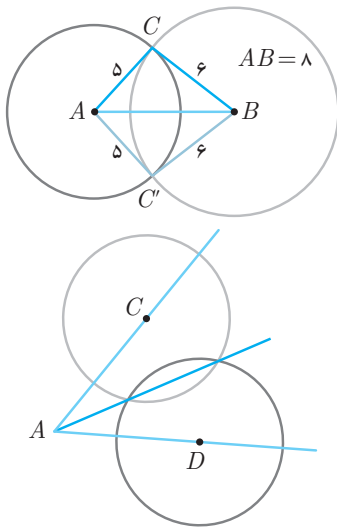


چند نمونه‌ی حل شده

مثال ۱

فقط با استفاده از یک خط‌کش و پرگار مثلثی به طول اضلاع ۵، ۶ و ۸ رسم کرده و سپس نیم‌ساز یکی از زاویه‌ها را رسم کنید.

«کتاب درسی - تألیفی»



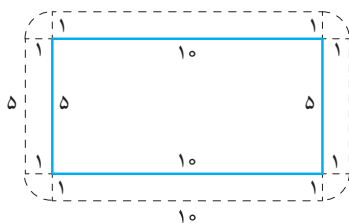
ابتدا پاره‌خطی به طول ۸ واحد رسم می‌کنیم. واحد را هر اندازه‌ای که بخواهید می‌توانید در نظر بگیرید. نام این پاره‌خط را AB می‌گذاریم. اکنون رأس سوم مثلث باید از یکی از نقاط A و B ، ۶ واحد و از دیگری ۵ واحد فاصله داشته باشد. سپس از یکی از نقاط A یا B دایره‌ای به شعاع ۵ و از دیگری دایره‌ای به شعاع ۶ رسم می‌کنیم و محل تقاطع آن‌ها را مشخص می‌کنیم. این نقاط می‌توانند رأس سوم مثلث باشند.

برای رسم نیم‌ساز زاویه‌ی $\hat{C}AB$ کافی است دو نقطه‌ی هم‌فاصله از رأس زاویه‌ی A را در نظر بگیریم (مانند C و D) به طول شعاع یکسان و به مرکز این دو نقطه دایره‌هایی رسم کنیم. محل برخورد این دو دایره روی نیم‌ساز قرار دارد. پس کافی است که آن‌ها را به A وصل کنیم تا نیم‌ساز رسم شود.

مثال ۲

یک باغچه‌ی مستطیل شکل به طول ۱۰ متر و عرض ۵ متر است. اگر به فاصله‌ی یک متر از لبه‌ی باغچه دور تا دور آن را نرده بکشیم به طوری که فاصله‌ی هر نقطه از نرده با نزدیک‌ترین نقطه‌ی محیط باغچه برابر یک متر باشد، چند متر نرده احتیاج داریم؟

«تألیفی»



ابتدا شکل باغچه و نرده را رسم می‌کنیم. در چهار گوشه‌ی شکل ۴ تا ربع دایره با شعاع ۱ تشکیل می‌شود سپس محیط شکل حاصل را حساب می‌کنیم:

$$\text{محیط} = 2 \times 10 + 2 \times 5 + 4 \times \left(\frac{2 \times 3,14 \times 1}{4} \right) = 36,28$$

مثال ۳

در کشور ریاضیات، ۵ شهر بزرگ با اسامی یک، دو، سه، چهار و پنج وجود دارد. در مورد این شهرها می‌دانیم: «تألیفی»

(الف) از شهر یک فقط به شهر سه و چهار جاده وجود دارد.

(ب) شهر دو فقط به شهر پنج و یک جاده‌ای ندارد.

(ج) شهر پنج دو جاده دارد.

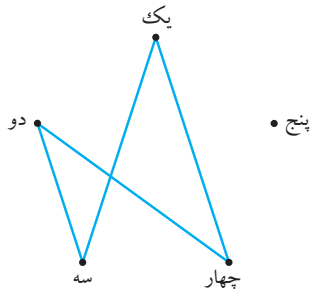
(د) شهر چهار، چهار جاده دارد.

در این کشور چند جاده وجود دارد؟

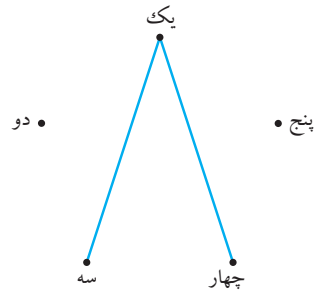


مرحله به مرحله با خواندن هر جمله شکل مربوطه را کامل می‌کنیم:

(ب)

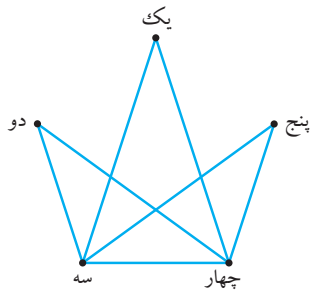


(الف)

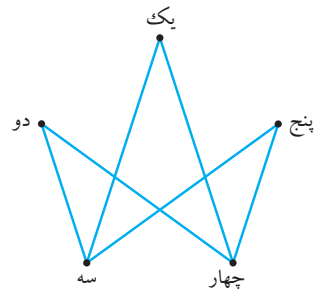


اکنون دقت کنید که دو جاده‌ی شهر پنج باید به شهرهای سه و چهار وصل شود. (چرا؟)

(د)



(ج)





تمرین

بخش ۱



۱ یک باغچه‌ی مستطیل شکل به طول 1° و عرض 5 متر است. اگر درون باغچه تا فاصله‌ی 1 متری از حاشیه‌ی آن به صورت مستطیلی چمن‌کاری شود و باقی آن را گل نرگس بکاریم چه مقدار از مساحت باغچه چمن‌کاری شده و چه مقداری از آن را گل نرگس کاشته‌ایم؟

«تألیفی»

۲ زمین حیاط گوگول جان عجیب است. در آن حیاط اگر توپی از ارتفاع کم‌تر از یک متر رها شود توپ به زمین چسبیده و اصلاً بالا نمی‌آید ولی اگر توپ از ارتفاع بیش از یک متر رها شود هر بار پس از برخورد نصف ارتفاع اولیه‌اش بالا می‌آید. گوگول جان توپش را از ارتفاع 18 متری رها کرده است. این توپ از لحظه‌ی رها شدن تا توقف کامل چند متر حرکت کرده است؟

«تألیفی»

۳ در لیگ کشور شکرستان ۷ تیم فوتبال وجود دارد که انتهای لیگ هر تیم دقیقاً با هر تیم دیگری فقط یک بازی انجام داده است. تعداد کل بازی‌ها را بیابید.

«تألیفی»

۴ حوضی مربعی شکل پر از آب در وسط یک حیاط قرار دارد به طوری که در هر یک از چهار گوشه‌ی آن درخت تنومندی قرار دارد. چطور می‌توان حوض را بزرگ‌تر کرد به شرطی که اولاً باز هم مربعی باشد و ثانیاً درخت‌ها همچنان در مرز بین آب و خشکی قرار داشته باشند.

«تألیفی»

۵ قطاری با سرعت 1° متر بر ثانیه و طول 1° متر به ابتدای یک تونل 2° متری می‌رسد. چند ثانیه طول می‌کشد تا تمام قطار از داخل تونل عبور کند؟

«کنکور»

۶ وقتی اتوبوسی نصف مسیر خود را طی کرده بود، مسافری به خواب رفت. هنگامی که بیدار شد، بقیه‌ی مسافتی که باقی مانده بود، نصف مسافتی بود که در طی آن مسافر به خواب رفته بود. مدت خواب مسافر، اتوبوس چه کسری از کل مسیر را طی کرده است؟

«آزمون ورودی سوم راهنمایی»

۷ از تکه چوبی به طول 9° سانتی‌متر به کمک دو تکه چوب دیگر به طول‌های 3° و 5° سانتی‌متر، چطور می‌توان تکه چوبی 7°



یک بار باخت از دور مسابقات حذف می‌شود. «تألیفی»
 (الف) قهرمان این دوره از مسابقات، چند بازی انجام می‌دهد؟

(ب) در کل چند بازی در این مسابقات انجام می‌شود؟

۱۱ با کدام دسته از اعداد زیر می‌توان یک مثلث ساخت؟ آن‌ها را با پرگار رسم کنید و دلیل رد کردن گزینه‌های دیگر را توضیح دهید.
 «تغییر یافته‌ی کتاب پنجم»

۱۲ راست‌آباد و درست‌آباد ۸ کیلومتر از هم فاصله دارند. چوپانان این دو روستا به خاطر امنیت گله‌هایشان آن‌ها را بیش از ۵ کیلومتر از روستا دور نمی‌کنند. آیا ممکن است گله‌ای از درست‌آباد با گله‌ای از راست‌آباد به هم برسند؟ «آسان شده‌ی مرحله‌ی اول»

ساعتی متری برید؟ «تألیفی»

۸ در یک مربع 5×5 حداکثر چند مستطیل 3×1 می‌توان جای داد که هیچ کدام روی هم قرار نگیرد؟ «مرحله‌ی اول ریاضی»

۹ ۴ خط مختلف از داخل یک مربع عبور می‌کنند. کم‌ترین و بیش‌ترین ناحیه‌هایی که این خطوط می‌توانند در مربع ایجاد کنند چند تا است؟ آیا این سؤال را برای ۵ خط نیز می‌توانید حل کنید؟ «تألیفی»

برای ایده گرفتن در حالت کلی می‌توانید به این موضوع توجه کنید که با رسم هر فضا و تقاطع آن با فضای دیگر (به غیر از اولین تقاطع یک نامیه به تعداد نواحی اضافه می‌شود.

۱۰ در لیگ جهانی والیبال، بیست و چهار تیم در چهار گروه شش تیمی به صورت دوره‌ای با هم بازی می‌کنند (یعنی در هر گروه هر تیم با تمام تیم‌های دیگر دقیقاً یک بار بازی می‌کند). سپس از هر گروه دو تیم به مرحله‌ی تک حذفی صعود می‌کنند (یعنی هر تیم با





۱۴ دانش‌آموزان پایه اول دبیرستان خوشحالان ۱۱۴ نفر هستند. در بین این دانش‌آموزان ۴۰ نفر به درس علوم تجربی و ۸۵ نفر به درس ریاضی علاقه دارند. هم‌چنین ۱۵ نفر به هر دو درس علاقه‌مندند. آیا کسی هست که به هیچ کدام از این دروس علاقه نداشته باشد؟ آن‌ها چند نفرند؟ **«تألیفی»**

(یواشکی: دو دایره که ناحیه‌ی مشترک دارند بکشید. یکی نماینده‌ی گروه ریاضی و یکی نماینده‌ی گروه علوم تجربی.)

۱۵ از بین ۱۰۰ نفر مجرم، ۳۸ نفر قاتل، ۳۰ نفر دزد، ۴۲ نفر کلاه‌بردار، ۸ نفر دزد و قاتل، ۵ نفر دزد و کلاه‌بردار، ۱۰ نفر قاتل و کلاه‌بردار و ۳ نفر هم سرگرم هر سه شغل! بوده‌اند. **(الف)** چند نفر از مجرمین مذکور، به هیچ کدام از این ۳ شغل مشغول نیستند؟

(ب) چند نفر فقط دزد هستند؟

(ج) چند نفر فقط به یکی از این شغل‌ها سرگرم هستند؟

۱۳ نقشه‌ی کشور برادران به صورت مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲۰ واحد است. این کشور توسط سه برادر اداره می‌شود که پایتخت هر کدام یکی از رأس‌های مثلث است. طبق وصیت پدرشان هر کدام از آن‌ها فقط از مناطقی مالیات می‌گیرند که فاصله‌شان تا پایتخت او کم‌تر از ۱۱ واحد باشد و باقی مناطق کشور منطقه‌ی آزاد محسوب می‌شود. **«تألیفی»**

(الف) هر کدام از برادرها از چه مساحتی از کشور مالیات می‌گیرد؟

(ب) کدام مناطق باید به دو برادر مالیات دهند؟

(ج) آیا منطقه‌ای در این کشور وجود دارد که در آن باید به هر سه برادر مالیات داد؟

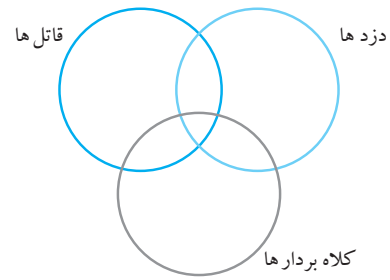
(د) بهترین منطقه برای کسب و کار کجاست؟



افراد قوم «راستان» از قوم «دوران» هستند. با رسم شکل و ارائه‌ی دلیل نشان دهید که حتماً «بعضی از افراد قوم «چپان» از قوم «دوران» هستند.»

«مسابقات ریاضی»

«جزوه رشد» (یواشکی: از نمودار مقابل کمک بگیرید.)



۱۶ در اون طرف‌تر آباد، بعضی از افراد قوم «دوران» از قوم «نزدیکان» هستند. هیچ کدام از افراد قوم «نزدیکان» از قوم «چپان» نیستند. همه‌ی افراد قوم «راستان» از قوم «چپان» هستند. بعضی از



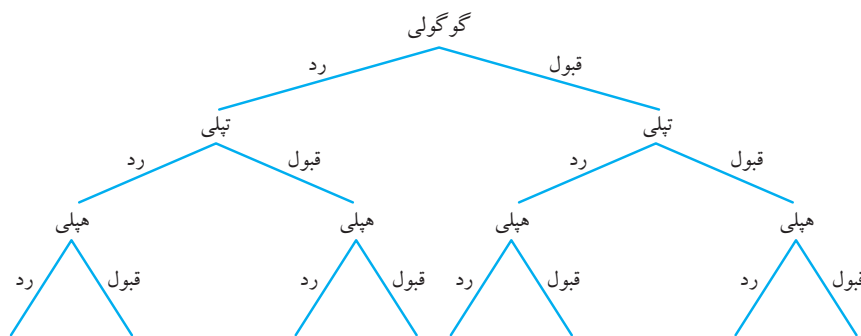
چند نمونه‌ی حل شده

مثال ۴

کلاس هفتم اون طرف تر آباد ۳ دانش آموز به نام‌های گوگولی، تپلی و هپلی دارد. معلم ریاضی آن‌ها برگه‌های آزمون را گم کرده است و می‌خواهد به صورت تصادفی اعلام نتیجه کند. در اون طرف تر آباد در کارنامه‌ی هر شخص نوشته می‌شود که قبول شده است یا نه و از نمره خبری نیست. او به چند طریق می‌تواند دانش آموزان را قبول یا رد نماید. گوگولی می‌تواند قبول یا رد شود. اگر گوگولی قبول شد، تپلی می‌تواند قبول یا رد شود و اگر گوگولی رد شد باز تپلی می‌تواند قبول یا رد شود. تا این جا شد ۴ حالت. برای هر کدام از این ۴ حالت، هپلی می‌تواند قبول یا رد شود. یعنی در کل ۸ حالت مختلف برای این ۳ عزیز به وجود می‌آید. به جدول و نمودار زیر دقت کنید.

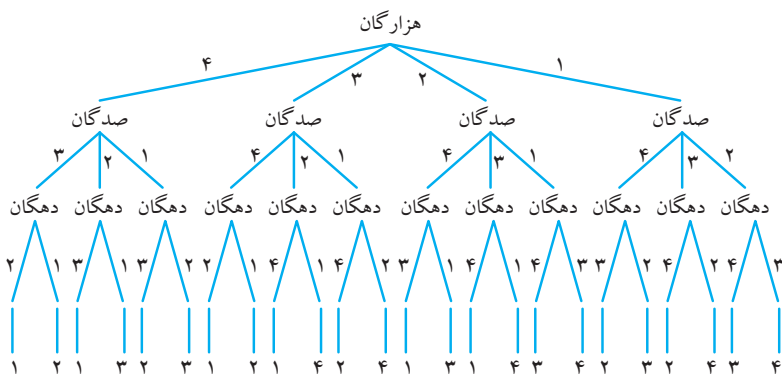
گوگولی	ق	ق	ق	ق	ر	ر	ر	ر
تپلی	ق	ق	ر	ر	ق	ق	ر	ر
هپلی	ق	ر	ق	ر	ق	ر	ق	ر

این ۸ حالت را در نمودار زیر نیز می‌توان مشاهده کرد:



مثال ۵

با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد ۴ رقمی می‌توان ساخت به شرطی که از هر کدام از این رقم‌ها یک بار استفاده شود؟ برای انتخاب رقم هزارگان ۴ انتخاب داریم. اگر هر کدام از این ۴ رقم انتخاب شود با توجه به این‌که دیگر آن رقم را نمی‌توانیم در جایگاه‌های دیگر استفاده کنیم، برای انتخاب رقم صدگان ۳ گزینه و همین طور برای انتخاب عدد دهگان ۲ گزینه و برای یکان یک گزینه خواهیم داشت و جواب برابر $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ خواهد بود.



مثال ۶

با حاصل ضرب اعداد ۱، ۲، ۳ و ۵ چند عدد مختلف می توان ساخت؟ (از هیچ عددی بیش از یک بار استفاده نشود).
از راهبرد الگوسازی استفاده می کنیم. ابتدا اعدادی را می نویسیم که از یک عدد ساخته شده باشند: ۱، ۲، ۳، ۵
اکنون اعدادی را می نویسیم که از حاصل ضرب ۲ عدد به دست آیند:

$$۱ \times ۲ = ۲, ۱ \times ۳ = ۳, ۱ \times ۵ = ۵, ۲ \times ۳ = ۶, ۲ \times ۵ = ۱۰, ۳ \times ۵ = ۱۵$$

$$\text{سه تایی ها: } ۱ \times ۲ \times ۳ = ۶, ۱ \times ۲ \times ۵ = ۱۰, ۱ \times ۳ \times ۵ = ۱۵, ۲ \times ۳ \times ۵ = ۳۰$$

$$۱ \times ۲ \times ۳ \times ۵ = ۳۰ \quad \text{چهار تایی:}$$

اکنون اعداد تکراری را حذف کرده و تمام حالات مختلف را بشمارید.





تمرین

بخش ۲



۱۷ طنابی به طول ۲۰ واحد داریم. با این طناب چند مستطیل مختلف با طول اضلاع عدد صحیح می‌توان درست کرد؟ همه‌ی آن‌ها را رسم کرده و مساحت هر کدام را داخل آن بنویسید. (مربع نوع خاصی از مستطیل محسوب می‌شود). «کتاب درسی»

۱۸ اگر با آن طناب دایره‌ای درست کنید، مساحت آن چقدر می‌شود؟ به نظرتان چرا مساحت این دایره از تمامی مستطیل‌ها بیش‌تر است؟ «کتاب درسی»

۱۹ یک تاس سفید و یک تاس مشکی را می‌اندازیم. در چند حالت، مجموع اعداد رو شده بر ۳ بخش پذیر است؟ جدول بکشید و تمام حالات را بنویسید. سپس سعی کنید بدون جدول سؤال را حل کنید. «تألیفی»

۲۰ در یک آزمون ۶ سؤالی گزینه‌دار، هر پاسخ درست ۴ امتیاز مثبت و هر پاسخ اشتباه ۱ امتیاز منفی دارد. اگر پسر حشمت‌خان فقط به یک سؤال جواب نداده باشد. تمام امتیازهای ممکن برای او را بررسی کنید. «تألیفی»

۲۱ با انگشتان یک دست به ۵ صورت می‌توان عدد ۱ را نشان داد. به چند صورت می‌توان عدد ۲ را نشان داد به این شرط که: «تألیفی»

(الف) دو انگشت انتخاب شده در کنار هم باشند.

(ب) دو انگشت انتخاب شده در کنار هم نباشند.

(ج) مجموع حالت‌های الف و ب چه عددی را نشان می‌دهد؟



(ج) زوج بوده و بر ۳ بخش پذیر باشد.

(د) رقم تکراری نداشته باشند.

(ه) اعدادی را بنویسید که حتماً رقم تکراری داشته باشند.

(و) اکنون تمامی حالت‌های ممکن را بنویسید و توضیح دهید که چه ارتباطی بین جواب قسمت‌های «الف و ب» و نیز بین جواب قسمت‌های «د و ه» وجود دارد؟

۲۴ شماره تلفن‌های اون طرف‌تر آباد همگی ۸ رقمی هستند و هیچ‌کدام با صفر شروع نمی‌شوند. همگی از چپ به راست صعودی هستند و رقم تکراری ندارند. اون طرف‌تر آباد چند شماره تلفن مختلف می‌تواند داشته باشد؟ «تألیفی»

۲۲ دبیرستان «زرنگان» هفت دانش‌آموز ممتاز دارد. متأسفانه مدیر مدرسه فقط دو جایزه یکسان دارد و تصمیم دارد به قید قرعه آن‌ها را به دو نفر از دانش‌آموزان ممتاز جایزه بدهد. «تألیفی»
(الف) چند حالت مختلف برای اهدا این دو جایزه وجود دارد؟

(ب) اگر ۳ جایزه داشتیم، چند حالت مختلف برای اهدا وجود داشت؟

(ج) اگر ۶ جایزه داشتیم، چند حالت مختلف برای اهدا وجود داشت؟

۲۳ با سه رقم ۵ و ۲ و ۷ تمام عددهای سه‌رقمی ممکن را بنویسید. به شرطی که: (در عددهای شما می‌تواند رقم‌های تکراری هم باشد) «تألیفی»
(الف) آن اعداد زوج باشند.

(ب) آن عدد فرد باشد.



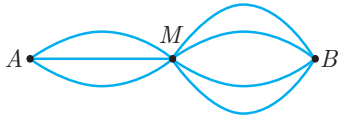


۲۵

با استفاده از رقم‌های ۱، ۲، ۳ و ۴، همه‌ی اعداد چهاررقمی ممکن با رقم‌های غیرتکراری را بر روی تخته‌ی بزرگ کلاس نوشته‌ایم. مجموع همه‌ی این اعداد را به دست آورید.

۲۸

به شکل نگاه کرده و به سؤالات زیر پاسخ دهید:



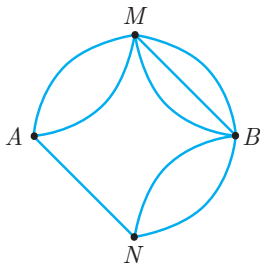
(الف) خرگوش کوچولو به چند روش مختلف می‌تواند از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B برود؟

(ب) خرگوش کوچولو به چند روش مختلف می‌تواند از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B برود و به نقطه‌ی A برگردد؟

(ج) خرگوش کوچولو به چند روش مختلف می‌تواند از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B برود و به نقطه‌ی A برگردد ولی در برگشت از مسیری که رفته عبور نکند؟

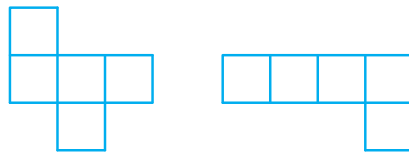
۲۹

هر سه قسمت سؤال قبل را برای شکل زیر نیز حل کنید.



۲۶

دور یک میز مربعی ۴ صندلی می‌توان قرار داد. دانش‌آموزان می‌خواهند برای مراسمی در سالن مدرسه، ۵ تا از این میزهای مربعی را به هم بچسبانند تا یک میز بزرگ‌تر درست کنند. به چند حالت مختلف می‌توانند این کار را در سالن انجام دهند؟ آن‌ها را رسم کنید و بگویید در کدام حالت بیش‌ترین صندلی را می‌توان دور میز بزرگ چید؟ دقت کنید که اتصال یعنی چسبیدن کامل یک ضلع میز به یک ضلع میز دیگر و دو نمونه از این اتصال‌ها نشان داده شده‌اند. «تألیفی»



۲۷

خانه‌ی امیرحسین، رسول، داود و سهیل در یک سمت خیابان اصلی اون‌طرف‌تر آباد است. اگر فاصله‌ی خانه‌ی سهیل و امیرحسین ۱۰۰ متر، فاصله‌ی خانه‌ی امیرحسین و رسول ۱۵۰ متر و فاصله‌ی خانه‌ی رسول و داود ۶۰ متر باشد، فاصله‌ی خانه‌ی سهیل و داود چه مقدارهایی می‌تواند باشد؟ (یواشکی: هم از راهبرد رسم شکل و هم راهبرد الگوسازی استفاده کنید.) «تألیفی»



چند نمونه‌ی حل شده

مثال ۷

مجموع سن سه نفر ۱۵ و حاصل ضرب سن آن‌ها مضربی از ۱۴ است. مجموع سن بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین فرد چقدر است؟
 «تألیفی»

ساده‌ترین روشی که به ذهن می‌رسد این است که تمام حالتی که مجموع ۳ عدد طبیعی برابر ۱۵ است را بنویسیم و حساب کنیم که در کدام حالت حاصل ضرب، مضربی از ۱۴ است. ولی ساده‌تر هم می‌توان مسئله را حل کرد. واضح است که حداقل یکی از افراد باید ۷ ساله باشد و حداقل سن یکی دیگر از آن‌ها یک عدد زوج است. با توجه به این اطلاعات بزرگ‌ترین عدد نمی‌تواند ۸ یا بزرگ‌تر از آن باشد. زیرا مجموع ۳ عدد باید ۱۵ باشد. پس بزرگ‌ترین عدد ۷ است. اکنون فقط حالتی را می‌نویسیم که این ویژگی را دارند:

$$\left\{ \begin{array}{l} 7 + 7 + 1 \rightarrow \text{عدد زوج ندارد} \\ 7 + 6 + 2 \rightarrow \text{جواب مورد نظر} \\ 7 + 5 + 3 \rightarrow \text{عدد زوج ندارد} \\ 7 + 4 + 4 \rightarrow \text{کوچک‌ترین عدد ندارد} \end{array} \right. \Rightarrow \text{جواب} = 7 + 2 = 9$$



مثال ۸

دوست شما یکی از خانه‌های صفحه‌ی 12×12 را در نظر گرفته است. شما باید با طرح چند سؤال، خانه‌ی مورد نظر او را پیدا کنید. او فقط می‌تواند به سؤالات شما جواب بله یا خیر بدهد. چگونه می‌توان خانه‌ی مورد نظر را با طرح یک روش اصولی، همواره با حداکثر ۸ سؤال پیدا کرد؟
 «تألیفی»

این صفحه $12 \times 12 = 144$ خانه دارد. ما در هر سؤال می‌توانیم خانه‌ها را به دو قسمت تبدیل کنیم. از دوستان می‌پرسیم که «آیا خانه‌ی مورد نظر در نیمه‌ی بالای جدول است؟» چه جواب بله باشد و چه خیر، نیمی از خانه‌ها حذف می‌شوند و ما باید بین ۷۲ خانه به جست‌وجو بپردازیم. همین روند را ادامه می‌دهیم:

$$9 \xrightarrow{\text{سؤال ۱}} 18 \xrightarrow{\text{سؤال ۲}} 36 \xrightarrow{\text{سؤال ۳}} 72 \xrightarrow{\text{سؤال ۴}} 144$$

بعد از ۴ سؤال به ۹ خانه می‌رسیم. این ۹ خانه را به ۲ قسمت ۴ و ۵ خانه‌ی تقسیم می‌کنیم. بعد از شنیدن جواب یا ۵ خانه در پیش‌روی ما باقی می‌ماند و یا ۴ خانه. ما حالت ۵ خانه‌ی را ادامه می‌دهیم:

$$1 \xrightarrow{\text{سؤال ۵}} 2 \xrightarrow{\text{سؤال ۶}} 3 \xrightarrow{\text{سؤال ۷}} 5 \xrightarrow{\text{سؤال ۸}} 9$$



تمرین

بخش ۳



۳۳ با استفاده از یک ترازوی دوکفه‌ای قدیمی چگونه می‌توان از بین ۱۳۹۶ سکه‌ی هم‌شکل، یکی از آن‌ها را که وزنش کمی بیش‌تر از بقیه است را پیدا کرد؟ روش کاری ارائه دهید که در آن کم‌ترین بار از ترازوی دوکفه‌ای استفاده شده باشد و روش کار در هر شرایطی درست باشد.

۳۴ دوست شما یکی از مضرب‌های ۵ که کوچک‌تر از 1000 است را در نظر گرفته است. شما باید با طرح چند سؤال، عدد مورد نظر او را پیدا کنید. با طرح حداکثر چند سؤال با جواب بله یا خیر، به طور حتمی می‌توان آن را پیدا کرد؟

۳۵ اگر نمره‌ی ریاضی احمد بالاتر از حسن، صادق پایین‌تر از رضا باشد، هم‌چنین رضا بالاتر از احمد شده باشد و صادق پایین‌ترین نمره را داشته باشد. نمره‌ی ریاضی افراد را به ترتیب صعودی مرتب کنید.

۳۰ تعداد زیادی سکه‌ی 50 و 100 تومانی داریم و می‌دانیم که وزن یک سکه‌ی 50 تومانی با یک سکه‌ی 100 تومانی برابر است. به چند حالت می‌توان با سکه‌ها 500 تومان درست کرد به شرطی که بتوان با آن‌ها در یک ترازوی دوکفه‌ای تعادل ایجاد کرد؟ «تألیفی»

۳۱ در مستطیلی که طولش دو برابر عرض آن است، محیط برابر 36 واحد است. مساحت آن را حساب کنید.

«آزمون تیزهوشان»

۳۲ مجموع سن سه نفر 13 و حاصل ضرب سن آن‌ها 72 است. اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین سن بین این سه نفر کدام است؟





۳۷ سه کلاه سفید و دو کلاه سیاه را جلوی چشمان سه ریاضی‌دان درون کیسه‌ای خالی قرار می‌دهیم. سپس آن‌ها را به صف پشت سر هم قرار می‌دهیم و سر هر کدام از آن‌ها بدون آن‌که ببینند یکی از کلاه‌های درون کیسه را قرار می‌دهیم. نفر سوم کلاه‌های دو نفر دیگر را می‌بیند و نفر دوم کلاه نفر اول را می‌بیند. از نفر سوم می‌پرسند که کلاه سرش چه رنگی است و او در جواب می‌گوید معلوم نیست. همین پرسش را از نفر دوم می‌کنند و او هم می‌گوید معلوم نیست. ولی وقتی این سؤال را از نفر اول می‌کنند او می‌گوید کلاه من سفید است. او درست می‌گوید یا نادرست؟

۳۶ روزی مسئول سرشماری به منزل قمرخان می‌رود و از او درباره‌ی سن فرزندانش سؤال می‌کند. او جواب می‌دهد: «من فقط سه پسر دارم که حاصل ضرب سن آن‌ها ۳۶ است و حاصل جمع سن‌شان ۲ تا از شماره پلاک همسایه‌ی سمت راست کم‌تر است.» مسئول سرشماری به شماره پلاک همسایه‌ی سمت راست نگاهی می‌اندازد و می‌گوید: «شما حتماً باید اطلاعات بیش‌تری به من بدهید.» قمرخان می‌گوید: «بزرگ‌ترین پسر من به ریاضیات بسیار علاقه‌مند است.» مسئول سرشماری با شنیدن این جمله سن هر سه پسر قمرخان را می‌فهمد. آیا می‌توانید سن سه پسر قمرخان را به‌دست بیاورید؟

چند نمونه‌ی حل شده

مثال ۹

سه عدد بعدی الگوهای زیر را بنویسید.

(الف) $5, 7, 10, 14, \dots$

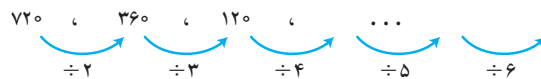
دقت کنید که در این سؤال مقداری که به هر عضو اضافه می‌شود، ثابت نیست:



پس عضوهای بعدی به ترتیب ۱۹، ۲۵ و ۳۲ هستند.

(ب) $720, 360, 120, \dots$

در این دنباله‌ی اعداد، ابتدا عضو اول نصف شده است. سپس عضو دوم بر ۳ تقسیم شده است.



پس عضوهای بعدی به ترتیب ۳۰، ۶ و ۱ خواهند بود.

مثال ۱۰

شکل دهم الگوی مقابل با چند دایره ساخته می‌شود؟



به سادگی فهمیده می‌شود که تعداد دایره‌ها به صورت الگوی عددی زیر است:

$$1 \times 1 = 1, 2 \times 2 = 4, 3 \times 3 = 9, 4 \times 4 = 16, \dots$$

پس شکل ۱۰ از $10 \times 10 = 100$ دایره ساخته خواهد شد.

از طرفی می‌توان به مسئله این طور نیز نگاه کرد:



مثال ۱۱

در اون طرف تر آباد نوعی درخت وجود دارد که هر سال هر کدام از شاخه‌هایش به دو سمت رشد می‌کنند به طوری که مجموع طول دو شاخه‌ی جدید، نصف شاخه‌ی قبلی است. وقتی قمرخان یک ساله بود این درخت فقط یک شاخه به طول یک متر



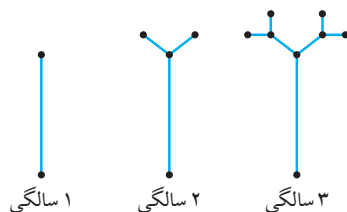
داشت. اکنون که او ۱۰ ساله است مجموع طول شاخه‌های این درخت چقدر است؟

$$1 = \text{مجموع طول شاخه‌ها در ۱ سالگی قمرخان}$$

$$1 + 2 \times \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} = \text{مجموع طول شاخه‌ها در ۲ سالگی قمرخان}$$

$$1 + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{16} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \text{مجموع طول شاخه‌ها در ۳ سالگی قمرخان}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \text{مجموع طول شاخه‌ها در ۴ سالگی قمرخان}$$



به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{512} = \text{مجموع طول شاخه‌ها در ۱۰ سالگی قمرخان}$$

برای پیدا کردن حاصل آن مجموع بهتر است به آن $\frac{1}{512}$ اضافه و کم کنیم:

$$? = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{512} - \frac{1}{512}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{256} + \frac{1}{256} - \frac{1}{512}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{128} + \frac{1}{128} - \frac{1}{512} = \dots = 2 - \frac{1}{512} = 1,998,05$$





تمرین

بخش ۴



۳۸

سه عدد بعدی الگوهای زیر را بنویسید. رابطه‌ی بین اعداد را توضیح دهید.*
«تألیفی»

(ط) ۲, ۴, ۱۶, ۹۶, , , ,

(الف) ۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, , ,

(ی) ۲, ۴, ۱۶, ۱۲۸, , , ,

(ب) ۱۴۱, ۱۴۸, ۱۵۵, , , ,

(ک) ۱, ۴, ۹, ۱۶, , , ,

(ج) ۱۰, ۸, ۶, ۵, ۵, ۵, , , ,

(ل) ۱, ۸, ۲۷, ۶۴, , , ,

(د) ۴, ۲, ۱, $\frac{1}{3}$, , , ,

(م) ۲, ۱۲, ۳۰, ۵۶, , , ,

(ه) ۵, ۶, ۱۰, ۱۹, ۳۵, , , ,

(ن) ۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, , , ,

(و) ۱۰, ۱۸, ۲۸, ۴۶, , , ,

(س) ۳, ۳, ۶, ۱۸, ۷۲, , , ,

(ز) ۶, ۱۲, ۲۴, ۴۸, , , ,

(ح) ۵, ۵, ۱۰, ۳۰, , , ,

* لازم به ذکر است که برای بعضی از قسمت‌ها ممکن است بیش از یک الگو پیدا کرده و جواب‌های متنوعی پیدا کنید و در حالت کلی جواب هیچ یک از قسمت‌ها لزوماً منحصر به فرد نیست.

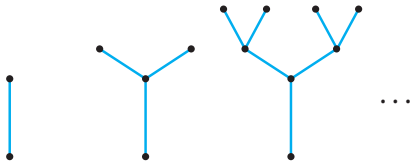




(ب) شکل پنجم از چند چوب‌کبریت ساخته شده است؟

(ج) کدام شکل با 100° چوب‌کبریت ساخته شده است؟

۴۲ با اتصال تعدادی میله اجسام زیر را ساخته‌ایم. برای ساخت شکل 11° به چند میله و چند اتصال نیاز داریم؟



«المپیاد ریاضی»

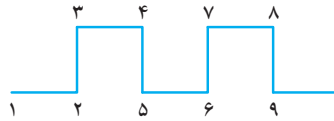
۴۳ در الگوهای زیر با بیان دلیل بگویید که شکل دهم از چند واحد ساخته شده است. (واحد هر شکل روبه‌روی آن نوشته شده است). «آزمون جهانی تیمز - المپیاد ریاضی - مسابقات ریاضی - کانگورو»

۳۹ تعدادی از اعداد را از چپ به راست پشت سر هم نوشته‌ایم:

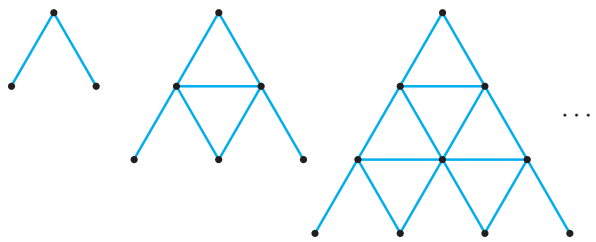
۲, ۵, ...

از جمله‌ی سوم به بعد، هر جمله از تقسیم جمله‌ی قبلی به قبلی‌تر به دست می‌آید. به طور مثال جمله‌ی سوم برابر $\frac{5}{3}$ است. جمله‌ی 121 ام را به دست آورید. «المپیاد ریاضی»

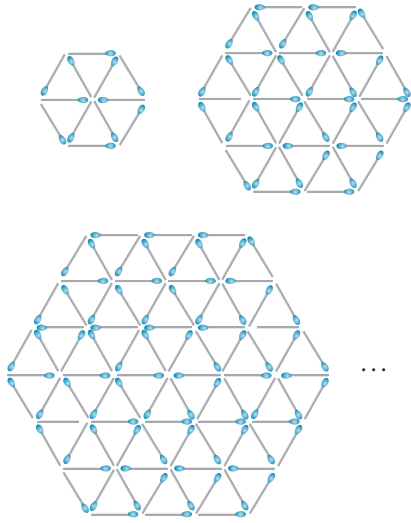
۴۰ به الگوی تکراری زیر دقت کنید و قطعه‌ی این الگو از نقطه‌ی 1393 تا 1396 را رسم کنید. «المپیاد ریاضی»



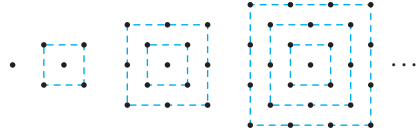
۴۱ (الف) در الگوی زیر شکل هفتم نسبت به شکل قبلی چند چوب‌کبریت بیش‌تر دارد؟ «المپیاد ریاضی»



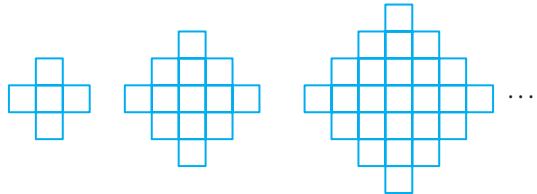
(ی) (چوبکبیریت)



(ز) (نقطه)

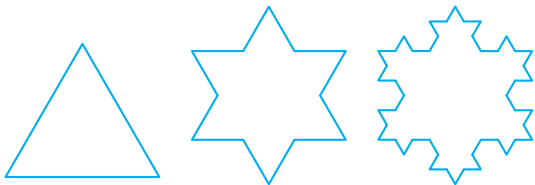


(ح) (مربع)

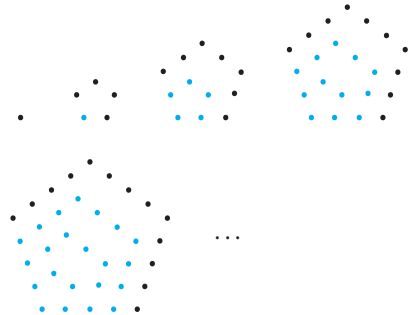


۴۴

برای ایجاد یک برف دانه‌ی کُخ، یک مثلث متساوی‌الاضلاع در نظر گرفته، روی هر ضلع آن این روند را تکرار می‌کنیم: ضلع را به ۳ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و روی پاره خط وسطی، یک مثلث متساوی‌الاضلاع جدید می‌سازیم و قاعده‌اش (همان پاره خط وسطی) را حذف می‌کنیم و روی پاره خط‌های باقی مانده همین کار را انجام می‌دهیم. جمله‌ی عمومی دنباله‌ی تعداد پاره خط‌ها در هر مرحله را به دست آورید.



(ط) (نقطه)





۴۵

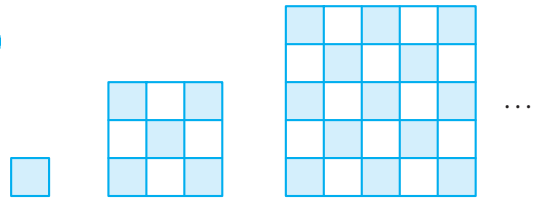
در الگوهای زیر با بیان دلیل بگویید که چه نسبتی از شکل دهم هاشور خورده است.

«المپیاد ریاضی»

۱)



۲)



۴۶

الگوی جدول زیر را پیدا کرده و مجموع اعداد ردیف آخر را بنویسید.

«کانگورو»

۱۲	۵
۱۷	۷
۲۴	۱۰
۳۴	۱۴

۴۷

خرگوش‌های اون طرف‌تر آباد عمر جاودان دارند. در هر سال هر جفت خرگوش بالغ، جفت تازه‌ای که بعد از دو سال بالغ می‌گردند، تولید کنند. اگر حشمت جان (پسر حشمت خان!) در تولد ۱۰ سالگی‌اش یک جفت خرگوش تازه متولد شده هدیه گرفته باشد، چهار سال بعد چند خرگوش خواهد داشت؟

