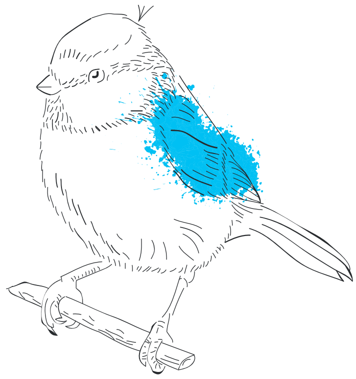
فصل اول

مثلثات

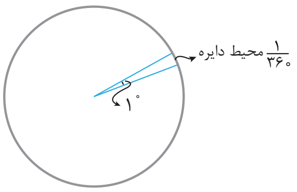
برای مشاهده فیلم های آموزشی این فصل

در سایت آلاء این کد را اسکن کنید.

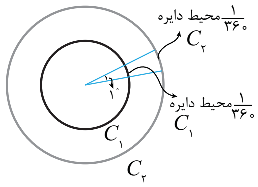


جلسه اول: زاویه ، نسبت‌های مثلثاتی و دایره‌ی مثلثاتی

زاویه

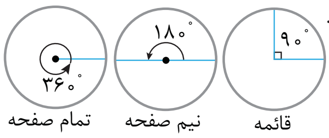


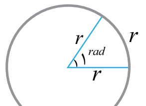
فضای بین دو نیم‌خط را زاویه می‌گوییم. برای اندازه‌گیری زاویه، دو واحد **درجه** و **رادیان** را در اختیار داریم. ابتدا درباره‌ی درجه که برای شما واحد قدیمی‌تر و آشناتری است کمی صحبت می‌کنیم. اگر محیط یک دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به هر قسمت **یک درجه** است. یک درجه را با نماد ۱° نشان می‌دهیم.



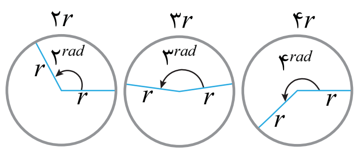
اگر دقت کنید می‌بینید که فرقی نمی‌کند که **شعاع دایره‌ای که برای تعریف** ۱° استفاده می‌کنیم چقدر باشد. به شکل مقابل دقت کنید:

نکته با توجه به آنچه که گفتیم زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به محیط یک دایره‌ی کامل معادل ۳۶۰° است. این زاویه را تمام صفحه هم می‌نامند. به همین ترتیب زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به نصف محیط دایره معادل ۱۸۰° است، این زاویه را نیم‌صفحه هم می‌نامند. همچنین زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به ربع دایره معادل ۹۰° است. این زاویه را قائمه هم می‌نامند.

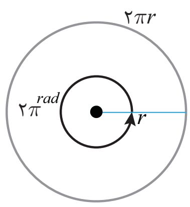




واحد دیگر اندازه‌گیری زاویه **رادیان** است. **یک رادیان**، زاویه مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول کمان برابر با شعاع دایره باشد. یک رادیان را با نماد ۱^{rad} نشان می‌دهیم.



معلوم است که طبق این تعریف ۲^{rad} زاویه مرکزی روبه‌رو به کمانی است که در آن طول کمان دو برابر طول شعاع دایره است. به همین ترتیب زوایای ۳^{rad}، ۴^{rad} و ... را می‌توان تعریف کرد.



چون می‌دانیم محیط دایره‌ای به شعاع r برابر با $۲\pi r$ است $(\pi \simeq ۳/۱۴)$، پس در واقع زاویه‌ی تمام صفحه معادل با $۲\pi^{rad}$ بوده است، چرا که کمان روبه‌رو به آن ۲π برابر شعاع دایره است:

پس می‌توانیم نتیجه بگیریم $۲\pi^{rad}$ معادل با ۳۶۰° است. به این ترتیب مبنای تبدیل واحد رادیان به درجه و برعکس ساخته می‌شود. چون $۲\pi^{rad}$ معادل ۳۶۰° است، می‌توانیم با یک نسبت ساده زاویه‌ی D (درجه) را به R (بر حسب رادیان) تبدیل کنیم و برعکس:

$$\frac{D}{۳۶۰^\circ} = \frac{R}{۲\pi^{rad}} \quad \text{یا} \quad \frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi^{rad}}$$

مثال ۱ **زوایای ۳۰°، ۶۰° و ۴۵° را به رادیان تبدیل کنید.**

پاسخ: با قرار دادن در تناسب بالا داریم:

$$\frac{۳۰^\circ}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi^{rad}} \Rightarrow \frac{R}{\pi^{rad}} = \frac{۱}{۶} \Rightarrow R = \frac{\pi}{۶}^{rad}$$

$$\frac{۶۰^\circ}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi^{rad}} \Rightarrow \frac{R}{\pi^{rad}} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow R = \frac{\pi}{۳}^{rad}$$

$$\frac{۴۵^\circ}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi^{rad}} \Rightarrow \frac{R}{\pi^{rad}} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow R = \frac{\pi}{۴}^{rad}$$

مثال ۲ زوایای $\frac{\pi}{12}^{rad}$ ، $\frac{3\pi}{4}^{rad}$ و $\frac{5\pi}{2}^{rad}$ را به درجه تبدیل کنید.

پاسخ: با قرار دادن در تناسب مذکور داریم:

$$\frac{D}{180^\circ}=\frac{\frac{\pi}{12}^{rad}}{\pi^{rad}}\Rightarrow\frac{D}{180^\circ}=\frac{1}{12}\Rightarrow D=15^\circ$$

$$\frac{D}{180^\circ}=\frac{\frac{3\pi}{4}^{rad}}{\pi^{rad}}\Rightarrow\frac{D}{180^\circ}=\frac{3}{4}\Rightarrow D=135^\circ$$

$$\frac{D}{180^\circ}=\frac{\frac{5\pi}{2}^{rad}}{\pi^{rad}}\Rightarrow\frac{D}{180^\circ}=\frac{5}{2}\Rightarrow D=450^\circ$$

نکته برای سریع‌تر شدن روند تبدیل زوایا از درجه به رادیان و برعکس می‌توانید از روش‌های زیر که از همان تناسب نتیجه شده است استفاده کنید:

درجه $\xrightarrow{\times\frac{180}{\pi}}$ رادیان   رادیان $\xrightarrow{\times\frac{\pi}{180}}$ درجه

مثال ۳ ۱ رادیان، چند درجه است؟ $(\pi\simeq 3/14)$

پاسخ: با قرار دادن در نسبت مذکور یا از نکته‌ی بالا داریم:

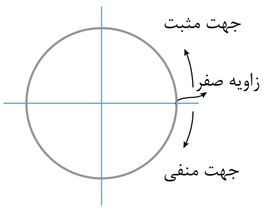
$$1^{rad}\times\frac{180^\circ}{\pi}=\frac{180^\circ}{\pi}\simeq\frac{180^\circ}{3/14}=57/3^\circ$$

نکته حتماً حفظ کنید که $1^{rad}\simeq 57/3^\circ$

نکته زوایای پر کاربرد را بر حسب دو واحد درجه و رادیان در جدول زیر آورده‌ایم. با توجه به کاربرد زیاد آن‌ها توصیه می‌کنیم آن‌ها را حفظ کنید:

D(درجه)	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۲۰	۱۳۵	۱۵۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
R(رادیان)	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

پیدا کردن زوایا در دایره مثلثاتی

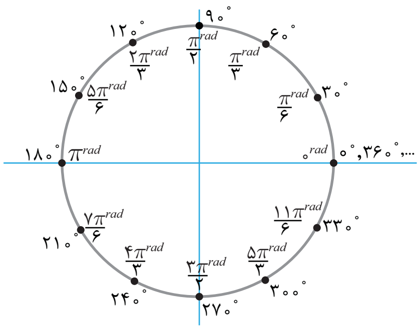


چون کمی بعدتر درباره‌ی دایره‌ی مثلثاتی[1] صحبت خواهیم کرد، ترجیح می‌دهیم همین‌جا درباره‌ی پیدا کردن یک زاویه در دایره‌ی مثلثاتی صحبت کنیم. برای پیدا کردن هر زاویه در دایره‌ی مثلثاتی دو قانون داریم:

قانون ۱: زاویه‌ی صفر، جهت مثبت محور x ها در نظر گرفته می‌شود.

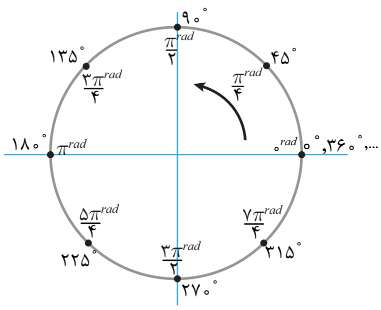
قانون ۲: جهت مثبت، پادساعتگرد و طبیعتاً جهت منفی ساعتگرد است.

با این دو قانون زوایای معروف و پرکاربرد را در دایره‌ی مثلثاتی مشخص کرده‌ایم:



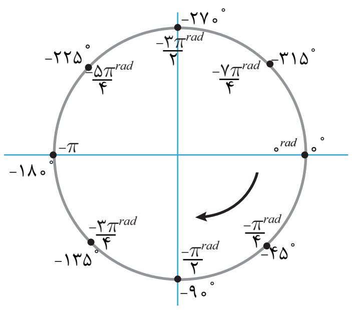
۱- بعداً در دایره‌ی مثلثاتی مفصل‌تر خواهیم گفت که شعاع دایره‌ی مثلثاتی یک واحد و مرکز آن بر مبدأ مختصات واقع است.

برای ساخت زوایای بالا با شروع از صفر، ۳۰ درجه، ۳۰ درجه، افزایش داده‌ایم. (در جهت مثبت حرکت کردیم). حال اگر با شروع از زاویه‌ی صفر، ۴۵ درجه، ۴۵ درجه، افزایش دهیم، به زوایای معروف پرکاربرد دیگری می‌رسیم:



در این حالت، وسط هر چهار ناحیه هم، ساخته خواهند شد. دقت کنید که وسط نواحی چهارگانه به ترتیب $\frac{\pi}{۴}$، $\frac{۳\pi}{۴}$، $\frac{۵\pi}{۴}$ و $\frac{۷\pi}{۴}$ هستند. پس در واقع **مضارب فرد** $\frac{\pi}{۴}$، **وسط چهار ناحیه** خواهند بود.

حال اگر در جهت منفی حرکت کنیم هم، **همین جایگاه‌ها** در دایره‌ی مثلثاتی با اعداد منفی خود را نشان می‌دهند، مثلاً وسط چهار ناحیه به شکل زیر خواهند شد:



تست ۱. زوایای $۱۰۰۰°$، $\frac{۸\pi}{۳}^{rad}$ و ۷^{rad} به ترتیب در کدام نواحی قرار می‌گیرند؟

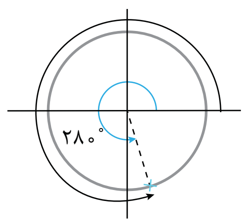
۱) سوم- دوم- اول
۲) چهارم- اول- اول
۳) چهارم- دوم- چهارم
۴) چهارم- دوم- اول

پاسخ: ۱ ۲ ۳ **۴**

برای فهمیدن این‌که $۱۰۰۰°$ در کدام ناحیه قرار دارد، کافی است آن را به $۳۶۰°$ تقسیم کنیم و باقی‌مانده‌ی آن را بیابیم:

۱۰۰۰	۳۶۰
۷۲۰	۲
۲۸۰	

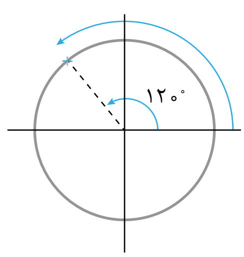
این یعنی برای رسیدن به $۱۰۰۰°$ باید دو دور کامل $(۲ \times ۳۶۰°)$ بعلاوه $۲۸۰°$ دور دایره مثلثاتی بزنیم. پس در ناحیه چهارم قرار خواهیم گرفت. دقت کنید که وقتی از صفر شروع کنید و دو دور بزنید در همان جایگاه صفر قرار خواهید گرفت:



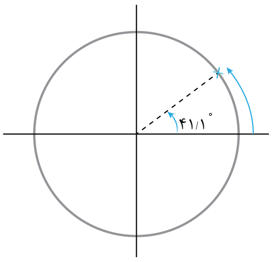
برای زاویه $\frac{۸\pi}{۳}^{rad}$ هم می‌توان آن را به درجه تبدیل کرد:

$$\frac{۸\pi}{۳}^{rad} \times \frac{۱۸۰°}{\pi^{rad}} = ۴۸۰°$$

$۴۸۰°$ برابر است با $۱۲۰° + ۳۶۰°$، پس باید یک دور کامل بزنیم بعلاوه‌ی $۱۲۰°$، پس این زاویه در ناحیه‌ی دوم قرار دارد.

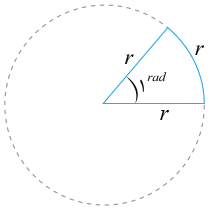


بــرای زاویه ۷^{rad} هم می‌توانیم به این شــکل عمل کنیم که آن را به درجــه تبدیل کنیم. می‌دانیم هر ۱^{rad} معادل $۵۷/۳^\circ$ است. پس $۷\times ۵۷/۳=۴۰۱/۱^\circ$. این زاویه برابر است با $۳۶۰^\circ+۴۱/۱^\circ$. پس این زاویه برابر است با یک دور کامل بعلاوه $۴۱/۱^\circ$ که در ناحیه اول قرار می‌گیرد:



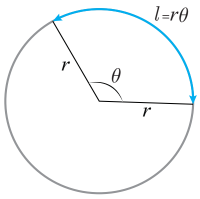
طول کمان

قبلاً زاویه‌ی ۱^{rad} را به این شکل تعریف کردیم که، زاویه‌ای مرکزی است از یک دایره، به طوری‌که طول کمان روبه‌رو به آن برابر با شعاع آن دایره است:

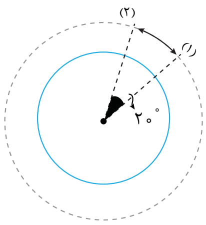


به همین ترتیب طول کمان روبه‌رو به زاویه‌ی ۲^{rad} دو برابر شعاع دایره و ... است.

پس طول کمان روبه‌رو به زاویه‌ی θ^{rad} برابر $l=r\theta$ است، یعنی اگر θ زاویه‌ای مرکزی از یک دایره برحسب رادیان باشد، طول کمان روبه‌رو به آن برابر $l=r\theta$ خواهد بود که در آن r شعاع دایره است:



مثال ٤ **ماهواره‌ای در ارتفاع ۸۰۰ کیلومتری از سطح زمین در گردش است. این ماهواره طی یک گردش، زاویه‌ی خود را نســبت به مرکز زمین ۲۰° تغییر می‌دهد، در این صورت این ماهواره چه مســافتی را پیموده است؟ (شعاع زمین حدود ۶۴۰۰ کیلومتر است.)**

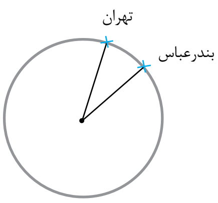


پاسخ: ابتدا زاویه‌ی داده شده را به رادیان تبدیل می‌کنیم:
$$۲۰^\circ\times\frac{\pi}{۱۸۰^\circ}=\frac{\pi}{۹}^{rad}$$

می‌دانیم ماهواره در دایره‌ای به شعاع $۶۴۰۰+۸۰۰=۷۲۰۰$ کیلومتر در حرکت است؛ پس مسافت پیموده شده برابر است با:
$$l=r\theta=۷۲۰۰\times\frac{\pi}{۹}=۸۰۰\pi$$

اگر $\pi\simeq ۳/۱۴$ در نظر بگیریم، این مسافت برابر است با:
$$۸۰۰\pi\simeq ۸۰۰(۳/۱۴)=۲۵۱۲km$$

تست ۲. **تهران و بندرعباس تقریباً طول جغرافیایی یکسانی دارند. اگر مسافت تهران تا بندرعباس ۱۳۰۰ کیلومتر و شعاع کره‌ی زمین ۶۵۰۰ کیلومتر در نظر گرفته شود، عرض جغرافیایی بندرعباس حدوداً چند درجه است؟ (عرض جغرافیایی تهران ۳۵ درجه است.) $(\pi\simeq ۳)$**



۱) ۲۳° ۲) ۲۷°

۳) ۴۷° ۴) ۱۲°

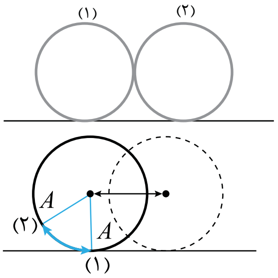
پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

طول کمان $l=۱۳۰۰$ کیلومتر و شعاع $r=۶۵۰۰$ کیلومتر است، پس:
$$l=r\theta\Rightarrow ۱۳۰۰=۶۵۰۰\theta\Rightarrow\theta=\frac{۱}{۵}^{rad}$$

حال این زاویه را به درجه تبدیل می‌کنیم:
$$\frac{R}{\pi}=\frac{D}{۱۸۰}\xrightarrow{\pi\simeq ۳}\frac{\frac{۱}{۵}}{۳}=\frac{D}{۱۸۰}\Rightarrow D=۱۲^\circ$$

پس عرض جغرافیایی بندرعباس $۳۵-۱۲=۲۳^\circ$ است.

تست ۳. **چرخ‌های (۱) و (۲) برهم مماس هستند. چرخ (۱) چند رادیان بچرخد تا در جایگاه چرخ (۲) قرار بگیرد؟**



۱) π ۲) 2π

۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: ۱ ۲ **۳** ۴

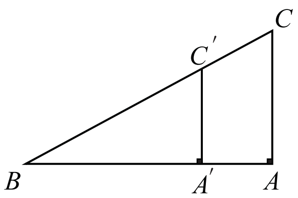
طول کمانی که یک چرخ طی می‌کند، برابر است با مقداری که مرکز چرخ جلو رفته است. به شکل دقت کنید:

در واقع دو قسمت مشخص شده با فلش‌ها هم طول‌اند. فرض کنید نقطه‌ی A روی چرخ ابتدا در جایگاه (۱) بوده و با چرخیدن در جایگاه (۲) قرار بگیرد.

حال راجع به این تست صحبت کنیم. مرکز چرخ به اندازه‌ی دو برابر شعاع $(2r)$ جابه‌جا شده است. پس طول کمانی که چرخیده برابر $2r$ است. یعنی زاویه چرخش برابر است با:

$$l = r\theta \Rightarrow 2r = r\theta \Rightarrow \theta = 2^{rad}$$

نسبت‌های مثلثاتی

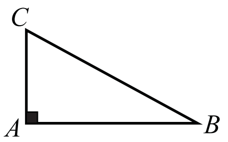


مثلث‌های قائم‌الزاویه ABC و $A'BC'$ را در نظر بگیرید. این دو مثلث متشابهند، چون هر دو دارای یک زاویه‌ی قائمه و زاویه‌ی مشترک B هستند. بنابراین از نسبت تشابه اجزای متناظر در دو مثلث داریم:

$$\frac{A'C'}{BC'} = \frac{AC}{BC}$$

از این تساوی می‌توان نتیجه گرفت برای زاویه‌ی حاده‌ی B مشخص در یک مثلث قائم‌الزاویه، نسبت **ضلع روبه‌رو** به **وتر** مقدار ثابتی است.

این نسبت را در مثلث قائم‌الزاویه برای زاویه حاده‌ی B، **سینوس** می‌نامیم و می‌نویسیم: $\sin B = \dfrac{\text{ضلع روبه‌رو}}{\text{وتر}}$



به همین شکل نسبت مثلثاتی **کسینوس** به صورت **ضلع مجاور** به **وتر** تعریف می‌شود و با تشابه مثلث‌ها می‌توان ثابت کرد برای یک زاویه‌ی مشخص این مقدار برابر با عدد ثابتی است. یعنی در مثلث ABC به شکل روبه‌رو داریم:

$$\cos B = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{BC} \quad \text{و} \quad \sin B = \frac{\text{ضلع روبه‌رو}}{\text{وتر}} = \frac{AC}{BC}$$

نسبت‌های مثلثاتی **تانژانت** و **کتانژانت** هم به شکل زیر تعریف می‌شوند:

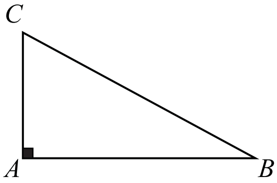
$$\tan B = \frac{\text{ضلع روبه‌رو}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{\sin B}{\cos B}$$

$$\cot B = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع روبه‌رو}} = \frac{AB}{AC} = \frac{\frac{AB}{BC}}{\frac{AC}{BC}} = \frac{\cos B}{\sin B}$$

نکته از تعریف فوق مشخص است که نسبت‌های **تانژانت** و **کتانژانت** یک زاویه **معکوس** هم هستند. یعنی برای زاویه‌ی دلخواه حاده‌ی B همواره داریم:

$$\tan B = \frac{1}{\cot B} \quad \text{یا} \quad \tan B \,.\, \cot B = 1$$

حال می‌خواهیم برای دو زاویه‌ی حاده‌ی B و C در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ تمام نسبت‌های مثلثاتی را بنویسیم:



$$\sin B=\frac{AC}{BC} \qquad \sin C=\frac{AB}{BC}$$
$$\cos B=\frac{AB}{BC} \qquad \cos C=\frac{AC}{BC}$$
$$\tan B=\frac{AC}{AB} \qquad \tan C=\frac{AB}{AC}$$
$$\cot B=\frac{AB}{AC} \qquad \cot C=\frac{AC}{AB}$$

به تساوی‌های مشخص در نسبت‌های مثلثاتی زوایای B و C که با فلش مشخص کردیم، دقت کنید:

$$\sin B=\cos C \quad , \quad \cos B=\sin C \quad , \quad \tan B=\cot C \quad , \quad \cot B=\tan C$$

نتیجه: اگر دو زاویه باهم متمم باشند (جمع‌شان ۹۰° باشد)، سینوس و کسینوس آن‌ها و همچنین تانژانت و کتانژانت آن‌ها به شکل ضربدری باهم برابرند. مثلاً:

$$\sin ۲۰^\circ=\cos ۷۰^\circ \quad , \quad \cos ۱۰^\circ=\sin ۸۰^\circ$$
$$\cos ۴۰^\circ=\sin ۵۰^\circ \quad , \quad \tan ۲۵^\circ=\cot ۶۵^\circ$$
$$\cot ۱۷^\circ=\tan ۷۳^\circ \quad , \quad \cos ۴۳^\circ=\sin ۴۷^\circ$$

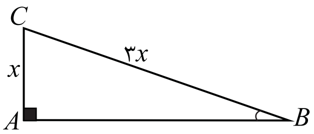
تست ٤. **مقدار عبارت** $\dfrac{\tan ۱۰^\circ\times\sin ۵۰^\circ\times\tan ۸۰^\circ}{\cos ۴۰^\circ}$ **در کدام بازه است؟**

۱) $(۶,+\infty)$ ۲) $(۲,۶)$ ۳) $(۰,۲)$ ۴) $(۲,۴)$

پاسخ: ۱ ۲ **۳** ۴

می‌دانیم $\sin ۵۰^\circ=\cos ۴۰^\circ$ پس این دو عبارت از صورت و مخرج کسر ساده می‌شوند و حاصل برابر است با $\tan ۱۰^\circ\times\tan ۸۰^\circ$ می‌دانیم $\tan ۱۰^\circ=\cot ۸۰^\circ$، پس حاصل عبارت به شکل $\cot ۸۰^\circ\times\tan ۸۰^\circ$ است که می‌دانیم این عبارت برابر است با ۱، چون برای هر زاویه‌ی دلخواه حاده‌ی α، همواره $\tan\alpha\cot\alpha=۱$ است. پس حاصل عبارت در بازه‌ی $(۰,۲)$ قرار دارد.

تست ۵. **در مثلث قائم‌الزاویه‌ی مقابل** $\cos\hat{B}$ **کدام است؟**



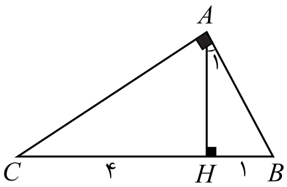
۱) $\dfrac{۱}{۳}$ ۲) $\dfrac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۳) $\dfrac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

پاسخ: ۱ **۲** ۳ ۴

می‌دانیم $\cos\hat{B}=\dfrac{AB}{BC}$، پس از رابطه‌ی فیثاغورس اندازه‌ی AB را به‌دست می‌آوریم:

$$AB=\sqrt{BC^۲-AC^۲}=\sqrt{(۳x)^۲-x^۲}=\sqrt{۸x^۲}=۲\sqrt{۲}x\Rightarrow\cos\hat{B}=\frac{۲\sqrt{۲}x}{۳x}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

تست ۶. **در مثلث قائم‌الزاویه‌ی روبه‌رو، ارتفاع وارد بر وتر رسم شده است. در این صورت** $\sin\hat{A}_۱$ **کدام است؟**



۱) $\dfrac{\sqrt{۵}}{۴}$ ۲) $\dfrac{۲}{\sqrt{۵}}$ ۳) $\dfrac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۴) $\dfrac{۱}{۲}$

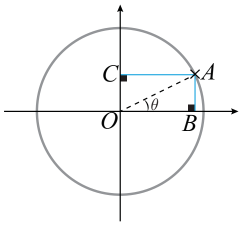
پاسخ: ۱ ۲ **۳** ۴

می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه با رسم ارتفاع وارد بر وتر داریم: $AH^۲=BH\cdot CH$، پس:

$$AH^۲=۴\times۱=۴\Rightarrow AH=۲\xrightarrow{\text{فیثاغورس}}AB^۲=HB^۲+AH^۲=۱^۲+۲^۲=۵\Rightarrow AB=\sqrt{۵}\Rightarrow\sin\hat{A}_۱=\frac{HB}{AB}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

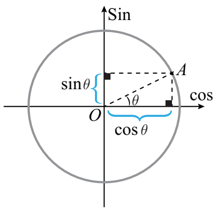
دایره‌ی مثلثاتی

دایره‌ی مثلثاتی ابزاری برای اندازه‌گیری نسبت‌های مثلثاتی است. دایره‌ی مثلثاتی دارای **شعاع یک واحد** است و **مرکز** آن روی **مبدأ مختصات** قرار گرفته است. فرض کنید زاویه‌ی θ در ناحیه‌ی اول قرار گرفته باشد، نقطه‌ی A روی انتهای کمان زاویه‌ی θ قرار گرفته است. نقطه‌ی B پای عمود از A بر محور x ها و نقطه‌ی C پای عمود از A بر محور y ها است. در این صورت داریم:



$$\sin\theta = \frac{AB}{OA} \xrightarrow{OA = \text{شعاع دایره} = 1} \sin\theta = AB \xrightarrow[AB=OC]{OBAC \text{ مستطیل است}} \sin\theta = OC$$

$$\cos\theta = \frac{OB}{OA} \xrightarrow{OA = 1} \cos\theta = OB$$



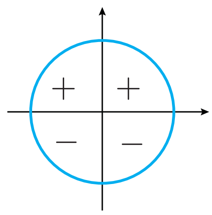
پس **فاصله‌ی پای عمود از نقطه‌ی A بر محور y ها تا نقطه‌ی O** برابر **سینوس θ** و **فاصله‌ی پای عمود از نقطه‌ی A بر محور x ها تا نقطه‌ی O** برابر **کسینوس θ** است. بنابراین اگر در دایره‌ی مثلثاتی بخواهیم سینوس یک زاویه را محاسبه کنیم از انتهای کمان آن زاویه بر محور y ها عمود رسم می‌کنیم و فاصله‌ی پای عمود تا مبدأ مختصات را پیدا می‌کنیم، همچنین برای محاسبه‌ی کسینوس یک زاویه از انتهای کمان آن زاویه خطی بر محور x ها عمود می‌کنیم و فاصله‌ی پای عمود از مبدأ مختصات را پیدا می‌کنیم. به شکل روبه‌رو دقت کنید:

بنابراین در مبحث مثلثات محور x ها را محور کسینوس‌ها و محور y ها را محور سینوس‌ها می‌نامیم. با توجه به آنچه که گفته شد می‌توان نتیجه گرفت مختصات نقطه‌ی A به شکل $A(\cos\theta, \sin\theta)$ است. چون طول این نقطه $\cos\theta$ و عرض آن $\sin\theta$ است.

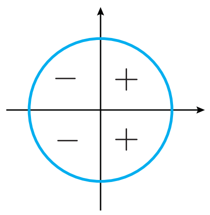
با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زوایای غیر حاده (کوچک‌تر یا مساوی صفر یا بزرگ‌تر یا مساوی ۹۰°) هم تعمیم می‌دهیم.[1]

مشخص است که نقاطی که در ناحیه‌ی دوم مختصات قرار دارند، دارای طول منفی و عرض مثبت هستند، بنابراین اگر انتهای کمان یک زاویه در ناحیه‌ی دوم باشد، کسینوس آن منفی و سینوس آن مثبت است. به همین ترتیب علامت نسبت‌های مثلثاتی در هر یک از نواحی چهارگانه به شکل زیر است:

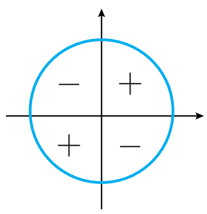
«علامت سینوس»



«علامت کسینوس»



« علامت تانژانت و کتانژانت[2]»



تست ۷. علامت‌های عبارات $\cos ۴$ و $\tan ۵$ به ترتیب چگونه است؟

۱) مثبت- مثبت ۲) منفی- منفی ۳) مثبت- منفی ۴) منفی- مثبت

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

دقت کنید که زوایا برحسب رادیان هستند. آن‌ها را به درجه تبدیل می‌کنیم تا تشخیص دهیم در کدام ناحیه قرار دارند. می‌دانیم هر یک رادیان تقریباً معادل $۵۷/۳^\circ$ است، پس:

$$۴^{rad} \times ۵۷/۳ \simeq ۲۲۹/۲^\circ \rightarrow \text{ناحیه سوم}$$

$$۵^{rad} \times ۵۷/۳ \simeq ۲۸۶/۵^\circ \rightarrow \text{ناحیه چهارم}$$

در ناحیه‌ی دوم، کسینوس منفی است، پس $\cos ۴ < ۰$ و در ناحیه‌ی چهارم، کسینوس مثبت و سینوس منفی است، پس تانژانت منفی است، یعنی $\tan ۵ < ۰$

۱- چون نسبت‌های مثلثاتی را در مثلث قائم‌الزاویه و برای زوایای حاده تعریف کرده بودیم.

۲- از علامت سینوس و کسینوس نتیجه گرفتیم.

تست ۸. اگر برای زاویه‌ی α داشته باشیم، $\sqrt{\cot\alpha}=-\sin\alpha$ آن‌گاه انتهای کمان α در کدام ناحیه قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

پاسخ: ۱ ۲ **۳** ۴

چون $\sqrt{\cot\alpha}\ge 0$ پس: $-\sin\alpha\ge 0\Rightarrow\sin\alpha\le 0\Rightarrow$ در ناحیه‌ی سوم یا چهارم است. α (*)

می‌دانیم عبارت زیر رادیکال (با فرجه‌ی زوج) باید نامنفی باشد:

$\cot\alpha\ge 0\Rightarrow\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ge 0\xrightarrow{\sin\alpha\le 0}\cos\alpha\le 0\Rightarrow$ در ناحیه‌ی دوم یا سوم است. α (**)

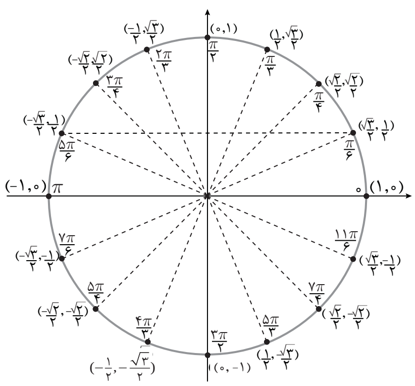
اشتراک موارد (*) و (**) ناحیه‌ی سوم است، دقت کنید که در ناحیه‌ی سوم هر دو نسبت مثلثاتی سینوس و کسینوس منفی است.

نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف و پرکاربرد[1]

قبلاً گفتیم اگر نقطه‌ی A انتهای کمان زاویه‌ی α روی دایره‌ی مثلثاتی باشد، مختصات آن به شکل $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$ است، بنابراین نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف را به شکل جدول و بار دیگر به شکل مختصات در دایره‌ی مثلثاتی نشان می‌دهیم:

زاویه (درجه)	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۲۰	۱۳۵	۱۵۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
زاویه (رادیان)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
سینوس	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
کسینوس	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
تانژانت[2]	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	تعریف نشده	0
کتانژانت[3]	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	تعریف نشده	0	تعریف نشده

حال همین نسبت‌ها (البته کامل‌تر) را در دایره‌ی مثلثاتی ببینید. در دایره‌ی مثلثاتی فعلاً فقط نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را آورده‌ایم. کمی جلوتر درباره‌ی محور تانژانت صحبت می‌کنیم و آن را هم در دایره‌ی مثلثاتی نشان می‌دهیم.



۱- از اثبات محاسبه‌ی نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف می‌گذریم.

۲ و ۳- برای مقادیر تانژانت و کتانژانت از تقسیم سینوس و کسینوس بر هم استفاده می‌کنیم.

نکته همان‌طور که قبلاً گفتیم مختصات هر نقطه به شکل $(\cos\theta,\sin\theta)$ است. مثلاً در زاویه‌ی $\frac{۲\pi}{۳}$ مختصات نقطه به شکل $(-\frac{۱}{۲},\frac{\sqrt{۳}}{۲})$ نوشته شده است. این یعنی $\cos\frac{۲\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}$ و $\sin\frac{۲\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$.

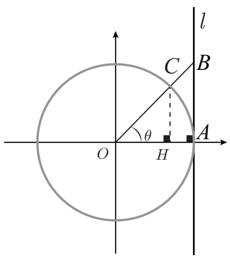
نکته به نقاط روبه‌روی هم (هم‌عرض یا هم‌طول) دقت کنید. مثلاً $\frac{\pi}{۶}$ و $\frac{۵\pi}{۶}$ روبه‌روی هم (هم‌عرض) هستند، پس دارای سینوس برابر و کسینوس قرینه‌اند، یعنی: $\sin\frac{\pi}{۶}=\sin\frac{۵\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$ و $\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $\cos\frac{۵\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$.

نکته به مضارب فرد $\frac{\pi}{۴}$، $(\frac{(۲k+۱)\pi}{۴})$ دقت کنید. این نقاط در وسط چهار ناحیه قرار می‌گیرند. سینوس و کسینوس این زوایا یا $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ یا $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است که با توجه به علامت نسبت مثلثاتی در آن ناحیه می‌توانید علامت آن را تعیین کنید. مثلاً در وسط ناحیه‌ی دوم (چون در ناحیه‌ی دوم سینوس مثبت و کسینوس منفی است.) داریم: $\sin\frac{۳\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\cos\frac{۳\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$.

محور تانژانت‌ها

اگر بر دایره‌ی مثلثاتی در نقطه‌ی A خطی مماس کنیم، از تشابه مثلث‌های OAB و OCH داریم:

$$\frac{CH}{AB}=\frac{OH}{OA}\xrightarrow[OA=۱]{CH=\sin\theta,\ OH=\cos\theta}\frac{\sin\theta}{AB}=\frac{\cos\theta}{۱}\Rightarrow AB=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$$



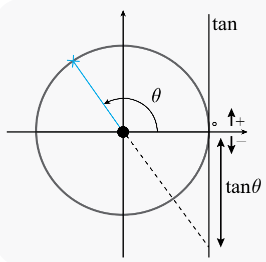
یعنی برای این‌که تانژانت یک زاویه را بیابیم، کافیست از مرکز دایره به انتهای کمان آن زاویه (در اینجا نقطه‌ی C) وصل کنیم و امتداد دهیم تا خط l را در نقطه‌ی B قطع کند. در این صورت فاصله‌ی نقطه‌ی B از نقطه‌ی A برابر تانژانت زاویه‌ی θ است. بنابراین خط l را **محور تانژانت‌ها** می‌نامیم.

نکته می‌دانیم $\sin ۰=۰$ و $\cos ۰=۱$، پس $\tan ۰=۰$ است. بنابراین با امتداد زاویه‌ی صفر باید محور تانژانت‌ها را در عدد صفر قطع کنیم، پس نقطه‌ی A در واقع صفر محور تانژانت‌ها است.

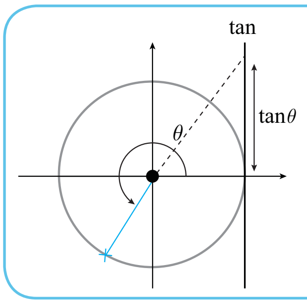
نکته چون در ناحیه‌ی اول سینوس و کسینوس مثبت است، تانژانت هم مثبت است، بنابراین نقاط بالای نقطه‌ی A روی محور تانژانت‌ها نشان دهنده‌ی مقادیر مثبت تانژانت هستند.

نکته در ناحیه‌ی دوم، سینوس مثبت و کسینوس منفی است، پس تانژانت هم‌منفی است. ضمناً اگر زاویه در ناحیه‌ی دوم را امتداد دهیم، در همان جهت محور تانژانت‌ها را قطع نمی‌کند. پس در جهت مخالف امتداد می‌دهیم تا محور تانژانت را در نقطه‌ای پایین نقطه‌ی A قطع کند. بنابراین نقاط پایین نقطه‌ی A نشان دهنده‌ی مقادیر منفی روی محور تانژانت‌ها هستند.

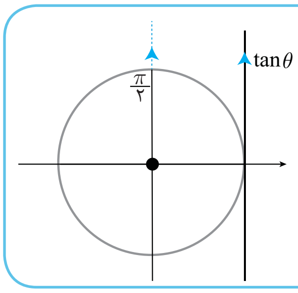
تذکر *با این تعاریف می‌توان علامت تانژانت (و کتانژانت) را با محور تانژانت‌ها هم پیدا کرد.*



نکته در زوایای ناحیه‌ی سوم هم به همین شکل باید امتداد زاویه در جهت مخالف را برای پیدا کردن تانژانت زاویه مذکور، مورد نظر داشته باشیم:

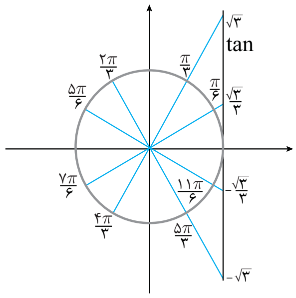


نکته از قبل می‌دانستیم $\tan\frac{\pi}{۲}$ تعریف نشده است (چون $\sin\frac{\pi}{۲}=۱$ و $\cos\frac{\pi}{۲}=۰$). این موضوع را از دایره‌ی مثلثاتی و محور تانژانت‌ها هم می‌توان فهمید. اگر زاویه‌ی $\frac{\pi}{۲}$ را امتداد دهیم هرگز محور تانژانت‌ها را قطع نخواهد کرد، چرا که با آن موازی است. این موضوع برای زاویه $\frac{۳\pi}{۲}$ هم صادق است.

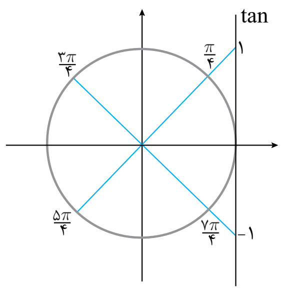


نکته تانژانت زوایای معروف را در دو دسته روی محور تانژانت‌ها نشان می‌دهیم:

زوایای مرتبط با ۳۰°



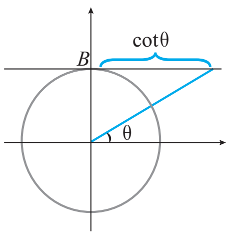
زوایای مرتبط با ۴۵° (وسط چهار ناحیه)



تذکر

با تصور کردن زوایای مرتبط با ۳۰° و ۴۵° در دایره‌ی مثلثاتی می‌توانید به راحتی تانژانت آن‌ها را حفظ کنید. همچنین دقت کنید که در وسط ناحیه‌ی اول و سوم مقدار تانژانت (و کتانژانت) برابر ۱ و در وسط ناحیه‌ی دوم و چهارم مقدار تانژانت (و کتانژانت) برابر ۱- است.

ویژه دکترها: محور کتانژانت‌ها[۱]



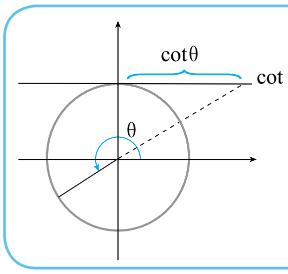
مشابه با محور تانژانت، با تشابه مثلث‌ها می‌توان ثابت کرد، اگر خطی در نقطه‌ی B بر دایره‌ی مثلثاتی مماس کنیم، محور کتانژانت‌ها را رسم کرده‌ایم، چرا که اگر فاصله امتداد هر زاویه را از نقطه‌ی B بیابیم، کتانژانت آن زاویه را نشان می‌دهد:

نکته چون $\cot\frac{\pi}{۲}=۰$ است، پس نقطه‌ی B صفر محور کتانژانت‌ها است.

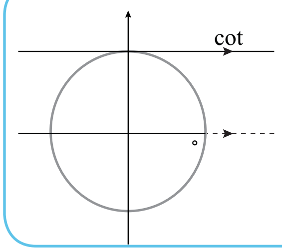
نکته چون در ناحیه‌ی اول و دوم به ترتیب مقدار کتانژانت مثبت و منفی است، نقاط راست نقطه‌ی B نشان دهنده‌ی مقادیر مثبت و نقاط چپ نقطه‌ی B نشان دهنده‌ی مقادیر منفی کتانژانت روی محور است.

۱- محور کتانژانت‌ها در کتاب درسی نیست ولی یاد گرفتن آن ممکن است سرعت شما را در حل بعضی تست‌ها افزایش دهد.

نکته در ناحیه‌ی سوم و چهارم که امتداد زاویه محور کتانژانت را قطع نمی‌کند، آن را در جهت خلاف آن امتداد می‌دهیم:

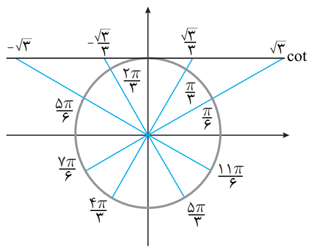


نکته از قبل می‌دانستیم $\cot ۰$ تعریف نشده است (چون $\cos ۰ = ۱$ و $\sin ۰ = ۰$). این موضوع را می‌توان از دایره‌ی مثلثاتی و محور کتانژانت‌ها هم فهمید، چرا که اگر زاویه‌ی صفر را امتداد دهیم هرگز محور کتانژانت‌ها را قطع نخواهد کرد، چون با آن موازی خواهد بود.

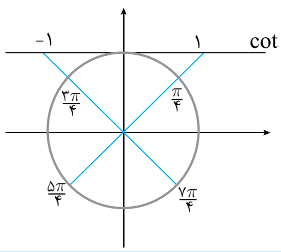


نکته کتانژانت زوایای معروف را در دو دسته روی محور کتانژانت‌ها نشان می‌دهیم:

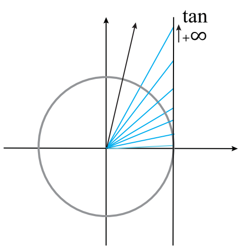
زوایای مرتبط با ۳۰°

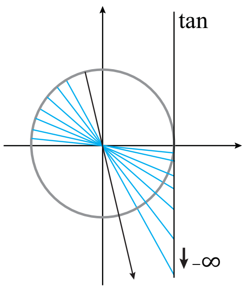


زوایای مرتبط با ۴۵° (وسط چهار ناحیه)



محدوده‌ی نسبت‌های مثلثاتی





می‌دانیم هر نقطه روی دایره‌ی مثلثاتی به شکل $A(\cos\theta, \sin\theta)$ است. همچنین واضح است که هر نقطه روی دایره دارای طول و عرض، درمحدوده‌ی $[-۱\,,\,۱]$ است. پس می‌توان نتیجه گرفت برای هر زاویه دلخواه θ : $-۱ \le \sin\theta \le ۱$ و $-۱ \le \cos\theta \le ۱$ برخلاف نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس، نسبت‌های مثلثاتی تانژانت و کتانژانت محدودیتی ندارند و می‌توانند خیلی بزرگ یا خیلی کوچک باشند. مثلاً برای نسبت مثلثاتی تانژانت با افزایش زاویه‌ی θ از صفر تا $\frac{\pi}{۲}$ روند افزایش تانژانت بدون هیچ محدودیتی ادامه پیدا می‌کند و با نزدیک شدن θ به $\frac{\pi}{۲}$ مقدار تانژانت خیلی بزرگ شده است.[۱]

همچنین به محض این‌که θ از $\frac{\pi}{۲}$ عبور کند، مقدار تانژانت به شدت کاهش پیدا کرده و خیلی کوچک می‌شود.[۲] پس از آن با افزایش θ از $\frac{\pi}{۲}$ به سمت π تانژانت **رشد کرده** و به صفر نزدیک می‌شود.

۱- بعداً در حد و پیوستگی خواهیم گفت که: $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{۲}^-} \tan\theta = +\infty$

۲- بعداً در حد و پیوستگی خواهیم گفت که: $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{۲}^+} \tan\theta = -\infty$

روی محور کتانژانت‌ها یا با استفاده از خواص نامساوی‌ها می‌توان این موضوع را برای کتانژانت هم نشان داد. پس می‌توان گفت:

$$-\infty < \tan\theta < +\infty \quad , \quad -\infty < \cot\theta < +\infty$$

یعنی تانژانت و کتانژانت یک زاویه ممکن است برابر هر عدد حقیقی باشند ولی سینوس و کسینوس یک زاویه عددی در بازه‌ی $[-۱,۱]$ خواهند بود.

تست ۹. حداکثر مقدار عبارت $A = ۲\sin\theta - ۳$ از حداقل آن چقدر بیش‌تر است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۳

پاسخ: ۱

می‌دانیم $-۱ \le \sin\theta \le ۱$، پس: $-۲ \le ۲\sin\theta \le ۲ \Rightarrow -۵ \le ۲\sin\theta - ۳ \le -۱$

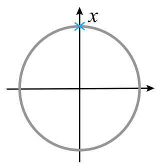
یعنی حداکثر این عبارت ۱- و حداقل آن ۵- است. پس حاصل نهایی $۴ = (-۵) - ۱-$ است.

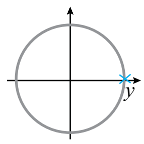
تست ۱۰. اگر $\sin x + \cos y = ۲$ باشد، حاصل $\cot x + \sin y$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) تعریف نشده

پاسخ: ۲

چون حداکثر مقدار $\sin x$ و $\cos y$، برابر ۱ است، پس حداکثر مقدار مجموع آن‌ها هم برابر ۲ است و این مجموع زمانی برابر ۲ خواهد شد که هر دو برابر با ۱ (یعنی حداکثرشان) باشند:

$\sin x = ۱ \xrightarrow{\text{جایگاه } x \text{ در دایره}}$  $\Rightarrow \cos x = ۰ \Rightarrow \cot x = ۰$

$\cos y = ۱ \xrightarrow{\text{جایگاه } y \text{ در دایره}}$  $\Rightarrow \sin y = ۰$

پس $\cot x + \sin y = ۰$.

تست ۱۱. کم‌ترین مقدار عبارت $B = \dfrac{۳}{۲\sin^۲ x + ۱}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: ۳

از نامساوی $-۱ \le \sin x \le ۱$ شروع می‌کنیم:

$$-۱ \le \sin x \le ۱ \Rightarrow ۰ \le \sin^۲ x \le ۱ \Rightarrow ۰ \le ۲\sin^۲ x \le ۲ \Rightarrow ۱ \le ۲\sin^۲ x + ۱ \le ۳ \Rightarrow \frac{۱}{۳} \le \frac{۱}{۲\sin^۲ x + ۱} \le ۱ \Rightarrow ۱ \le \frac{۳}{۲\sin^۲ x + ۱} \le ۳$$

پس کم‌ترین مقدار این عبارت برابر ۱ و بیش‌ترین مقدار آن برابر ۳ است.

تست ۱۲. کم‌ترین مقدار عبارت $A = \cos^۲ x - \cos x$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) ۱-

پاسخ: ۳

راه‌حل اول: عبارت داده شده را مربع کامل می‌کنیم:

$$A = (\cos x - \tfrac{۱}{۲})^۲ - \tfrac{۱}{۴} \xrightarrow{(\cos x - \frac{۱}{۲})^۲ \ge ۰} (\cos x - \tfrac{۱}{۲})^۲ - \tfrac{۱}{۴} \ge -\tfrac{۱}{۴}$$

پس حداقل مقدار این عبارت $-\frac{۱}{۴}$ است. (این مقدار به ازای $\cos x = \frac{۱}{۲}$، به‌دست می‌آید.)

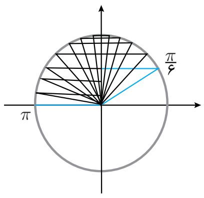
راه‌حل دوم: از تغییر متغیر $\cos x = t$ عبارت داده شده را به شکل یک عبارت درجه دوم درمی‌آوریم که حداقل آن $-\frac{\Delta}{۴a}$ خواهد بود:

$$\cos x = t \Rightarrow A = t^۲ - t \Rightarrow A_{\min} = -\frac{\Delta}{۴a} = -\frac{۱}{۴(۱)} = -\frac{۱}{۴}$$

تذکر دقت کنید که این مقدار به ازای $t=-\frac{b}{۲a}=\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آید.

اگر محدوده‌ی تغییرات زاویه در صورت سؤال داده شود، با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی، می‌توان محدوده‌ی تغییرات نسبت‌های مثلثاتی را یافت. به مثال زیر دقت کنید.

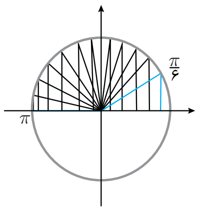
مثال ۵ اگر $\frac{\pi}{۶}<x<\pi$ باشد، محدوده‌ی تغییرات $\sin x$ و $\cos x$ را بیابید.



پاسخ: با رسم دایره‌ی مثلثاتی محدوده‌ی تغییرات هر یک از نسبت‌های مثلثاتی را پیدا می‌کنیم:

همان‌طور که در دایره‌ی روبه‌رو مشخص است، در ابتدا $\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$ است و با افزایش زاویه از $\frac{\pi}{۶}$ تا $\frac{\pi}{۲}$ مقدار سینوس افزایش می‌یابد تا در $\frac{\pi}{۲}$ که $\sin\frac{\pi}{۲}=۱$ می‌شود و سپس با افزایش زاویه x از $\frac{\pi}{۲}$ تا π مقدار سینوس روند کاهشی دارد تا در π که $\sin\pi=۰$ خواهد بود.

پس حداکثر مقدار آن برابر ۱ و حداقل آن برابر صفر خواهد بود. البته دقت کنید که $\frac{\pi}{۲}$ عضو بازه $(\frac{\pi}{۶}\,,\,\pi)$ است ولی π عضو این بازه نیست، پس مقدار سینوس برابر ۱ می‌شود ولی برابر صفر نمی‌شود. یعنی: $۰<\sin x\le ۱$

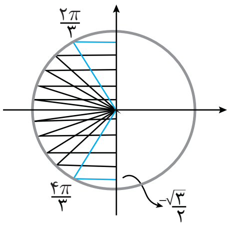


در نسبت مثلثاتی کسینوس هم با شروع از $\frac{\pi}{۶}$ داریم $\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و با افزایش x از $\frac{\pi}{۶}$ تا π دائماً کسینوس کاهش می‌یابد تا π که در آن $\cos\pi=-۱$ است، پس: $-۱<\cos x<\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

تست ۱۳. اگر $\frac{\pi}{۳}\le x\le\frac{۲\pi}{۳}$ باشد، حداقل مقدار $\sin ۲x$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴



ابتدا از محدوده‌ی تغییرات x، بازه‌ی تغییرات $۲x$ را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{\pi}{۳}\le x\le\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow\frac{۲\pi}{۳}\le ۲x\le\frac{۴\pi}{۳}$$

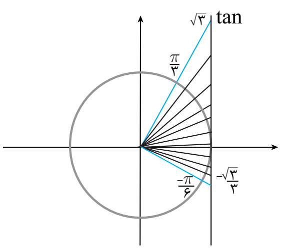
حال تغییرات سینوس را در بازه‌ی $[\frac{۲\pi}{۳},\frac{۴\pi}{۳}]$ پیدا می‌کنیم:

معلوم است در این بازه کم‌ترین مقدار سینوس برابر $\sin\frac{۴\pi}{۳}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است.

تست ۱۴. اگر $x\in[-\frac{\pi}{۲}\,,\,۰]$، آن‌گاه $\tan(x+\frac{\pi}{۳})$ در کدام بازه است؟

۱) $[-\sqrt{۳},\frac{\sqrt{۳}}{۳}]$ ۲) $[-\frac{\sqrt{۳}}{۳},\frac{\sqrt{۳}}{۳}]$ ۳) $(-\infty\,,\,۰]$ ۴) $[-\frac{\sqrt{۳}}{۳},\sqrt{۳}]$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

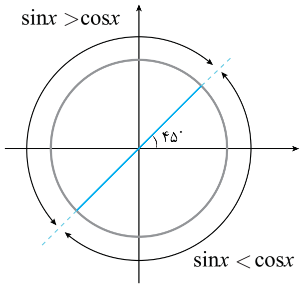


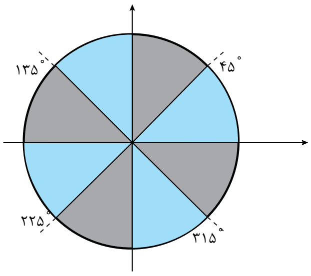
از بازه‌ی $-\frac{\pi}{۲}\le x\le ۰$ بازه‌ی تغییرات کمان $(x+\frac{\pi}{۳})$ را پیدا می‌کنیم:

$$-\frac{\pi}{۲}\le x\le ۰\Rightarrow-\frac{\pi}{۶}\le x+\frac{\pi}{۳}\le\frac{\pi}{۳}\xrightarrow{\text{دایره‌ی مثلثاتی}}$$

از دایره‌ی مثلثاتی و محور تانژانت‌ها معلوم است که $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\le\tan(x+\frac{\pi}{۳})\le\sqrt{۳}$.

نکته در دایره‌های مثلثاتی زیر مقادیر نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس و همچنین تانژانت و کتانژانت را با هم مقایسه کرده‌ایم. بهتر است بعد از درک علت این محدوده‌ها، آن‌ها را به یاد بسپارید:





در نواحی روشن‌تر $\cot x > \tan x$ و در نواحی تیره‌تر $\tan x > \cot x$ است.

تست ۱۵. **چه تعداد از نامساوی‌های زیر صحیح هستند؟**

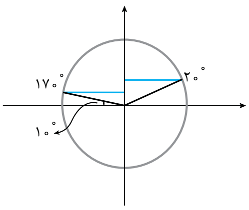
الف) $\sin 170^\circ > \sin 20^\circ$ **ب)** $\cos 2 > \cos 3$ **ج)** $\sin 1000^\circ > \cos 1000^\circ$ **د)** $\tan 1 > \cot 1$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

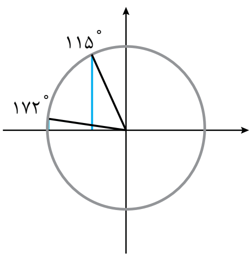
پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

بررسی همه‌ی موارد:

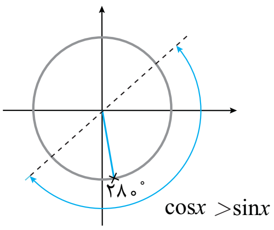
الف) $\sin 20^\circ > \sin 170^\circ$



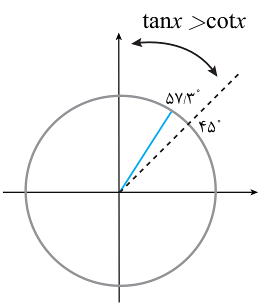
ب) دقت کنید که $2^{rad} \simeq 115^\circ$ و $3^{rad} \simeq 172^\circ$. از شکل معلوم است که $\cos 115^\circ > \cos 172^\circ$



ج) دقت کنید که $1000^\circ = 2(360^\circ) + 280^\circ$، پس 1000° برابر با دو دور کامل و 280° اســت. یعنی در جایگاه 280° قرار می‌گیرد و در این جایگاه کسینوس از سینوس بزرگ‌تر است.



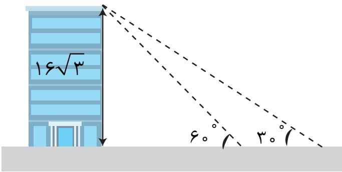
د) دقت کنید $1^{rad} \simeq 57/3^\circ$ و این زاویه در محدوده‌ای است که در آن تانژانت از کتانژانت بیش‌تر است.



پس موارد «ب» و «د» صحیح هستند.

کاربرد مثلثات

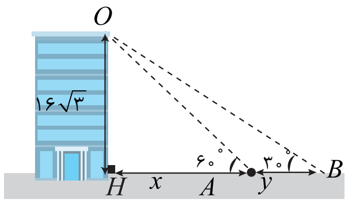
چند مثال از کاربردهای ساده‌ی مثلثات و با تعریف نسبت‌های مثلثاتی را ببینید:



مثال ۶ یک شخص در جلوی یک ساختمان به ارتفاع $۱۶\sqrt{۳}$ متر آن را با زاویه ۶۰° می‌بیند. این شخص چقدر باید از ساختمان دور شود تا آن را با زاویه‌ی ۳۰° ببیند؟

پاسخ: اگر فاصله‌ی شخص تا پای آپارتمان در حالت اول را x در نظر بگیریم، داریم:

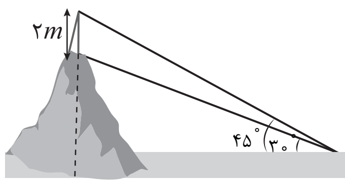
$$\overset{\Delta}{OAH}: \tan ۶۰^\circ = \frac{۱۶\sqrt{۳}}{x} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{۱۶\sqrt{۳}}{x} \Rightarrow x = ۱۶$$



همچنین در مثلث OHB داریم:

$$\overset{\Delta}{OHB}: \tan ۳۰^\circ = \frac{۱۶\sqrt{۳}}{۱۶+y} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{۱۶\sqrt{۳}}{۱۶+y} \Rightarrow ۴۸ = ۱۶ + y \Rightarrow y = ۳۲$$

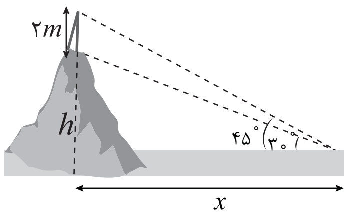
تست ۱۶. یک سرباز تپه‌ای به ارتفاع h را با زاویه ۳۰° و نوک دکل بالای تپه را به زاویه ۴۵° می‌بیند. اگر دکل دارای ارتفاع ۲ متر باشد، ارتفاع تپه چقدر است؟



۱) $\sqrt{۳}$
۲) $\sqrt{۳}+۱$
۳) $\sqrt{۳}-۱$
۴) ۲

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

اگر فاصله‌ی افقی سرباز تا تپه را x درنظر بگیریم، داریم:

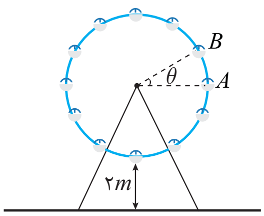


$$\tan ۴۵^\circ = \frac{h+۲}{x} \Rightarrow ۱ = \frac{h+۲}{x} \Rightarrow x = h+۲ \qquad (*)$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{h}{x} \Rightarrow x = h\sqrt{۳}$$

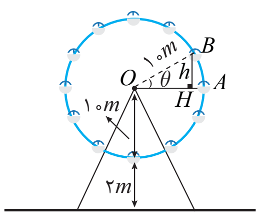
$$(*) \xrightarrow{x=h\sqrt{۳}} h\sqrt{۳} = h+۲ \Rightarrow h(\sqrt{۳}-۱) = ۲ \Rightarrow h = \frac{۲}{\sqrt{۳}-۱} \Rightarrow h = \frac{۲}{\sqrt{۳}-۱} \times \frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۳}+۱} = \frac{۲(\sqrt{۳}+۱)}{۳-۱} = \sqrt{۳}+۱$$

تست ۱۷. کابین A از یک چرخ و فلک در راستای افقی قرار گرفته است. با چرخش چرخ و فلک به اندازه‌ی زاویه‌ی θ کابین A در جایگاه B قرار می‌گیرد. در این صورت ارتفاع کابین A از سطح زمین چقدر است؟ (شعاع چرخ و فلک ۱۰ متر است.)



۱) $۱۰\sin\theta$
۲) $۱۲+۱۰\cos\theta$
۳) $۲+۱۰\sin\theta$
۴) $۱۲+۱۰\sin\theta$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴



طبق شکل ارتفاع کابین در نقطه‌ی B برابر با $h+۱۲$ است. در مثلث OBH داریم:

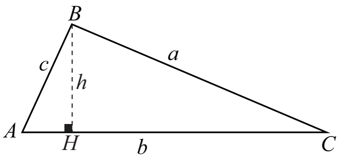
$$\sin\theta = \frac{BH}{OB} \xrightarrow[OB=۱۰]{BH=h} \sin\theta = \frac{h}{۱۰} \Rightarrow h = ۱۰\sin\theta \Rightarrow \text{ارتفاع کابین در نقطه‌ی } B = ۱۲+۱۰\sin\theta$$

مثال ۷ در تست قبل اگر چرخ و فلک هر دو دقیقه یک دور بزند، ارتفاع کابین را بعد از زمان t (برحسب ثانیه) به‌دست آورید.

پاسخ: می‌دانیم در $۱۲۰s$، چرخ و فلک $۲\pi^{rad}$ می‌چرخد، پس اگر در زمان t به اندازه‌ی θ چرخیده باشد، داریم:

$$\frac{\theta}{۲\pi} = \frac{t}{۱۲۰} \Rightarrow \theta = \frac{\pi t}{۶۰} \Rightarrow h = ۱۲+۱۰\sin\theta = ۱۲+۱۰\sin\frac{\pi t}{۶۰}$$

مساحت مثلث



می‌دانیم در مثلث مساحت برابر نصف حاصل‌ضرب ارتفاع در قاعده است:

$$S=\frac{hb}{۲}$$

از طرفی در مثلث ABH داریم:

$$\sin\hat{A}=\frac{h}{c}\Rightarrow h=c\sin\hat{A}$$

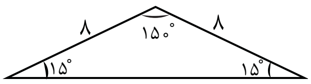
با جایگذاری در رابطه‌ی بالا داریم:

$$S=\frac{c\sin\hat{A}\times b}{۲}=\frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A}$$

پس مساحت هر مثلث برابر نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن‌هاست. به همین ترتیب می‌توان مساحت را از روابط زیر هم به‌دست آورد:

$$S=\frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}ba\sin\hat{C}=\frac{۱}{۲}ac\sin\hat{B}$$

مثال ۸ **در یک مثلث متساوی الساقین، اندازه‌ی هر ساق برابر ۸ واحد و زاویه مجاور به ساق برابر ۱۵ درجه است. مساحت این مثلث را بیابید.**



پاسخ: مشخص است که زاویه‌ی رأس برابر است با:

$$۱۸۰-۲(۱۵)=۱۵۰^\circ$$

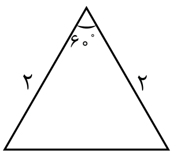
حال از رابطه‌ای که برای مساحت ارائه کردیم، داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۸\times \sin ۱۵۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۸\times\frac{۱}{۲}=۱۶$$

تست ۱۸. مساحت یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع ۲ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) ۲

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴



می‌دانیم در هر مثلث متساوی‌الاضلاع زوایای داخلی برابر ۶۰° هستند:

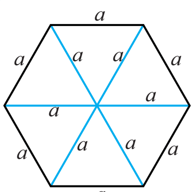
$$S=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۲\times\sin ۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}$$

نتیجه: در هر مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a، مساحت برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}\times a\times a\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$$

نکته هر شش ضلعی منتظم با رسم قطرهای بزرگ به ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع تقسیم می‌شود.
اگر طول ضلع شش ضلعی را برابر a درنظر بگیریم، مساحت آن برابر است با:

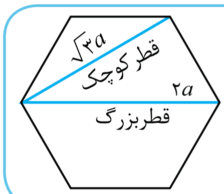
$$S=۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^{۲}$$



چند نکته‌ی تکمیلی درباره‌ی شش ضلعی منتظم

نکته در هر شش ضلعی منتظم به ضلع a با وصل کردن هر رأس به رأس روبه‌رویی، **قطر بزرگ** آن ساخته می‌شود که طول آن برابر $۲a$ است.

نکته در هر شش ضلعی منتظم با ضلع a با وصل کردن هر رأس به رأس مجاور با رأس روبه‌رویی، **قطر کوچک** آن ساخته می‌شود که طول آن برابر $\sqrt{۳}a$ است.



تست ۱۹. **در یک شش ضلعی منتظم اندازه‌ی قطر کوچک ۴ واحد است. در این صورت مساحت آن چقدر است؟**

۱) ۸ ۲) $۸\sqrt{۳}$ ۳) $۱۶\sqrt{۳}$ ۴) ۱۶

پاسخ: ۱ **۲** ۳ ۴

اگر اندازه‌ی ضلع شش ضلعی را a درنظر بگیریم، طول قطر کوچک برابر $\sqrt{۳}a$ است. پس:

$$\sqrt{۳}a=۴\Rightarrow a=\frac{۴}{\sqrt{۳}}\Rightarrow S=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\left(\frac{۴}{\sqrt{۳}}\right)^۲=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{۱۶}{۳}=۸\sqrt{۳}$$

نکته

قبلاً گفتیم مساحت مثلث ABC برابر است با:

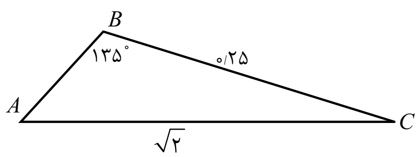
$$S=\frac{۱}{۲}ab\sin\hat{C}=\frac{۱}{۲}ac\sin\hat{B}=\frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A}$$

با ساده کردن $\frac{۱}{۲}$ از عبارات و تقسیم آن‌ها بر abc داریم:

$$\frac{ab\sin\hat{C}}{abc}=\frac{ac\sin\hat{B}}{abc}=\frac{bc\sin\hat{A}}{abc}\Rightarrow\frac{\sin\hat{C}}{c}=\frac{\sin\hat{B}}{b}=\frac{\sin\hat{A}}{a}$$

این رابطه به **قضیه‌ی سینوس‌ها** معروف است. این قضیه بیان می‌کند که در هر مثلث **نسبت سینوس هر زاویه به ضلع روبه‌روی آن** عددی ثابت است.

تست ۲۰. **در مثلث مقابل اندازه‌ی $\cos\hat{A}$ کدام است؟**



۱) $\pm\frac{۳\sqrt{۷}}{۸}$ ۲) $-\frac{۳\sqrt{۷}}{۸}$

۳) $\frac{۳\sqrt{۷}}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

پاسخ: ۱ ۲ **۳** ۴

طبق قضیه‌ی سینوس‌ها، ابتدا $\sin\hat{A}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin۱۳۵^\circ}{\sqrt{۲}}=\frac{\sin\hat{A}}{۰/۲۵}\Rightarrow\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{\sin\hat{A}}{۰/۲۵}\Rightarrow\sin\hat{A}=\frac{۱}{۸}$$

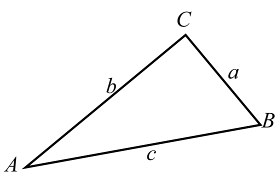
می‌دانیم $\cos\hat{A}=\pm\sqrt{۱-\sin^۲\hat{A}}$، پس:

$$\cos\hat{A}=\pm\sqrt{۱-\left(\frac{۱}{۸}\right)^۲}=\pm\sqrt{\frac{۶۳}{۶۴}}=\pm\frac{۳\sqrt{۷}}{۸}$$

دقت کنید که چون زاویه‌ی B منفرجه است، بنابراین زاویه‌ی A حاده است، پس $\cos\hat{A}>۰$ است. بنابراین $\cos\hat{A}=\frac{۳\sqrt{۷}}{۸}$ صحیح است.

ویژه دکترها: قضیه‌ی کسینوس‌ها

با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها که اثبات آن خارج از قالب و چهارچوب کتاب است، می‌توان با داشتن دو ضلع از یک مثلث و زاویه بین آن‌ها اندازه‌ی ضلع سوم را محاسبه کرد. یعنی در هر مثلث مفروض ABC همواره روابط زیر برقرارند:



$$c^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos\hat{C}$$

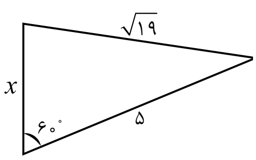
$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos\hat{A}$$

$$b^۲=a^۲+c^۲-۲ac\cos\hat{B}$$

تست ۲۱. **در یک مثلث زاویه‌ی روبه‌رو به یک ضلع با طول $\sqrt{۱۹}$ برابر ۶۰° است. اگر اندازه‌ی یکی از اضلاع مثلث ۵ باشد، اندازه‌ی ضلع سوم کدام است؟**

۱) ۲ یا ۳ ۲) ۳ یا ۶ ۳) ۲ یا ۵ ۴) ۳ یا ۵

پاسخ: **۱** ۲ ۳ ۴



اندازه‌ی ضلع سوم را x درنظر می‌گیریم. طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها، داریم:

$$(\sqrt{۱۹})^۲=x^۲+۵^۲-۲(۵)(x)\cos۶۰^\circ\Rightarrow۱۹=x^۲+۲۵-۱۰x\times\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow x^۲-۵x+۶=۰\Rightarrow(x-۲)(x-۳)=۰\Rightarrow x=۲\ \text{یا}\ x=۳$$

تست ۲۲. اگر در یک مثلث رابطه‌ی $c^2=a^2+b^2+\sqrt{3}ab$ برقرار باشد، زاویه‌ی $\hat{C}$ چند درجه است؟

۱) 60° ۲) 30° ۳) 120° ۴) 150°

پاسخ: ۱ ۲ ۳ **۴**

طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

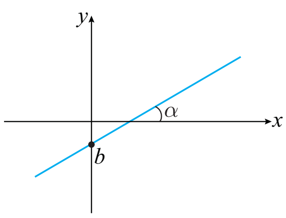
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}$$

از طرفی از صورت سؤال داریم:

$$c^2=a^2+b^2+\sqrt{3}ab$$

$$\xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} 0=\sqrt{3}ab+2ab\cos\hat{C}\Rightarrow 2ab\cos\hat{C}=-\sqrt{3}ab\Rightarrow\cos\hat{C}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\hat{C}=150^\circ$$

شیب خط

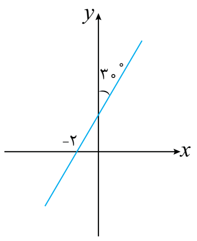


می‌دانیم معادله‌ی هر خط را می‌توان به شکل $y=ax+b$ هم نوشت که در آن a شیب و b عرض از مبدأ خط (همان محل برخورد خط با محور y ها) نام دارد. می‌توان نشان داد شیب خط (a) همان تانژانت زاویه‌ای است که آن خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد.

$$\text{شیب خط}=a=\tan\alpha$$

$$\text{معادله خط}\Rightarrow y=ax+b$$

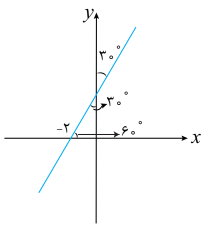
تست ۲۳. معادله‌ی خط روبه‌رو کدام است؟



۱) $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$ ۲) $y=\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$

۳) $y=\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}$ ۴) $y=\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}$

پاسخ: ۱ **۲** ۳ ۴



معادله‌ی خط را به شکل $y=ax+b$ در نظر می‌گیریم. معلوم است، زاویه‌ای که این خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد برابر 60° است. پس شیب آن $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ است.

بنابراین معادله‌ی آن را به شکل $y=\sqrt{3}x+b$ در نظر می‌گیریم. حال نقطه‌ی $(-2,0)$ را در معادله‌ی خط قرار می‌دهیم:

$$0=-2\sqrt{3}+b\Rightarrow b=2\sqrt{3}$$

پس معادله‌ی این خط به شکل $y=\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$ است.

پرسش‌های سطح ساده

۱. زاویه‌ی D برابر با $\frac{\pi}{20}$ رادیان است. اندازه‌ی این زاویه برحسب درجه کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) 20° ۲) 18° ۳) 10° ۴) 9°

۲. کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) $\frac{7\pi}{5}=252^\circ$ رادیان ۲) $\frac{5\pi}{8}=112/5^\circ$ رادیان ۳) $3=(\frac{540}{\pi})^\circ$ رادیان ۴) $\frac{9}{5}=100^\circ$ رادیان

۳. مجموع اندازه‌های دو زاویه برحسب درجه برابر ۶۰ و اختلاف آن‌ها برحسب واحد رادیان برابر $\frac{\pi}{15}$ رادیان است. اندازه‌ی زاویه‌ی کوچک‌تر کدام است؟

۱) 25° ۲) 24° ۳) 15° ۴) 14°

۴. اگر زاویه‌ی 3915° را به شکل $2k\pi+\alpha$ رادیان بنویسیم و k عددی طبیعی باشد و $0<\alpha<2\pi$ باشد، در این صورت α کدام است؟

۱) $\frac{5\pi}{8}$ ۲) $\frac{7\pi}{8}$ ۳) $\frac{5\pi}{4}$ ۴) $\frac{7\pi}{4}$

۵. چه تعداد از گزاره‌های زیر صحیح است؟ (کتاب درسی)

الف) یک رادیان برابر است با اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی دایره‌ای که طول کمان روبه‌روی آن با قطر دایره مساوی است.

ب) یک رادیان تقریباً برابر ۵۳ درجه است.

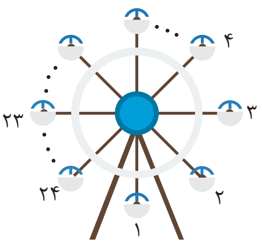
ج) اگر اندازه‌ی زاویه‌ای برحسب درجه را در $\frac{180}{\pi}$ ضرب کنیم، اندازه‌ی زاویه برحسب رادیان به‌دست می‌آید.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶. در مدت زمان ۴۲ دقیقه، عقربه‌ی ساعت شمار چند رادیان دوران می‌کند؟

۱) $\frac{9\pi}{30}$ ۲) $\frac{9\pi}{60}$ ۳) $\frac{7\pi}{60}$ ۴) $\frac{7\pi}{30}$

۷. یک چرخ و فلک مطابق شکل ۲۴ کابین دارد. در لحظه‌ی شروع حرکت چرخ و فلک، کابین شماره‌ی یک در پایین‌ترین نقطه قرار دارد. اگر چرخ و فلک به اندازه‌ی $\frac{53\pi}{6}$ رادیان در جهت مثبت مثلثاتی دوران کند، کابین شماره‌ی یک در محل فعلی کدام کابین قرار می‌گیرد؟



۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۸. انتهای کمان مربوط به زاویه‌ی ۱۲- رادیان در کدام ناحیه‌ی دایره مثلثاتی واقع است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۹. زوایای $-\frac{2\pi}{5}$ رادیان و $\frac{7\pi}{8}$ رادیان به ترتیب در کدام نواحی دایره‌ی مثلثاتی قرار دارند؟ (کتاب درسی)

۱) سوم و اول ۲) سوم و دوم ۳) چهارم و اول ۴) چهارم و دوم

۱۰. انتهای کمان کدام‌یک از زوایای زیر، در دایره‌ی مثلثاتی، با بقیه زوایا «هم ناحیه» نیست؟

۱) ۱۷ رادیان ۲) $\frac{8\pi}{9}$ رادیان ۳) (-3) رادیان ۴) $\frac{7\pi}{5}$ رادیان

۱۱. انتهای کمان‌های مقابل به زوایای $\frac{\pi}{6}$، $\frac{5\pi}{6}$، $\frac{7\pi}{6}$ و $\frac{11\pi}{6}$ را روی دایره‌ی مثلثاتی، به‌طور متوالی به هم وصل می‌کنیم. چهارضلعی حاصل کدام است؟

۱) مستطیل ۲) مربع ۳) متوازی‌الاضلاع ۴) ذوزنقه