

دستنامه ۱

معرفی مجموعه و اعضای آن

در ریاضی برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیای مشخص (عضویت این اشیا در مجموعه کاملاً معین باشد) و متمایز (غیر تکراری) از مجموعه استفاده می‌کنیم.

تعریف: به هر یک از اشیای مجموعه یک عضو مجموعه می‌گوییم.

قرارداد: اعضای مجموعه‌ها را معمولاً داخل $\{ \}$ قرار می‌دهیم و برای نام‌گذاری مجموعه‌ها از حروف بزرگ انگلیسی استفاده می‌کنیم.

۱ کدام یک از عبارت‌های زیر یک مجموعه را مشخص می‌کند؟ (با ذکر دلیل)

(ب) حروف الفبای فارسی بدون نقطه

(آ) چهار شاعر ایرانی

(ت) سه عدد مربع کامل

(پ) عددهای طبیعی و زوج یک رقمی

پاسخ: (آ) عبارت «چهار شاعر ایرانی» یک مجموعه را مشخص نمی‌کند، زیرا نام چهار شاعر به‌طور دقیق مشخص نشده‌اند و هر کس ممکن است چهار شاعر متفاوت را بیان کند. بنابراین اعضا مشخص نیست و سلیقه افراد دخیل است.
 (ب) «حروف الفبای فارسی بدون نقطه» مجموعه $\{ا، ب، پ، ت، ث، ج، د، ر، س، ص، ط، ع، ک، گ، ل، م، و، ه، ی\}$ را مشخص می‌کند.
 (پ) «عددهای طبیعی و زوج یک رقمی»، مجموعه $A = \{۲، ۴، ۶، ۸\}$ را مشخص می‌کند.
 (ت) عبارت «سه عدد مربع کامل» یک مجموعه را مشخص نمی‌کند، چون این اعداد به‌طور دقیق مشخص نشده‌اند. ممکن است فردی، مجموعه $\{۱، ۴، ۹\}$ و فرد دیگری مجموعه $\{۴۹، ۸۱، ۱۶۹\}$ و... را در نظر بگیرد.

قرارداد: اگر A یک مجموعه و a عضوی از آن باشد، می‌نویسیم $a \in A$ و اگر b عضوی از مجموعه A نباشد، می‌نویسیم $b \notin A$ به عنوان مثال، اگر $A = \{۱، ۲، ۵\}$ ، آن‌گاه $۳ \in A$ و $۵ \in A$

نکته: در نمایش مجموعه‌ها، ترتیب نوشتن عضوهای مجموعه، مهم نیست و با جابه‌جایی عضوهای یک مجموعه، مجموعه جدیدی ساخته نمی‌شود. مثلاً مجموعه $\{۱، ۳، ۷\}$ با مجموعه $\{۷، ۱، ۳\}$ یکسان است.

تذکر: با توجه به شرط متمایز بودن عضوهای یک مجموعه، به جای $A = \{۱، ۳، ۱، ۴، ۴، ۵\}$ باید بنویسیم $A = \{۱، ۳، ۴، ۵\}$

۲ هر یک از مجموعه‌های زیر را با اعضا بنویسید. سپس تعداد عضوهای هر مجموعه را مشخص کنید.

(ب) عددهای زوج بین ۷ و ۱۴

(آ) حروف کلمه «بیان»

(ت) شمارنده‌های مربع کامل عدد ۳۶

(پ) شمارنده‌های طبیعی و اول عدد ۶۰

$A = \{ن، ا، ی، ب\}$

پاسخ: (آ) اگر A مجموعه حروف کلمه «بیان» باشد، آن‌گاه: مجموعه A ، ۴ عضو دارد.

$B = \{۸، ۱۰، ۱۲\}$

(ب) اگر B مجموعه عددهای زوج بین ۷ و ۱۴ باشد، آن‌گاه: مجموعه B ، ۳ عضو دارد.

$۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۱۰، ۱۲، ۱۵، ۲۰، ۳۰، ۶۰$

(پ) شمارنده‌های طبیعی عدد ۶۰ به‌صورت مقابل است:

$C = \{۲، ۳، ۵\}$

اگر C مجموعه شمارنده‌های طبیعی و اول عدد ۶۰ باشد، آن‌گاه: مجموعه C ، ۳ عضو دارد.

$۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۹، ۱۲، ۱۸، ۳۶$

(ت) شمارنده‌های طبیعی عدد ۳۶ به‌صورت مقابل است:

$D = \{۱، ۴، ۹، ۳۶\}$

از بین شمارنده‌ها، اعداد ۱، ۴، ۹ و ۳۶ مربع کامل هستند، لذا اگر D مجموعه شمارنده‌های مربع کامل ۳۶ باشد، آن‌گاه: مجموعه D ، ۴ عضو دارد.

مجموعه تهی - مجموعه یک‌عضوی

مجموعه تهی، اگر در مجموعه‌ای عضو وجود نداشته باشد، آن را مجموعه تهی می‌نامیم و با نماد \emptyset یا $\{\}$ نشان می‌دهیم.

مجموعه تهی با مجموعه‌های $\{\emptyset\}$ و $\{\emptyset\}$ که هر کدام دارای یک عضو هستند، متفاوت است.

مجموعه یک‌عضوی، هر مجموعه‌ای که فقط یک عضو دارد را مجموعه یک‌عضوی می‌نامند.

کدام یک از عبارتهای زیر، مجموعه تهی و کدام یک مجموعه یک‌عضوی را مشخص می‌کند؟

(آ) عددهای طبیعی بین ۵ و ۶

(ب) عددهای صحیح بین -۱ و ۱

(پ) عددهای اول و زوج

(ت) عددهای طبیعی یک رقمی و مضرب ۳ که اول باشند.

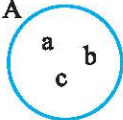
پاسخ: (آ) بین ۵ و ۶ عددی طبیعی وجود ندارد، لذا این مجموعه هیچ عضوی ندارد و یک مجموعه تهی است.

(ب) صفر تنها عدد صحیح بین -۱ و ۱ است، لذا یک مجموعه یک‌عضوی $\{0\}$ داریم.

(پ) عدد ۲ تنها عدد زوج و اول است، لذا یک مجموعه یک‌عضوی $\{2\}$ داریم.

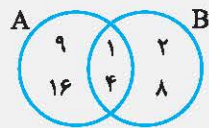
(ت) عدد ۳ تنها عدد یک رقمی مضرب ۳ و اول است، پس یک مجموعه یک‌عضوی $\{3\}$ داریم.

A



نمایش مجموعه‌ها با استفاده از نمودار ون، مجموعه‌ها را می‌توان با استفاده از منحنی‌های بسته نمایش داد؛ به عنوان مثال، مجموعه $A = \{a, b, c\}$ را با نمودار ون به صورت روبه‌رو نمایش می‌دهیم:

در نمایش مجموعه‌ها به کمک نمودار ون داخل هر ناحیه از نمودار، اعضای آن ناحیه یا تعداد اعضای آن ناحیه را می‌نویسیم.



با توجه به نمودار ون، مجموعه‌های A و B را با اعضا نوشته و متناظر با هر مجموعه، یک عبارت بنویسید.

پاسخ: مجموعه A به صورت $A = \{1, 4, 9, 16\}$ می‌باشد و مجموعه تمام اعداد طبیعی و مربع کامل کوچک‌تر از ۱۷ است.

مجموعه B به صورت $B = \{1, 2, 4, 8\}$ است و مجموعه تمام شمارنده‌های طبیعی ۸ می‌باشد.

خودت حل کن...

کدام یک از عبارتهای زیر یک مجموعه را مشخص می‌کند؟ (با ذکر دلیل)

(آ) پنج شهر زیبای جهان

(ب) عددهای طبیعی و یک رقمی مضرب ۴

(پ) سه عدد اول

(ت) اولین پنج عدد اول دو رقمی

هر یک از مجموعه‌های زیر را با اعضا بنویسید و تعداد عضوهای هر مجموعه را مشخص کنید.

(آ) حروف کلمه «ریاضیات»

(ب) عددهای اول کوچک‌تر از ۲۰

(پ) عددهای صحیح و زوج بین -۱۰ و ۱۰

(ت) مضرب‌های ۱۱ بین ۴۰ و ۸۸

(ج) سه عدد طبیعی متوالی که میانگین آن‌ها برابر ۱۰ باشد.

متناظر با هر مجموعه، یک عبارت بنویسید.

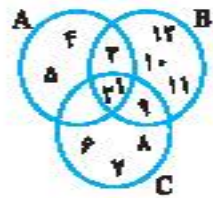
(آ) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ (ب) $B = \{3, 5, 7, 11, 13\}$ (پ) $C = \{\}$

(ت) $D = \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$ (ث) $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

مجموعه $\{a, b, \{a, b\}, \{b, a\}, \{\}, \emptyset\}$ چند عضو دارد؟

مجموعه ارقام عدد ۱۲۳۲۱۳۴ را بنویسید. این مجموعه چند عضو دارد؟

- ۶ کدام یک از مجموعه‌های زیر، مجموعه تهی و کدام یک مجموعه یک‌عضویی است؟
 (آ) عددهای طبیعی منعی (ب) عددهای اول و زوج (پ) عددهای صحیح منعی بین ۱ و ۵
 (ت) عددهای فرد طبیعی بین ۲ و ۷ (ث) عددهای طبیعی بین ۱۰ و ۲۰ که هم مضرب ۲ و هم مضرب ۷ باشند.
 (ج) $\{-1, 2\}$



۷ با توجه به نمودار ون مقابل، هریک از مجموعه‌های A، B و C را با اعضا مشخص کنید.



۸ با توجه به نمودار ون مقابل:

- (آ) هریک از مجموعه‌های A، B و C را با اعضا بنویسید.
 (ب) کدام عضو هم در مجموعه A و هم در مجموعه B وجود دارد؟
 (پ) مجموعه همه عضوهایی که در هر سه مجموعه A، B و C باشند را مشخص کنید.
- ۹ اگر $A = \{-1, 0, \{-1\}, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}$ باشد، کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است؟
 (آ) $\{\emptyset\} \in A$ (ب) $\{-1\} \in A$ (پ) $\{-1, 0\} \in A$ (ت) $\{\emptyset\} \notin A$
- ۱۰ اگر $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}$ باشد، کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است؟
 (آ) $\emptyset \in A$ (ب) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in A$ (پ) $\{\{\emptyset\}\} \in A$

دستگاه

مجموعه‌های برابر - زیرمجموعه - نمایش مجموعه

تساوی مجموعه‌ها

تعریف: دو مجموعه A و B برابرند هرگاه هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B، عضوی از A باشد و می‌نویسیم $A = B$

نکته: اگر عضوی در A باشد که در B نباشد یا عضوی در B باشد که در A نباشد، مجموعه A برابر نیست با B و می‌نویسیم $A \neq B$

به عنوان مثال، دو مجموعه $A = \{1, 2\}$ و $B = \{2, 3\}$ با هم برابرند

جاهای خالی را در مجموعه‌های $A = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \bigcirc, \sqrt{26}\}$ و $B = \{\square, -\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{16}}, \frac{1}{5}, (0/2)^2\}$ طوری پر کنید که دو مجموعه A و B برابر باشند.

پس $\sqrt{26} = 6$ وجود دارد، چون $A = B$ است، باید در مجموعه B قرار نداشته باشد. همچنین $(0/2)^2 = 0/0.9$ عضوی از مجموعه B است و چون $A = B$ ، باید $0/0.9$ عضوی از مجموعه A باشد. بنابراین:

$$A = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, 0/0.9, \sqrt{26}\} \quad B = \{6, -\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{16}}, \frac{1}{5}, (0/2)^2\}$$

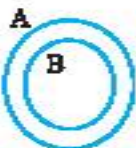
دقت کنید که $-\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{16}} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ است.

زیرمجموعه

تعریف: اگر هر عضو مجموعه B، عضوی از مجموعه A باشد، می‌گوییم مجموعه B

زیرمجموعه A است و می‌نویسیم $B \subseteq A$

نمایش $B \subseteq A$ با نمودار ون به صورت مقابل است:



مثال ۲ اگر $A = \{-2, 7, 8, 9, 11\}$ و مجموعه B شامل سه عدد طبیعی متوالی باشد که مجموع آن‌ها ۲۴ است، آیا عبارت $B \subseteq A$ درست است؟ چرا؟

پاسخ: ابتدا مجموعه B را با عضوهای آن مشخص می‌کنیم. فرض کنیم n ، $n+1$ و $n+2$ سه عضو مجموعه B باشند، در این صورت مجموع این سه عدد باید برابر ۲۴ باشد. پس:

$$n + (n+1) + (n+2) = 24 \Rightarrow 3n + 3 = 24 \Rightarrow 3n = 21 \Rightarrow n = \frac{21}{3} = 7$$

بنابراین سه عدد متوالی ۷، ۸ و ۹ می‌باشند و در نتیجه مجموعه B به صورت $B = \{7, 8, 9\}$ است و با توجه به این که هر سه عضو B ، در مجموعه A قرار دارند، لذا B زیرمجموعه A است و عبارت $B \subseteq A$ درست می‌باشد.

مثال ۳ همه زیرمجموعه‌های مجموعه $A = \{-1, 0, 1\}$ را بنویسید. چه رابطه‌ای بین تعداد اعضای A و تعداد زیرمجموعه‌های A وجود دارد؟

پاسخ: برای نوشتن همه زیرمجموعه‌های مجموعه A ، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

- (۱) زیرمجموعه با صفر عضو (تنها زیرمجموعه صفر عضوی، \emptyset است):
 \emptyset
 - (۲) زیرمجموعه‌های یک عضوی:
 $\{-1\}, \{0\}, \{1\}$
 - (۳) زیرمجموعه‌های دو عضوی:
 $\{-1, 0\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}$
 - (۴) زیرمجموعه سه عضوی:
 $\{-1, 0, 1\}$
- بنابراین تمام زیرمجموعه‌های A به صورت مقابل است:
 $\emptyset, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{-1, 0\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}, \{-1, 0, 1\}$
 یک مجموعه ۳ عضوی و تعداد زیرمجموعه‌های آن ۸ می‌باشد و داریم:
 $2^3 = 8$

نکته اگر مجموعه A ، n عضو داشته باشد، آن‌گاه 2^n زیرمجموعه دارد.

مثال: $A = \{0, 1, 2, \{\emptyset\}\} \Rightarrow n = 4 \Rightarrow$ تعداد زیرمجموعه‌ها $= 2^4 = 2^2 = 16$

نکته اگر بتوانیم عضوی در مجموعه B بیابیم که در مجموعه A نباشد، می‌گوییم B زیرمجموعه A نیست و می‌نویسیم $B \not\subseteq A$.
 به عنوان مثال، $\{a, b\} \not\subseteq \{a, d\}$ ؛ زیرا عضو b در مجموعه $B = \{a, b\}$ هست که در مجموعه $A = \{a, d\}$ وجود ندارد.

نکته با توجه به تعریف زیرمجموعه، واضح است که هر مجموعه، زیرمجموعه خودش است، یعنی اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، داریم: $A \subseteq A$

نکته مجموعه تهی زیرمجموعه هر مجموعه دلخواه مانند A است، یعنی $\emptyset \subseteq A$

نکته اگر $A = B$ ، $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ و برعکس. یعنی اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ ، آن‌گاه $A = B$

نمایش مجموعه‌های اعداد

گاهی اوقات برای نمایش مجموعه‌ها ویژگی مشترک اعضا را به کمک نمادهای ریاضی نشان می‌دهیم. به عنوان مثال، هر عدد زوج طبیعی را به صورت $2k$ مشخص می‌کنیم که در آن k عددی طبیعی است ($k \in \mathbb{N}$). اگر E مجموعه اعداد طبیعی زوج باشد، آن‌گاه E با نمادهای ریاضی به صورت مقابل نمایش داده می‌شود:

$$E = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

توجه کنیم که علامت «|» خوانده می‌شود «به طوری که».

مجموعه‌های اعداد طبیعی فرد و اعداد حسابی با نمادهای ریاضی به صورت زیر می‌باشند:

$$O = \{1, 3, 5, 7, \dots\} = \{2k-1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

مجموعه اعداد طبیعی فرد:

$$W = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \{k-1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

مجموعه اعداد حسابی:

مثال ۴ مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

$$B = \{x^2 + 1 \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x \leq 1\} \text{ (ب)}$$

$$A = \{2k + 5 \mid k \in \mathbb{N}, k \leq 4\} \text{ (آ)}$$

$$2k + 5, k \in \mathbb{N}, k \leq 4 \xrightarrow{k=1, 2, 3, 4} 2(1) + 5 = 7, 2(2) + 5 = 9, 2(3) + 5 = 11, 2(4) + 5 = 13$$

$$\Rightarrow A = \{7, 9, 11, 13\}$$

$$x^2 + 1, x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x \leq 1 \xrightarrow{x=-2, -1, 0, 1} 5, 2, 1, 2 \Rightarrow B = \{1, 2, 5\}$$

(ب)

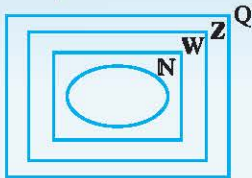
دست‌آورد

مجموعه عددهای گویا

به هر عدد کسری به صورت $\frac{a}{b}$ که در آن a و b عددهای صحیح باشند و $b \neq 0$ باشد، عدد گویا می‌گوییم. مجموعه عددهای گویا را با Q نشان می‌دهیم. این مجموعه با نمادهای ریاضی به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

$$a = \frac{a}{1}$$



$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

نکته هر عدد صحیح، عددی گویا است، یعنی برای هر عدد صحیح a داریم:

نکته با توجه به مجموعه‌های N, W, Z و Q و تعریف زیرمجموعه، رابطه زیر برقرار است:

۹ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

(آ) هر عدد زوج طبیعی، عددی صحیح است.

(ب) عددی صحیح وجود دارد که گویا نیست.

پاسخ: (آ) درست است، زیرا مجموعه اعداد صحیح شامل تمام اعداد زوج طبیعی (۲، ۴، ۶، ...) می‌باشد.

(ب) درست است، زیرا صفر عددی حسابی است ولی عدد طبیعی نیست.

(پ) نادرست است، زیرا $Z \subseteq Q$ و در نتیجه تمام اعداد صحیح یک عدد گویا می‌باشند.

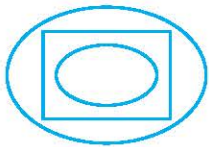
(ت) درست است، زیرا اعداد $\dots, \pm 2, \pm 1, 0$ گویا و همچنین عدد صحیح می‌باشند.

خودت حل کن...

۱۱ اگر A مجموعه اعداد فرد یک رقمی و B مجموعه اعداد اول یک رقمی باشد، هر یک از دو مجموعه A و B را با اعضا بنویسید. آیا این دو مجموعه با هم برابرند؟ چرا؟

۱۲ اگر دو مجموعه $\{a, 2, 5\}$ و $\{b, 2, 4\}$ با هم برابر باشند، مقدار a و b را به دست آورید.

۱۳ اگر $A = \{(-2)^2, \odot, 2\sqrt{9}, -\frac{3}{5}\}$ و $B = \{6, \square, -\sqrt{\frac{9}{25}}, 3\}$ ، در جاهای خالی چه اعدادی قرار دهیم که دو مجموعه A و B برابر باشند؟



۱۴ اگر $A = \{-1, 2, -1\}$ ، $B = \{-1, 2, 0\}$ و $C = \{-1, 0, 2, 4\}$ سه مجموعه باشند و نمودار مقابل وضعیت آن‌ها را نسبت به هم نشان دهد، آن‌ها را نام‌گذاری کنید.

۱۵ اگر $A \subseteq \emptyset$ باشد، مجموعه A چند عضو دارد؟

۱۶ تمام زیرمجموعه‌های مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ را بنویسید.

۱۷ تمام زیرمجموعه‌های مجموعه $A = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}$ را بنویسید.

۱۸ اگر $A = \{x, y, \{y\}, \{x\}, x\}$ باشد، تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعه A را بنویسید.

۱۹ اگر $A = \{-2, 0, 1, 4\}$ باشد، تمام زیرمجموعه‌های شامل عضو -2 و فاقد عضو 0 را بنویسید.

۲۰ اگر A مجموعه اعداد اول زوج دورقمی، B مجموعه اعداد صحیح بین -5 و 4 ، $C = \{-4, 1, 2\}$ و $D = \{-1, 0, 2\}$ باشند، درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

- (آ) $A \subseteq B$ (ب) $D \subseteq C$ (پ) $C \not\subseteq D$
 (ت) $D \subseteq A$ (ث) $A \subseteq \{\emptyset\}$

۲۱ اگر $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ و B مجموعه تمام زیرمجموعه‌های مجموعه A باشد، کدام عبارت درست و کدام یک نادرست است؟
 (آ) $\emptyset \subseteq B$ (ب) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq B$ (پ) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in A$ (ت) $\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} \in B$

۲۲ اگر $A = \{x, \{x\}, \{x, \{x\}\}\}$ باشد، کدام عبارت درست و کدام عبارت نادرست است؟
 (آ) $\{x\} \in A$ (ب) $\{x\} \subseteq A$ (پ) $\{\{x\}\} \in A$ (ت) $\{x, \{x\}\} \subseteq A$

۲۳ اگر $A = \{2\}$ ، $B = \{2, \{2\}\}$ و $C = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$ ، کدام رابطه درست و کدام رابطه نادرست است؟
 (آ) $B \in C$ (ب) $A \subseteq B$ (پ) $A \in B$ (ت) $B \subseteq C$

۲۴ هر یک از مجموعه‌های زیر را با نمادهای ریاضی بنویسید.

- (آ) $A = \{-1, 1, 3, 5, 7\}$ (ب) $B = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ (پ) $C = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}\}$
 (ت) $D = \{5, 10, 17, 26\}$ (ث) $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

۲۵ هر یک از مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضای آن‌ها مشخص کنید.

- (آ) $A = \{3x - 1 \mid x \in W, x \leq 2\}$ (ب) $B = \{4x + 2 \mid x \in Z, -3 \leq x \leq 1\}$
 (پ) $C = \{\frac{x}{x+2} \mid x \in N, 2 \leq x \leq 5\}$ (ت) $D = \{x \mid x \in N, \frac{18}{x} \in N\}$

۲۶ هر یک از مجموعه‌های زیر را با نمادهای ریاضی نمایش دهید.

- (آ) مجموعه اعداد صحیح بین 5 و 11
 (ب) مجموعه اعداد صحیح که بر 4 بخش پذیر هستند.

۲۷ مجموعه $\{0, 1, 2\}$ با کدام مجموعه زیر برابر است؟

- (آ) $A = \{x \mid x \in W, 2^x \leq 4\}$ (ب) $B = \{x \mid x \in Z, x^2 \leq 1\}$

۲۸ اگر A مجموعه حروف کلمه «بینابین» باشد، تعداد عضوهای مجموعه A با تعداد عضوهای کدام مجموعه زیر برابر است؟

- (آ) $B = \{x \in Z \mid -2 \leq x \leq 4\}$ (ب) $C = \{x^2 \mid x \in N, x < 5\}$

۲۹ اگر A ، B و C سه مجموعه باشند به طوری که $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ ، آیا می‌توان نتیجه گرفت $A \subseteq C$ ؟ پاسخ خود را با نمودار ون نشان دهید.

۳۰ اگر $A \not\subseteq B$ و $B \not\subseteq C$ ، آیا می‌توان نتیجه گرفت $A \not\subseteq C$ ؟ پاسخ خود را با نمودار ون نشان دهید.

۳۱ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید:

- (آ) هر عدد طبیعی یک عدد گویا است.
 (ب) هیچ عدد صحیحی وجود ندارد که طبیعی نباشد.
 (پ) اگر عددی عضو مجموعه A باشد و عضو مجموعه B نباشد، آن‌گاه B زیرمجموعه A نمی‌باشد.

۳۲ تعداد زیرمجموعه‌های هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

- (آ) $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ (ب) $B = \{x \in N \mid x^2 < 5\}$

۳۳ مجموعه A ، $n+2$ عضو و 32 زیرمجموعه دارد. مقدار n را به دست آورید.

۳۴ مجموعه $A = \{x^2 - x \mid x \in W, x \leq 5\}$ چند زیرمجموعه غیر تهی دارد؟

پانچ پرش های فصل ۱

پ) C : مجموعه اعداد مکعب کامل بین 10 و 20 یا مجموعه اعداد طبیعی منفی

ت) D : مجموعه اعداد مربع کامل کوچکتر از 40

ث) E : مجموعه شمارنده های طبیعی عدد 12

۴ دو عضو $\{a, b\}$ و $\{b, a\}$ و همچنین دو عضو $\{\}$ و \emptyset با هم برابرند، پس مجموعه A به صورت $A = \{a, b, \{a, b\}, \{\}\}$ می باشد که مجموعه ای با 4 عضو a و b و $\{a, b\}$ و $\{\}$ است.

۵ اگر A مجموعه ارقام عدد 1232134 باشد، با توجه به این که در مجموعه ها نباید عضو تکراری بنویسیم، مجموعه A به صورت $A = \{1, 2, 3, 4\}$ درمی آید که یک مجموعه چهار عضوی است.

۶ آ) هیچ عدد طبیعی منفی وجود ندارد، لذا مجموعه $\{\}$ (عددهای طبیعی منفی) یک مجموعه تهی است.

ب) مجموعه عددهای اول و زوج به صورت $\{\}$ است که مجموعه ای یک عضوی است.

پ) هیچ عدد صحیح منفی بین 1 و 5 قرار ندارد، لذا مجموعه عددهای صحیح منفی بین 1 و 5 یک مجموعه تهی را مشخص می کند.

ت) مجموعه عددهای فرد طبیعی بین 3 و 7 ، مجموعه $\{5\}$ است که یک مجموعه یک عضوی است.

ث) کوچکترین عدد طبیعی که هم مضرب 4 و هم مضرب 7 باشد، عدد 28 است که بین 10 و 20 قرار ندارد، لذا مجموعه عددهای طبیعی بین 10 و 20 که هم مضرب 4 و هم مضرب 7 باشند، یک مجموعه تهی است.

ج) مجموعه $\{-1, 2\}$ یک مجموعه یک عضوی با عضو $\{-1, 2\}$ است.

۷ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 9, 10, 11, 12\}$
 $C = \{1, 2, 6, 7, 8, 9\}$

۸ آ) $A = \{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{2, 3, 4, 6, 9\}$
 $C = \{1, 2, 10, 11\}$

ب) عضوهای 3 و 6 هم در A و هم در B وجود دارند.

پ) هیچ عضوی وجود ندارد که در هر سه مجموعه A ، B و C قرار داشته باشد، بنابراین مجموعه حاصل، مجموعه تهی (\emptyset) است.

۹ A یک مجموعه 5 عضوی است که اعضای آن 0 ، -1 ، $\{-1\}$ ، $\{0\}$ و $\{\{\}\}$ می باشند، بنابراین:

آ) درست است.

ب) نادرست است.

پ) درست است. $(\{-1\})$ عضوی از مجموعه A نمی باشد.

ت) نادرست است.

۱ آ) عبارت «پنج شهر زیبای جهان» یک مجموعه را مشخص

نمی کند، زیرا نام پنج شهر به طور دقیق مشخص نمی شود.

ب) عبارت «عددهای طبیعی و یک رقمی مضرب 4 »، مجموعه $A = \{4, 8\}$ را مشخص می کند.

پ) عبارت «سه عدد اول» یک مجموعه را مشخص نمی کند، زیرا ممکن است فردی سه عدد را $2, 3, 5$ و فرد دیگری $5, 7, 19$ و... در نظر بگیرد.

ت) $2x + 5 = 8 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$x = \frac{3}{2}$ جواب معادله $2x + 5 = 8$ است و $\frac{3}{2}$ عددی طبیعی نمی باشد، بنابراین عبارت «جواب های طبیعی معادله $2x + 5 = 8$ »،

مجموعه $\{\}$ (تهی) را مشخص می کند. پس یک مجموعه است.

ث) «اولین پنج عدد اول دو رقمی» مجموعه $\{11, 13, 17, 19, 23\}$ را مشخص می کند.

۲ آ) اگر A مجموعه حروف کلمه «ریاضیات» باشد، آن گاه:

$A = \{ت, ض, ا, ی, ر, ا\}$

مجموعه A ، 5 عضو دارد.

ب) اگر B مجموعه عددهای اول کوچکتر از 20 باشد، آن گاه:

$B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

مجموعه B ، 8 عضو دارد.

پ) اگر C ، مجموعه عددهای صحیح و زوج بین -10 و 10 باشد، آن گاه:

$C = \{-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}$

مجموعه C ، 9 عضو دارد.

ت) شمارنده های طبیعی عدد 30 به صورت زیر است:

$1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$

اگر D مجموعه شمارنده های طبیعی و زوج عدد 30 باشد، آن گاه:

$D = \{2, 6, 10, 30\}$

مجموعه D ، 4 عضو دارد.

ث) اگر E مجموعه مضرب های 11 بین 40 و 88 باشد، آن گاه مجموعه

$E = \{44, 55, 66, 77\}$

E ، 4 عضو دارد. زیرا:

ج) اگر $n, n+1, n+2$ سه عدد طبیعی متوالی باشند، آن گاه:

$$10 = \frac{n+(n+1)+(n+2)}{3} = \frac{3n+3}{3} = n+1 \Rightarrow 3n+3 = 30$$

$$\Rightarrow 3n+3 = 30 \Rightarrow 3n = 30-3 = 27 \Rightarrow n = \frac{27}{3} = 9$$

پس اگر F مجموعه سه عدد طبیعی متوالی با میانگین 10 باشد،

آن گاه: $F = \{9, 10, 11\}$

۳ آ) A : مجموعه اعداد صحیح بین -3 و 3

ب) B : مجموعه اعداد اول و فرد کوچکتر از 14 یا مجموعه اعداد اول

بین 2 و 14

۲۰ ابتدا مجموعه‌های A و B را با اعضا مشخص می‌کنیم. تنها عدد زوج و اول، عدد ۲ است، بنابراین هیچ عدد اول زوج دورقمی وجود ندارد، پس مجموعه A ، مجموعه \emptyset است ($A = \emptyset$). هم‌چنین مجموعه B به صورت $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ می‌باشد.

آ درست- زیرا \emptyset زیرمجموعه هر مجموعه دلخواهی است، پس:
 $A = \emptyset \subseteq B$

ب نادرست- زیرا $0 \in D$ ولی $0 \notin C$

پ درست- زیرا $1 \in C$ ولی $1 \notin D$ ، لذا مجموعه C زیرمجموعه D نمی‌باشد.

ت نادرست- زیرا $A = \emptyset$ می‌باشد، در نتیجه $D = \{-1, 0, 2\}$ زیرمجموعه \emptyset نمی‌باشد.

ث درست- $A = \emptyset$ و \emptyset زیرمجموعه هر مجموعه دلخواهی مانند $\{\emptyset\}$ می‌باشد.

۲۱ A یک مجموعه دو عضوی با اعضای \emptyset و $\{\emptyset\}$ است.

آ درست- زیرا \emptyset زیرمجموعه هر مجموعه دلخواهی است.

ب درست- زیرا $\{\emptyset\}$ عضوی از B است و در نتیجه مجموعه یک عضوی $\{\{\emptyset\}\}$ زیرمجموعه B می‌باشد.

پ نادرست- زیرا $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq A$ می‌باشد نه عضو آن.

ت نادرست- زیرا B یک مجموعه چهار عضوی با اعضای $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$ می‌باشد، لذا $\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$ عضوی از مجموعه B نمی‌باشد.

۲۲ A مجموعه‌ای با سه عضو $x, \{x\}$ و $\{x, \{x\}\}$ است، پس:
 آ درست

ب درست است، زیرا $x \in A$ بنابراین $\{x\} \subseteq A$

پ نادرست

ت درست است، زیرا x و $\{x\}$ دو عضو مجموعه A هستند و در نتیجه مجموعه دو عضوی $\{x, \{x\}\}$ زیرمجموعه‌ای از A است.

ث درست

۲۳ آ درست- زیرا مجموعه C دارای دو عضو $\{2\}$ و $B = \{2, \{2\}\}$ می‌باشد.

ب درست- زیرا $2 \in B$ و در نتیجه $A = \{2\} \subseteq B$ می‌باشد.

پ درست- زیرا مجموعه B شامل عضوهای 2 و $A = \{2\}$ می‌باشد.

ت نادرست- زیرا $B = \{2, \{2\}\} \in C$

۲۴ آ $A = \{2k-1 \mid k \in \mathbb{W}, k \leq 4\}$

ب $B = \{x^x \mid x \in \mathbb{W}, x \leq 4\}$

پ $C = \{\frac{x}{x+1} \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$

ت $D = \{x^y + 1 \mid x \in \mathbb{N}, 2 \leq x \leq 5\}$

ث $E = \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{26}{x} \in \mathbb{N}\}$

۱۰ A مجموعه‌ای با ۳ عضو $\emptyset, \{\emptyset\}$ و $\{\{\emptyset\}\}$ است، بنابراین:
 آ درست است. ب نادرست است. پ نادرست است.

۱۱ $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ، $B = \{2, 3, 5, 7\}$

دو مجموعه A و B برابر نیستند، زیرا اعضای دو مجموعه یکی نمی‌باشد، به عنوان مثال $2 \in B$ و $2 \notin A$

۱۲ اعضای دو مجموعه برابر یکسان است. اگر $A = \{a, 2, 5\}$ و $B = \{b, 2, 4\}$ باشند، آن‌گاه:

$$\delta \in A, A = B \Rightarrow \delta \in B \Rightarrow b = 5$$

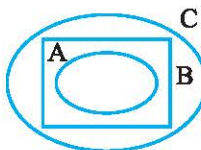
$$4 \in B, A = B \Rightarrow 4 \in A \Rightarrow a = 4$$

۱۳ در مجموعه A ، عضو $(-2)^3 = -8$ وجود دارد و چون $A = B$ است، پس باید -8 در مجموعه B قرار داشته باشد. هم‌چنین عدد ۳ عضوی از مجموعه B است و در نتیجه ۳ باید عضوی از مجموعه A باشد، پس:

$$A = \{(-2)^3, 3, 2\sqrt{9}, -\frac{3}{5}\} , B = \{6, -8, -\sqrt{\frac{9}{25}}, 3\}$$

$$2\sqrt{9} = 2 \times 3 = 6 \text{ و } -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

۱۴ با توجه به مجموعه‌های داده C شده، $A \subseteq B \subseteq C$ می‌باشد و نام‌گذاری مجموعه‌ها به صورت مقابل است:



۱۵ همواره $\emptyset \subseteq A$ می‌باشد و با توجه به این که $A \subseteq \emptyset$ است، نتیجه می‌گیریم که دو مجموعه A و \emptyset با هم برابرند. لذا مجموعه A عضوی ندارد.

۱۶ $\{\}$: زیرمجموعه صفر عضوی

$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$: زیرمجموعه‌های یک عضوی

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$: زیرمجموعه‌های دو عضوی

$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$: زیرمجموعه‌های سه عضوی

$A = \{a, b, c, d\}$: زیرمجموعه چهار عضوی

۱۷ $\{\}$, $\{a\}$, $\{\{a\}\}$, $\{\{a, a\}\}$

یک عضوی بدون عضو

$\{a, \{a\}\}$, $\{a, \{a, a\}\}$, $\{\{a\}, \{a, a\}\}$, $\{a, \{a, a\}\}$, $\{a, \{a, \{a\}\}\}$

سه عضوی

۱۸ به دلیل تکراری بودن x ، مجموعه A به صورت

$$A = \{x, y, \{y\}, \{x\}\}$$
 می‌باشد.

$\{x, y\}, \{x, \{y\}\}, \{x, \{x\}\}$: تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی A

$\{y, \{y\}\}, \{y, \{x\}\}, \{\{y\}, \{x\}\}$

۱۹ بدون در نظر گرفتن عضو صفر همه زیرمجموعه‌های A را

می‌نویسیم و عضو -2 را به همه آن‌ها اضافه می‌کنیم. پس

زیرمجموعه‌های خواسته شده عبارتند از:

$$\{-2\}, \{-2, 1\}, \{-2, 4\}, \{-2, 1, 4\}$$

۳۳ تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه A برابر 2^{n+3} است. بنابراین:

$$2^{n+3} = 32, 32 = 2^5 \Rightarrow 2^{n+3} = 2^5 \Rightarrow n+3 = 5 \Rightarrow n = 2$$

۳۴ مجموعه A را با عضوهای آن می‌نویسیم:


$$x^2 - x, x \in \mathbb{W}, x \leq 5 \xrightarrow{x=0,1,2,3,4,5} 0, 0, 2, 6, 12, 20$$

$$\Rightarrow A = \{0, 2, 6, 12, 20\}$$

مجموعه A، ۵ عضو دارد و در نتیجه $2^5 = 32$ زیرمجموعه دارد که یکی از آن‌ها مجموعه \emptyset است. بنابراین مجموعه A، دارای $32 - 1 = 31$ زیرمجموعه غیرتهی است.

۳۵ اگر A مجموعه دوستان احمد و B مجموعه دوستان حسن باشد، آن‌گاه نمودار ون مقابل را خواهیم داشت:


اگر A مجموعه دوستان احمد و B مجموعه دوستان حسن باشد، آن‌گاه نمودار ون مقابل را خواهیم داشت:



تعداد عضوهای مجموعه A = تعداد دوستان احمد = ۴ + ۱۵ = ۱۹
تعداد عضوهای مجموعه B = تعداد دوستان حسن = ۱۵ + ۸ = ۲۳
تعداد دانش‌آموزانی که دوست حداقل یکی از این دو نفرند برابر است با: $4 + 15 + 8 = 27$

۳۶ فرض کنیم A و B به ترتیب مجموعه دانش‌آموزانی باشند که در رشته‌های فوتبال و والیبال ثبت نام کرده‌اند. در این صورت $A \cap B$ ، ۱۴ عضو و $A - B$ ، ۱۳ عضو دارد و نمودار ون مقابل به دست می‌آید:

تعداد عضوهای مجموعه $B - A$ = $38 - (13 + 14) = 11$



۳۷ $A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{2\}$, $A - B = \{3, 5\}$

۳۸ $B = \{x + 2 \mid x \in A\} = \{x + 2 \mid x = -1, 0, 1, 2\}$
 $\Rightarrow B = \{-1 + 2, 0 + 2, 1 + 2, 2 + 2\} = \{1, 2, 3, 4\}$
 ۱ و ۲ عضوهای مشترک دو مجموعه A و B هستند، لذا:

$A \cap B = \{1, 2\}$
 همچنین اجتماع دو مجموعه A و B، مجموعه $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ می‌باشد.

۳۹ (آ) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7\}$

(ب) $B - C = \{3, 4, 7\} - \{2, 3, 5\} = \{4, 7\}$

(پ) $A - B = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{3, 4, 7\} = \{1, 2, 5\}$

$\Rightarrow (A - B) \cup C = \{1, 2, 5\} \cup \{2, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 5\}$

(ت) $A \cap C = \{2, 3\} \Rightarrow (A \cap C) - B = \{2, 3\} - \{3, 4, 7\} = \{2\}$

(ث) $A - B = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{3, 4, 7\} = \{1, 2, 5\}$

$C - A = \{3, 4, 7\} - \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{7\}$

$\Rightarrow (A - B) \cup (C - A) = \{1, 2, 5\} \cup \{7\} = \{1, 2, 5, 7\}$

(ج) $\begin{cases} A \cap B = \{3, 4\} \\ A \cap C = \{2, 3\} \end{cases} \Rightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{2, 3, 4\}$

۲۵ (آ) $x \in \mathbb{W}, x \leq 2 \Rightarrow x = 0, 1, 2 \xrightarrow{x^2 - 1} -1, 2, 5$
 $\Rightarrow A = \{-1, 2, 5\}$

(ب) $x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x \leq 1 \Rightarrow x = -3, -2, -1, 0, 1$

$\xrightarrow{4x+2} -10, -6, -2, 2, 6 \Rightarrow B = \{-10, -6, -2, 2, 6\}$

(پ) $x \in \mathbb{N}, 2 \leq x \leq 5 \Rightarrow x = 2, 3, 4, 5$

$\xrightarrow{\frac{x}{x+2}} \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9} \Rightarrow C = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}\}$

(ت) $x \in \mathbb{N}, \frac{1}{x} \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 1, 2, 3, 6, 9, 18$

$\Rightarrow D = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

۲۶ (آ) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 5 < x < 11\}$

(ب) $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$

(پ) هر عدد بخش پذیر بر ۴ به صورت $4k$ است، پس:
 $C = \{4k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

۲۷ هر یک از مجموعه‌های A و B را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$x \in \mathbb{W}, 2^x \leq 4 \xrightarrow{x=0,1,2,3,\dots} 0, 1, 2 \Rightarrow A = \{0, 1, 2\}$

$x \in \mathbb{Z}, x^2 \leq 1 \xrightarrow{x=0, \pm 1, \pm 2, \dots} -1, 0, 1 \Rightarrow B = \{-1, 0, 1\}$

بنابراین مجموعه $\{0, 1, 2\}$ با مجموعه A برابر است.

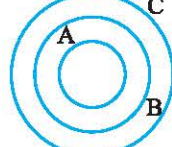
۲۸ مجموعه A به صورت $\{ا, ن, ی, ب\}$ می‌باشد که یک مجموعه ۴ عضوی است. هر یک از مجموعه‌های B و C را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 4\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$


$x^2, x \in \mathbb{N}, x < 5 \xrightarrow{x=1,2,3,4} 1, 4, 9, 16 \Rightarrow C = \{1, 4, 9, 16\}$

B یک مجموعه ۷ عضوی و C یک مجموعه ۴ عضوی است، پس تعداد عضوهای مجموعه A با C برابر است.

۲۹ بله، با توجه به نمودار ون، مشخص می‌شود که اعضای مجموعه A در مجموعه C قرار دارند و در نتیجه $A \subseteq C$ می‌باشد.



۳۰ طبق نمودار ون مقابل، دو شرط $B \not\subseteq C$ و $A \not\subseteq B$ برقرار است ولی $A \subseteq C$ می‌باشد.



۳۱ (آ) درست است، زیرا $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$

(ب) نادرست است، زیرا $-1 \in \mathbb{Z}$ و $-1 \notin \mathbb{N}$

(پ) نادرست است، زیرا به عنوان مثال اگر $A = \{1, 2\}$ و $B = \{1\}$ در این صورت $B \subseteq A$ و عضو در مجموعه A وجود دارد که در مجموعه B نمی‌باشد.

۳۲ اگر مجموعه A، n عضو داشته باشد، آن‌گاه 2^n زیرمجموعه دارد.

(آ) مجموعه A یک مجموعه ۴ عضوی است، در نتیجه مجموعه A، $2^4 = 16$ زیرمجموعه دارد.

(ب) ابتدا عضوهای مجموعه B را مشخص می‌کنیم:
 $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 5\} = \{1, 2\}$
 B یک مجموعه ۲ عضوی است، لذا مجموعه B، $2^2 = 4$ زیرمجموعه دارد.