پاسخ‌نامه تشریحی پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل اول

۱. ۱ ۲ ۳ **۴**

چون π رادیان معادل با ۱۸۰° است، پس خواهیم داشت:

$$\frac{\pi}{۲۰} = \frac{۱۸۰^\circ}{۲۰} = ۹^\circ \text{ رادیان}$$

تذکر

می‌دانیم رابطه‌ی بین اندازه‌ی زاویه برحسب واحد درجه (D) و اندازه‌ی زاویه برحسب واحد رادیان (R) به صورت زیر است که می‌توان برای تبدیل واحد رادیان به درجه استفاده کرد:

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{۱۸۰} = \frac{\frac{\pi}{۲۰}}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{۱۸۰} = \frac{۱}{۲۰} \Rightarrow D = \frac{۱۸۰^\circ}{۲۰} = ۹^\circ$$

بنابراین جایگذاری ۱۸۰° به‌جای π رادیان نیز معادل استفاده از همین رابطه است.

۲. ۱ ۲ ۳ **۴**

گزینه ۱ : رادیان $\frac{۷\pi}{۵} = \frac{۷ \times ۱۸۰^\circ}{۵} = ۷ \times ۳۶^\circ = ۲۵۲^\circ \quad \checkmark$

گزینه ۲ : رادیان $\frac{۵\pi}{۸} = \frac{۵ \times ۱۸۰^\circ}{۸} = ۵ \times ۲۲/۵^\circ = ۱۱۲/۵^\circ \checkmark$

گزینه ۳ : $\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{۱۸۰} = \frac{۳}{\pi} \Rightarrow D = (\frac{۵۴۰}{\pi})^\circ \checkmark$

گزینه ۴ : رادیان $\frac{۹}{۵} \simeq \frac{۹}{۵} \times ۵۷/۳^\circ = ۱۰۳/۱۴^\circ \neq ۱۰۰^\circ$

۳. ۱ **۲** ۳ ۴

اگر زوایای مورد نظر را α و β بنامیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = ۶۰^\circ \\ \alpha - \beta = \frac{\pi}{۱۵}^{rad} = \frac{۱۸۰^\circ}{۱۵} = ۱۲^\circ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = ۶۰^\circ \\ \alpha - \beta = ۱۲^\circ \end{cases} \Rightarrow ۲\alpha = ۷۲^\circ \Rightarrow \alpha = ۳۶^\circ \Rightarrow \beta = ۲۴^\circ$$

بنابراین اندازه‌ی زاویه کوچک‌تر ۲۴° است.

۴. ۱ ۲ ۳ **۴**

چون ۲π رادیان معادل ۳۶۰° است پس ابتدا زاویه‌ی داده شده را بر ۳۶۰° تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} ۳۹۱۵^\circ & ۳۶۰^\circ \\ \cline{2-2} -۳۶۰۰ & ۱۰ \\ \hline ۳۱۵ & \end{array} \qquad \Rightarrow ۳۹۱۵^\circ = ۱۰\,(۳۶۰^\circ) + ۳۱۵^\circ$$

حال اگر زاویه‌ی ۳۱۵° را به رادیان تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{۳۱۵^\circ}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{۳۱۵\pi}{۱۸۰} = \frac{۷\pi}{۴}$$

۵. **۱** ۲ ۳ ۴

بنا به تعریف، یک رادیان برابر است با اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی دایره‌ای که طول کمان روبه‌روی آن با شعاع دایره مساوی است. پس گزاره «الف» نادرست است. همچنین یک رادیان تقریباً برابر ۵۷° است که از تناسب زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{array}{cc} ۲\pi^{rad} & ۳۶۰^\circ \\ ۱^{rad} & ? \end{array} \Rightarrow ? \simeq ۵۷/۳^\circ$$

پس گزاره‌ی «ب» نیز نادرست است.

اگر اندازه‌ی زاویه‌ای برحسب درجه را در $\frac{\pi}{۱۸۰}$ ضرب کنیم، اندازه‌ی زاویه برحسب رادیان به‌دست می‌آید.

مثلاً اگر $\alpha = ۶۰^\circ$ باشد، با ضرب آن در $\frac{\pi}{۱۸۰}$ خواهیم داشت:

$$\alpha = ۶۰^\circ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۳} \text{ رادیان}$$

بنابراین گزاره‌ی «ج» نیز نادرست است.

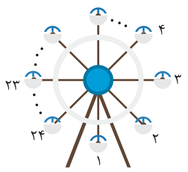
۶. ۱ ۲ **۳** ۴

عقربه‌ی ساعت شمار در هر ۱۲ ساعت، ۳۶۰° یا $۲\pi^{rad}$ را طی می‌کند، بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{ساعت}\ \frac{۷}{۱۰} \xrightarrow{\text{تناسب}} = \overset{\text{ساعت}}{\frac{۴۲}{۶۰}} = ۴۲ \text{ دقیقه}$$

$$\begin{array}{cc} \overset{\text{ساعت}}{۱۲} & ۲\pi^{rad} \\ \frac{۷}{۱۰} & ? \end{array} \Rightarrow ? = \frac{\frac{۷}{۱۰} \times ۲\pi}{۱۲} \Rightarrow ? = \frac{۷\pi}{۶۰}^{rad}$$

۷. ۱ ۲ ۳ **۴**



زاویه‌ی بین هر دو کابین متوالی برابر $۱۵^\circ = \frac{\pi}{۱۲}^{rad} = \frac{۲\pi}{۲۴}$ است. از طرفی داریم:

$$\frac{۵۳\pi}{۶} = \frac{۴۸\pi}{۶} + \frac{۵\pi}{۶} = ۸\pi + \frac{۵\pi}{۶} = ۸\pi + ۵(\frac{\pi}{۶}) = ۸\pi + ۱۰\,(\frac{\pi}{۱۲})$$

یعنی پس از آن‌که چرخ و فلک به اندازه‌ی $\frac{۵۳\pi}{۶}$ رادیان در جهت مثبت مثلثاتی دوران می‌کند، کابین شماره‌ی یک به ۱۰ کابین جلوتر از موقعیت اولیه‌اش انتقال می‌یابد. یعنی در موقعیت کابین ۱۱ قرار می‌گیرد.

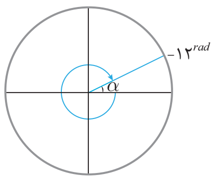
تذکر توجه شود که بعد از دوران ۸π رادیان، هر کابین در موقعیت اولیه فورش قرار می‌گیرد و $\frac{۱۰\pi}{۱۲}$ دوران بعدی، باعث می‌شود تا کابین شماره‌ی ۱ به ۱۰ کابین جلوتر از فورش منتقل شود.

۸. ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم هر رادیان تقریباً معادل $۵۷/۳^\circ$ است، پس خواهیم داشت:

$$-۱۲^{rad} \simeq -۱۲\times ۵۷/۳^\circ = -۶۸۷/۶^\circ$$

اگر در جهت منفی مثلثاتی، به اندازه‌ی $۶۸۷/۶^\circ$ دوران انجام شود، چون $۷۲۰^\circ > ۶۸۷/۶^\circ > ۶۳۰^\circ$ است

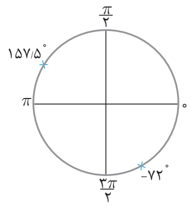


پس از یک دور کامل، دور دوم کامل نخواهد شد و بنابراین انتهای کمان مربوط به این زاویه، در ناحیه‌ی اول دایره‌ی مثلثاتی خواهد بود.

۹. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{۷\pi}{۸} = \frac{۷\times ۱۸۰^\circ}{۸} = ۱۵۷/۵^\circ \quad \text{رادیان} \quad -\frac{۲\pi}{۵} = -\frac{۳۶۰^\circ}{۵} = -۷۲^\circ$$

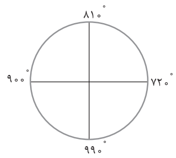
رادیان



بنابراین زاویه‌ی $-\frac{۲\pi}{۵}$ رادیان در ناحیه‌ی چهارم دایره‌ی مثلثاتی و زاویه‌ی $\frac{۷\pi}{۸}$ رادیان در ناحیه‌ی دوم دایره‌ی مثلثاتی قرار دارند.

۱۰. ۱ ۲ ۳ ۴

$$۱۷ \simeq ۱۷\times ۵۷/۳^\circ \simeq ۹۷۴^\circ \quad \text{رادیان}$$

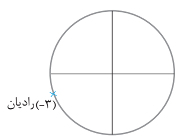


انتهای کمان زاویه‌ی ۱۷ رادیان در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی است، زیرا $۹۰۰^\circ < ۹۷۴^\circ < ۹۹۰^\circ$

$$\frac{۸\pi}{۹} = ۸\times\frac{۱۸۰^\circ}{۹} = ۱۶۰^\circ \Rightarrow \quad \text{رادیان}$$

انتهای کمان $\frac{۸\pi}{۹}^{rad}$ در ناحیه‌ی دوم دایره‌ی مثلثاتی است.

$$(-۳) \simeq -۳\times ۵۷/۳^\circ \simeq -۱۷۲^\circ \quad \text{رادیان}$$



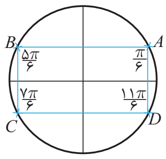
انتهای کمان (-۳) رادیان در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی است.

$$\frac{۷\pi}{۵} = ۷\times\frac{۱۸۰^\circ}{۵} = ۷\times ۳۶^\circ = ۲۵۲^\circ \quad \text{رادیان}$$

انتهای کمان زاویه‌ی $\frac{۷\pi}{۵}$ رادیان در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی است.

بنابراین زاویه‌ی $\frac{۸\pi}{۹}$ رادیان با بقیه زوایا، هم‌ناحیه نیست.

۱۱. ۱ ۲ ۳ ۴



اگر نقاط انتهای کمان‌های مورد نظر را A، B، C و D بنامیم چهارضلعی $ABCD$ مستطیل است زیرا زوایای آن ۹۰° هستند. (زوایا، محاطی و اندازه‌ی آن‌ها نصف کمان مقابلشان است پس اندازه‌ی آن‌ها $\frac{۱۸۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ$ است.) از طرفی کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ هریک مساوی ۱۲۰° و کمان‌های $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{DA}$ هریک مساوی ۶۰° هستند.

۱۲. ۱ ۲ ۳ ۴

دو زاویه در صورتی هم انتها هستند که اختلاف اندازه‌های آن‌ها مضربی از ۳۶۰° باشد. بنابراین خواهیم داشت:

گزینه ۱: $۵۲۰^\circ - ۱۲۴۰^\circ = -۷۲۰^\circ = (-۲)(۳۶۰^\circ)$

گزینه ۲: $۵۲۰^\circ - (-۵۶۰^\circ) = ۱۰۸۰^\circ = ۳(۳۶۰^\circ)$

گزینه ۳: $\frac{۴۴\pi}{۹}^{rad} = \frac{۴۴\times ۱۸۰^\circ}{۹} = ۸۸۰^\circ$

$$\Rightarrow ۵۲۰^\circ - ۸۸۰^\circ = -۳۶۰^\circ$$

گزینه ۴: $\frac{۵\pi}{۶}^{rad} = \frac{۵\times ۱۸۰^\circ}{۹} = ۱۵۰^\circ \Rightarrow ۵۲۰^\circ - ۱۵۰^\circ = ۳۷۰^\circ$

بنابراین زاویه‌ی ۵۲۰° با زاویه‌ی $\frac{۵\pi}{۶}^{rad}$ هم انتها نیست.

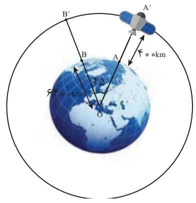
۱۳. ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا زاویه‌ی طی شده توسط برف پاک‌کن را به رادیان تبدیل می‌کنیم سپس از رابطه‌ی $l = r\theta$ کمان طی شده توسط نوک برف پاک‌کن را محاسبه می‌کنیم.

$$\theta = ۱۲۰^\circ = ۱۲۰\times\frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{۲\pi}{۳}^{rad}$$

$$l = r\theta \Rightarrow l = ۲۴\times\frac{۲\pi}{۳} = ۱۶\pi\, cm \simeq ۵۰/۲۴\, cm$$

۱۴. ۱ ۲ **۳** ۴



چون طول کمان $A'B'$ مورد نظر است، پس با داشتن زاویه‌ی مرکزی $A'\hat{O}B'=۴۵^\circ=\frac{\pi}{۴}rad$ و شعاع دایره‌ای که ایستگاه فضایی روی آن قرار دارد، خواهیم $r=۶۴۰۰+۴۰۰=۶۸۰۰km$ داشت:

$$l=r\theta=۶۸۰۰\times\frac{\pi}{۴}=۱۷۰۰\pi\simeq ۵۳۳۸km$$

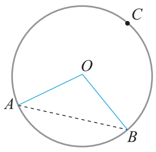
۱۵. ۱ **۲** ۳ ۴

$l=r\theta\Rightarrow ۸=۱۰\times\theta\Rightarrow\theta=\frac{۸}{۱۰}$ رادیان $=\frac{۴}{۵}$ رادیان

تذکر

توجه شود که در رابطه‌ی $l=r\theta$ همواره l و r هم واحدند و اندازه‌ی θ برحسب واحد رادیان است.

۱۶. ۱ ۲ **۳** ۴



چون طول کمان ACB برابر ۱۶π است، بنابراین اگر طول کمان ACB را از محیط دایره کم کنیم، طول کمان AB به‌دست می‌آید.

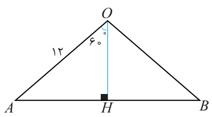
محیط دایره $=۲\pi\times۱۲=۲۴\pi$

$۲۴\pi-۱۶\pi=۸\pi\Rightarrow$ طول کمان $AB=۸\pi$

حال با استفاده از رابطه‌ی $l=r\theta$ می‌توانیم اندازه‌ی زاویه‌ی AOB را محاسبه کنیم. $l=r\theta\Rightarrow ۸\pi=۱۲\theta\Rightarrow\theta=\frac{۸\pi}{۱۲}=\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان

حال در مثلث OAB که متساوی‌الساقین با ساق‌های ۱۲ است و زاویه‌ی رأس آن $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان است، خواهیم داشت:

اگر ارتفاع OH را رسم کنیم، ضلع AB را نصف می‌کند و نیمساز زاویه‌ی O نیز خواهد بود. پس داریم:



$\overset{\Delta}{OAH}:\sin۶۰^\circ=\frac{AH}{۱۲}$

$\Rightarrow AH=۱۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۶\sqrt{۳}$

$\Rightarrow AB=۱۲\sqrt{۳}$

۱۷. ۱ ۲ **۳** ۴

$$A=\frac{۳\cot\frac{\pi}{۶}+\sin\frac{\pi}{۳}\cos\pi}{۴\tan\frac{\pi}{۶}-\sqrt{۳}\cos^{۲}\frac{\pi}{۴}}=\frac{۳\sqrt{۳}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}(-۱)}{۴\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}-\sqrt{۳}\times(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲}}$$

$$=\frac{\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۵}{۶}\sqrt{۳}}=۳$$

۱۸. ۱ ۲ **۳** ۴

می‌دانیم حداکثر مقدار $\sin a$ و $\cos b$ برابر ۱ است. پس تساوی داده شده، فقط وقتی برقرار است که $\sin a=۱$ و $-\cos b=۱$ باشد. یعنی باید $\sin a=۱$ و $\cos b=-۱$ باشد که در این صورت $\sin a\cos b=-۱$ خواهد بود.

۱۹. ۱ ۲ ۳ **۴**

در ناحیه‌ی چهارم دایره‌ی مثلثاتی $\cos\alpha>۰$ و $\sin\alpha<۰$ است پس همواره $\sin\alpha<\cos\alpha$ است. در ناحیه‌ی اول دایره‌ی مثلثاتی $\sin\alpha>۰$ و $\cos\alpha>۰$ است و همواره داریم:

$۰<\alpha<\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\cos\alpha>\sin\alpha$,

$\frac{\pi}{۴}<\alpha<\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\sin\alpha>\cos\alpha$

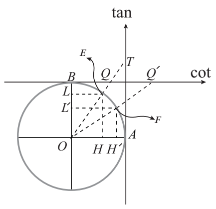
در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی $\sin\alpha<۰$ و $\cos\alpha<۰$ است و همواره داریم:

$\pi<\alpha<\frac{۵\pi}{۴}\Rightarrow\cos\alpha<\sin\alpha$,

$\frac{۵\pi}{۴}<\alpha<\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow\sin\alpha<\cos\alpha$

در ناحیه‌ی دوم دایره‌ی مثلثاتی $\sin\alpha>۰$ و $\cos\alpha<۰$ است و همواره $\sin\alpha>\cos\alpha$ است.

۲۰. ۱ ۲ **۳** ۴



اگر نقطه‌ی انتهای کمان زاویه‌ی ۷۰° را با E و نقطه‌ی انتهای کمان زاویه‌ی ۴۰° را با F نمایش دهیم، با تصویر کردن این نقاط روی محور سینوس و کسینوس و امتداد شعاع‌های OE و OF که محورهای تانژانت و کتانژانت را قطع کنند، مشخص می‌شود که روابط زیر برقرارند:

$\sin۷۰^\circ>\sin۴۰^\circ\xrightarrow{\text{زیرا}}OL>OL'$

$\cos۷۰^\circ<\cos۴۰^\circ\xrightarrow{\text{زیرا}}OH<OH'$

$\tan۷۰^\circ>\tan۴۰^\circ\xrightarrow{\text{زیرا}}AT>AT'$

$\cot۷۰^\circ<\cot۴۰^\circ\xrightarrow{\text{زیرا}}BQ<BQ'$

تذکر

با توجه به دایره‌ی مثلثاتی شکل بالا، می‌توان نتیجه گرفت که اگر زاویه‌ی α از ۰° تا ۹۰° تغییر کند، همواره $\sin\alpha$ از صفر تا ۱ افزایش می‌یابد (یعنی تابع $y=\sin x$ در ناحیه‌ی اول دایره‌ی مثلثاتی صعودی است) و $\cos\alpha$ از ۱ تا صفر کاهش می‌یابد (یعنی تابع $y=\cos x$ در ناحیه‌ی اول دایره‌ی مثلثاتی نزولی است) و $\tan\alpha$ از صفر تا $+\infty$ افزایش می‌یابد (یعنی تابع $y=\tan x$ در ناحیه‌ی اول دایره‌ی مثلثاتی صعودی است) و $\cot\alpha$ از $+\infty$ تا صفر کاهش می‌یابد. (یعنی تابع $y=\cot x$ در ناحیه‌ی اول دایره‌ی مثلثاتی نزولی است.)

۲۱. ۱ ۲ ۳ ۴

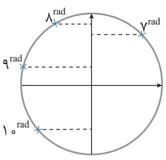
چون هر رادیان تقریباً برابر $۵۷/۳^\circ$ است پس خواهیم داشت:

$۷^{rad} \simeq ۷\times ۵۷/۳ \simeq ۴۰۱/۱^\circ \Rightarrow$ ۷^{rad} در ناحیه‌ی اول

$۸^{rad} \simeq ۸\times ۵۷/۳ \simeq ۴۵۸/۴^\circ \Rightarrow$ ۸^{rad} در ناحیه‌ی دوم

$۹^{rad} \simeq ۹\times ۵۷/۳ \simeq ۵۱۵/۷^\circ \Rightarrow$ ۹^{rad} در ناحیه‌ی دوم

$۱۰^{rad} \simeq ۱۰\times ۵۷/۳ \simeq ۵۷۳^\circ \Rightarrow$ ۱۰^{rad} در ناحیه‌ی سوم

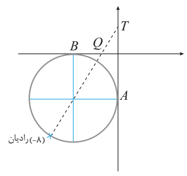


با توجه به شکل، مشخص است که تصویر زاویه‌ی ۸ رادیان روی محور سینوس‌ها، از تصویر سایر زوایا، بالاتر است. یعنی مقدار $\sin ۸^{rad}$ از سایر مقادیر بزرگ‌تر است.

۲۲. ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا زاویه‌ی (-۸) رادیان را به درجه تبدیل می‌کنیم:

$$-۸\times ۵۷/۳ \simeq -۴۵۸/۴^\circ$$



بنابراین زاویه‌ی (-۸) رادیان در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد و بنابراین $\sin(-۸)$ و $\cos(-۸)$ مقادیری منفی هستند ولی $\tan(-۸)$ و $\cot(-۸)$ مقادیری مثبت هستند ولی طبق شکل $\tan(-۸)>\cot(-۸)$ زیرا $AT>BQ$، بنابراین از میان نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی (-۸) رادیان، تانژانت آن از سایر نسبت‌های مثلثاتی بزرگ‌تر است.

۲۳. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\tan\alpha\sin\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin\alpha<۰\Rightarrow\frac{\sin^۲\alpha}{\cos\alpha}<۰$$

چون $\sin^۲\alpha>۰$ است پس قطعاً $\cos\alpha<۰$ است.

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

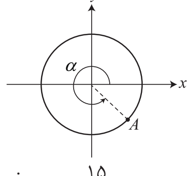
$$=\frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha}>۰\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha>۰$$

چون $\cos\alpha<۰$ پس قطعاً $\sin\alpha<۰$ است. بنابراین هم $\cos\alpha<۰$ و $\sin\alpha<۰$ و در نتیجه α در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد.

تذکر

می‌دانیم: $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$

۲۴. ۱ ۲ ۳ ۴

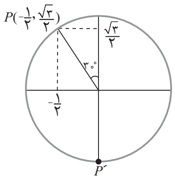


چون نقطه‌ی A، نقطه‌ی انتهای کمان مربوط به زاویه‌ی α است پس مختصات نقطه‌ی A به صورت $A(\cos\alpha\,,\,\sin\alpha)$ است. پس خواهیم داشت:

$$\sin\alpha=-\frac{۱۵}{۱۷}\quad,\quad\cos\alpha=\frac{۸}{۱۷}$$

و بنابراین $\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{۱۵}{۱۷}-\frac{۸}{۱۷}=-\frac{۲۳}{۱۷}$

۲۵. ۱ ۲ ۳ ۴



چون $P(-\frac{۱}{۲}\,,\,\frac{\sqrt{۳}}{۲})$ روی دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد، پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\cos\theta=-\frac{۱}{۲}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{cases}$$

بنابراین $\theta=۱۲۰^\circ$ (دقت شود که نقطه در ناحیه‌ی دوم محورهای مختصات قرار دارد) است و پس از دوران ۲۱۰° در جهت منفی مثلثاتی به نقطه‌ی P' خواهیم رسید که مختصات آن به صورت $P'(۰\,,\,-۱)$ خواهد بود یعنی طول نقطه‌ی جدید برابر صفر خواهد بود.

۲۶. ۱ ۲ ۳ ۴

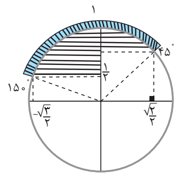
مقادیر $\sin x$ و $\cos y$ هر کدام حداکثر برابر یک هستند، پس هنگامی حاصل‌جمع آن‌ها برابر ۲ خواهد شد که هر کدام از آن‌ها برابر یک باشند. یعنی داریم:

$$\sin x+\cos y=۲\Rightarrow\sin x=۱\;,\;\cos y=۱$$

$$\xrightarrow[\text{و }۰\le y<۳۶۰^\circ]{\text{چون }۰\le x<۳۶۰^\circ}x=۹۰^\circ\quad,\quad y=۰^\circ$$

$$\sin(x+y)-\cos(x-y)=\sin۹۰^\circ-\cos۹۰^\circ=۱-۰=۱$$

۲۷. ۱ ۲ ۳ ۴

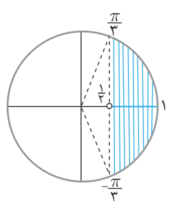


اگر محدوده‌ی تغییرات کمان یک نسبت مثلثاتی را در اختیار داشته باشیم و بخواهیم محدوده‌ی تغییرات نسبت مثلثاتی آن کمان را بیابیم، باید حتماً از دایره‌ی مثلثاتی استفاده کنیم. با توجه به شکل اگر تغییرات کمان در محدوده‌ی $۴۵^\circ\le x\le ۱۵۰^\circ$ باشد، محدوده‌ی تغییرات $\sin x$ و $\cos x$ به صورت زیر است:

$$\frac{۱}{۲}\le\sin x\le ۱\quad,\quad-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\le\cos x\le\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

برای یافتن تغییرات $\sin x$ از نقاط انتهای کمان‌ها بر محور سینوس‌ها و برای یافتن تغییرات $\cos x$ از نقاط انتهای کمان‌ها بر محور کسینوس‌ها عمود می‌کنیم.

۲۸. ۱ ۲ ۳ ۴



$$-\frac{\pi}{۳}<x<\frac{\pi}{۳}\xrightarrow{\text{با توجه به شکل}}$$

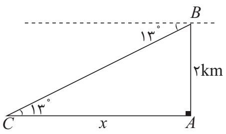
$$\frac{۱}{۲}<\cos x\le ۱\Rightarrow\frac{۱}{۲}<\frac{۲m-۱}{۳}\le ۱$$

$$\Rightarrow\frac{۳}{۲}<۲m-۱\le ۳$$

$$\Rightarrow\frac{۵}{۲}<۲m\le ۴\Rightarrow\frac{۵}{۴}<m\le ۲$$

۲۹. ۱ ۲ ۳ ۴

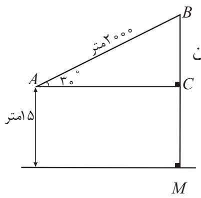
چون زاویه‌ی هواپیما با افق حدود ۱۳° است پس طبق شکل زاویه‌ی $\hat{C}$ نیز برابر ۱۳° خواهد بود (قضیه خطوط موازی و مورب) بنابراین طبق شکل خواهیم داشت:



$$\tan ۱۳^\circ = \frac{AB}{AC} \Rightarrow ۰/۲۳ = \frac{۲}{AC}$$
$$\Rightarrow AC = \frac{۲}{۰/۲۳} \simeq ۸/۶۹۵\ km = ۸۶۹۵\ m$$

۳۰. ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا یک مدل ریاضی برای حل این مسئله می‌سازیم. با توجه به شکل مقابل داریم:

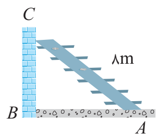


ارتفاع موشک از سطح زمین $= BC + MC$

$$\overset{\Delta}{ABC} : \sin ۳۰^\circ = \frac{BC}{۲۰۰۰}$$
$$\Rightarrow BC = ۲۰۰۰ \times \frac{۱}{۲} = ۱۰۰۰$$

ارتفاع موشک از سطح زمین $= ۱۰۰۰ + ۱۵ = ۱۰۱۵$

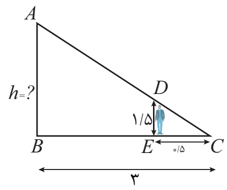
۳۱. ۱ ۲ ۳ ۴



$$\sin ۳۰^\circ = \frac{BC}{۸} \Rightarrow BC = ۸ \times \frac{۱}{۲} = ۴$$
$$\xrightarrow{\text{فیثاغورس}} AB^۲ = AC^۲ - BC^۲$$
$$= ۶۴ - ۱۶ = ۴۸ \Rightarrow AB = ۴\sqrt{۳}$$

۳۲. ۱ ۲ ۳ ۴

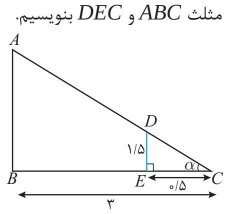
راه‌حل اول: طبق قضیه‌ی تالس در مثلث ABC داریم:



$$DE \parallel AB \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EC}$$
$$\Rightarrow \frac{h}{۱/۵} = \frac{۳}{۰/۵} \Rightarrow ۰/۵h = ۴/۵$$
$$\Rightarrow h = \frac{۴/۵}{\frac{۱}{۲}} = ۹$$

راه‌حل دوم: کافی است $\tan\alpha$ را در دو مثلث ABC و DEC بنویسیم.

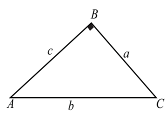
در این صورت خواهیم داشت:



$$\tan\alpha = \frac{DE}{EC} \quad , \quad \tan\alpha = \frac{AB}{BC}$$
$$\Rightarrow \frac{DE}{EC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{۱/۵}{۰/۵} = \frac{AB}{۳}$$
$$\Rightarrow AB = ۹$$

۳۳. ۱ ۲ ۳ ۴

چون نسبت دو ضلع زاویه‌ی قائمه برابر $\frac{۱}{۳}$ است، پس داریم:

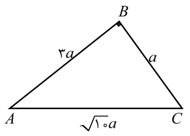


$$\frac{BC}{AB} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow c = ۳a$$

از طرفی طبق قضیه‌ی فیثاغورس داریم:

$$b^۲ = a^۲ + c^۲ \Rightarrow b^۲ = a^۲ + ۹a^۲ \Rightarrow b^۲ = ۱۰a^۲ \Rightarrow b = \sqrt{۱۰}a$$

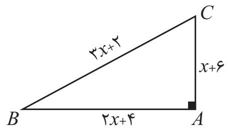
پس می‌توان ابعاد مثلث قائم‌الزاویه را به صورت زیر نمایش داد:



$$\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{۳a}{\sqrt{۱۰}a} = \frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$$
$$\Rightarrow \sin^۲ C = \frac{۹}{۱۰}$$
$$\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{\sqrt{۱۰}a} = \frac{۱}{\sqrt{۱۰}} \Rightarrow \cos^۲ C = \frac{۱}{۱۰}$$
$$\Rightarrow \sin^۲ C . \cos^۲ C = \frac{۹}{۱۰} \times \frac{۱}{۱۰} = \frac{۹}{۱۰۰}$$

۳۴. ۱ ۲ ۳ ۴

چون مثلث در رأس A قائم‌الزاویه است، بنابراین داریم: (طبق قضیه‌ی فیثاغورس)



$$(۳x+۲)^۲ = (۲x+۴)^۲ + (x+۶)^۲$$
$$\Rightarrow ۹x^۲ + ۱۲x + ۴ = ۴x^۲ + ۱۶x + ۱۶ + x^۲ + ۱۲x + ۳۶$$
$$\Rightarrow ۴x^۲ - ۱۶x - ۴۸ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۴x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow (x-۶)(x+۲) = ۰$$

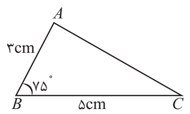
$\Rightarrow x = -۲$ غ.ق.ق ، $x = ۶$ ✓

$$\Rightarrow BC = ۲۰ \ , \ AB = ۱۶ \ , \ AC = ۱۲$$
$$\tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{۱۶}{۱۲} = \frac{۴}{۳} \quad , \quad \cot C = \frac{AC}{AB} = \frac{۱۲}{۱۶} = \frac{۳}{۴}$$
$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{۱۲}{۲۰} = \frac{۳}{۵} \quad , \quad \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{۱۶}{۲۰} = \frac{۴}{۵}$$

حاصل عبارت مطلوب $= (\frac{۳}{۴} + \frac{۴}{۳})(\frac{۳}{۵} + \frac{۴}{۵}) = \frac{۲۵}{۱۲} \times \frac{۷}{۵} = \frac{۳۵}{۱۲}$

۳۵. ۱ ۲ ۳ ۴

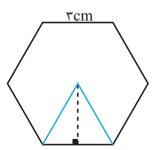
مساحت یک مثلث، برابر است با $\frac{۱}{۲}$ حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع. بنابراین در شکل بالا خواهیم داشت:



مساحت مثلث $S = \frac{۱}{۲} AB . BC . \sin B = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۵ \times \sin ۷۵^\circ$

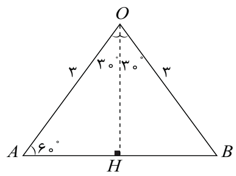
$$= \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۵ \times ۰/۹۶ = ۷/۲ cm^۲$$

۳۶. ۱ ۲ ۳ ۴



می‌دانیم شش ضلعی منتظم از شش مثلث متساوی‌الاضلاع یکسان تشکیل شده است. پس کافی است مساحت یکی از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع را محاسبه کرده و آن را ۶ برابر کنیم.

حال برای محاسبه‌ی مثلث OAB داریم:



$\overset{\Delta}{OAH}: \sin 60^\circ = \frac{OH}{3}$

$\Rightarrow OH = 3\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$S_{OAB} = \frac{1}{2}OH\times AB$

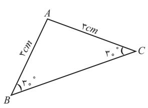
$= \frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times 3 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$

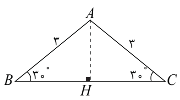
شش ضلعی منتظم $S = 6\times\frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$

تذکر برای محاسبه‌ی مساحت مثلث OAB می‌توان از رابطه‌ی $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ (a طول ضلع متساوی‌الاضلاع است) نیز استفاده کرد. همچنین می‌توان برای مساحت مثلث OAB از رابطه‌ی $S=\frac{1}{2}OA.OB.\sin 60^\circ$ نیز استفاده کرد (مساحت مثلثی با اضلاع a، b و c از روابط زیر قابل محاسبه است: $(S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$

.۳۷ ۱ ۲ ۳ ۴

راه‌حل اول: چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس با رسم ارتفاع AH، ضلع مقابل نصف می‌شود یعنی AH نقش میانه را نیز خواهد داشت. حال می‌توان نوشت:





$\overset{\Delta}{AHB}: \sin 30^\circ = \frac{AH}{3} \Rightarrow AH = \frac{3}{2}$

$\overset{\Delta}{AHB}: \cos 30^\circ = \frac{BH}{3} \Rightarrow BH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow BC = 2\times\frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

$S = \frac{1}{2}AH\times BC = \frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times 3\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$

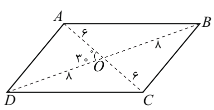
راه‌حل دوم:

مساحت مثلث $S=\frac{1}{2}AB\times AC\times\sin A$

چون $\hat{B}+\hat{C}=60^\circ$ پس $\hat{A}=120^\circ$ و بنابراین خواهیم داشت:

$S=\frac{1}{2}\times 3\times 3\times\sin 120^\circ = \frac{1}{2}\times 3\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$

.۳۸ ۱ ۲ ۳ ۴



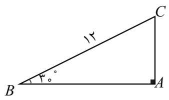
می‌دانیم در هر متوازی‌الاضلاع، قطرها منصف یکدیگرند. بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع از ۴ مثلث با مساحت مساوی تشکیل شده است (توجه کنید که زوایای بین قطرها °۳۰ و °۱۵۰ هستند و $\sin 30^\circ = \sin 150^\circ$ است.) بنابراین خواهیم داشت:

$S_{ABCD} = S_{AOD}+S_{AOB}+S_{BOC}+S_{DOC}$

$= 4\times(\frac{1}{2}\times 6\times 8\times\sin 30^\circ) = 4\times(\frac{1}{2}\times 6\times 8\times\frac{1}{2}) = 48$

نکته پس می‌توان فهمید مساحت هر چهارضلعی برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو قطر در سینوس زاویه‌ی بین آن‌ها.

.۳۹ ۱ ۲ ۳ ۴



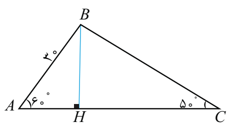
$\sin 30^\circ = \frac{AC}{12} \Rightarrow AC = \frac{1}{2}\times 12 = 6$

$\cos 30^\circ = \frac{AB}{12} \Rightarrow AB = 12\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

مساحت مثلث $S=\frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}\times 6\times 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$

.۴۰ ۱ ۲ ۳ ۴

راه‌حل اول: ابتدا ارتفاع BH را رسم می‌کنیم و طول آن را در مثلث AHB محاسبه می‌کنیم:



$\overset{\Delta}{AHB}: \sin A = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{30} \Rightarrow BH = 15\sqrt{3}$

حال در مثلث BHC با استفاده از $\sin 50^\circ$ طول BC را به‌دست می‌آوریم:

$\overset{\Delta}{BHC}: \sin 50^\circ = \frac{BH}{BC} \Rightarrow 0/76 = \frac{15\sqrt{3}}{BC} \Rightarrow BC = 19/74\sqrt{3}$

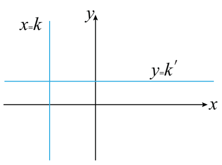
راه‌حل دوم: از قضیه‌ی سینوس‌ها داریم:

$\frac{BC}{\sin 60^\circ} = \frac{AB}{\sin 50^\circ} \Rightarrow \frac{BC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{30}{0/76} \Rightarrow BC = 19/74\sqrt{3}$

.۴۱ ۱ ۲ ۳ ۴

همه‌ی خطوط موازی محور yها دارای معادله‌ای به شکل $x=k$ (k عددی حقیقی و ثابت است) هستند و با محور xها زاویه‌ی °۹۰ می‌سازند و شیب آن‌ها «تعریف نشده» یا نامعین است.

همچنین خطوط موازی محور xها، دارای معادله‌ای به شکل $y=k'$ (k' عددی حقیقی و ثابت است) هستند و شیب آن‌ها برابر صفر است.



بنابراین خط $3x+1=0$ یا $x=-\frac{1}{3}$ خطی به موازات محور yها است و زاویه‌ی آن با جهت مثبت محور xها، برابر °۹۰ است. همچنین شیب خط $\sqrt{3}x+y-6=0$ برابر است با:

$m=-\sqrt{3} \Rightarrow \tan\theta = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = 120^\circ$

(زیرا $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$)

۴۲. ۱ ۲ ۳ ۴

چون زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد برابر 30° است، پس شیب این خط $m=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$ است. پس معادله‌ی خط مطلوب برابر است با:

$$y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y-0=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$$

$$\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}\xrightarrow{\text{طرفین در ۳ ضرب}}3y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$$

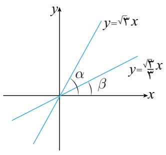
۴۳. ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم شیب هر خط برابر تانژانت زاویه‌ای است که آن خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد. پس خواهیم داشت:

$$y=\sqrt{3}x\Rightarrow m=\sqrt{3}\Rightarrow\tan\alpha=\sqrt{3}\Rightarrow\alpha=60^\circ$$

$$x=\sqrt{3}y\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}x\Rightarrow m'=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\tan\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

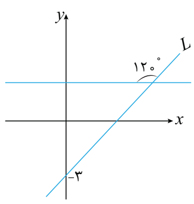
$$\Rightarrow\beta=30^\circ$$



بنابراین طبق شکل زاویه‌ی بین دو خط برابر است با:

$$\alpha-\beta=60^\circ-30^\circ=30^\circ$$

۴۴. ۱ ۲ ۳ ۴



چون در تعیین شیب یک خط، زاویه‌ی خط با قسمت مثبت محور x ها، مهم است، پس زاویه‌ی خط داده شده با قسمت مثبت محور x ها برابر $180^\circ-120^\circ=60^\circ$ است و بنابراین شیب خط L برابر است با $m=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$. از طرفی خط L از نقطه‌ی $A(0,-3)$ نیز می‌گذرد، پس معادله‌ی خط L به صورت زیر خواهد بود:

$$y-(-3)=\sqrt{3}(x-0)\Rightarrow y=\sqrt{3}x-3$$

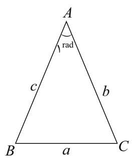
۴۵. ۱ ۲ ۳ ۴

شیب خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A(m,-3)$ و $B(-6,1)$ برابر است با:

$$m=\frac{1-(-3)}{-6-m}=\frac{4}{-6-m}$$

$$\tan 135^\circ=-1\Rightarrow\frac{4}{-6-m}=-1\Rightarrow 4=6+m\Rightarrow m=-2$$

۴۶. ۱ ۲ ۳ ۴



گزاره‌ی «الف» صحیح است، زیرا اگر زاویه‌ی رأس مثلث متساوی الساقین برابر ۱ رادیان باشد، آن‌گاه چون $1^{rad}\simeq 57^\circ$ است، پس $\hat{A}<60^\circ$ و بنابراین $\hat{B}+\hat{C}>120^\circ$ و در نتیجه $\hat{B}=\hat{C}>60^\circ$ و چون در هر مثلث، ضلع مقابل به زاویه‌ی بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از ضلع مقابل به زاویه‌ی کوچک‌تر است، پس می‌توان نتیجه گرفت که $a<b$ و $a<c$

گزاره‌ی «ب» صحیح است، زیرا:

$$l=r\theta\Rightarrow l=1cm\times\pi=\pi cm\simeq 3/14cm$$

گزاره‌ی «ج» نادرست است، زیرا داریم:

$$\frac{6\pi}{5}=\frac{6\times180^\circ}{5}=6\times36^\circ=216^\circ \text{ رادیان}$$

و زاویه‌ی 216° در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد، زیرا $180^\circ<216^\circ<270^\circ$ است.

تذکر

بدون تبدیل واحد رادیان به واحد درجه نیز مشخص است که $\pi<\frac{6\pi}{5}<\frac{3\pi}{2}$ و از این رو می‌توان نتیجه گرفت که این زاویه در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد.

گزاره‌ی «د» نادرست است، زیرا مجموع زوایای داخلی یک مثلث باید برابر 180° یا π رادیان شود. اما داریم:

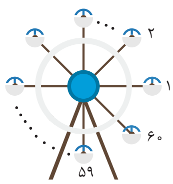
$$\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{9}+\frac{7\pi}{36}=\frac{24\pi+4\pi+7\pi}{36}=\frac{35\pi}{36}\neq\pi$$

بنابراین دو گزاره از گزاره‌های داده شده صحیح هستند.

۴۷. ۱ ۲ ۳ ۴

وقتی عقربه‌ی دقیقه شمار یک دور کامل می‌چرخد، (یعنی پس از گذشت یک ساعت) عقربه‌ی ساعت شمار $\frac{1}{12}$ دور می‌چرخد (زیرا عقربه‌ی ساعت شمار در ۱۲ ساعت یک دور کامل می‌چرخد) بنابراین عقربه‌ی دقیقه شمار همیشه ۱۲ برابر عقربه‌ی ساعت شمار دوران می‌کند. پس اگر عقربه‌ی ساعت شمار زاویه‌ی $\frac{5\pi}{36}$ رادیان دوران کند، عقربه‌ی دقیقه شمار به اندازه‌ی $12\times\frac{5\pi}{36}=\frac{5\pi}{3}$ رادیان دوران می‌کند.

۴۸. ۱ ۲ ۳ ۴



زاویه‌ی بین هر دو کابین برابر $\frac{2\pi}{60}=\frac{\pi}{30}^{rad}$ است. حال اگر چرخ و فلک ۱۰ دقیقه بچرخد، ۴ دور کامل می‌زند و هر کابینی در موقعیت قبلی خود قرار می‌گیرد. در ۲ دقیقه‌ی بعدی، باید $\frac{2}{5}\times2=\frac{4}{5}$ دور بچرخد یعنی معادل $\frac{4}{5}\times2\pi=\frac{8\pi}{5}$ رادیان می‌چرخد. به عبارت دیگر معادل $\frac{48\pi}{30}$ رادیان دوران می‌کند. پس هر کابین به ۴۸ کابین جلوتر منتقل می‌شود. یعنی کابین شماره‌ی ۱ به محل کابین شماره‌ی ۴۹ منتقل می‌شود.

.۴۹ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم زاویه‌ی بین عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه شمار در ساعت $h:M'$ از رابطه‌ی $\theta=|۳۰h-۵/۵M|$ به‌دست می‌آید. پس داریم:

$$\theta=|۳۰\times۸-۵/۵(۱۲)|=|۲۴۰^\circ-۶۶^\circ|=۱۷۴^\circ$$

حال برای محاسبه‌ی اندازه‌ی زاویه برحسب رادیان، کافی است آن را در $\frac{\pi}{۱۸۰}$ ضرب کنیم:

$$\theta=۱۷۴^\circ\times\frac{\pi}{۱۸۰}=\frac{۸۷\pi}{۹۰}^{rad}$$

.۵۰ ۱ ۲ ۳ ۴

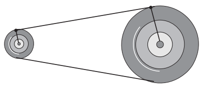
اگر اندازه‌ی زاویه برحسب درجه را با D و اندازه‌ی زاویه برحسب رادیان را با R نمایش دهیم، در این صورت خواهیم داشت: $D=\frac{۲۴۰}{\pi}R-۷۰$ از طرفی همواره رابطه‌ی $\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}$ بین اندازه‌ی زاویه برحسب درجه و رادیان برقرار است. پس خواهیم داشت:

$$\frac{\frac{۲۴۰}{\pi}R-۷۰}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}۲۴۰R-۷۰\pi=۱۸۰R$$

$$\Rightarrow۶۰R=۷۰\pi\Rightarrow R=\frac{۷\pi}{۶}^{rad}\xrightarrow{\text{مطلوب مسئله}}\frac{\frac{۷\pi}{۶}}{\frac{\pi}{۳}}=\frac{۷}{۲}$$

.۵۱ ۱ ۲ ۳ ۴

چون هر دو قرقره با یک تسمه به هم وصل شده‌اند، بنابراین طول کمان طی شده روی دو قرقره با هم برابر خواهند بود (به عبارت دیگر برابر طول تسمه‌ی جابه‌جا شده است) بنابراین خواهیم داشت:



$$l_۱=l_۲\Rightarrow r_۱\theta_۱=r_۲\theta_۲\qquad(۱)$$

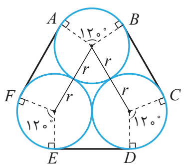
زاویه‌ای که قرقره‌ی بزرگ‌تر طی می‌کند، ۲۲۵° است که معادل آن برحسب رادیان برابر است با:

$$۲۲۵^\circ\times\frac{\pi}{۱۸۰}=\frac{۵\pi}{۴}^{rad}\xrightarrow{\text{در رابطه ی (۱) جایگذاری می کنیم}}$$

$$۱۸\times\frac{۵\pi}{۳}=r_۲\times\frac{۵\pi}{۴}\Rightarrow۶=\frac{r_۲}{۴}\Rightarrow r_۲=۲۴cm$$

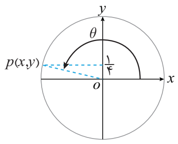
.۵۲ ۱ ۲ ۳ ۴

طول بخشی از تسمه فلزی که $FABC$ نامیده شده است، به صورت زیر قابل محاسبه است:



$$FABC\ \text{طول}=FA+AB+BC=۲r+r\theta+۲r$$
$$=۴r+r\theta=۴(۵۰)+۵۰\times\frac{۲\pi}{۳}=۲۰۰+\frac{۱۰۰\pi}{۳}$$

.۵۳ ۱ ۲ ۳ ۴



مختصات هر نقطه‌ی دلخواه روی دایره‌ی مثلثاتی به صورت $P(\cos\theta,\sin\theta)$ است که θ زاویه‌ای است که شعاع OP با قسمت مثبت محور xها می‌سازد.

چون عرض نقطه‌ی P برابر $\frac{۱}{۴}$ است، پس $\sin\theta=\frac{۱}{۴}$

از طرفی بین مختصات x و y هر نقطه‌ی دلخواه P روی دایره‌ی مثلثاتی، همواره رابطه‌ی $x^۲+y^۲=۱$ یا $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱$ برقرار است. پس خواهیم داشت:

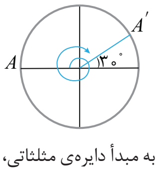
$$\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱\Rightarrow\frac{۱}{۱۶}+\cos^۲\theta=۱\Rightarrow\cos^۲\theta=\frac{۱۵}{۱۶}$$

از طرفی داریم:

$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Rightarrow\cot^۲\theta=\frac{\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta}=\frac{\frac{۱۵}{۱۶}}{\frac{۱}{۱۶}}=۱۵$$

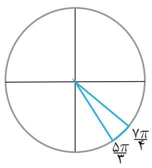
$$\Rightarrow۲\cot^۲\theta+۸\cos^۲\theta=۲\times۱۵+۸\times\frac{۱۵}{۱۶}=۳۰+\frac{۱۵}{۲}=\frac{۷۵}{۲}$$

.۵۴ ۱ ۲ ۳ ۴



اگر نقطه‌ی $A(-۱,۰)$ را ۵۱۰° در خلاف جهت مثلثاتی دوران دهیم، (توجه شود که $۵۱۰^\circ=۳۶۰^\circ+۱۵۰^\circ$) به نقطه‌ی A' خواهیم رسید. زاویه‌ی متناظر با نقطه‌ی A' نسبت به مبدأ دایره‌ی مثلثاتی، زاویه‌ی ۳۰° است. پس مختصات نقطه‌ی A' به صورت $A'(\cos۳۰^\circ,\sin۳۰^\circ)$ یعنی $A'(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۱}{۲})$ خواهد بود.

.۵۵ ۱ ۲ ۳ ۴



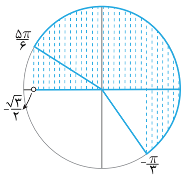
در بازه‌ی $(\frac{۳\pi}{۲},\frac{۷\pi}{۴})$ همواره $|\sin x|>|\cos x|$ و در بازه‌ی $(\frac{۷\pi}{۴},۲\pi)$ همواره $|\cos x|>|\sin x|$ (با تصویر کردن نقاط این بازه‌ها روی محورهای سینوس و کسینوس، این موضوع قابل تشخیص است) بنابراین در بازه‌ی $\frac{۵\pi}{۳}<x<\frac{۷\pi}{۴}$ که قسمتی از ناحیه‌ی چهارم است، $\sin x<۰$ و $\cos x>۰$ است ولی $|\sin x|>|\cos x|$ است. پس عبارت $(\sin x+\cos x)$ منفی است. از طرفی عبارت $(\sin x-\cos x)$ نیز منفی است، زیرا:

منفی = (مثبت) − (منفی) است. از این رو حاصل عبارت A به صورت زیر خواهد بود:

$$A=|\sin x-\cos x|+|\sin x+\cos x|$$
$$=-\sin x+\cos x-\sin x-\cos x=-۲\sin x$$

۵۶. ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا از روی محدوده‌ی تغییرات کمان x، محدوده‌ی تغییرات کمان $۶x$ را تعیین می‌کنیم، سپس محدوده‌ی تغییرات کمان $۶x$ را روی دایره‌ی مثلثاتی در نظر گرفته و آن را روی محور کسینوس‌ها تصویر می‌کنیم تا محدوده‌ی تغییرات $\cos ۶x$ مشخص شود.



$$-\frac{\pi}{۱۸} < x < \frac{۵\pi}{۳۶} \xrightarrow[\text{ضرب}]{\text{طرفین در ۶}}$$

$$-\frac{\pi}{۳} < ۶x < \frac{۵\pi}{۶}$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به شکل}} -\frac{\sqrt{۳}}{۲} < \cos ۶x \le ۱$$

۵۷. ۱ ۲ ۳ ۴

اگر $\sin\theta$ و $\tan\theta$ هم علامت باشند، θ در ناحیه‌ی اول یا چهارم دایره‌ی مثلثاتی است، زیرا در ناحیه‌ی اول $\sin\theta > ۰$ و $\tan\theta > ۰$ و در ناحیه‌ی چهارم $\sin\theta < ۰$ و $\tan\theta < ۰$، بنابراین گزاره‌ی «الف» نادرست است.

اگر $\sin\alpha\cos\alpha < ۰$ باشد، آن‌گاه α در ناحیه‌ی دوم یا چهارم دایره‌ی مثلثاتی است، زیرا در ناحیه‌ی دوم $\sin\alpha > ۰$ و $\cos\alpha < ۰$ و در ناحیه‌ی چهارم $\sin\alpha < ۰$ و $\cos\alpha > ۰$ است. پس گزاره‌ی «ب» نادرست است.

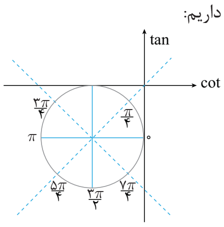
اگر $\cos\alpha = \frac{۳}{۷}$ و α در ناحیه‌ی چهارم دایره‌ی مثلثاتی باشد، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$$

$$\Rightarrow \sin^۲\alpha = ۱ - \cos^۲\alpha = ۱ - \frac{۹}{۴۹} = \frac{۴۰}{۴۹} \Rightarrow \sin\alpha = -\frac{۲\sqrt{۱۰}}{۷}$$

زیرا $\sin\alpha$ در ناحیه‌ی چهارم منفی است پس گزاره‌ی «ج» نادرست است.

اما گزاره‌ی «د» صحیح است زیرا همواره داریم:



$$\begin{cases} ۰ < x < \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \cot x > \tan x \\ \frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \tan x > \cot x \end{cases}$$

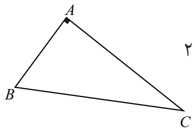
$$\begin{cases} \frac{\pi}{۲} < x < \frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow \cot x > \tan x \\ \frac{۳\pi}{۴} < x < \pi \Rightarrow \tan x > \cot x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi < x < \frac{۵\pi}{۴} \Rightarrow \cot x > \tan x \\ \frac{۵\pi}{۴} < x < \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow \tan x > \cot x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{۳\pi}{۲} < x < \frac{۷\pi}{۴} \Rightarrow \cot x > \tan x \\ \frac{۷\pi}{۴} < x < ۲\pi \Rightarrow \tan x > \cot x \end{cases}$$

بنابراین در هیچ‌یک از نواحی دایره‌ی مثلثاتی، به ازای هر زاویه‌ی دلخواه α در آن ناحیه، رابطه‌ی $\tan\alpha > \cot\alpha$ برقرار نیست.

۵۸. ۱ ۲ ۳ ۴



$$۲\tan B = ۳\sin B \Rightarrow ۲\frac{\sin B}{\cos B} = ۳\sin B$$

چون $\sin B \ne ۰$ است، پس طرفین را بر $\sin B$ تقسیم می‌کنیم:

$$۲ \times \frac{۱}{\cos B} = ۳ \Rightarrow \cos B = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{AB}{۱۲} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow AB = ۸$$

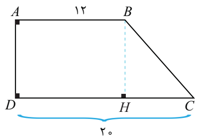
$$\Rightarrow AC^۲ = BC^۲ - AB^۲$$

$$\Rightarrow AC^۲ = ۱۲^۲ - ۸^۲ = ۱۴۴ - ۶۴ \Rightarrow AC^۲ = ۸۰$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{۸۰} = ۴\sqrt{۵}$$

پس اندازه‌ی کوچک‌ترین ضلع مثلث برابر ۸ است.

۵۹. ۱ ۲ ۳ ۴



اگر ذوزنقه‌ی شکل مقابل را در نظر بگیریم و ارتفاع BH را رسم کنیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$DH = AB = ۱۲ \Rightarrow HC = ۲۰ - ۱۲ = ۸$$

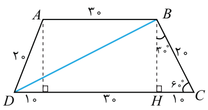
$$\text{مساحت ذوزنقه } S = \frac{۱}{۲}(AB + CD) \times BH = ۱۲۸\sqrt{۳} \Rightarrow$$

$$\frac{۱}{۲}(۲۰ + ۱۲) \times BH = ۱۲۸\sqrt{۳} \Rightarrow BH = \frac{۱۲۸\sqrt{۳}}{۱۶} = ۸\sqrt{۳} \Rightarrow$$

$$\overset{\Delta}{HBC}: \tan\hat{C} = \frac{HB}{HC} = \frac{۸\sqrt{۳}}{۸} = \sqrt{۳} \Rightarrow \hat{C} = ۶۰^\circ$$

چون در ذوزنقه زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ مکملند، پس $\hat{B} = ۱۲۰^\circ$، یعنی بزرگ‌ترین زاویه‌ی ذوزنقه برابر ۱۲۰° است.

۶۰. ۱ ۲ ۳ ۴



مطابق شکل مقابل می‌توانیم با رسم یک قطر ذوزنقه، آن را به دو مثلث تبدیل کنیم، سپس مساحت هر مثلث را از طریق رابطه‌ی $S = \frac{۱}{۲}ab\sin C$ به‌دست آوریم. توجه شود که چون ساق‌های ذوزنقه با هم برابرند، پس ذوزنقه، متساوی الساقین است و زوایای مجاور به ساق‌ها با هم برابرند. از طرفی یک زاویه‌ی حاده و یک زاویه‌ی منفرجه در ذوزنقه، مکملند. بنابراین اگر $\hat{C} = ۶۰^\circ$ آن‌گاه $\hat{D} = ۶۰^\circ$ و $\hat{A} = ۱۲۰^\circ$ است. حال خواهیم داشت:

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{۱}{۲}AB.AD.\sin\hat{A} + \frac{۱}{۲}BC.DC.\sin\hat{C}$$

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} \times ۳۰ \times ۲۰ \times \sin ۱۲۰^\circ + \frac{۱}{۲} \times ۲۰ \times ۵۰ \times \sin ۶۰^\circ$$

توجه شود که $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و بنابراین خواهیم داشت:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\times 30\times 20\times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\times 20\times 50\times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 150\sqrt{3} + 250\sqrt{3} = 400\sqrt{3}$$

تذکر

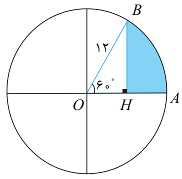
برای پیدا کردن قاعده‌ی بزرگ ذوزنقه داریم:

$$\sin 30^\circ = \frac{CH}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{CH}{20} \Rightarrow CH = 10$$

$$\Rightarrow CD = 30 + 2(10) = 50$$

۶۱. ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به شکل مقابل در مثلث OBH داریم:



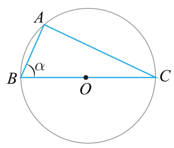
$$\sin 60^\circ = \frac{BH}{12} \Rightarrow BH = 12\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{OH}{12} \Rightarrow OH = 12\times\frac{1}{2} = 6$$

$$\overset{\frown}{AB} = r\theta \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 12\times\frac{\pi}{3} = 4\pi$$

محیط قسمت رنگی $= 6\sqrt{3} + 6 + 4\pi = 6(\sqrt{3}+1) + 4\pi$

۶۲. ۱ ۲ ۳ ۴



با توجه به فرض مسئله، مساحت دایره برابر 100π است، بنابراین داریم:

$$\pi r^2 = 100\pi \Rightarrow r^2 = 100$$

$$\Rightarrow r = 10 \Rightarrow BC = 20$$

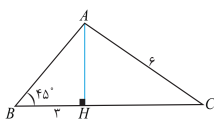
توجه شود که زاویه‌ی A، زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر BC است و چون اندازه‌ی زاویه‌ی محاطی نصف کمان مقابلش است، پس $\hat{A} = 90^\circ$ (زیرا کمان مقابل به آن 180° است) پس مثلث ABC در رأس A، قائمه است. بنابراین داریم:

$$\sin\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{AC}{20} = \frac{4}{5} \Rightarrow AC = 16$$

حال می‌توانیم با نوشتن رابطه‌ی فیثاغورس، اندازه‌ی ضلع AC را به‌دست آوریم:

$$AB^2 = BC^2 - AC^2 = 400 - 256 = 144 \Rightarrow AB = 12$$

۶۳. ۱ ۲ ۳ ۴



$$\overset{\Delta}{ABH}: \tan 45^\circ = \frac{AH}{BH}$$

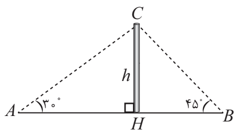
$$\Rightarrow 1 = \frac{AH}{3} \Rightarrow AH = 3$$

$$\overset{\Delta}{AHC}: HC^2 = AC^2 - AH^2 \Rightarrow HC^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow HC = 3\sqrt{3}$$

مساحت مثلث $S = \frac{1}{2}(AH)(BC) = \frac{1}{2}(3)(3+3\sqrt{3}) = \frac{9+9\sqrt{3}}{2}$

۶۴. ۱ ۲ ۳ ۴

اگر ارتفاع دکل را h فرض کنیم، در این صورت خواهیم داشت:



$$AH + HB = 8 \quad ,$$

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{AH} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{AH}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{HC}{AH}$$

$$AH = \sqrt{3}\,HC$$

$$\tan 45^\circ = \frac{HC}{HB} \Rightarrow 1 = \frac{HC}{HB} \Rightarrow HC = HB$$

$$AB = AH + HB = \sqrt{3}HC + HC = (\sqrt{3}+1)HC \Rightarrow$$

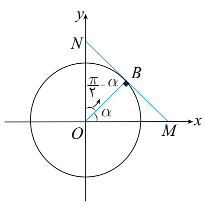
$$8 = (\sqrt{3}+1)HC \Rightarrow HC = \frac{8}{\sqrt{3}+1} = \frac{8}{\sqrt{3}+1}\times\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{8(\sqrt{3}-1)}{3-1} = 4(\sqrt{3}-1) = 4\sqrt{3} - 4$$

۶۵. ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم شعاع دایره در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است.

بنابراین OB بر MN عمود است. از این رو در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی OBM و OBN خواهیم داشت:



$$\overset{\Delta}{OBM}: \tan\alpha = \frac{BM}{OB} = \frac{BM}{1}$$

$$\Rightarrow BM = \tan\alpha$$

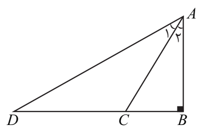
$$\overset{\Delta}{OBN}: \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{BN}{OB} = \frac{BN}{1}$$

$$\Rightarrow BN = \cot\alpha$$

$$\Rightarrow MN = MB + BN = \tan\alpha + \cot\alpha$$

۶۶. ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به مقادیر داده شده در صورت سؤال داریم:

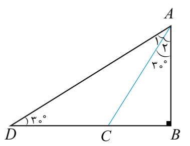


$$BC = 2\sqrt{3} \quad , \quad DC = 4\sqrt{3}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: \tan 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{AB} \Rightarrow AB = 6$$

$$\overset{\Delta}{ABD}: \tan\hat{D} = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \hat{D} = 30^\circ$$

حال چون مجموع زوایای داخلی مثلث ABD برابر است با 180° بنابراین خواهیم داشت:



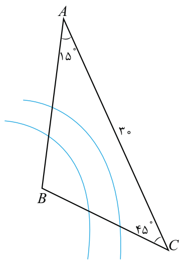
$$\hat{A}_1 + 30^\circ + 90^\circ + 30^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 = 30^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 - \hat{D} = 0$$

۶۷. ۱ **۲** ۳ ۴

ابتدا دقت شود که $\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۱۸۰^\circ}{۱۲}=۱۵^\circ$ رادیان و $\frac{\pi}{۴}=\frac{۱۸۰^\circ}{۴}=۴۵^\circ$ رادیان

و بنابراین خواهیم داشت:



$$\hat{B}=۱۸۰^\circ-(۱۵^\circ+۴۵^\circ)=۱۲۰^\circ$$

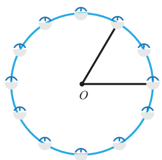
حال طبق قضیه‌ی سینوس‌ها خواهیم داشت:

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\frac{۳۰}{\sin ۱۲۰^\circ}=\frac{c}{\sin ۴۵^\circ}$$

$$\Rightarrow c=\frac{۳۰\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۳۰\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}=۱۰\sqrt{۶}$$

۶۸. ۱ ۲ **۳** ۴

بیش‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی P از سطح افقی وقتی است که $\theta=\frac{\pi}{۲}$ و کم‌ترین فاصله وقتی است که $\theta=\frac{۳\pi}{۲}$ باشد. بنابراین داریم:



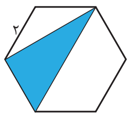
$$h_{\max}=۷۰+۴۰\sin\frac{\pi}{۲}=۷۰+۴۰=۱۱۰$$

$$h_{\min}=۷۰+۴۰\sin\frac{۳\pi}{۲}=۷۰-۴۰=۳۰$$

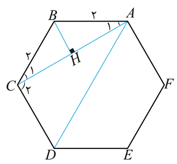
$\Rightarrow ۱۱۰-۳۰=۸۰m=$ قطر چرخ و فلک

$\Rightarrow$ شعاع چرخ و فلک $=۴۰m$

۶۹. ۱ ۲ **۳** ۴



در شکل مقابل که یک شش ضلعی منتظم است، هر زاویه‌ی داخلی برابر ۱۲۰° است. (زیرا هر زاویه‌ی داخلی n منتظم از رابطه‌ی $\frac{(n-۲)۱۸۰^\circ}{n}$ به‌دست می‌آید) مثلث ABC، مثلث متساوی‌الساقین است که در آن $\hat{B}=۱۲۰^\circ$ و بنابراین خواهیم داشت: $\hat{A}_۱=\hat{C}_۱=۳۰^\circ$



$$\overset{\Delta}{ABH}:\ \cos\hat{A}_۱=\frac{AH}{۲}$$

$$\Rightarrow AH=۲\cos ۳۰^\circ=۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}$$

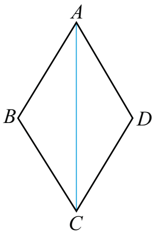
$$AC=۲AH=۲\sqrt{۳}$$

از طرفی چون $\hat{C}_۱+\hat{C}_۲=۱۲۰^\circ$ پس $\hat{C}_۲=۹۰^\circ$ و بنابراین مثلث ACD قائم‌الزاویه است و مساحت مثلث برابر است با:

$$S=\frac{AC\times CD}{۲}=\frac{۲\sqrt{۳}\times ۲}{۲}=۲\sqrt{۳}$$

۷۰. **۱** ۲ ۳ ۴

مطابق شکل، مساحت لوزی، دو برابر مساحت مثلثی است که با رسم قطر آن حاصل می‌شود. بنابراین داریم:



$S=۲S_{ABC}=۲\times\frac{۱}{۲}AB.BC.\sin B$ لوزی

$$=AB.BC.\sin B=۳۶\times۳۶\times\sqrt{۱-\cos^۲ B}$$

$$=۳۶\times۳۶\times\sqrt{۱-\frac{۱۵}{۱۶}}=۳۶\times۳۶\times\sqrt{\frac{۱}{۱۶}}$$

$$=۳۶\times۳۶\times\frac{۱}{۴}=۳۲۴$$

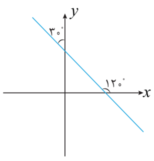
۷۱. ۱ ۲ ۳ **۴**

می‌دانیم مساحت یک مثلث برابر نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع است بنابراین خواهیم داشت:

$$S=\frac{۱}{۲}\times۶\times۱۲\times\sin\alpha$$

چون حداکثر مقدار $\sin\alpha$ برابر ۱ است، پس حداکثر مقدار مساحت برابر است با: $\max S=\frac{۱}{۲}\times۶\times۱۲=۳۶$

۷۲. **۱** ۲ ۳ ۴



طبق شکل، شیب خط منفی است و زاویه‌ای که خط با قسمت مثبت محور x ها می‌سازد، برابر $۳۰^\circ+۹۰^\circ=۱۲۰^\circ$ است و بنابراین شیب خط برابر است با:

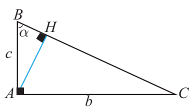
$$m=\tan ۱۲۰^\circ=-\sqrt{۳}$$

از این رو خواهیم داشت: $\frac{-\sqrt{۳}m}{۳m-۱}=-\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{m}{۳m-۱}=۱$

$$\Rightarrow m=۳m-۱\Rightarrow ۲m=۱\Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$$

۷۳. **۱** ۲ ۳ ۴

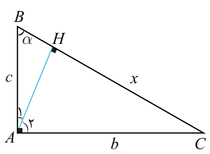
با توجه به شکل زیر داریم:



$$\overset{\Delta}{AHB}:\sin B=\frac{AH}{AB}\Rightarrow AH=c\sin\alpha$$

$$\overset{\Delta}{AHC}:\tan A_۲=\frac{HC}{AH}\Rightarrow x=AH.\tan A_۲=c\sin\alpha\tan A_۲$$

توجه شود که $\hat{A}_۲=\alpha$ زیرا:



$$\hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۹۰^\circ\qquad(۱)$$

$$\hat{A}_۱+\alpha=۹۰^\circ\qquad(۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)}\alpha=\hat{A}_۲$$

$$\xrightarrow[\text{داشت}]{\text{بنابراین خواهیم}}x=c\sin\alpha\tan\alpha$$

۷۴. (۱) (۲) **(۳)** (۴)

ابتدا عبارت را به صورت مربع کامل تبدیل می‌کنیم:

$$A=\sin^2 x-\sin x+1=\sin^2 x-\sin x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=(\sin x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$$

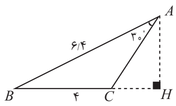
چون حداقل عبارت $(\sin x-\frac{1}{2})^2$ برابر صفر است (به ازای $\sin x=\frac{1}{2}$)

بنابراین حداقل عبارت A برابر $\frac{3}{4}$ خواهد بود.

تذکر

حداقل عباراتی که مربع یک عبارت جبری یعنی به شکل کلی $(f(x))^2$ هستند، به شرط آن‌که $f(x)$ بتواند صفر شود، قطعاً برابر صفر است، زیرا همواره $(f(x))^2 \geq 0$

۷۵. (۱) **(۲)** (۳) (۴)



کافی است مساحت مثلث ABC را از دو طریق محاسبه کنیم:

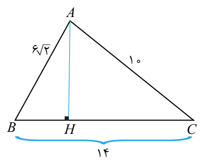
$$S=\frac{1}{2}AB\times AC\times \sin A \quad , \quad S=\frac{1}{2}BC\times AH$$

$$\frac{1}{2}AB\times AC\times \sin A=\frac{1}{2}BC\times AH$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\times 6/4\times AC\times \frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times 4\times AH \Rightarrow \frac{AH}{AC}=\frac{1/6}{2}=0/8$$

۷۶. (۱) **(۲)** (۳) (۴)

ابتدا در مثلث ABC، قضیه‌ی کسینوس‌ها را می‌نویسیم:



$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

$$\Rightarrow 72=100+196-2(10)(14)\cos C$$

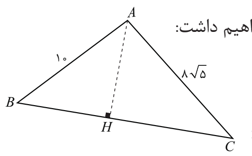
$$\Rightarrow \cos C=\frac{224}{280}=\frac{4}{5}$$

$$\overset{\Delta}{AHC}: \cos C=\frac{HC}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{5}=\frac{HC}{10}\Rightarrow HC=8\Rightarrow BH=14-8=6$$

پس طول قسمت کوچک‌تر برابر ۶ است.

۷۷. (۱) **(۲)** (۳) (۴)



راه‌حل اول: با رسم ارتفاع AH خواهیم داشت:

$$\overset{\Delta}{AHB}: \cos B=\frac{BH}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5}=\frac{BH}{10}\Rightarrow BH=6$$

حال با توجه به رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث AHB داریم:

$$AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{100-36}=\sqrt{64}=8$$

$$\overset{\Delta}{AHC}: CH=\sqrt{AC^2-AH^2}=\sqrt{320-64}=\sqrt{256}=16$$

$$\Rightarrow BC=BH+HC=6+16=22$$

راه‌حل دوم: می‌توانیم از قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث ABC استفاده کنیم:

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB.BC.\cos B$$

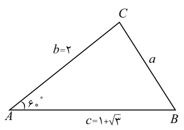
$$\Rightarrow (8\sqrt{5})^2=100+BC^2-2(10)BC\times\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow 320=100+BC^2-12BC\Rightarrow BC^2-12BC-220=0$$

$$\Rightarrow (BC-22)(BC+10)=0\Rightarrow BC=22 \text{ یا } BC=-10 \text{ غ.ق.ق}$$

۷۸. **(۱)** (۲) (۳) (۴)

ابتدا با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها، طول ضلع BC را محاسبه می‌کنیم:



$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$a^2=(1+\sqrt{3})^2+2^2-2(1+\sqrt{3})\times 2\times\frac{1}{2}$$

$$=1+3+2\sqrt{3}+4-2-2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a^2=6\Rightarrow a=\sqrt{6}$$

حال با استفاده از قضیه‌ی سینوس‌ها، خواهیم داشت:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sin B}\Rightarrow \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sin B}$$

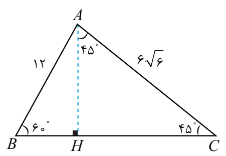
$$\Rightarrow \sin\hat{B}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow B=45^\circ \text{ یا } 135^\circ$$

چون مجموع زوایای داخلی مثلث برابر 180° است پس $B=135^\circ$ غیرقابل قبول است.

$$B=45^\circ\Rightarrow C=180^\circ-(45^\circ+60^\circ)=75^\circ$$

۷۹. (۱) (۲) **(۳)** (۴)

ابتدا ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت:



$$\overset{\Delta}{AHB}: \cos\hat{B}=\frac{BH}{AB}$$

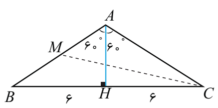
$$\Rightarrow \cos 60^\circ=\frac{BH}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{BH}{12}\Rightarrow BH=6$$

$$\frac{AH}{AB}=\sin 60^\circ\Rightarrow AH=AB\sin 60^\circ=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow HC=AH=6\sqrt{3}$$

۸۰. (۱) **(۲)** (۳) (۴)



$$\sin(BAH)=\frac{BH}{AB}$$

$$\Rightarrow \sin 60^\circ=\frac{6}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{6}{AB}\Rightarrow AB=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}\Rightarrow AC=4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AM=MB=2\sqrt{3}$$

حال در مثلث ACM، قضیه‌ی کسینوس‌ها را می‌نویسیم:

$$CM^2 = AM^2 + AC^2 - 2(AM)(AC)\cos A$$

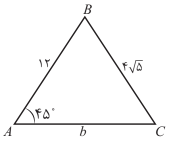
$$\Rightarrow CM^2 = (2\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{3})^2 - 2(2\sqrt{3})(4\sqrt{3})\cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow CM^2 = 12 + 48 - 48\times(-\frac{1}{2}) \Rightarrow CM^2 = 60 + 24 = 84$$

$$\Rightarrow CM = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

۸۱. **۱** ۲ ۳ ۴

قضیه‌ی کسینوس‌ها را برای رأس A می‌نویسیم:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\Rightarrow (4\sqrt{5})^2 = b^2 + (12)^2 - 2(b)(12)\cos 45^\circ$$

$$\Rightarrow 80 = b^2 + 144 - 2b\times 12\times\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b^2 - 12\sqrt{2}b + 64 = 0$$

$$\Rightarrow b = \frac{12\sqrt{2}\pm\sqrt{288-256}}{2} \Rightarrow b = 6\sqrt{2}\pm 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow b = 8\sqrt{2}\ ,\ 4\sqrt{2}$$

۸۲. ۱ ۲ **۳** ۴

$$b^3 + a^2c = c^3 + a^2b \Rightarrow b^3 - c^3 = a^2b - a^2c$$

$$\Rightarrow (b-c)(b^2+bc+c^2) = a^2(b-c)$$

چون اضلاع مثلث نابرابر هستند پس $b\neq c$ و در نتیجه $b-c\neq 0$ و بنابراین می‌توانیم طرفین را بر $b-c$ تقسیم کنیم.

$$b^2+bc+c^2 = a^2 \xrightarrow{\text{قضیه کسینوس‌ها}}$$

$$b^2+bc+c^2 = b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$$

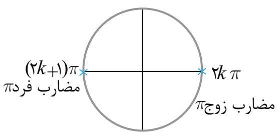
$$\Rightarrow bc = -2bc\cos A \Rightarrow \cos A = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}^{rad}$$

۸۳. ۱ ۲ ۳ **۴**

دو زاویه‌ی α و β را در صورتی مکمل گویند که مجموع آن‌ها برابر 180° یا π رادیان شود. بنابراین مکمل زاویه‌ی -25° برابر است با $180^\circ-(-25^\circ)=205^\circ$ و مکمل زاویه‌ی $\frac{\pi}{12}$ رادیان برابر است با:

$$\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}^{rad}$$

۸۴. ۱ ۲ ۳ **۴**



$1000^\circ = 1080^\circ - 80^\circ = 3(360^\circ) - 80^\circ \Rightarrow$ ناحیه‌ی چهارم

$\frac{35\pi}{6} = \frac{36\pi - \pi}{6} = 6\pi - \frac{\pi}{6} = 3(2\pi) - \frac{\pi}{6} \Rightarrow$ ناحیه‌ی چهارم

$-\frac{7\pi}{3} = -\frac{6\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = -2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow$ ناحیه‌ی چهارم

$\frac{28\pi}{3} = \frac{27\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 9\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow$ ناحیه‌ی سوم

بنابراین زاویه‌ی $\frac{28\pi}{3}$ رادیان در ناحیه‌ی چهارم دایره‌ی مثلثاتی قرار ندارد ولی سایر زوایا در ناحیه‌ی چهارم قرار دارند.

۸۵. ۱ ۲ ۳ **۴**

رادیان $5 = 5\times 57/3 \simeq 286/5^\circ \Rightarrow 286/5^\circ < 270^\circ + 30^\circ$

بنابراین ۵ رادیان در گزینه‌ی ۱ صحیح است ولی در گزینه‌ی ۲ نادرست نمایش داده شده است.

رادیان $8 = 8\times 57/3 \simeq 458/4^\circ \Rightarrow 458/4^\circ < 450^\circ + 30$

بنابراین ۸ رادیان در گزینه‌ی ۱ نادرست نمایش داده شده است ولی در گزینه‌ی ۲ صحیح است.

رادیان $9 = 9\times 57/3 \simeq 515/7^\circ \Rightarrow 515/7^\circ > 450^\circ + 60$

۹ رادیان در گزینه‌ی ۳ نادرست است ولی در گزینه‌ی ۴ صحیح نمایش داده شده است.

رادیان $12 = 12\times 57/3 \simeq 687/6^\circ \Rightarrow 687/6^\circ < 630^\circ + 60$

۱۲ رادیان در گزینه‌ی ۳ نادرست است ولی در گزینه‌ی ۴ صحیح نمایش داده شده است.

بنابراین در گزینه‌ی ۴، انتهای کمان مربوط به هر دو زاویه‌ی ۹ رادیان و ۱۲ رادیان به‌طور صحیح نمایش داده شده است.

۸۶. ۱ ۲ **۳** ۴

اگر انتهای دو کمان، برهم منطبق باشند، باید تفاضل آن‌ها مضربی از 2π باشد، بنابراین داریم:

گزینه ۱ : $\frac{35\pi}{6} - (-\frac{5\pi}{6}) = \frac{40\pi}{6} = \frac{20\pi}{3}$

گزینه ۲ : $\frac{35\pi}{6} - \frac{13\pi}{6} = \frac{22\pi}{6} = \frac{11\pi}{3}$

گزینه ۳ : $\frac{35\pi}{6} - \frac{83\pi}{6} = -\frac{48\pi}{6} = -8\pi$ ✓

گزینه ۴ : $\frac{35\pi}{6} - (-\frac{19\pi}{6}) = \frac{54\pi}{6} = 9\pi$

بنابراین کمان‌های $\frac{35\pi}{6}$ و $\frac{83\pi}{6}$، دو زاویه‌ای هستند که انتهای کمان آن‌ها برهم منطبق است.

۸۷. ۱ **۲** ۳ ۴

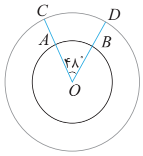
در هر ساعت عقربه‌ی ساعت شمار $\frac{1}{12}$ دور می‌چرخد که معادل است با $\frac{1}{12}(2\pi) = \frac{\pi}{6}^{rad}$ بنابراین خواهیم داشت:

۶۰ دقیقه $\frac{\pi}{6}^{rad}$

x $\frac{5\pi}{24}$

$$\Rightarrow x = \frac{\frac{5\pi}{24}\times 60}{\frac{\pi}{6}} = 75 \text{ دقیقه}$$

۸۸. ۱ ۲ **۳** ۴



ابتدا زاویه‌ی بین دو شعاع را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

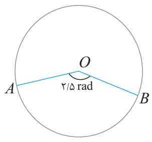
$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow$$

$$\frac{۴۸^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{۴\pi}{۱۵}$$ رادیان

$$l_1=r_1\theta\Rightarrow l_1=۱۱\times\frac{۴\pi}{۱۵}\quad,\quad l_2=r_2\theta\Rightarrow l_2=۱۷\times\frac{۴\pi}{۱۵}$$

$$L_2-L_1=۶\times\frac{۴\pi}{۱۵}=\frac{۸\pi}{۵}$$ رادیان

۸۹. ۱ ۲ **۳** ۴



ابتدا توسط رابطه‌ی $l=r\theta$، اندازه‌ی شعاع دایره را محاسبه می‌کنیم:

$$l=r\theta\Rightarrow ۱۵=r.\frac{۵}{۲}\Rightarrow r=۶cm$$

حال با داشتن اندازه‌ی شعاع، محیط و مساحت دایره قابل محاسبه است:

محیط $P=۲\pi r=۲\pi\times۶=۱۲\pi$

مساحت $S=\pi r^2=\pi(۶)^2=۳۶\pi$

مجموع محیط و مساحت $=۱۲\pi+۳۶\pi=۴۸\pi$

۹۰. ۱ **۲** ۳ ۴

$$l=r\theta\Rightarrow ۳r-۹=\frac{۹}{۴}r\Rightarrow ۳r-\frac{۹}{۴}r=۹\Rightarrow\frac{۳r}{۴}=۹\Rightarrow r=۱۲$$

از طرفی چون می‌خواهیم طول کمان مقابل به زاویه‌ی ۷۵° را محاسبه کنیم، باید ابتدا زاویه‌ی ۷۵° را به رادیان تبدیل کنیم، سپس از رابطه‌ی $l=r\theta$ استفاده کنیم.

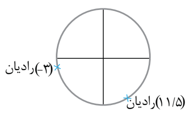
$$\frac{x^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{x^{rad}}{\pi}\Rightarrow\frac{۷۵}{۱۸۰}=\frac{x^{rad}}{\pi}\Rightarrow x^{rad}=\frac{۵\pi}{۱۲}^{rad}$$

$$l=r\theta\Rightarrow l=۱۲\times\frac{۵\pi}{۱۲}=۵\pi$$

۹۱. **۱** ۲ ۳ ۴

تمامی عبارات داده شده، تعریف نشده هستند، زیرا در موارد «الف» و «د» و «هـ» مخرج کسرها برابر صفر هستند و در موارد «ب»، «ج» و «و» نیز پس از تبدیل آن‌ها به کسر (یعنی $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ و $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$) باز هم مخرج کسرها برابر صفر هستند.

۹۲. **۱** ۲ ۳ ۴



ابتدا زوایای ۱۱ رادیان و (-۳) رادیان را به درجه تبدیل می‌کنیم:

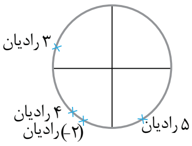
$$۱۱/۵^{rad}\simeq۱۱/۵\times۵۷/۳\simeq۶۵۸/۹۵^\circ$$

پس کمان ۱۱/۵ رادیان در بازه‌ی $(۶۳۰^\circ, ۷۲۰^\circ)$ قرار دارد، یعنی در ناحیه‌ی چهارم دایره‌ی مثلثاتی است، پس $\cos(۱۱/۵)$ مثبت است.

$$-۳^{rad}\simeq-۳\times۵۷/۳\simeq-۱۷۱/۹^\circ$$

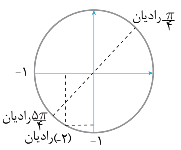
پس کمان $(-۳)^{rad}$ در بازه‌ی $(-۱۸۰^\circ, -۹۰^\circ)$ قرار دارد، یعنی در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی است. پس $\cot(-۳)$ مثبت است.

۹۳. ۱ ۲ ۳ **۴**



چون کمان ۴ رادیان در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی است و $\sin۴$ و $\cos۴$ هر دو منفی هستند، پس $\sin۴\cos۴>۰$ و بنابراین گزاره‌ی «الف» صحیح است.

چون کمان ۳ رادیان در ناحیه‌ی دوم دایره‌ی مثلثاتی است و $\tan۳$ و $\cot۳$ هر دو منفی هستند، پس $\tan۳+\cot۳<۰$ و در نتیجه گزاره‌ی «ب» صحیح است.



چون کمان (-۲) رادیان در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی است و بعد از نقطه‌ی $x=\frac{۵\pi}{۴}$ قرار دارد، پس طبق شکل، اگر از انتهای کمان مربوط به زاویه‌ی (-۲) رادیان بر محور سینوس‌ها و کسینوس‌ها، عمود کنیم، تصویر آن روی محور سینوس‌ها، عددی منفی‌تر از تصویر آن روی محور کسینوس‌ها خواهد بود. یعنی $\sin(-۲)<\cos(-۲)$ صحیح است.

تذکر

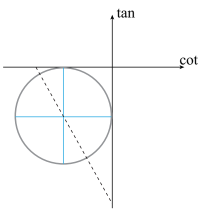
به‌طور کلی در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی همواره داریم:
($\sin x$ و $\cos x$ هر دو در ناحیه‌ی سوم منفی هستند)

$\pi<x<\frac{۵\pi}{۴}$

$\Rightarrow\ \cos x<\sin x$

$\frac{۵\pi}{۴}<x<\frac{۳\pi}{۲}$

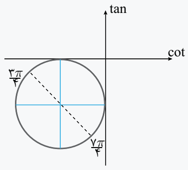
$\Rightarrow\ \sin x<\cos x$



همچنین کمان ۵ رادیان کمانی در ناحیه‌ی چهارم دایره‌ی مثلثاتی است و هر دو نسبت مثلثاتی $\tan۵$ و $\cot۵$ منفی هستند ولی اگر از انتهای کمان مربوط به زاویه‌ی ۵ رادیان، شعاع دایره را از دو طرف امتداد دهیم، تا محورهای tan و cot را قطع کند، به‌طور واضح مشخص است که $\tan۵<\cot۵$ است، زیرا امتداد شعاع دایره، محور تانژانت را در عددی منفی‌تر از محور کتانژانت قطع می‌کند. (از روی شکل کاملاً واضح است.)

تذکر: به‌طور کلی در ناحیه‌ی چهارم دایره‌ی مثلثاتی همواره داریم:

($\tan x$ و $\cot x$ هر دو در ناحیه‌ی چهارم منفی هستند.)



$$\frac{3\pi}{2}<x<\frac{7\pi}{4} \Rightarrow \tan x < \cot x$$

$$\frac{7\pi}{4}<x<2\pi \Rightarrow \cot x < \tan x$$

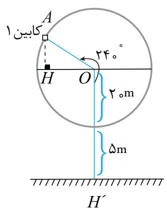
بنابراین تمامی گزاره‌های داده شده، صحیح هستند.

۹۴. ۱ **۲** ۳ ۴

ابتدا زاویه‌ی چرخش چرخ و فلک را به درجه تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{10\pi}{3}=2\pi+\frac{4\pi}{3}^{rad}=360^\circ+240^\circ$$

بنابراین چرخ و فلک یک دور کامل می‌زند و سپس زاویه‌ی 240° را طی می‌کند. با توجه به شکل خواهیم داشت:



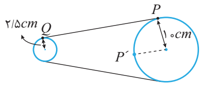
$$H\hat{O}A=30^\circ \Rightarrow \sin 30^\circ=\frac{AH}{OA} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{AH}{20} \Rightarrow AH=10$$

از طرفی فاصله‌ی مرکزی چرخ و فلک تا سطح زمین ۲۵ متر است، پس فاصله‌ی کابین شماره‌ی ۱ از سطح زمین برابر است با:

فاصله‌ی کابین شماره‌ی ۱ تا سطح زمین $=AH+OH'=25+10=35$

۹۵. **۱** ۲ ۳ ۴

ابتدا مسافتی که نقطه‌ی P بر روی محیط قرقره‌ی بزرگ‌تر طی می‌کند را به‌دست می‌آوریم: $(90^\circ=\frac{\pi}{2}^{rad})$



$$PP'=r\theta=10\times\frac{\pi}{2}=5\pi\,cm$$

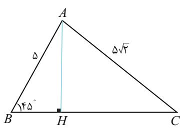
چون هر دو قرقره با یک تسمه به هم متصل هستند، پس قرقره‌ی کوچک‌تر نیز $5\pi\,cm$ حرکت می‌کند. حال برای قرقره‌ی کوچک‌تر داریم:

$$l=r\theta \Rightarrow \theta=\frac{l}{r}=\frac{5\pi}{\frac{5}{2}}=2\pi^{rad}$$

بنابراین وقتی قرقره‌ی بزرگ‌تر ربع دور می‌چرخد، قرقره‌ی کوچک‌تر یک دور کامل می‌زند و نقطه‌ی Q به مکان خود باز می‌گردد.

۹۶. ۱ ۲ **۳** ۴

ابتدا توسط قضیه‌ی سینوس‌ها، اندازه‌ی زاویه‌ی C را محاسبه می‌کنیم:



$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{5\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=\frac{5}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{5}{\sin C} \Rightarrow \sin C=\frac{1}{2} \Rightarrow \hat{C}=30^\circ$$

حال اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، در این صورت برای محاسبه‌ی طول BC خواهیم داشت:

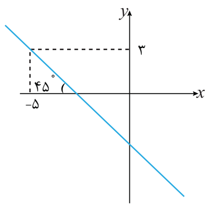
$$BC=BH+HC \Rightarrow \cos B=\frac{BH}{5} \Rightarrow \cos 45^\circ=\frac{BH}{5}$$

$$\Rightarrow BH=\frac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos C=\frac{HC}{5\sqrt{2}} \Rightarrow \cos 30^\circ=\frac{HC}{5\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow HC=\frac{5\sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow BC=\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{6}}{2}=\frac{5}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$$

۹۷. ۱ **۲** ۳ ۴



زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد، برابر $180^\circ-45^\circ=135^\circ$ است. پس شیب این خط برابر $m=\tan 135^\circ=-1$ است.

(توجه کنید که $\tan 135^\circ=-1$)

چون خط از نقطه‌ی $(-5,3)$ می‌گذرد، پس معادله‌ی خط به صورت زیر است:

$$y-y_0=m(x-x_0) \Rightarrow y-3=(-1)(x+5)$$

$$\Rightarrow y-3=-x-5 \Rightarrow y=-x-2 \xrightarrow{x=0} y=-2$$

$\Rightarrow$ عرض از مبدأ $=-2$

۹۸. ۱ ۲ **۳** ۴

چون زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد، برابر 45° است، پس شیب این خط برابر $m=\tan 45^\circ=1$ است. پس معادله‌ی خط مطلوب برابر است با:

$$y-y_0=m(x-x_0) \Rightarrow y-2=1(x-0) \Rightarrow y=x+2$$

با امتحان گزینه‌ها، مشخص می‌شود که گزینه‌ی ۳ جواب است زیرا مختصات آن در معادله‌ی خط $y=x+2$ صدق می‌کند، ولی سایر گزینه‌ها صدق نمی‌کنند.

۹۹. ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\frac{\tan^2\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{4}}{\cot^2\frac{\pi}{4}-\cos^2\frac{\pi}{3}}+\cos^2 75^\circ+\sin^2 75^\circ$$

$$=\frac{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{1^2-(\frac{1}{2})^2}+1=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}+1=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{4}}+1=\frac{10}{9}+1=\frac{19}{9}$$

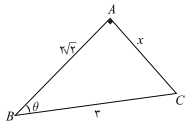
.۱۰۰ ۱ ۲ ۳ ۴

راه‌حل اول: چون $\cos\theta<۰$ و $\cot\theta>۰$ است، پس θ در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی است و داریم:

$$۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta}\Rightarrow ۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\frac{۸}{۹}}\Rightarrow ۱+\tan^۲\theta=\frac{۹}{۸}$$

$$\Rightarrow \tan^۲\theta=\frac{۱}{۸}\Rightarrow \tan\theta=+\frac{۱}{\sqrt{۸}}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

راه‌حل دوم: مثلث قائم‌الزاویه‌ای را در نظر می‌گیریم که اندازه‌ی وتر آن برابر ۳ و اندازه‌ی یک ضلع زاویه‌ی قائمه‌ی آن برابر $۲\sqrt{۲}$ باشد، زیرا بدون توجه به علامت منفی و بنا به تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



$$\cos\theta=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}\xrightarrow{\text{قضیه فیثاغورس}}$$

$$x^۲=۳^۲-(۲\sqrt{۲})^۲=۹-۸=۱\Rightarrow x=۱$$

$$\tan\theta=\frac{AC}{AB}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

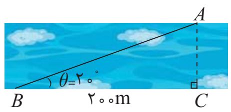
.۱۰۱ ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا با داشتن $\sin ۲۰^\circ$، مقدار $\cot ۲۰^\circ$ را محاسبه می‌کنیم:

$$۱+\cot^۲ ۲۰^\circ=\frac{۱}{\sin^۲ ۲۰^\circ}$$

$$\Rightarrow ۱+\cot^۲ ۲۰^\circ=\frac{۱}{(۰/۳۴)^۲}$$

$$\Rightarrow ۱+\cot^۲ ۲۰^\circ=\frac{۱}{۰/۱۱۵۶}$$



$$\cot^۲ ۲۰^\circ=\frac{۱۰۰۰۰}{۱۱۵۶}-۱\Rightarrow \cot^۲ ۲۰^\circ=۷/۶۵\Rightarrow \cot ۲۰^\circ\simeq ۲/۷۶$$

از طرفی در مثلث ABC خواهیم داشت:

$$\cot ۲۰^\circ=\frac{BC}{AC}=\frac{۲۰۰}{AC}\Rightarrow AC=\frac{۲۰۰}{\cot ۲۰^\circ}$$

$$=\frac{۲۰۰}{۲/۷۶}\simeq ۷۲/۴۶$$

.۱۰۲ ۱ ۲ ۳ ۴

$$A=\frac{\cos(-۹۰^\circ)+\sin(-۲۷۰^\circ)}{\sin(-۱۸۰^\circ)-\cos(-۳۶۰^\circ)}=\frac{\cos ۹۰^\circ-\sin ۲۷۰^\circ}{-\sin ۱۸۰^\circ-\cos ۳۶۰^\circ}$$

$$=\frac{۰-(-۱)}{۰-۱}=-۱$$

$$B=\cot(-\frac{\pi}{۶})+\tan(-\frac{\pi}{۳})=-\cot(\frac{\pi}{۶})-\tan(\frac{\pi}{۳})$$

$$=-\sqrt{۳}-\sqrt{۳}=-۲\sqrt{۳}$$

$$\frac{A}{B}=\frac{-۱}{-۲\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۶}$$

.۱۰۳ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\sin x-\frac{۱}{\sin x}=a^۳\Rightarrow a^۳=\frac{\sin^۲ x-۱}{\sin x}=\frac{-\cos^۲ x}{\sin x}\qquad (۱)$$

$$\cos x-\frac{۱}{\cos x}=b^۳\Rightarrow b^۳=\frac{\cos^۲ x-۱}{\cos x}=\frac{-\sin^۲ x}{\cos x}\qquad (۲)$$

$$(۱),(۲)\xrightarrow{\text{تقسیم برهم}}\frac{b^۳}{a^۳}=\frac{\frac{-\sin^۲ x}{\cos x}}{\frac{-\cos^۲ x}{\sin x}}=\frac{\sin^۳ x}{\cos^۳ x}=\tan^۳ x$$

$$\frac{b^۳}{a^۳}=\tan^۳ x\xrightarrow{\text{ریشه سوم}}\frac{b}{a}=\tan x\Rightarrow b=a\tan x$$

.۱۰۴ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{a}{۱+\sin x}+\frac{b}{۱-\sin x}=۱+\tan^۲ x$$

$$\Rightarrow \frac{a(۱-\sin x)+b(۱+\sin x)}{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}=\frac{۱}{\cos^۲ x}$$

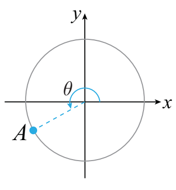
$$\Rightarrow \frac{a-a\sin x+b+b\sin x}{۱-\sin^۲ x}=\frac{۱}{\cos^۲ x}$$

$$\Rightarrow \frac{(b-a)\sin x+a+b}{\cos^۲ x}=\frac{۱}{\cos^۲ x}$$

برای آن‌که تساوی بالا به ازای هر x حقیقی برقرار باشد (یعنی یک اتحاد باشد) باید داشته باشیم: $b-a=۰\ ,\ a+b=۱$

$$\begin{cases} b-a=۰ \\ a+b=۱ \end{cases}\Rightarrow ۲b=۱\Rightarrow b=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ab=\frac{۱}{۴}$$

.۱۰۵ ۱ ۲ ۳ ۴



اگر نقطه‌ی $A(x,y)$ روی دایره‌ی مثلثاتی باشد، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$x^۲+y^۲=۱\Rightarrow (-\frac{۴}{۵})^۲+y^۲=۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱۶}{۲۵}+y^۲=۱\Rightarrow y^۲=\frac{۹}{۲۵}$$

$$\Rightarrow y=\pm\frac{۳}{۵}\Rightarrow$$

چون نقطه‌ی A در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی است، پس y منفی است

$$y=-\frac{۳}{۵}\Rightarrow \sin\theta=-\frac{۳}{۵}\Rightarrow \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{-\frac{۴}{۵}}{-\frac{۳}{۵}}=\frac{۴}{۳}$$

$$۲\cot\theta-۳\cos\theta=\frac{۸}{۳}-(-\frac{۱۲}{۵})=\frac{۴۰+۳۶}{۱۵}=\frac{۷۶}{۱۵}$$

.۱۰۶ ۱ ۲ ۳ ۴

الف) $$\frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}=\frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}\times\frac{۱-\sin\theta}{۱-\sin\theta}=\frac{\cos\theta(۱-\sin\theta)}{۱-\sin^۲\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta(۱-\sin\theta)}{\cos^۲\theta}=\frac{۱-\sin\theta}{\cos\theta}\Rightarrow$$ گزاره‌ی «الف» صحیح است.

ب) $\frac{1+\tan\alpha}{1+\cot\alpha}=\frac{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}}$

$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha\Rightarrow$ بنابراین گزاره‌ی «ب» صحیح است.

ج) $1-\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}=1-\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}=1-\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1+\sin x}$

$=1-(1-\sin x)=1-1+\sin x=\sin x\Rightarrow$ گزاره‌ی «ج» صحیح است

د) $\frac{1}{\cos x}-\tan x=\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1-\sin x}{\cos x}$

$=\frac{1-\sin x}{\cos x}\times\frac{1+\sin x}{1+\sin x}=\frac{1-\sin^2 x}{\cos(1+\sin x)}=\frac{\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$

$=\frac{\cos x}{1+\sin x}\Rightarrow$ گزاره‌ی «د» صحیح است.

بنابراین هر چهار گزاره‌ی داده شده صحیح هستند، یعنی هر چهار تساوی، همواره برقرار هستند و یک اتحاد محسوب می‌شوند.

.۱۰۷ ۱ ۲ **۳** ۴

$\sin x+\tan x=\sin x+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sin x\cos x+\sin x}{\cos x}$

$=\frac{\sin x(\cos x+1)}{\cos x}=\tan x\underbrace{(\cos x+1)}_{\text{نامنفی}}>0$

$\xrightarrow[\text{همواره نامنفی است}]{\text{چون عبارت }(1+\cos x)}\tan x>0$ در ناحیه‌ی اول یا سوم x (۱)

$\frac{1}{\cos x}-\sin x\tan x=\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin^2 x}{\cos x}=\frac{1-\sin^2 x}{\cos x}$

$=\frac{\cos^2 x}{\cos x}=\cos x<0\Rightarrow$ در ناحیه‌ی دوم یا سوم x (۲)

$(1),(2)\xrightarrow{\text{اشتراک}}$ در ناحیه‌ی سوم x

.۱۰۸ **۱** ۲ ۳ ۴

$A=(\cot x-\frac{1}{\sin x})(\cot x+\frac{1}{\sin x})+\frac{\cot^2 x}{\cot^2 x-\cos^2 x}$

$=\cot^2 x-\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}-\cos^2 x}$

$=(\cot^2 x-(1+\cot^2 x))+\frac{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{\frac{\cos^2 x-\cos^2 x\sin^2 x}{\sin^2 x}}$

$=-1+\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\sin^2 x)}=-1+\frac{1}{1-\sin^2 x}=-1+\frac{1}{\cos^2 x}$

$=-1+1+\tan^2 x=\tan^2 x$

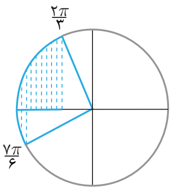
.۱۰۹ **۱** ۲ ۳ ۴

$A=\cos x(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x})$

$=\cos x(\frac{1-\sin x+1+\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)})$

$A=\frac{2\cos x}{1-\sin^2 x}=\frac{2\cos x}{\cos^2 x}=\frac{2}{\cos x}$

چون می‌خواهیم با داشتن محدوده‌ی تغییرات x، بیش‌ترین مقدار عبارت $\frac{2}{\cos x}$ را بیابیم، برای این منظور از دایره‌ی مثلثاتی کمک می‌گیریم. یعنی با تصویر کردن محدوده‌ی تغییرات کمان x روی دایره، مشخص می‌شود که $-1\le\cos x\le-\frac{1}{2}$ است. پس خواهیم داشت:



$-1\le\cos x\le-\frac{1}{2}$

$\xrightarrow{\text{طرفین معکوس}}-2\le\frac{1}{\cos x}<-1$

$\xrightarrow{\text{طرفین در ۲ ضرب}}-4\le\frac{2}{\cos x}\le-2$

$\Rightarrow-4\le A\le-2$

پس بیش‌ترین مقدار عبارت A برابر ۲- است.

.۱۱۰ ۱ **۲** ۳ ۴

ابتدا با استفاده از روابط بین نسبت‌های مثلثاتی، مقادیر $\sin\alpha$ ، $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ را محاسبه می‌کنیم:

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{9}{49}=\frac{40}{49}\xrightarrow{\sin\alpha<0}$

$\sin\alpha=-\sqrt{\frac{40}{49}}=-\frac{2\sqrt{10}}{7}$

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{-2\sqrt{10}}{7}}{\frac{3}{7}}=\frac{-2\sqrt{10}}{3}$

$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{3}{-2\sqrt{10}}$

$A=\sqrt{10}\sin\alpha-\frac{4-\tan^2\alpha}{1-4\cot^2\alpha}$

$=\sqrt{10}\times\frac{-2\sqrt{10}}{7}-\frac{4-\frac{40}{9}}{1-\frac{36}{40}}=\frac{-20}{7}-\frac{-\frac{4}{9}}{\frac{4}{40}}$

$A=-\frac{20}{7}+\frac{40}{9}=\frac{100}{63}$

.۱۱۱ ۱ **۲** ۳ ۴

$\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}=\tan x-\frac{1}{\cos x}\Rightarrow\sqrt{\frac{(1-\sin x)(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}}$

$=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{1}{\cos x}$

$$\sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2 x}}=\frac{\sin x-1}{\cos x}\Rightarrow\sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}}=\frac{\sin x-1}{\cos x}\Rightarrow$$

$$\frac{|1-\sin x|}{|\cos x|}=\frac{\sin x-1}{\cos x}\Rightarrow$$

چون همواره $-1\le\sin x\le 1$ بنابراین همواره $1-\sin x\ge 0$

$$\frac{1-\sin x}{|\cos x|}=\frac{\sin x-1}{\cos x}\Rightarrow\frac{1-\sin x}{|\cos x|}=\frac{1-\sin x}{-\cos x}$$

$$\xrightarrow{\text{باید}}|\cos x|=-\cos x\Rightarrow\cos x<0$$

x در ناحیه‌ی دوم یا سوم قرار دارد.

.۱۱۲ ۱ **۲** ۳ ۴

$$A=\sqrt{1+2\sin x\cos x}+\sqrt{1-2\sin x\cos x}$$
$$=\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}+\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}$$
$$=|\sin x+\cos x|+|\sin x-\cos x|$$
$$=|\sin 20^\circ+\cos 20^\circ|+|\sin 20^\circ-\cos 20^\circ|$$

چون $0<20^\circ<45^\circ$ بنابراین $\cos 20^\circ>\sin 20^\circ$ و بنابراین خواهیم داشت:

$$A=|\sin 20^\circ+\cos 20^\circ|+|\sin 20^\circ-\cos 20^\circ|$$
$$=\sin 20^\circ+\cos 20^\circ+\cos 20^\circ-\sin 20^\circ=2\cos 20^\circ$$

دقت شود که $\sin 20^\circ$ و $\cos 20^\circ$ هر دو مثبت هستند زیرا کمان آن‌ها حاده است به همین دلیل حاصل $\sin 20^\circ+\cos 20^\circ$ عددی مثبت است.

.۱۱۳ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$$
$$=1-2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{2}{5}\Rightarrow\sin^2 x\cos^2 x=\frac{3}{10}\quad(1)$$

از طرفی داریم:

$$\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)$$
$$=1-3\sin^2 x\cos^2 x\xrightarrow{\text{طبق رابطه‌ی (1)}}$$
$$\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\left(\frac{3}{10}\right)=1-\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$$

.۱۱۴ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\tan x+\cot x=2\Rightarrow\tan x+\frac{1}{\tan x}=2$$
$$\Rightarrow\frac{\tan^2 x+1}{\tan x}=2\Rightarrow\tan^2 x+1=2\tan x$$
$$\Rightarrow\tan^2 x-2\tan x+1=0\Rightarrow(\tan x-1)^2=0$$
$$\Rightarrow\tan x-1=0\Rightarrow\tan x=1$$

بنابراین یکی از مقادیر ممکن برای x، مقدار $x=\frac{\pi}{4}$ است که در این صورت خواهیم داشت:

$$A=\sin^8 x+\cos^6 x+\tan^4 x+\cot^2 x$$
$$=\sin^8\frac{\pi}{4}+\cos^6\frac{\pi}{4}+\tan^4\frac{\pi}{4}+\cot^2\frac{\pi}{4}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6+(1)^4+(1)^2=\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+1+1=\frac{35}{16}$$

تذکر

دقت کنید که مثلاً $x=\frac{5\pi}{4}$ نیز یکی دیگر از جواب‌های $\tan x=1$ است که در آن داریم، $\cos x=\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. ولی چون توان‌های سینوس و کسینوس زوج هستند، مقدار خواسته شده فرقی نمی‌کند.

.۱۱۵ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\gamma+\theta=180^\circ\Rightarrow\gamma=180^\circ-\theta\Rightarrow\tan\gamma=\tan(180^\circ-\theta)$$

$\tan\gamma=-\tan\theta\Rightarrow\tan\gamma+\tan\theta\Rightarrow$ گزاره‌ی «الف» صحیح است.

$$(\alpha+\beta)+(\gamma+\theta)=270^\circ\Rightarrow\alpha+\gamma=270^\circ-(\beta+\theta)$$
$$\Rightarrow\sin(\alpha+\gamma)=\sin(270^\circ-(\beta+\theta))\Rightarrow$$

$\sin(\alpha+\gamma)=-\cos(\beta+\theta)\Rightarrow$ گزاره‌ی «ب» نادرست است.

$$(\gamma+\theta)-(\alpha+\beta)=90^\circ\Rightarrow\gamma-\alpha=90^\circ-(\theta-\beta)$$
$$\Rightarrow\tan(\gamma-\alpha)=\tan(90^\circ-(\theta-\beta))$$

$\Rightarrow\tan(\gamma-\alpha)=\cot(\theta-\beta)\Rightarrow$ گزاره‌ی «ج» صحیح است.

$$\gamma+\theta=180^\circ\Rightarrow\gamma=180^\circ-\theta\Rightarrow\sin\gamma=\sin(180^\circ-\theta)$$

$\Rightarrow\sin\gamma=\sin\theta\Rightarrow$ بنابراین گزاره‌ی «د» نیز صحیح است.

یعنی سه گزاره از گزاره‌های داده شده صحیح هستند.

.۱۱۶ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\tan 660^\circ=\tan(720^\circ-60^\circ)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$$

حال به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$\cot 150^\circ=\cot(180^\circ-30^\circ)=-\cot 30^\circ=-\sqrt{3}$$
$$\cot 120^\circ=\cot(180^\circ-60^\circ)=-\cot 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\cot 240^\circ=\cot(180^\circ+60^\circ)=\cot 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\cot 210^\circ=\cot(180^\circ+30^\circ)=\cot 30^\circ=\sqrt{3}$$

بنابراین $\tan 660^\circ=\cot 150^\circ$ و گزینه‌ی ۱ صحیح است.

.۱۱۷ **۱** ۲ ۳ ۴

می‌دانیم اگر کمان‌های α و β مکمل یکدیگر باشند، یعنی $\alpha+\beta=\pi$

آن‌گاه $\cos\beta=-\cos\alpha$ و بنابراین $\cos^3\beta=-\cos^3\alpha$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$$A=\cos^3\frac{\pi}{13}+\cos^3\frac{2\pi}{13}+\cos^3\frac{3\pi}{13}+\cdots+\cos^3\frac{12\pi}{13}$$

$$A=\cos^3\frac{\pi}{13}+\cos^3\frac{2\pi}{13}+\cos^3\frac{3\pi}{13}+\cdots+\cos^3\frac{6\pi}{13}+\cos^3(\pi-\frac{6\pi}{13})+\cos^3(\pi-\frac{5\pi}{13})+\cdots+\cos^3(\pi-\frac{\pi}{13})$$

$$A=\cos^3\frac{\pi}{13}+\cos^3\frac{2\pi}{13}+\cos^3\frac{3\pi}{13}+\cdots+\cos^3\frac{6\pi}{13}-\cos^3\frac{6\pi}{13}-\cos^3\frac{5\pi}{13}-\cdots-\cos^3\frac{\pi}{13}=0$$

تذکر

توجه شود که کمان‌های $\frac{12\pi}{13}$ و $\frac{\pi}{13}$ و همچنین $\frac{11\pi}{13}$ و $\frac{2\pi}{13}$ و ... و همچنین $\frac{7\pi}{13}$ و $\frac{6\pi}{13}$ مکمل یکدیگرند زیرا حاصل‌جمع آن‌ها برابر π می‌شود.

به همین دلیل $\cos^3\frac{12\pi}{13}=-\cos^3\frac{\pi}{13}$ و $\cos^3\frac{11\pi}{13}=-\cos^3\frac{2\pi}{13}$ و ... و $\cos^3\frac{7\pi}{13}=-\cos^3\frac{6\pi}{13}$ است.

۱۱۸. ۱ **۲** ۳ ۴

چون مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر 180° است، پس خواهیم داشت:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi\Rightarrow\hat{B}+\hat{C}=\pi-\hat{A}\Rightarrow$$
$$\tan(B+C)=\tan(\pi-A)\Rightarrow\tan(B+C)=-\tan A$$

۱۱۹. ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\tan(B+20^\circ)\tan(C+40^\circ)=1\Rightarrow\tan(B+20^\circ)=\frac{1}{\tan(C+40^\circ)}$$
$$\Rightarrow\tan(B+20^\circ)=\cot(C+40^\circ)\Rightarrow$$

چون تانژانت یک زاویه با کتانژانت زاویه‌ی دیگری برابر شده است، پس این زوایا متمم یکدیگرند. یعنی خواهیم داشت:

$$B+20^\circ+C+40^\circ=90^\circ\Rightarrow\hat{B}+\hat{C}=30^\circ$$
$$\Rightarrow\hat{A}=180^\circ-(\hat{B}+\hat{C})=180^\circ-30^\circ=150^\circ$$

۱۲۰. ۱ ۲ ۳ **۴**

$$A=\frac{\cos70^\circ+2\sin110^\circ}{\cos160^\circ-2\sin200^\circ}=\frac{\cos(90^\circ-20^\circ)+2\sin(90^\circ+20^\circ)}{\cos(180^\circ-20^\circ)-2\sin(180^\circ+20^\circ)}$$

$$=\frac{\sin20^\circ+2\cos20^\circ}{-\cos20^\circ+2\sin20^\circ}\xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}\ \cos20^\circ]{\text{صورت و مخرج کسر را بر}}$$

$$A=\frac{\tan20^\circ+2}{-1+2\tan20^\circ}=\frac{2/36}{-1+0/72}=\frac{2/36}{-0/28}=\frac{236}{-28}=-\frac{59}{7}$$

۱۲۱. **۱** ۲ ۳ ۴

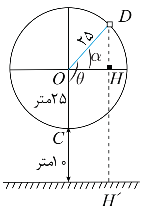
$$\frac{\sin66^\circ+\tan24^\circ\sin24^\circ}{\cos156^\circ}=\frac{\sin66^\circ+\frac{\sin24^\circ}{\cos24^\circ}\sin24^\circ}{\cos156^\circ}$$
$$=\frac{\sin66^\circ\cos24^\circ+\sin^2 24^\circ}{\cos24^\circ\cos156^\circ}$$

چون کمان‌های 66° و 24° متمم یکدیگرند، پس $\sin66^\circ=\cos24^\circ$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{\sin66^\circ\cos24^\circ+\sin^2 24^\circ}{\cos24^\circ\cos156^\circ}=\frac{\cos^2 24^\circ+\sin^2 24^\circ}{\cos24^\circ\cos(180^\circ-24^\circ)}$$
$$=\frac{1}{\cos24^\circ(-\cos24^\circ)}=\frac{1}{-\cos^2 24^\circ}=\frac{1}{-(1-a^2)}=\frac{1}{a^2-1}$$

۱۲۲. ۱ ۲ ۳ **۴**

اگر شخصی از نقطه‌ی C شروع به حرکت کند و به نقطه‌ی مفروض D برسد، در این صورت با فرض این‌که زاویه‌ی شعاع OD با محور xها (سطح افقی) برابر α باشد، خواهیم داشت:



$$\theta=\frac{\pi}{2}+\alpha \qquad (1)$$
$$\sin\alpha=\frac{DH}{OD}=\frac{DH}{25}\Rightarrow DH=25\sin\alpha$$
$$\xrightarrow{(1)}DH=25\sin(\theta-\frac{\pi}{2})$$
$$\Rightarrow DH=-25\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=-25\cos\theta$$
$$\Rightarrow DH'=DH+HH'=-25\cos\theta+35$$
$$\Rightarrow h(\theta)=35-25\cos\theta$$

۱۲۳. ۱ ۲ **۳** ۴

$$\tan(\frac{10\pi}{3})=\tan(3\pi+\frac{\pi}{3})=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

چون باید عبارت مطلوب، عکس $\tan\frac{10\pi}{3}$ باشد، پس گزینه‌ای جواب است که حاصل آن برابر $\frac{1}{\sqrt{3}}$ یا $\frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد. حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$\cot30^\circ=\sqrt{3}$$
$$\cot210^\circ=\cot(180^\circ+30^\circ)=\cot30^\circ=\sqrt{3}$$
$$\cot240^\circ=\cot(180^\circ+60^\circ)=\cot60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\cot300^\circ=\cot(360^\circ-60^\circ)=-\cot60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

پس با ضرب $\tan\frac{10\pi}{3}$ در $\cot240^\circ$، حاصل‌ضرب، برابر یک می‌شود.

۱۲۴. **۱** ۲ ۳ ۴

$\tan ۲۲۵^\circ = \tan(۱۸۰^\circ + ۴۵^\circ) = \tan ۴۵^\circ = ۱$

$\cos(-\frac{۴\pi}{۳}) = \cos\frac{۴\pi}{۳} = \cos(\pi + \frac{\pi}{۳}) = -\cos\frac{\pi}{۳} = -\frac{۱}{۲}$

$\sin(-\frac{۷\pi}{۶}) = -\sin\frac{۷\pi}{۶} = -\sin(\pi + \frac{\pi}{۶}) = -(-\sin\frac{\pi}{۶}) = \frac{۱}{۲}$

$\cot(\frac{۵\pi}{۴}) = \cot(\pi + \frac{\pi}{۴}) = \cot\frac{\pi}{۴} = ۱$

$$A = \frac{\tan ۲۲۵^\circ - \cos(-\frac{۴\pi}{۳})}{\sin(-\frac{۷\pi}{۶}) + \cot(\frac{۵\pi}{۴})} = \frac{۱-(-\frac{۱}{۲})}{\frac{۱}{۲}+۱} = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۳}{۲}} = ۱$$

۱۲۵. ۱ ۲ **۳** ۴

$\tan ۷۲۰^\circ = \tan(۴\times ۱۸۰^\circ) = ۰$

$\sin ۶۳۰^\circ = \sin(۴\times ۱۸۰^\circ - ۹۰^\circ) = -\sin ۹۰^\circ = -۱$

$\cos(-۷۲۰^\circ) = \cos ۷۲۰^\circ = \cos(۴\times ۱۸۰^\circ) = ۱$

$\tan(-۵۴۰^\circ) = -\tan(۵۴۰^\circ) = -\tan(۳۶۰^\circ + ۱۸۰^\circ)$
$= -\tan ۱۸۰^\circ = ۰$

$\cot(-۶۰۰^\circ) = -\cot(۶۰۰^\circ) = -\cot(۳\times ۱۸۰^\circ + ۶۰^\circ)$
$= -\cot ۶۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

$\tan(-۶۰۰^\circ) = -\tan ۶۰۰^\circ = -\tan(۳\times ۱۸۰^\circ + ۶۰^\circ)$
$= -\tan ۶۰^\circ = -\sqrt{۳}$

$A = ۰ + (-۱) + ۰ + ۱ + (-\frac{\sqrt{۳}}{۳}) - (-\sqrt{۳}) = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۱۲۶. ۱ ۲ **۳** ۴

می‌دانیم اگر α و β متمم یکدیگر باشند، آن‌گاه $\tan\alpha = \cot\beta$ و $\tan\beta = \cot\alpha$ بنابراین خواهیم داشت:

$(۲x - \frac{\pi}{۱۵}) + (\frac{۳\pi}{۱۵} + ۳x) = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow ۵x + \frac{۲\pi}{۱۵} = \frac{\pi}{۲}$

$\Rightarrow ۵x = \frac{\pi}{۲} - \frac{۲\pi}{۱۵} \Rightarrow ۵x = \frac{۱۱\pi}{۳۰} \Rightarrow x = \frac{۱۱\pi}{۱۵۰}$

تذکر

در حالت کلی‌تر داریم:

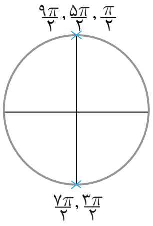
$\tan\alpha = \cot\beta \Rightarrow \alpha + \beta = k\pi + \frac{\pi}{۲}$

۱۲۷. **۱** ۲ ۳ ۴

$\sin(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha) = -\cos\alpha \quad , \quad \sin(\frac{۷\pi}{۲} + \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(\frac{۵\pi}{۲} - \alpha) = \cos\alpha \quad , \quad \sin(\frac{۹\pi}{۲} + \alpha) = \cos\alpha$

بنابراین حاصل عبارت برابر است با:



$A = ۲\sin(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha) - ۳\sin(\frac{۷\pi}{۲} + \alpha)$
$-۴\sin(\frac{۵\pi}{۲} + \alpha) + ۵\sin(\frac{۹\pi}{۲} + \alpha)$

$= ۲(-\cos\alpha) - ۳(-\cos\alpha) - ۴(\cos\alpha) + ۵(\cos\alpha) = ۲\cos\alpha$

مقدار عبارت A به ازای $\alpha = \frac{۲۲\pi}{۳}$ برابر است با:

$A = ۲\cos(\frac{۲۲\pi}{۳}) = ۲\cos(۷\pi + \frac{\pi}{۳}) = -۲\cos\frac{\pi}{۳} = -۲(\frac{۱}{۲}) = -۱$

۱۲۸. ۱ ۲ **۳** ۴

برای محاسبه‌ی $\sin ۱۵^\circ$ می‌توانیم از رابطه‌ی $\cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha$ استفاده کنیم:

$\cos ۳۰^\circ = ۱ - ۲\sin^۲ ۱۵^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱ - ۲\sin^۲ ۱۵^\circ$

$\Rightarrow \sin^۲ ۱۵^\circ = \frac{۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲} = \frac{۲-\sqrt{۳}}{۴} \xrightarrow[\text{است}]{\text{چون } \sin ۱۵^\circ > ۰}$

$\sin ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲}$

۱۲۹. ۱ ۲ ۳ **۴**

از فرمول‌های مثلثاتی $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha$ و

$\sin^۶\alpha + \cos^۶\alpha = ۱ - \frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲\alpha$ و $\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱$

استفاده می‌کنیم:

$$A = \frac{\sin ۱۵^\circ \cos ۱۵^\circ (۲\cos^۲ ۱۵^\circ - ۱)}{\sin^۶ ۱۵^\circ + \cos^۶ ۱۵^\circ} = \frac{\frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ(\cos ۳۰^\circ)}{۱ - \frac{۳}{۴}\sin^۲ ۳۰^\circ}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱ - \frac{۳}{۴}(\frac{۱}{۴})} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۸}}{۱ - \frac{۳}{۱۶}} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۸}}{\frac{۱۳}{۱۶}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۱۳}$$

۱۳۰. ۱ **۲** ۳ ۴

$\text{صورت کسر} = \cos\frac{\pi}{۸}(\cos\frac{\pi}{۸} - \sin\frac{\pi}{۸}) = \cos^۲\frac{\pi}{۸} - \cos\frac{\pi}{۸}\sin\frac{\pi}{۸}$

$= \frac{۱ + \cos\frac{\pi}{۴}}{۲} - \frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۴} = \frac{۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲} = \frac{۱}{۲}$

$\text{مخرج کسر} = \sin ۱۵^\circ(\sin^۴(۷/۵)^\circ - \cos^۴(۷/۵)^\circ)$

$= \sin ۱۵^\circ(\underbrace{\sin^۲(۷/۵)^\circ - \cos^۲(۷/۵)^\circ}_{-\cos(۲(۷/۵)^\circ)})(\sin^۲(۷/۵)^\circ + \cos^۲(۷/۵)^\circ)$