلثاتی قرار دارند. theta کدام می‌تواند باشد؟

(۴)  $\frac{8\pi}{5}$

(۳)  $\frac{17\pi}{8}$

(۲)  $\frac{4\pi}{3}$

(۱)  $\frac{5\pi}{6}$

۷۶۳- انتهای کمان مربوط به  $53^\circ$  و  $\alpha^\circ$  در دایره مثلثاتی دو سر قطر دایره قرار گرفته‌اند. alpha کدام زاویه می‌تواند باشد؟

(۴)  $\frac{35\pi}{18}$

(۳)  $\frac{19\pi}{18}$

(۲)  $\frac{17\pi}{18}$

(۱)  $\frac{\pi}{18}$

۷۶۴- اگر سینوس ۱، ۲ و ۳ رادیان به ترتیب برابر a، b و c باشد، کدام گزینه صحیح است؟

(۴)  $c < a < b$

(۳)  $a < c < b$

(۲)  $c < b < a$

(۱)  $a < b < c$

۷۶۵- کدام عدد مثبت است؟

(۴)  $\cos 6$

(۳)  $\sin 5$

(۲)  $\cos 4$

(۱)  $\tan 3$

۷۶۶- انتهای کمان زوایای  $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$  رئوس کدام چندضلعی است؟ ( $k \in \mathbb{N}$ )

(۴) ۱۲ ضلعی منتظم

(۳) هشتضلعی منتظم

(۲) ششضلعی منتظم

(۱) مربع

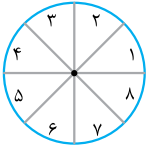




۷۶۷- انتهای کمان‌های زاویه  $\theta = \frac{k\pi}{6} + \frac{\pi}{8}$  چند نقطه را روی دایره مثلثاتی نشان می‌دهد؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- ۶ (۱)
- ۸ (۲)
- ۱۲ (۳)
- ۲۴ (۴)

۷۶۸- در دایره مثلثاتی نیمسازهای نواحی اول و سوم و هم‌چنین دوم و چهارم را رسم کرده‌ایم. اگر  $\sin \alpha \cos \alpha < 0$  و  $\tan \alpha < \cot \alpha$  باشد،  $\alpha$  در کدام یک از نواحی هشت‌گانه شکل زیر قرار می‌گیرد؟



- ۷ یا ۳ (۱)
- ۵ یا ۱ (۳)
- ۶ یا ۲ (۲)
- ۸ یا ۴ (۴)

۷۶۹- اگر  $\sin x < \cos x$  و  $\tan x > \cot x$ ، زاویه  $x$  برحسب رادیان کدام می‌تواند باشد؟

- $\frac{9\pi}{8}$  (۱)
- $\frac{13\pi}{9}$  (۲)
- $\frac{17\pi}{10}$  (۳)
- $\frac{23\pi}{11}$  (۴)

۷۷۰- نقطه  $P(\frac{2}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{3})$  روی دایره مثلثاتی انتهای کمان مربوط به زاویه  $\alpha$  می‌باشد. مقدار  $\frac{\sin \alpha}{\cot \alpha}$  کدام است؟

- $\frac{5}{6}$  (۱)
- $\frac{6}{5}$  (۲)
- $-\frac{5}{6}$  (۳)
- $-\frac{6}{5}$  (۴)

۷۷۱- مطابق شکل نقطه  $P(-\frac{4}{5}, y)$  بر روی دایره مثلثاتی قرار دارد. مقدار  $\tan \alpha$  کدام است؟

- $\frac{4}{3}$  (۱)
- $-\frac{4}{3}$  (۳)
- $\frac{3}{4}$  (۲)
- $-\frac{3}{4}$  (۴)

۷۷۲- مطابق شکل نقطه  $P(3a, a-1)$  روی دایره مثلثاتی قرار دارد.  $\sin \alpha$  کدام است؟

- $\frac{3}{5}$  (۱)
- $-\frac{2}{5}$  (۳)
- $\frac{4}{5}$  (۲)
- $-\frac{4}{5}$  (۴)

۷۷۳- در دایره مثلثاتی شکل مقابل مقدار  $\cos \alpha$  کدام است؟

- $\frac{\sqrt{10}}{10}$  (۱)
- $\frac{3\sqrt{10}}{10}$  (۳)
- $\frac{\sqrt{10}}{5}$  (۲)
- $\frac{\sqrt{10}}{4}$  (۴)

۷۷۴- اگر  $P$  روی دایره مثلثاتی بوده و  $\tan \alpha = \frac{1}{3}$  باشد، حاصل ضرب مختصات نقطه  $P$  کدام است؟

- $-\frac{1}{5}$  (۱)
- $-\frac{2}{5}$  (۳)
- $-\frac{4}{5}$  (۲)
- $-\frac{4}{5}$  (۴)

۷۷۵- در دایره مثلثاتی شکل مقابل، فاصله دو نقطه  $A$  و  $B$  از یکدیگر چه قدر است؟

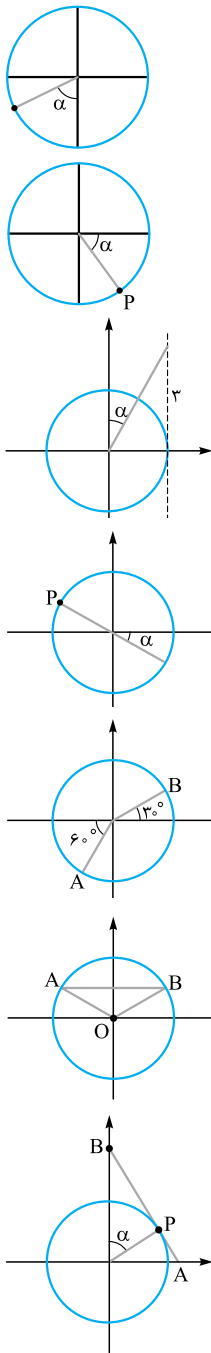
- $\sqrt{2}$  (۱)
- $\sqrt{3} + \sqrt{2}$  (۳)
- $\sqrt{3}$  (۲)
- $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  (۴)

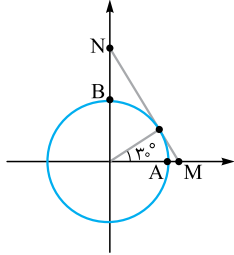
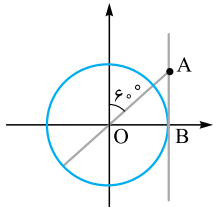
۷۷۶- در دایره مثلثاتی شکل زیر،  $AB$  موازی محور کسینوس‌ها و مساحت مثلث  $OAB$  برابر  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  است. طول پاره خط  $AB$  کدام می‌تواند باشد؟

- $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۱)
- $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  (۳)
- $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۲)
- $\sqrt{3}$  (۴)

۷۷۷- پاره خط  $AB$  در نقطه  $P$  بر دایره مثلثاتی مماس شده است. اگر  $BP = 3AP$  باشد،  $\alpha$  کدام است؟

- $60^\circ$  (۱)
- $65^\circ$  (۲)
- $70^\circ$  (۳)
- $75^\circ$  (۴)





۷۷۸- در دایره مثلثاتی شکل مقابل، طول OA چه قدر است؟

$$\begin{array}{ll} \sqrt{3} & (1) \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & (2) \\ 1 & (3) \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} & (4) \end{array}$$

۷۷۹- در دایره مثلثاتی شکل مقابل MN بر دایره مماس است. حاصل AM + BN کدام است؟

$$\begin{array}{ll} \frac{\sqrt{3}}{2} & (1) \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} & (2) \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 & (3) \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} + 1 & (4) \end{array}$$

۷۸۰- در کدام ناحیه دایره مثلثاتی با افزایش زاویه، مقدار سینوس و کسینوس آن کاهش می‌یابد؟

(۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

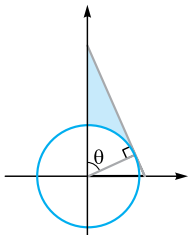
۷۸۱- اگر  $0 < \alpha < 120^\circ$  و  $\sin \alpha = \frac{2-m}{3}$  باشد، حدود m کدام است؟

$$\begin{array}{ll} 2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} < m < 2 & (1) \\ -1 \leq m < 2 & (2) \\ -1 \leq m < 2 & (3) \\ -\frac{1}{2} \leq m < 2 & (4) \end{array}$$

۷۸۲- اگر  $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{2\pi}{3}$  و  $\cos 2\theta = \frac{2m+1}{2}$  باشد، حدود m کدام است؟

$$\begin{array}{ll} -\frac{2}{3} < m < 0 & (1) \\ -1 \leq m < 0 & (2) \\ -\frac{2}{3} < m < \frac{\sqrt{3}-1}{3} & (3) \\ -1 \leq m < -\frac{1}{3} & (4) \end{array}$$

۷۸۳- در دایره مثلثاتی شکل مقابل مساحت قسمت رنگی کدام است؟



$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2}(\tan \theta - \theta) & (1) \\ \frac{1}{2} \tan \theta - \theta & (2) \\ \frac{1}{2}(\tan \theta - \sin \theta) & (3) \\ \frac{1}{2} \tan \theta - \sin \theta & (4) \end{array}$$

نسبت‌های مثلثاتی کمان‌های  $\frac{k\pi}{4} \pm \alpha$ ۷۸۴- حاصل  $\cos(\frac{\pi}{4} + x) + \sin(\frac{\pi}{4} + x)$  کدام است؟

$$\begin{array}{ll} \sin x + \cos x & (1) \\ \sin x - \cos x & (2) \\ \cos x - \sin x & (3) \\ -\sin x - \cos x & (4) \end{array}$$

۷۸۵- اگر  $3 \cos(\frac{3\pi}{4} + x) = 4 \sin(x - \frac{\pi}{4})$  باشد،  $\cot x$  کدام است؟

$$\begin{array}{ll} \frac{3}{4} & (1) \\ \frac{4}{3} & (2) \\ -\frac{4}{3} & (3) \\ -\frac{3}{4} & (4) \end{array}$$

۷۸۶- اگر  $1 = \cot(\theta + x) \tan(x - \frac{\pi}{4})$  باشد،  $\theta$  کدام می‌تواند باشد؟

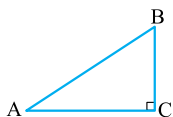
$$\begin{array}{ll} \frac{\pi}{2} & (1) \\ \pi & (2) \\ \frac{\pi}{4} & (3) \\ 2\pi & (4) \end{array}$$

۷۸۷- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  مکمل یکدیگر باشند، حاصل  $\cos(\alpha - \frac{3\pi}{4})$  کدام است؟

$$\begin{array}{ll} \sin \beta & (1) \\ -\sin \beta & (2) \\ \cos \beta & (3) \\ -\cos \beta & (4) \end{array}$$

۷۸۸- در شکل مقابل حاصل  $\frac{\cot A - \cot B}{\tan A - \tan B}$  کدام است؟

$$\begin{array}{ll} 1 & (1) \\ -1 & (2) \\ \tan^2 A & (3) \\ \tan^2 B & (4) \end{array}$$

۷۸۹- اگر برای هر x روابط  $\cos(\alpha + x) = \sin x$  و  $\sin(\alpha - x) = -\cos x$  برقرار باشد،  $\alpha$  کدام زاویه می‌تواند باشد؟

$$\begin{array}{ll} \frac{\pi}{2} & (1) \\ \pi & (2) \\ \frac{3\pi}{2} & (3) \\ -\frac{3\pi}{2} & (4) \end{array}$$





۷۹۰- مثلث ABC در رأس A قائمه است. حاصل  $\frac{\sin B \cos C}{\sin^2 C}$  کدام است؟

(۱)  $\tan^2 B$  (۲)  $\tan^2 C$  (۳)  $\cot^2 B$  (۴)  $\tan C \cot B$

۷۹۱- اگر  $\frac{\cos(x - \frac{\pi}{4})}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = 4$  باشد، حاصل  $\tan(x - \frac{\pi}{4})$  کدام است؟

(۱) ۴ (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳) -۴ (۴)  $-\frac{1}{4}$

۷۹۲- با فرض  $\sin(x + \frac{5\pi}{12}) + \cos(x - \frac{\pi}{12}) = \frac{1}{3}$ ، حاصل  $\cos(x + \frac{11\pi}{12})$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{6}$  (۳)  $-\frac{1}{3}$  (۴)  $-\frac{1}{6}$

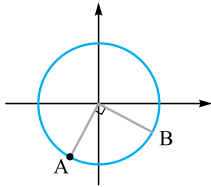
۷۹۳- اگر  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{6}$  باشد، حاصل  $\frac{\sin(2\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + 2\beta)}$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳)  $\sqrt{3}$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۷۹۴- اگر  $\alpha = \frac{\pi}{16}$  باشد، حاصل  $\frac{\sin^2 \alpha \cot 6\alpha}{\tan 2\alpha \cos 5\alpha}$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۴)  $\frac{1}{3}$

۷۹۵- اگر A انتهای کمان مربوط به زاویه  $240^\circ$  و B انتهای کمان زاویه  $\theta$  در دایره مثلثاتی شکل مقابل باشد،  $\tan \theta$  کدام است؟



(۱) -۱ (۲)  $-\frac{1}{2}$

(۳)  $-\sqrt{3}$  (۴)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

۷۹۶- مقدار  $\cos 57^\circ$  با کدام عدد برابر است؟

(۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۳)  $-\frac{1}{2}$  (۴)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۷۹۷- حاصل عبارت  $\cos \frac{16\pi}{3} \sin(-\frac{19\pi}{6}) + \tan \frac{17\pi}{4} \sin \frac{11\pi}{6}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $-\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴)  $-\frac{3}{4}$

۷۹۸- حاصل  $\cos(k\pi - \alpha)$  با فرض  $k \in \mathbb{Z}$  کدام است؟

(۱)  $(-1)^k \cos \alpha$  (۲)  $(-1)^{k+1} \cos \alpha$  (۳)  $(-1)^k \sin \alpha$  (۴)  $(-1)^{k+1} \sin \alpha$

۷۹۹- حاصل  $\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \dots + \cos \frac{6\pi}{7}$  کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴)  $-\frac{1}{2}$

۸۰۰- مقدار عددی عبارت  $A = \sin \frac{10\pi}{3} \cos \frac{11\pi}{6} + \tan \frac{7\pi}{4}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $-\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{7}{4}$  (۴)  $-\frac{7}{4}$

۸۰۱- با فرض  $\tan 20^\circ = \frac{1}{3}$  حاصل  $\frac{\cos 20^\circ}{\sin 70^\circ + \cos 70^\circ}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{16}{25}$  (۲)  $\frac{25}{34}$  (۳)  $\frac{25}{16}$  (۴)  $\frac{34}{25}$

۸۰۲- اگر  $\tan 25^\circ = \frac{1}{4}$  باشد، حاصل  $\frac{2 \sin 205^\circ - \cos 155^\circ}{\cos 295^\circ + \sin 115^\circ}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{4}{27}$  (۲)  $\frac{4}{73}$  (۳)  $-\frac{4}{27}$  (۴)  $-\frac{4}{73}$

۸۰۳- هرگاه  $\tan \alpha = 2$  و  $\frac{\sin(270^\circ - \alpha) + k \cos(\alpha + 180^\circ)}{2 \cos(\alpha + 90^\circ) - \cos(\alpha - 180^\circ)} = 3$  مقدار k کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۴





۸۰۴- اگر  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$  و انتهای کمان  $\theta$  در ناحیه چهارم باشد، حاصل  $\cot \theta - \tan \theta$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{10}{3}$  (۳)  $-\frac{1}{3}$  (۴)  $-\frac{10}{3}$

۸۰۵- با فرض  $\frac{3}{\sin \alpha} + \frac{2}{\cos \alpha} = 0$  حاصل  $6 \tan \alpha - 12 \cot \alpha$  کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴)  $-\frac{3}{2}$

۸۰۶- اگر  $\theta$  منفرجه و  $\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} = 2$  باشد، حاصل  $\cot(\theta + \frac{\pi}{4})$  کدام است؟

(۱)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  (۲)  $-\frac{\sqrt{2}}{4}$  (۳)  $2\sqrt{2}$  (۴)  $-2\sqrt{2}$

۸۰۷- اگر  $\frac{1}{4} \sin x + \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 3 \sin x$  و انتهای کمان  $x$  در ناحیه دوم باشد، مقدار  $\cos x$  کدام است؟

(۱)  $\frac{\sqrt{15}}{4}$  (۲)  $\frac{\sqrt{63}}{8}$  (۳)  $-\frac{\sqrt{15}}{4}$  (۴)  $-\frac{\sqrt{63}}{8}$

۸۰۸- اگر  $\cot(\frac{\pi}{4} - x) = 3$  و انتهای کمان  $x$  در ناحیه دوم مثلثاتی باشد، مقدار  $\cos(x - \frac{\pi}{4})$  کدام است؟

(۱)  $\frac{\sqrt{10}}{10}$  (۲)  $\frac{3\sqrt{10}}{10}$  (۳)  $-\frac{\sqrt{10}}{10}$  (۴)  $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

۸۰۹- اگر  $1 = 3 \cos(\pi - x) - 2 \sin(x + \frac{\pi}{4}) + 2 \sin(\pi + x) + \cos(\frac{\pi}{4} - x)$  مقدار  $\cos(\frac{\pi}{4} - x)$  کدام می تواند باشد؟

(۱) صفر (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{5}$  (۳)  $\frac{2\sqrt{6}}{5}$  (۴)  $\frac{3\sqrt{5}}{7}$

۸۱۰- اگر  $\tan \alpha = \frac{5}{11}$  و انتهای کمان  $\alpha$  در ربع سوم باشد، حاصل عبارت  $\sin(\frac{7\pi}{4} - \alpha) \cos(\frac{11\pi}{4} + \alpha)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{65}{144}$  (۲)  $\frac{60}{169}$  (۳)  $-\frac{65}{144}$  (۴)  $-\frac{60}{169}$

۸۱۱- با فرض  $\frac{2 \tan \alpha + \tan(\frac{3\pi}{4} - \alpha)}{\cot(\frac{\pi}{4} - \alpha) - 2 \cot(\pi - \alpha)} = \frac{3}{2}$  مقدار  $\sin \alpha$  کدام می تواند باشد؟

(۱)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$  (۲)  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$  (۳)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۴)  $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۸۱۲- حاصل عبارت  $\frac{1}{1 + \tan 60^\circ} + \frac{1}{1 + \cot 60^\circ}$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲)  $\sqrt{3}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۴) ۲

۸۱۳- اگر  $\tan \alpha = \frac{1}{3k-1}$  و  $\cot \alpha = 4k + 2$  مقدار  $k$  کدام است؟

(۱)  $\frac{2}{3}$  (۲) ۳ (۳) -۳ (۴)  $-\frac{2}{3}$

۸۱۴- اگر  $\frac{3\pi}{4} < \theta < \pi$  باشد، حاصل عبارت  $\sqrt{1 + \tan^2 x} \sqrt{\cos x - \frac{1}{\cos x}}$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $-\frac{1}{2}$

۸۱۵- با فرض  $\frac{3\pi}{4} < \alpha < 2\pi$ ، حاصل  $\frac{2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$  کدام است؟

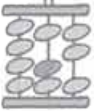
(۱)  $\sin x$  (۲)  $-\sin x$  (۳)  $\sin^2 x$  (۴)  $-\sin^2 x$

۸۱۶- اگر  $2 = \frac{\sin \theta + 2 \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta}$  باشد، حاصل  $\cot(\frac{3\pi}{4} + \theta)$  کدام است؟

(۱) ۴ (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳) -۴ (۴)  $-\frac{1}{4}$

۸۱۷- اگر  $5 = 7 \sin^2 x + 3 \cos^2 x$  حاصل  $\tan^2 x$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{2}$  (۲) ۲ (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴) ۱



۸۱۸- اگر  $1 = \sin^2(\alpha - \frac{\pi}{3}) + \sin^2(\beta + \frac{\pi}{4})$  باشد، حاصل  $\alpha + \beta$  کدام می‌تواند باشد؟

(۱)  $\frac{5\pi}{12}$  (۲)  $\frac{7\pi}{12}$  (۳)  $\frac{3\pi}{4}$  (۴)  $\frac{2\pi}{3}$

۸۱۹- با فرض  $\tan \alpha = 3$ ، حاصل  $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos^2 \alpha}$  کدام است؟

(۱)  $0/4$  (۲)  $0/2$  (۳)  $20$  (۴)  $40$

۸۲۰- با فرض  $\frac{1}{\cos x} = \frac{2}{1 - \sin x}$ ، مقدار  $\tan x$  کدام است؟

(۱)  $\frac{3}{4}$  (۲)  $\frac{4}{3}$  (۳)  $-\frac{3}{4}$  (۴)  $-\frac{4}{3}$

۸۲۱- اگر  $\tan x = 2$  باشد، حاصل  $\sin^6 x + \cos^6 x$  کدام است؟

(۱)  $\frac{16}{25}$  (۲)  $\frac{17}{25}$  (۳)  $\frac{18}{25}$  (۴)  $\frac{19}{25}$

۸۲۲- با فرض  $2 = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha}$  حاصل  $\sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{5}$  (۲)  $\frac{2}{5}$  (۳)  $\frac{3}{5}$  (۴)  $\frac{4}{5}$

۸۲۳- با فرض  $2 \sin x = \frac{1}{\cos x}$  حاصل  $\sin^6 x + \cos^6 x$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{6}$  (۴)  $\frac{1}{8}$

۸۲۴- اگر  $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{3}$  باشد، مقدار  $\sqrt{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{\sqrt{17}}{9}$  (۲)  $\frac{7}{9}$  (۳)  $\frac{\sqrt{97}}{9}$  (۴)  $\frac{1}{9}$

۸۲۵- با فرض  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{4}$  حاصل  $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$  کدام است؟

(۱)  $\frac{47}{128}$  (۲)  $\frac{49}{128}$  (۳)  $-\frac{43}{128}$  (۴)  $-\frac{45}{128}$

۸۲۶- با فرض  $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$  حاصل  $\tan^2 x + \cot^2 x$  کدام است؟

(۱)  $2$  (۲)  $4$  (۳)  $14$  (۴)  $16$

۸۲۷- با فرض  $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{25}{8}$  حاصل  $|\sin \alpha - \cos \alpha|$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{5}$  (۲)  $\frac{2}{5}$  (۳)  $\frac{3}{5}$  (۴)  $\frac{4}{5}$

۸۲۸- تساوی  $\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^4 x} = a \tan^2 x + b \tan^4 x$  برای  $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$  برقرار است. حاصل  $a + b$  کدام است؟

(۱) صفر (۲)  $1$  (۳)  $-1$  (۴)  $-2$

### ◀ اتحادهای مثلثاتی کمان $2\alpha$

۸۲۹- اگر  $\cos(\pi + \theta) + \cos(\frac{\pi}{3} + \theta) = \frac{1}{3}$  باشد، حاصل  $\sin 2\theta$  کدام است؟

(۱)  $\frac{4}{9}$  (۲)  $\frac{1}{9}$  (۳)  $-\frac{4}{9}$  (۴)  $-\frac{1}{9}$

۸۳۰- اگر  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$  و انتهای کمان  $\alpha$  در ناحیه چهارم باشد، مقدار  $\cos 2\alpha$  کدام است؟

(۱)  $\frac{4}{9}$  (۲)  $\frac{5}{9}$  (۳)  $-\frac{5}{9}$  (۴)  $-\frac{4}{9}$

۸۳۱- اگر  $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$  و انتهای کمان  $\alpha$  در ناحیه سوم باشد، حاصل  $\sin 2\alpha$  کدام است؟

(۱)  $\frac{2\sqrt{2}}{9}$  (۲)  $-\frac{2\sqrt{2}}{9}$  (۳)  $\frac{4\sqrt{2}}{9}$  (۴)  $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

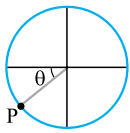
۸۳۲- اگر  $\tan \alpha = \frac{1}{3}$  و انتهای کمان  $\alpha$  در ناحیه سوم باشد، حاصل  $\cos 2\alpha$  کدام است؟

(۱)  $\frac{3}{5}$  (۲)  $\frac{4}{5}$  (۳)  $-\frac{3}{5}$  (۴)  $-\frac{4}{5}$

۸۳۳- با فرض  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ، مقدار  $\sin 2\theta$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{10}$  (۲)  $\frac{9}{10}$  (۳)  $-\frac{9}{10}$  (۴)  $-\frac{1}{10}$





۸۳۴- اگر  $\theta$  حاده و  $\sin 2\theta = 0/69$  باشد، مقدار  $\sin \theta + \cos \theta$  چقدر است؟

- ۱/۱ (۱) ۱/۲ (۲) ۱/۳ (۳) ۱/۴ (۴)

۸۳۵- با فرض  $P = \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha}$ ، حاصل  $P^2 - 1$  کدام است؟

- $\cos 2\alpha$  (۱)  $-\cos 2\alpha$  (۲)  $\sin 2\alpha$  (۳)  $-\sin 2\alpha$  (۴)

۸۳۶- با فرض  $\frac{3 - \tan \alpha}{4 + 2 \tan \alpha} = \frac{1}{3}$  مقدار  $\sin^2 \alpha - \cos 2\alpha$  کدام است؟

- $\frac{1}{2}$  (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)

۸۳۷- با فرض  $\sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$  مقدار  $\cos 4\theta$  چه عددی است؟

- $\frac{31}{32}$  (۱)  $-\frac{31}{32}$  (۲)  $\frac{63}{64}$  (۳)  $-\frac{63}{64}$  (۴)

۸۳۸- اگر  $\sin^2 \theta < \sin \theta$  و  $\sin 2\theta < 0$  باشد، انتهای کمان  $\theta$  در کدام ناحیه مثلثاتی است؟

- اول (۱) دوم (۲) سوم (۳) چهارم (۴)

۸۳۹- نقطه  $P(x, x + \frac{1}{5})$  مطابق شکل زیر روی دایره مثلثاتی قرار دارد. حاصل  $\sin 2\theta$  کدام است؟

- $\frac{12}{25}$  (۱)  $\frac{24}{25}$  (۲)  $-\frac{12}{25}$  (۳)  $-\frac{24}{25}$  (۴)

۸۴۰- اگر  $\alpha$  در ناحیه دوم مثلثاتی واقع باشد به طوری که  $\sin \alpha = 0/8$ ، حاصل  $\frac{1 - \cos(\pi + 2\alpha)}{1 + \cos(\frac{\pi}{4} - 2\alpha)}$  کدام است؟

- ۹ (۱) ۱۸ (۲)  $\frac{9}{13}$  (۳)  $\frac{18}{13}$  (۴)

۸۴۱- با فرض  $\sin(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$  حاصل  $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{6})$  کدام است؟

- $\frac{3}{5}$  (۱)  $\frac{4}{5}$  (۲)  $-\frac{4}{5}$  (۳)  $-\frac{3}{5}$  (۴)

۸۴۲- اگر  $\frac{1}{4} \sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{4}$  باشد، مقدار  $\cos 2x$  چه عددی است؟

- $\frac{1}{4}$  (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $-\frac{3}{4}$  (۴)

۸۴۳- با فرض  $1 = \cos(x + \frac{3\pi}{10}) + \sin(x - \frac{\pi}{5}) + 2 \cos(x - \frac{2\pi}{5})$  حاصل  $\cos(\frac{2\pi}{5} - 2x)$  کدام است؟

- $-\frac{7}{9}$  (۱)  $\frac{7}{9}$  (۲)  $-\frac{3}{9}$  (۳)  $\frac{2}{9}$  (۴)

۸۴۴- اگر  $\sqrt{3} \sin x - 2 \cos x = \sqrt{3}$  باشد، حاصل  $\tan 2x$  کدام است؟

- $\sqrt{2}$  (۱)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۲)  $2\sqrt{2}$  (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  (۴)

۸۴۵- اگر  $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{4}$  و  $a, b \in \mathbb{N}$  باشد،  $a - b$  کدام است؟

- ۲ (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴)

۸۴۶- مقدار عددی  $\sin \frac{3\pi}{8}$  کدام است؟

- $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$  (۱)  $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$  (۲)  $\sqrt{\sqrt{3} - 1}$  (۳)  $\frac{\sqrt{\sqrt{3} + 1}}{2}$  (۴)

۸۴۷- اگر  $\theta = 11/25^\circ$  باشد، حاصل  $A = \sin^3 \theta \cos \theta - \cos^3 \theta \sin \theta$  کدام است؟

- $\frac{\sqrt{2}}{4}$  (۱)  $\frac{\sqrt{2}}{8}$  (۲)  $-\frac{\sqrt{2}}{4}$  (۳)  $-\frac{\sqrt{2}}{8}$  (۴)

۸۴۸- با فرض  $\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = 3$  حاصل  $\tan(\frac{\theta}{4} - \frac{\pi}{4})$  کدام است؟

- ۳ (۱)  $-3$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $-\frac{1}{3}$  (۴)

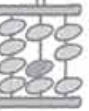
۸۴۹- اگر زاویه  $\theta$  منفرجه و  $1 + \cos \theta = \cos \frac{\theta}{4}$  باشد، مقدار  $\tan 2\theta$  کدام است؟

- $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۱)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۲)  $\sqrt{3}$  (۳)  $-\sqrt{3}$  (۴)

۸۵۰- با فرض  $\tan 2x = \frac{1}{3}$ ، حاصل  $\tan x - \cot x$  کدام است؟

- ۶ (۱)  $-6$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $-\frac{2}{3}$  (۴)





۸۵۱- حاصل عبارت  $\sin^4 \frac{\pi}{12} + \sin^4 \frac{5\pi}{12}$  کدام است؟

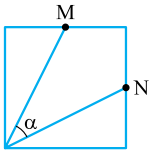
- $\frac{1}{4}$  (۱)       $\frac{1}{8}$  (۲)       $\frac{3}{4}$  (۳)       $\frac{7}{8}$  (۴)

۸۵۲- در تابع  $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ ، حاصل  $f(\frac{\pi}{\lambda})$  کدام است؟

- $\frac{3}{8}$  (۱)       $\frac{5}{8}$  (۲)       $\frac{3}{16}$  (۳)       $\frac{7}{16}$  (۴)

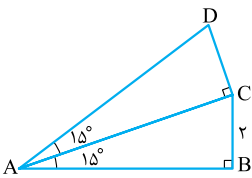
۸۵۳- در شکل مقابل M و N وسط اضلاع مربع هستند. مقدار  $\sin 2\alpha$  کدام است؟

- $\frac{21}{25}$  (۱)       $\frac{24}{25}$  (۲)       $\frac{2\sqrt{6}}{25}$  (۳)       $\frac{4\sqrt{21}}{25}$  (۴)



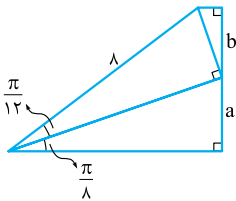
۸۵۴- در شکل مقابل طول AD کدام است؟

- ۴ (۱)       $2\sqrt{3}$  (۲)      ۸ (۳)       $4\sqrt{3}$  (۴)



۸۵۵- در شکل مقابل حاصل ab کدام است؟

- $2\sqrt{2}$  (۱)       $4\sqrt{2}$  (۲)       $\sqrt{3}$  (۳)       $2\sqrt{3}$  (۴)



### ◀ دوره تناوب

۸۵۶- دوره تناوب تابع  $y = 1 + 2\cos(2\pi x)$  چند برابر دوره تناوب تابع  $y = 2 - 3\sin(\frac{\pi}{3}x)$  است؟

- $\frac{2}{3}$  (۱)       $\frac{3}{2}$  (۲)      ۶ (۳)       $\frac{1}{6}$  (۴)

۸۵۷- اگر دوره تناوب تابع  $y = 3\sin(\frac{\pi}{a}x)$  برابر ۴ باشد، دوره تناوب تابع  $y = 1 + \tan(a\pi x)$  کدام است؟

- $\frac{1}{2}$  (۱)      ۲ (۲)      ۴ (۳)       $\frac{1}{4}$  (۴)

۸۵۸- دوره تناوب تابع  $f(x) = \sin x \sin(x + \frac{\pi}{3})$  کدام است؟

- $\frac{\pi}{4}$  (۱)       $\frac{\pi}{2}$  (۲)       $\pi$  (۳)       $2\pi$  (۴)

۸۵۹- دوره تناوب تابع  $y = \tan 3x - \cot 3x$  کدام است؟

- $\frac{\pi}{6}$  (۱)       $\frac{\pi}{3}$  (۲)       $\frac{2\pi}{3}$  (۳)       $\pi$  (۴)

۸۶۰- اگر  $f(x) = \cos 2x$  باشد، دوره تناوب تابع  $f(x + \frac{\pi}{4})f(x - \frac{\pi}{4})$  کدام است؟

- $\frac{\pi}{4}$  (۱)       $\frac{\pi}{2}$  (۲)       $\pi$  (۳)       $2\pi$  (۴)

۸۶۱- دوره تناوب  $f(x) = 4\sin^2 ax$  نصف دوره تناوب تابع  $g(x) = \tan \frac{3}{4}x$  است. مقدار مثبت a کدام است؟

- ۱ (۱)       $\frac{2}{3}$  (۲)       $\frac{3}{2}$  (۳)      ۲ (۴)

۸۶۲- دوره تناوب تابع  $f(x) = 5\sin^2 \frac{\pi}{6}x$  برابر دوره تناوب  $g(x) = \tan \frac{2\pi}{3a}x$  است. مقدار مثبت a کدام است؟

- ۲ (۱)      ۴ (۲)      ۸ (۳)      ۱۲ (۴)

۸۶۳- اگر  $T = 3$  دوره تناوب تابع  $y = f(ax)$  باشد، دوره تناوب تابع  $y = 6f(\frac{a}{3}x)$  کدام است؟

- ۶ (۱)       $\frac{1}{6}$  (۲)      ۱۸ (۳)      ۵۴ (۴)

### ◀ تابع سینوس و کسینوس

۸۶۴- در تابع  $f(x) = 5 - 3\sin \pi x$  مجموع ماکزیمم و مینیمم تابع چند برابر دوره تناوب است؟

- $\frac{5}{2}$  (۱)      ۵ (۲)      ۱۰ (۳)      ۲۰ (۴)



۸۶۵- دوره تناوب، ماکزیمم و مینیمم تابع مثلثاتی  $f$ ، به ترتیب  $\frac{\pi}{6}$ ،  $4$  و  $-2$  است. ضابطه  $f$  کدام می‌تواند باشد؟

$f(x) = 1 - 3 \sin 6x$  (۴)       $f(x) = 1 - 3 \cos 12x$  (۳)       $f(x) = 3 \cos 12x - 1$  (۲)       $f(x) = 3 \sin 6x + 1$  (۱)

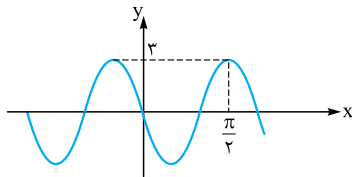
۸۶۶- دوره تناوب تابع  $y = 1 + a \sin(\frac{a\pi}{3}x)$  برابر ۴ است. اختلاف مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع چه قدر است؟

۲ (۴)      ۴ (۳)       $\frac{3}{2}$  (۲)      ۳ (۱)

۸۶۷- در تابع  $y = \frac{a}{4} \cos(3ax)$ ، حاصل ضرب دوره تناوب در اختلاف مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن چه قدر است؟

$\frac{8\pi}{3}$  (۴)       $\frac{4\pi}{3}$  (۳)       $\frac{2\pi}{3}$  (۲)       $\frac{\pi}{3}$  (۱)

۸۶۸- قسمتی از نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل است. ضابطه  $f$  کدام می‌تواند باشد؟



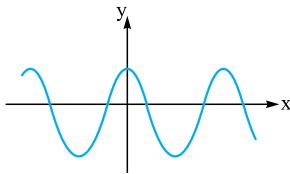
$y = 3 \sin 3x$  (۱)

$y = -3 \sin 5x + 6$  (۲)

$y = 3 \sin 5x$  (۳)

$y = -3 \sin 3x$  (۴)

۸۶۹- نمودار کدام تابع به صورت مقابل است؟



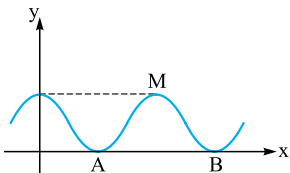
$y = -2 \cos \frac{\pi}{4}x + 1$  (۲)

$y = 2 \cos \frac{\pi}{4}x - 1$  (۱)

$y = -2 \cos \frac{\pi}{4}x - 1$  (۴)

$y = 2 \cos \frac{\pi}{4}x + 1$  (۳)

۸۷۰- قسمتی از نمودار تابع  $y = 3 - 3 \sin \frac{\pi}{4}x$  شکل روبه‌رو است. مساحت مثلث با رئوس  $M$ ،  $A$  و  $B$  کدام است؟



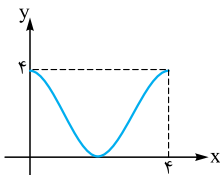
۲۱ (۱)

۱۸ (۲)

۲۴ (۳)

۱۵ (۴)

۸۷۱- نمودار تابع مثلثاتی  $f$  در بازه  $[0, 4]$  به صورت مقابل است. ضابطه  $f$  کدام می‌تواند باشد؟



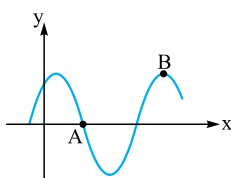
$2 + 2 \cos \pi x$  (۲)

$2 + 2 \cos \frac{\pi}{4}x$  (۱)

$2 - 2 \cos \pi x$  (۴)

$2 - 2 \cos \frac{\pi}{4}x$  (۳)

۸۷۲- قسمتی از نمودار تابع  $y = 3 \cos(2x - \frac{\pi}{4})$  به صورت مقابل است. اختلاف طول نقاط  $A$  و  $B$  چه قدر است؟



$\frac{\pi}{2}$  (۲)

$\frac{\pi}{4}$  (۱)

$\frac{4\pi}{3}$  (۴)

$\frac{3\pi}{4}$  (۳)

۸۷۳- در نمودار تابع  $f(x) = 3 \sin \frac{\pi}{4}x$  خطی که یکی از نقاط ماکزیمم را به یکی از نقاط مینیمم وصل می‌کند، دارای بیشترین شیب است. شیب این خط کدام است؟

۲ (۴)

$\frac{3}{2}$  (۳)

۱ (۲)

$\frac{1}{2}$  (۱)

۸۷۴- تابع  $f(x) = 3 - \cos(\pi x + \frac{\pi}{6})$  در بازه  $(0, k)$  صعودی است. حداکثر  $k$  کدام است؟

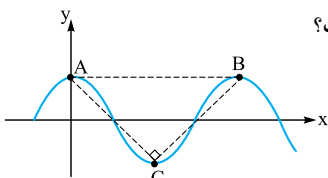
$\frac{7\pi}{24}$  (۴)

$\frac{5\pi}{24}$  (۳)

$\frac{\pi}{12}$  (۲)

$\frac{\pi}{24}$  (۱)

۸۷۵- قسمتی از نمودار  $y = a \cos \frac{\pi}{4}x$  رسم شده است. اگر مثلث  $ABC$  در رأس  $C$  قائمه باشد،  $a$  کدام است؟



۲ (۲)

۱ (۱)

$\frac{1}{3}$  (۴)

$\frac{1}{2}$  (۳)

۸۷۶- نقاط  $A$  و  $B$  بر نقاط ماکزیمم و نقطه  $C$  بر نقطه مینیمم تابع  $f(x) = a \cos ax$  واقع شده‌اند. حداقل مساحت مثلث  $ABC$  چه قدر است؟

$2\pi$  (۴)

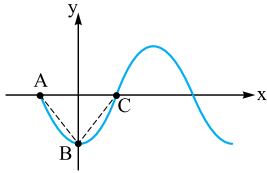
$4\pi$  (۳)

$\frac{3\pi}{2}$  (۲)

$\frac{4\pi}{3}$  (۱)



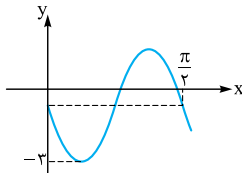
۸۷۷- شکل مقابل نمودار تابع  $y = a \cos a\pi x$  است. اگر مثلث  $ABC$  متساوی الاضلاع باشد،  $a$  کدام است؟



- (۲)  $\sqrt{\frac{3}{4}}$
- (۴)  $-\sqrt{\frac{3}{4}}$

- (۱)  $\sqrt{\frac{3}{2}}$
- (۳)  $-\sqrt{\frac{3}{2}}$

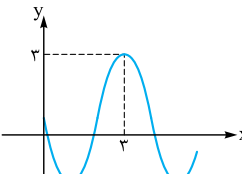
۸۷۸- نمودار تابع  $y = a \sin bx - 1$  به صورت مقابل است.  $\frac{a}{b}$  کدام است؟



- (۲) -۱
- (۴)  $-\frac{1}{2}$

- (۱) ۱
- (۳)  $\frac{1}{2}$

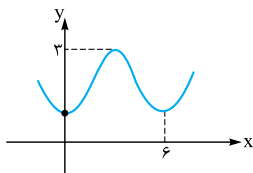
۸۷۹- قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = a \sin(b\pi x) + 1$  به صورت مقابل است.  $ab$  کدام است؟



- (۲) -۱
- (۴)  $-\frac{1}{3}$

- (۱) ۱
- (۳)  $\frac{1}{3}$

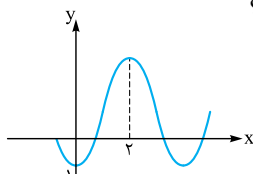
۸۸۰- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = a - \cos b\pi x$  است. مقدار  $y$  در نقطه  $x = \frac{8}{5}$  کدام است؟



- (۲)  $\frac{3}{2}$
- (۴)  $\frac{5}{2}$

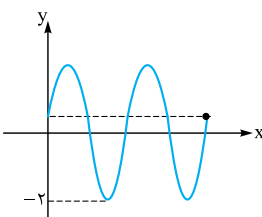
- (۱)  $2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$
- (۳)  $2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

۸۸۱- قسمتی از نمودار تابع  $y = 2 + a \cos b\pi x$  به صورت زیر است. مقدار ماکزیمم چند برابر دوره تناوب تابع است؟



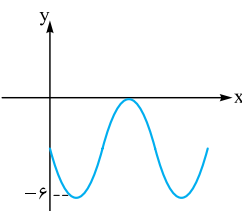
- (۱)  $0/8$
- (۲) ۱
- (۳)  $1/25$
- (۴)  $2/5$

۸۸۲- شکل مقابل نمودار تابع  $y = 1 + a \sin(b\pi x)$  در بازه  $(0, \frac{4}{5})$  است. بیشترین مقدار  $a + b$  کدام است؟



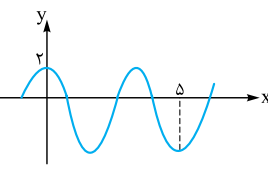
- (۱)  $\frac{1}{2}$
- (۲) ۲
- (۳)  $\frac{11}{2}$
- (۴) ۸

۸۸۳- قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = a + b \sin \frac{\pi}{3} x$  به صورت مقابل است. مقدار  $f(\frac{9}{3})$  کدام است؟



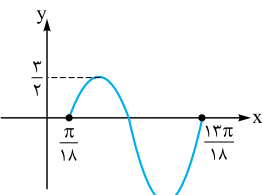
- (۱) صفر
- (۲) -۲
- (۳) -۳
- (۴) -۴

۸۸۴- بخشی از نمودار تابع  $f(x) = a \cos b\pi x - 2$  به صورت مقابل است.  $a + b$  کدام می‌تواند باشد؟



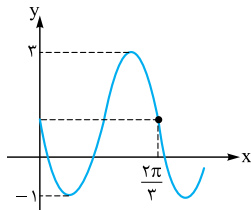
- (۱)  $3/4$
- (۲)  $3/5$
- (۳)  $4/5$
- (۴)  $4/4$

۸۸۵- قسمتی از نمودار تابع  $y = a - 3 \sin bx$  به صورت مقابل است. حاصل  $2ab$  کدام است؟



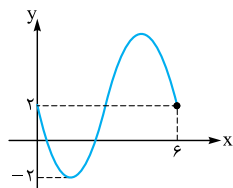
- (۱) ۹
- (۲) ۱۸
- (۳) -۹
- (۴) -۱۸





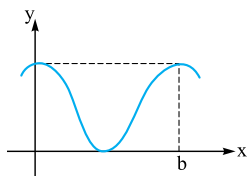
۸۸۶- نمودار تابع  $y = a \sin bx + c$  به صورت مقابل است. حاصل  $ab - c$  کدام است؟

- (۱) ۵  
(۲) -۵  
(۳) -۷  
(۴) ۷



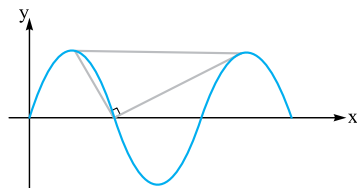
۸۸۷- نمودار تابع  $f(x) = a \cos \pi(bx + \frac{3}{4}) + c$  در یک دوره تناوب آن به صورت مقابل است. حاصل  $abc$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{4}{3}$   
(۲)  $\frac{8}{3}$   
(۳)  $-\frac{4}{3}$   
(۴)  $-\frac{8}{3}$



۸۸۸- قسمتی از نمودار  $f(x) = a + b \cos \frac{2\pi a}{9} x$  به شکل روبه‌رو است. حاصل  $f(a)$  کدام است؟

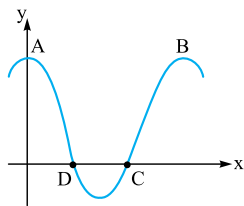
- (۱) ۴  
(۲) ۶  
(۳) ۹  
(۴) ۱۲



۸۸۹- در شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع  $y = a \sin(2\pi x)$  رسم شده است. به ازای کدام مقدار  $a$ ، مثلث

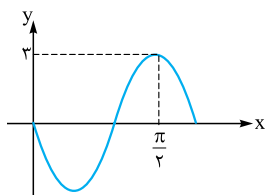
رنگی، قائم‌الزاویه است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
(۲)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$   
(۳)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$   
(۴)  $-\frac{\sqrt{3}}{4}$



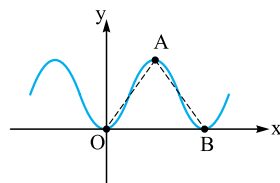
۸۹۰- قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = 1 + 2 \cos(\pi x)$  به صورت مقابل است. مساحت چهارضلعی ABCD کدام است؟

- (۱) ۲  
(۲)  $\frac{8}{3}$   
(۳) ۸  
(۴) ۴



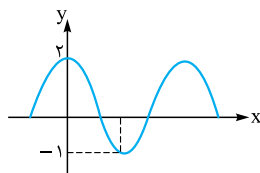
۸۹۱- قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = a \sin bx \cos bx$  به صورت مقابل است. حاصل  $\frac{a}{b}$  کدام است؟

- (۱) ۲  
(۲) ۴  
(۳) -۴  
(۴) -۲



۸۹۲- نمودار تابع  $y = 2 \sin^2 x$  به صورت مقابل است. مساحت مثلث OAB کدام است؟

- (۱) π  
(۲)  $\frac{\pi}{2}$   
(۳)  $\frac{2\pi}{3}$   
(۴) ۲π



۸۹۳- قسمتی از نمودار تابع  $y = a + b \sin^2 x$  به صورت مقابل است. حاصل  $a - b$  کدام است؟

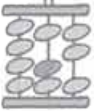
- (۱) صفر  
(۲) -۴  
(۳) ۵  
(۴) ۱

۸۹۴- نمودار تابع  $y = |\sin x|$  در بازه  $[\pi, 2\pi]$  بر نمودار کدام تابع زیر منطبق است؟

- (۱)  $y = \cos(\frac{\pi}{4} + x)$   
(۲)  $y = \sin(\pi - x)$   
(۳)  $y = \sin(\frac{3\pi}{4} + x)$   
(۴)  $y = \cos(\frac{3\pi}{4} + x)$

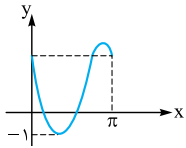
۸۹۵- نمودار تابع  $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{6})$  بر نمودار تابع  $g(x) = \sin(x + \theta)$  منطبق است.  $\theta$  کدام می‌تواند باشد؟

- (۱)  $\frac{\pi}{3}$   
(۲)  $\frac{\pi}{2}$   
(۳)  $\frac{2\pi}{3}$   
(۴)  $\frac{4\pi}{3}$



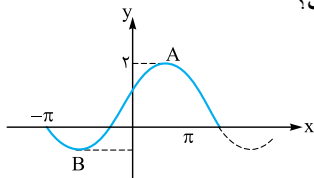
۸۹۶- نمودار تابع  $f(x) = \sin(2x - \pi)$  بر نمودار  $g(x) = \cos(ax + b)$  منطبق است. زوج مرتب  $(a, b)$  کدام می‌تواند باشد؟

- (۱)  $(3, \frac{3\pi}{2})$  (۲)  $(1, \frac{\pi}{2})$  (۳)  $(1, -\frac{3\pi}{2})$  (۴)  $(3, -\frac{3\pi}{2})$



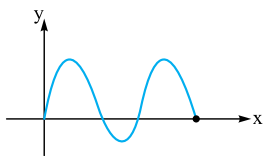
۸۹۷- قسمتی از نمودار تابع  $y = a + 2\sin(bx - \frac{\pi}{3})$  به صورت مقابل است. مقدار  $a - b$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) -۳



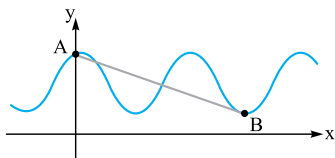
۸۹۸- نمودار تابع  $f(x) = a - b\sin(x + \frac{\pi}{6})$  در بازه  $[-\pi, \pi]$  به صورت زیر است. شیب پاره خط AB کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{\pi}$  (۲)  $\frac{1}{\pi}$  (۳)  $\frac{2}{3\pi}$  (۴)  $\frac{8}{3\pi}$



۸۹۹- نمودار تابع  $f(x) = 1 + a\cos(bx - \frac{\pi}{3})$  در بازه  $[0, \frac{5\pi}{3}]$  به صورت مقابل است. مقدار b کدام است؟

- (۱)  $\frac{12}{5}$  (۲)  $\frac{8}{5}$  (۳)  $-\frac{7}{5}$  (۴) -۲



۹۰۰- قسمتی از نمودار تابع  $y = \sin^2 x + \cos^2 x$  به صورت مقابل است. شیب پاره خط AB کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{\pi}$  (۲)  $-\frac{2}{\pi}$  (۳)  $-\frac{3}{\pi}$  (۴)  $-\frac{4}{\pi}$

### تابع تانژانت

۹۰۱- انتهای کمان  $\alpha$  در کدام ناحیه از دایره مثلثاتی قرار داشته باشد تا با افزایش  $\alpha$  مقدار  $\cos \alpha$  و  $\tan \alpha$ ، افزایش یابد، ولی مقدار  $|\tan \alpha|$  کاهش یابد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۹۰۲- اگر  $\frac{3\pi}{8} < \theta < \frac{\pi}{8}$  و  $\theta \neq \frac{\pi}{4}$  باشد،  $\tan 2\theta = \frac{1}{3m-1}$  حدود m کدام است؟

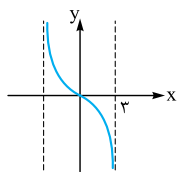
- (۱)  $(\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$  (۲)  $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) - \{\frac{1}{3}\}$  (۳)  $\mathbb{R} - [0, \frac{2}{3}]$  (۴)  $\mathbb{R} - [-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$

۹۰۳- به ازای چند عدد حقیقی در بازه  $(0, 2\pi)$  تابع  $f(x) = \tan \frac{2x}{\pi}$  تعریف نشده است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

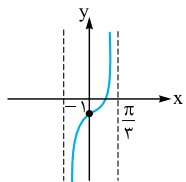
۹۰۴- تابع  $f(x) = 2 - \tan(\pi - \frac{2}{3}x)$  در بازه  $(k, 0)$  اکیداً یکنوا است. کمترین مقدار k کدام است؟

- (۱)  $-\frac{\pi}{3}$  (۲)  $-\frac{\pi}{2}$  (۳)  $-\frac{3\pi}{2}$  (۴)  $-\frac{3\pi}{4}$



۹۰۵- بخشی از نمودار تابع  $f(x) = \cot(\frac{\pi}{4} + ax)$  به صورت مقابل است. a کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $-\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{6}$  (۴)  $-\frac{1}{6}$



۹۰۶- قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = a + \tan(\frac{\pi}{4} + bx)$  به شکل روبه‌رو است. مقدار  $a - b$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{11}{6}$  (۲)  $-\frac{11}{4}$  (۳)  $-\frac{7}{4}$  (۴)  $-\frac{5}{6}$

۹۰۷- تابع  $y = 3\tan(\frac{\pi}{3} - 2x)$  در بازه  $(-a, a)$  اکیداً نزولی است. حداکثر a کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{4}$  (۲)  $\frac{\pi}{3}$  (۳)  $\frac{\pi}{2}$  (۴)  $\pi$

### معادلات مثلثاتی

۹۰۸- اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جواب معادله  $2\sin 2x = -1$  در بازه  $(0, 2\pi)$  چه قدر است؟

- (۱)  $\pi$  (۲)  $\frac{2\pi}{3}$  (۳)  $\frac{4\pi}{3}$  (۴)  $\frac{\pi}{2}$





۹۰۹- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $4 \cos^2 x = 1$  در بازه  $(0, 2\pi)$  کدام است؟

$2\pi$  (۱)       $3\pi$  (۲)       $4\pi$  (۳)       $5\pi$  (۴)

۹۱۰- یکی از جواب‌های معادله  $\sqrt{3} + k \cos 2x = 0$  برابر  $\frac{5\pi}{12}$  است. بزرگ‌ترین جواب این معادله در بازه  $(0, 2\pi)$  کدام است؟

$\frac{7\pi}{12}$  (۱)       $\frac{13\pi}{12}$  (۲)       $\frac{17\pi}{12}$  (۳)       $\frac{19\pi}{12}$  (۴)

۹۱۱- جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin(x + \frac{\pi}{3}) \cos(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{4}$  کدام است؟

$k\pi - \frac{\pi}{12}$  (۱)       $k\pi + \frac{\pi}{12}$  (۲)       $2k\pi - \frac{\pi}{6}$  (۳)       $k\pi \pm \frac{\pi}{12}$  (۴)

۹۱۲- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $1 = \sin(x + \frac{\pi}{6}) + \cos(x - \frac{\pi}{3})$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

$\frac{2\pi}{3}$  (۱)       $\frac{8\pi}{3}$  (۲)       $2\pi$  (۳)       $\frac{3\pi}{2}$  (۴)

۹۱۳- جواب کلی معادله  $\cos(x - \frac{\pi}{6}) \cos(x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{4}$  کدام است؟

$k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۱)       $k\pi + \frac{2\pi}{3}$  (۲)       $k\pi \pm \frac{\pi}{12}$  (۳)       $k\pi + \frac{5\pi}{12}$  (۴)

۹۱۴- جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin 3x + \sin x = 0$  کدام است؟

$\frac{k\pi}{2}$  (۱)       $k\pi + \frac{\pi}{2}$  (۲)       $2k\pi + \frac{\pi}{2}$  (۳)       $2k\pi - \frac{\pi}{2}$  (۴)

۹۱۵- معادله  $\cos 2x + \cos x = 0$  در بازه  $(0, 2\pi)$  چند جواب دارد؟

۲ (۱)      ۳ (۲)      ۴ (۳)      ۵ (۴)

۹۱۶- مجموع جواب‌های معادله  $\sin 3x + \cos x = 0$  در بازه  $[0, \pi]$  کدام است؟

$\pi$  (۱)       $2\pi$  (۲)       $\frac{3\pi}{2}$  (۳)       $\frac{5\pi}{2}$  (۴)

۹۱۷- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $0 = \cos^2(x - \frac{\pi}{4}) + \sin(x + \pi)$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

$2\pi$  (۱)       $3\pi$  (۲)       $4\pi$  (۳)       $5\pi$  (۴)

۹۱۸- جواب کلی معادله مثلثاتی  $0 = 2 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - 1$  به کدام صورت است؟

$\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$  (۱)       $k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۲)       $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۳)       $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$  (۴)

۹۱۹- جواب کلی معادله مثلثاتی  $0 = \frac{\sin 4x + \sin 3x}{1 + \cos x}$  کدام است؟

$\frac{2k\pi}{3}$  (۱)       $k\pi + \frac{2k\pi}{3}$  (۲)       $\frac{\Delta k\pi}{3}$  (۳)       $k\pi - \frac{2k\pi}{3}$  (۴)

۹۲۰- اختلاف جواب‌های معادله  $5 = \sin x(2 \sin x - 9)$  در بازه  $(0, 2\pi)$  کدام است؟

$\frac{\pi}{3}$  (۱)       $\frac{2\pi}{3}$  (۲)       $\pi$  (۳)       $\frac{4\pi}{3}$  (۴)

۹۲۱- مجموع جواب‌های معادله  $\frac{1}{4} = \sin^2 x + \cos x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چه قدر است؟

$\pi$  (۱)       $2\pi$  (۲)       $\frac{3\pi}{2}$  (۳)       $\frac{5\pi}{2}$  (۴)

۹۲۲- جواب کلی معادله مثلثاتی  $2 \cos^2 x + 3 \sin x = 0$  کدام است؟

$\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi - \frac{11\pi}{6} \end{cases}$  (۴)       $\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases}$  (۳)       $\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases}$  (۲)       $\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi - \frac{5\pi}{6} \end{cases}$  (۱)

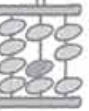
۹۲۳- جواب کلی معادله مثلثاتی  $0 = \cos 2x - 2 \sin^2 x$  کدام است؟

$2k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۴)       $k\pi + \frac{\pi}{6}$  (۳)       $k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۲)       $2k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۱)

۹۲۴- جواب کلی معادله مثلثاتی  $1 = \sin(\frac{\pi}{4} + x) \cos(\pi + x) + 2 \cos(x - \pi)$  (k ∈ Z) کدام است؟

$2k\pi$  (۱)       $2k\pi$  (۲)       $2k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۳)       $2k\pi - \pi$  (۴)





۹۲۵- جواب کلی معادله  $\frac{\cos x(2\cos x + 1) - 1}{\sin x} = 0$  کدام است؟

- (۱)  $2k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۳)  $k\pi - \frac{\pi}{3}$  (۴)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۹۲۶- اگر  $x = \frac{5\pi}{6}$  یک ریشه معادله  $\cos 2x + a \sin x = 0$  باشد، مجموع ریشه‌های متمایز آن در بازه  $(0, 2\pi)$  کدام است؟

- (۱)  $\pi$  (۲)  $2\pi$  (۳)  $\frac{3\pi}{2}$  (۴)  $\frac{5\pi}{2}$

۹۲۷- معادله  $\sin x = \frac{1}{\sin x - \cos x}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۲۸- جواب‌های معادله  $\frac{\sin x}{\cos 2x} = \frac{\cos x}{\sin 2x}$  بر روی دایره مثلثاتی رئوس کدام چندضلعی هستند؟

- (۱) مستطیل (غیرمربع) (۲) مربع (۳) دوزنقه (۴) شش‌ضلعی منتظم

۹۲۹- اگر  $\theta$  کوچک‌ترین ریشه مثبت معادله  $\cos 2x = 5\cos x - 3$  باشد، مقدار  $\cos(\theta - \frac{\pi}{3})$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۹۳۰- معادله  $\sin 3x + \cos 3x = -1$  در بازه  $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۹۳۱- جواب کلی معادله  $1 + \cot^2 x = 8\cos^2 x$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۳)  $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۴)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

۹۳۲- نقطه انتهایی کمان‌های معادله  $\frac{\sin 2x}{1 - \cos x} = 2\cos x + 2$  بر روی دایره مثلثاتی رئوس کدام چندضلعی است؟

- (۱) مثلث قائم‌الزاویه (۲) مثلث متساوی‌الساقین (۳) مستطیل (۴) لوزی

۹۳۳-  $\theta$  و  $\frac{\pi}{6}$  ریشه‌های معادله  $\sin 2x - \sin x - \cos x = k$  در بازه  $(0, \frac{\pi}{3})$  هستند.  $\theta$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{4}$  (۲)  $\frac{\pi}{3}$  (۳)  $\frac{\pi}{2}$  (۴)  $\frac{5\pi}{6}$

۹۳۴- مجموع جواب‌های معادله  $\tan x + \sin x = 1 + \cos x$  در بازه  $(0, 2\pi)$  کدام است؟

- (۱)  $2\pi$  (۲)  $\frac{5\pi}{2}$  (۳)  $3\pi$  (۴)  $\frac{7\pi}{2}$

۹۳۵- جواب‌های معادله مثلثاتی  $\cos 3x = \cos ax$  بر روی دایره مثلثاتی رئوس یک ضلعی منتظم هستند. عدد طبیعی  $a$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۱۰

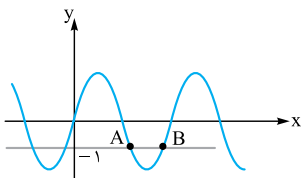
۹۳۶- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله مثلثاتی  $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$  در بازه  $(0, \frac{\pi}{4})$  باشند، مقدار  $|\alpha - \beta|$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{8}$  (۲)  $\frac{\pi}{4}$  (۳)  $\frac{\pi}{2}$  (۴)  $\frac{2\pi}{3}$

۹۳۷- نمودار تابع  $y = 2\sin 5x$  به صورت مقابل است. طول پاره خط  $AB$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{15}$  (۲)  $\frac{2\pi}{15}$

- (۳)  $\frac{\pi}{5}$  (۴)  $\frac{4\pi}{15}$

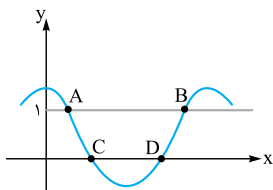


۹۳۸- در شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = 1 + 2\cos \frac{x}{4}$  رسم شده است. طول پاره خط  $AB$ .

چند برابر طول پاره خط  $CD$  است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲) ۲

- (۳)  $\frac{4}{3}$  (۴) ۳



۹۳۹- تابع  $f(x) = -3\sin ax$  در  $x = \frac{1}{p}$  دارای کم‌ترین مقدار است. در کدام نقطه دارای بیشترین مقدار است؟ ( $a \neq 0$ )

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{3}{4}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

۹۴۰- نمودار تابع  $y = -3\cos(\frac{\pi}{3} - 4\pi x)$  روی بازه  $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$  در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

