



راهبرد رسم شکل



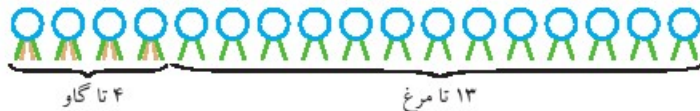
مساله ۱

یک کشاورز تعدادی گاو و مرغ دارد. اگر این حیوانات روی هم ۱۷ سر و ۴۲ پا داشته باشند. (با فرض این که همگی سالم باشند.) این کشاورز چند گاو و چند مرغ دارد؟

حل. مجتبی برای حل این مسئله، شکل‌های زیر را رسم کرد. او به جای سر هر حیوان دایره‌ای کشید. بعد با خود فکر کرد که اگر همه‌ی حیوان‌ها مرغ باشند، چند پا خواهند داشت؟ و برای هر حیوان ۲ تا پا کشید.



۱۷ حیوان هر کدام ۲ پا دارند، روی هم $17 \times 2 = 34$ تا پا دارند. اما تعداد پاها باید ۴۲ تا باشد. از آن جا که $42 - 34 = 8$ پس او باید ۸ تا پای دیگر بکشد. پس با کشیدن ۲ تا پا برای بعضی از مرغ‌ها، آن‌ها را به گاو تبدیل می‌کند! او با کشیدن ۸ تا پا، می‌تواند ۴ مرغ را به گاو تبدیل کند.



پس این کشاورز ۴ تا گاو و ۱۳ تا مرغ دارد.



مشاهده کردید که مجتبی چگونه با کشیدن شکلی ساده، راهبرد حل مسئله را پیدا کرد. کشیدن یک شکل مناسب، می‌تواند به ساده شدن و حل مسئله کمک کند.

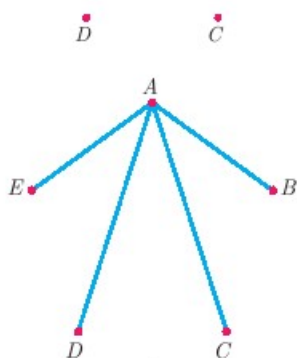
مساله ۲

پنج تیم فوتبال در یک دوره مسابقات شرکت کرده‌اند. قرار است هر تیم با هر یک از تیم‌های دیگر یک بار مسابقه دهد. علی می‌خواهد بداند در کل، چند مسابقه باید برگزار شود؟

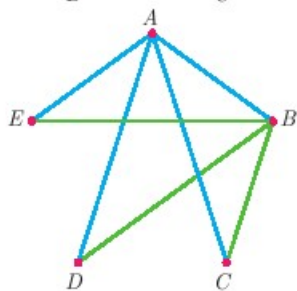




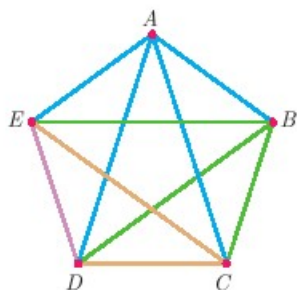
حل. علی ابتدا این پنج تیم را با حروف A, B, C, D و E نام گذاری کرد و هر تیم را با یک نقطه نمایش داد.



اگر مسابقه‌ای بین دو تیم برگزار شود، نقطه‌های مربوط به آن دو تیم را به وسیله‌ی یک پاره‌خط به هم وصل می‌کند. تیم A باید با همه‌ی تیم‌ها مسابقه دهد. نقطه‌ی A را به همه‌ی نقطه‌ها وصل می‌کند.



تیم B هم باید با همه‌ی تیم‌ها مسابقه دهد. نقطه‌ی B را قبلاً به نقطه‌ی A وصل کرده است. کافی است B را به نقاط C, D و E وصل کند.



او به همین ترتیب نقاط دیگر را هم به هم وصل کرد و شکل مقابل به دست آمد.

حالا با شمردن تعداد پاره‌خط‌ها، می‌توان تعداد مسابقات را مشخص کرد.

از نقطه‌ی A ، ۴ پاره‌خط رسم کرد. از نقطه‌ی B ، ۳ پاره‌خط جدید (یکی را که به A وصل شده قبلاً شمرده‌ایم)، از نقطه‌ی C ، ۲ پاره‌خط جدید (دو تا که به A و B وصل شده‌اند را قبلاً شمرده‌ایم) و از D ، ۱ پاره‌خط جدید رسم کردیم. تعداد پاره‌خط‌ها برابر

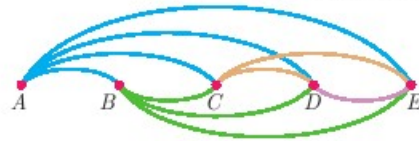
$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ = ۱۰$$

است. پس در کل ۱۰ مسابقه انجام خواهد گرفت.



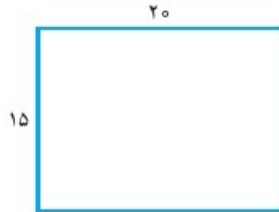


این مطلب را می‌توانستیم به صورت زیر نیز بیان کنیم:

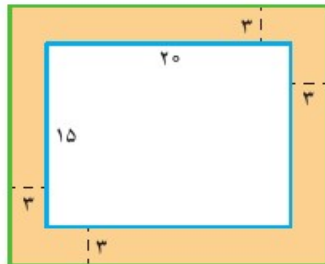


مساله ی ۳

یک استخر به شکل مستطیل به طول ۲۰ متر و عرض ۱۵ متر ساخته‌اند. دور تا دور این استخر حاشیه‌ای به پهنای ۳ متر دارد. می‌خواهند حاشیه‌ی استخر را سنگ‌فرش کنند. مساحت ناحیه‌ای را که باید سنگ‌فرش شود را حساب کنید.



حل. استخر را به شکل یک مستطیل می‌کشیم که طول آن ۲۰ و عرض آن ۱۵ باشد.



برای کشیدن حاشیه‌ی استخر مستطیل دیگری می‌کشیم که طول آن از طول استخر ۳ متر فاصله داشته باشد. عرض آن هم همین‌طور. این مستطیل در بیرون مستطیل استخر رسم می‌شود.

مستطیل بزرگ‌تر را در نظر بگیرید. طول و عرض این مستطیل چند متر است؟
طول این مستطیل ۶ متر بیش‌تر از طول استخر و عرض آن هم ۶ متر بیش‌تر از عرض استخر است. پس طول آن ۲۶ و عرض آن ۲۱ است.
برای محاسبه‌ی مساحت حاشیه‌ی استخر باید مساحت مستطیل بزرگ را منهای مساحت استخر کنیم.

$$\text{مترمربع } 546 = 26 \times 21 = \text{مساحت مستطیل بزرگ}$$

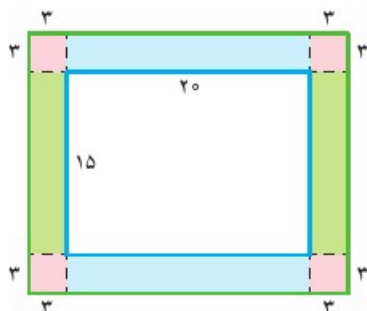
$$\text{مترمربع } 300 = 20 \times 15 = \text{مساحت استخر}$$

$$\text{مترمربع } 246 = 546 - 300 = \text{مساحت حاشیه‌ی استخر}$$





می‌توانستیم مساحت حاشیه‌ی استخر را با استفاده از شکل زیر و محاسبه‌ی مساحت‌های مربع‌ها و مستطیل‌ها به‌دست آوریم.



مسئله‌ی ۴

چهار نفر به نام‌های پرویز، الیاس، اسرافیل و عباس در مسابقه‌ی دو شرکت کردند. عباس زودتر از الیاس از خط پایان گذشت. پرویز در این مسابقه اول شد. اسرافیل بعد از الیاس از خط پایان گذشت. رتبه‌های این چهار نفر را مشخص کنید. حل. برای حل این مسئله، ابتدا مسیر و جهت حرکت افراد را تعیین می‌کنیم.



مسئله‌ی ۵

در کنار یک جاده‌ی مستقیم، تیرهای چراغ برق به فاصله‌ی مساوی پشت سر هم قرار گرفته‌اند. محسن با سرعت ثابت فاصله‌ی تیر اول تا تیر سوم را در ۳۰ ثانیه طی می‌کند. چه مدت طول می‌کشد تا محسن فاصله‌ی تیر اول تا ششم را طی کند؟





حل. برای حل این مسئله شکل زیر را در نظر می‌گیریم:



محسن فاصله‌ی تیر اول تا تیر سوم را در ۳۰ ثانیه طی می‌کند. پس برای طی کردن فاصله‌ی هر دو تیر متوالی ۱۵ ثانیه ($30 \div 2 = 15$) زمان لازم دارد.



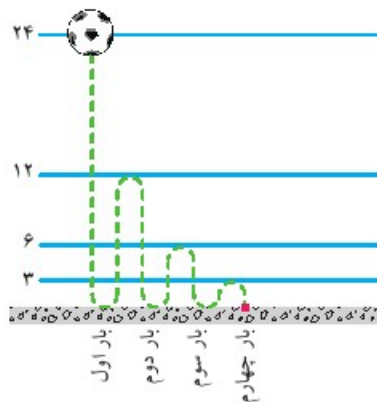
برای طی کردن فاصله‌ی تیر اول تا تیر ششم $75 = 5 \times 15$ ثانیه، زمان لازم دارد.



مسئله ۶

تویی از هر ارتفاعی رها شود، پس از برخورد با زمین نصف ارتفاع قبلی خود، بالا می‌آید. این توپ را از ارتفاع ۲۴ متری رها می‌کنیم. این توپ از لحظه‌ی رها شدن تا لحظه‌ای که برای چهارمین بار به زمین برخورد می‌کند، چند متر حرکت کرده است؟

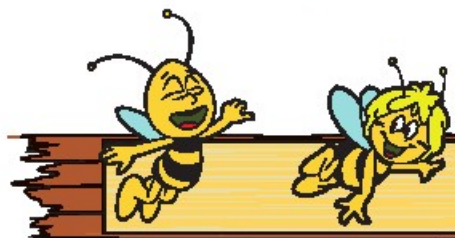
حل. با توجه به شکل مسیر حرکت توپ را مشخص می‌کنیم. از لحظه‌ی رها شدن تا وقتی که برای اولین بار به زمین برخورد می‌کند ۲۴ متر را طی می‌کند. بعد از برخورد ۱۲ متر به بالا و سپس ۱۲ متر به پایین حرکت می‌کند.



تا این جا $12 + 12 + 24$ متر را پیموده است. سپس ۶ متر به بالا می‌رود و بعد ۶ متر به پایین حرکت می‌کند تا برای سومین بار به زمین برخورد می‌کند و در نهایت ۳ متر بالا می‌رود و دوباره ۳ متر پایین می‌آید تا برای چهارمین بار به زمین برخورد کند. در این لحظه مسافت طی شده برابر است با:

$$24 + 12 + 12 + 6 + 6 + 3 + 3 = 66 \text{ متر}$$





تمرین‌های بخش ۱-۱

شش نفر به هم رسیدند و دوبه‌دو با هم دست دادند. عمل دست دادن روی هم چند بار صورت می‌گیرد؟



صابر تعدادی گوسفند و اردک دارد. تعداد سرهای آن‌ها روی هم ۲۱ و تعداد پاهای آن‌ها روی هم ۶۶ تا است. صابر چند گوسفند و چند اردک دارد؟



بابک، کامران، فرهاد، حسین، آرمین و رحیم در یک مسابقه‌ی دوی ۴۰۰ متر شرکت کردند. در پایان مسابقه، آرمین ۶ متر جلوتر از ابراهیم بود. بابک ۱۱ متر عقب‌تر از رضا بود. آرمین ۴ متر از حسین جلوتر و از رحیم ۲ متر عقب‌تر بود. فاصله‌ی کامران از نفر اول و آخر به یک اندازه بود. آن‌ها با چه ترتیبی مسابقه را تمام کردند؟ فاصله‌ی بین آن‌ها چقدر بود؟



کرمی در پایین دیواری ۱۳ متری قرار دارد. کرم هر روز ۴ متر به طرف بالا می‌خزد و هر شب لیز می‌خورد و ۳ متر پایین می‌آید. چند روز طول می‌کشد تا به بالای دیوار برسد؟



راهبرد الگوسازی



مسئله‌ی ۱

مهرداد آدم پولداری است. او زمین‌های کشاورزی زیادی دارد و تعداد زیادی کارگر در زمین‌های او کار می‌کنند. سعید یکی از کارگرهای اوست که بسیار تلاشگر و زحمت‌کش است. مهرداد می‌خواهد برای تشکر از زحمات سعید، قطعه زمینی را به او هدیه دهد. به این منظور طنابی به طول ۲۸ متر را به سعید می‌دهد و به او می‌گوید: با این طناب دور قطعه زمینی به شکل مستطیل را محصور کن. آن زمین مال تو خواهد بود. البته طوری که اندازه‌ی طول و عرض زمین بر حسب متر عددی طبیعی باشد.

سعید با خود فکر کرد که چگونه با این مقدار طناب قطعه زمینی را محصور کند به طوری که بیش‌ترین مساحت ممکن





را داشته باشد؟ طول و عرض زمین چند متر باید باشد؟ مساحت آن چند متر مربع خواهد بود؟



حل. این ۲۸ متر طناب در واقع محیط زمین مستطیل شکل خواهد بود. پس حاصل جمع طول و عرض زمین ۱۴ متر می‌باشد. ($28 \div 2 = 14$)

در جدول زیر حالت‌های مختلف اندازه‌های طول و عرض زمین را مشاهده می‌کنید: توجه داشته باشید که مربع هم نوعی مستطیل است.

عرض	طول
۱	۱۳
۲	۱۲
۳	۱۱
۴	۱۰
۵	۹
۶	۸
۷	۷

با توجه به این که مساحت مستطیل برابر است با: «طول \times عرض» در هر حالت، مساحت زمین را حساب می‌کنیم:

طول	عرض	مساحت
۱۳	۱	$13 \times 1 = 13$
۱۲	۲	$12 \times 2 = 24$
۱۱	۳	$11 \times 3 = 33$
۱۰	۴	$10 \times 4 = 40$
۹	۵	$9 \times 5 = 45$
۸	۶	$8 \times 6 = 48$
۷	۷	$7 \times 7 = 49^*$

بیشترین مقدار مساحت ۴۹ مترمربع می‌باشد. بنابراین سعید باید زمینی به شکل مربع را که اندازه‌ی هر ضلع آن ۷ متر است انتخاب کند.





● در حل این مسئله، همه‌ی حالت‌های ممکن برای طول و عرض قطعه زمین مستطیل شکل را در نظر گرفتیم و برای این‌که حالتی را از قلم نیندازیم آن‌ها را با نظم و ترتیب مشخصی نوشتیم. بیش‌ترین مقدار طول ۱۳ متر بود. آن را اول نوشتیم بعد ۱۲، و ...

با رعایت نظم در نوشتن حالت‌های مختلف، مطمئن می‌شویم که همه‌ی حالت‌ها را نوشته‌ایم. این روش حل مسئله را «راهبرد تفکر نظام‌دار» هم می‌نامند و حالت‌های مختلف را در یک جدول به طور منظم می‌نویسیم که به آن «جدول نظام‌دار» می‌گویند.

مسئله‌ی ۲

می‌خواهیم از بین ۵ نفر به نام‌های حسین، سهراب، رسول، مهرداد و حسن، دو نفر را برای تهیه‌ی روزنامه دیواری انتخاب کنیم. به چند صورت می‌توان این دو نفر را انتخاب کرد؟

حل. سیروس می‌خواهد این مسئله را حل کند. او شروع کرد به نوشتن حالت‌های مختلف:

حالت اول) حسین - سهراب حالت دوم) سهراب - رسول
حالت سوم) مهرداد - حسن حالت چهارم) رسول - حسین

اما روش سیروس نظم ندارد و بعد از نوشتن چند حالت دیگر دچار مشکل می‌شویم و نمی‌دانیم آیا همه‌ی حالت‌ها را نوشته‌ایم یا نه.

روش نظام‌دار را پی می‌گیریم. ابتدا فرض می‌کنیم یکی از دو نفر، حسین باشد. حالت‌های ممکن را می‌نویسیم:

حسین - سهراب			
حسین - رسول			
حسین - مهرداد			
حسین - حسن			

حالت‌هایی را که یکی از نفرات انتخابی ما حسین باشد مشاهده کردید. حالا حالت‌هایی را در نظر بگیریم که یکی از نفرات انتخابی ما سهراب باشد. فقط یادتان باشد حالت «حسین - سهراب» را دوباره ننویسید.

حسین - سهراب	سهراب - رسول		
حسین - رسول	سهراب - مهرداد		
حسین - مهرداد	سهراب - حسن		
حسین - حسن			





اکنون حالت‌هایی را در نظر بگیریم که یکی از نفرات انتخابی ما رسول باشد. حالت‌هایی را که قبلاً نوشته‌ایم دیگر نمی‌نویسیم.

رسول - مهرداد	سهراب - رسول	حسین - سهراب	
رسول - حسن	سهراب - مهرداد	حسین - رسول	
	سهراب - حسن	حسین - مهرداد	
		حسین - حسن	

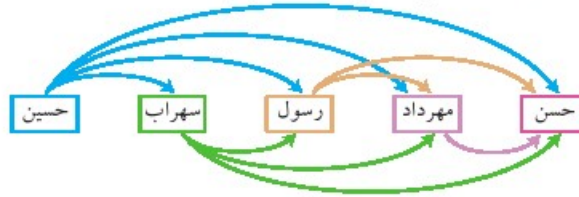
و در پایان حالت‌هایی را که یکی از نفرات انتخابی مهرداد باشد در نظر می‌گیریم. فقط یک حالت وجود دارد. حالت‌های دیگر را قبلاً نوشته‌ایم.

مهرداد - حسن	رسول - مهرداد	سهراب - رسول	حسین - سهراب
	رسول - حسن	سهراب - مهرداد	حسین - رسول
		سهراب - حسن	حسین - مهرداد
			حسین - حسن

تعداد حالت‌های مختلف ۱۰ می‌باشد.



برای نوشتن منظم، از تفکر زیر بهره گرفتیم:



مساله ی ۳

مریم ۴۵ تومان پول دارد. پول او به صورت سکه‌های ۱۰ تومانی و ۵ تومانی است. (هم سکه‌ی ۱۰ تومانی دارد و هم سکه‌ی ۵ تومانی) همه‌ی حالت‌های مختلفی را که او با داشتن سکه‌های ۱۰ و ۵ تومانی می‌تواند ۴۵ تومان پول داشته باشد را بیاید.

حل. با نوشتن حالت‌های مختلف بدون نظم و ترتیب ممکن است با مشکل مواجه شویم یا بعضی از حالت‌ها را ننویسیم. بهتر است با استفاده از یک جدول نظام‌دار، حالت‌های مختلف را با نظم و ترتیب بنویسیم:





● بیشترین تعداد سکه‌ی ۱۰ تومانی که مریم می‌تواند داشته باشد ۴ تا می‌باشد. در این صورت او یک سکه‌ی ۵ تومانی خواهد داشت.

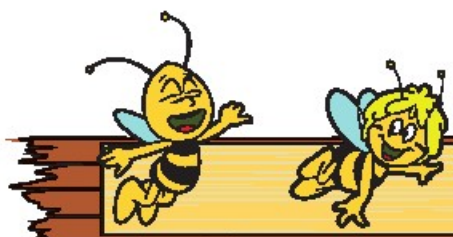
● ممکن است او ۳ تا سکه‌ی ۱۰ تومانی داشته باشد. در این صورت او ۳ سکه‌ی ۵ تومانی خواهد داشت.

● اگر او ۲ تا سکه‌ی ۱۰ تومانی داشته باشد، در این صورت ۵ سکه‌ی ۵ تومانی خواهد داشت.

● و اگر ۱ سکه‌ی ۱۰ تومانی داشته باشد، در این صورت ۷ سکه‌ی ۵ تومانی خواهد داشت.

این اطلاعات را در جدول زیر مشاهده کنید:

تعداد سکه‌های ۱۰ تومانی	تعداد سکه‌های ۵ تومانی
۴	۱
۳	۳
۲	۵
۱	۷



تمرین‌های بخش ۲-۱

۱ رسول قصد دارد با ۸۰۰۰ تومان پولی که دارد، تعدادی خودکار و دفتر بخرد. قیمت هر خودکار ۸۰۰ تومان و قیمت هر دفتر ۱۶۰۰ تومان است. او به چند طریق می‌تواند با همه‌ی پولش، خودکار و دفتر بخرد؟

۲ سعید، احمد، مهدی و محسن می‌خواهند روی یک نیمکت در کنار هم بنشینند. همه‌ی حالت‌های ممکن را برای ترتیب نشستن این چهار نفر بنویسید.

۳ کامبیز می‌خواهد یک سکه‌ی ۵۰۰ ریالی را با سکه‌های ۵۰ ریالی، ۱۰۰ ریالی و ۲۵۰ ریالی خرد کند. او به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد.

۴ حاصل ضرب دو عدد طبیعی ۳۶۰ و مجموع آن دو عدد کم‌تر از ۱۰۰ است. همه‌ی حالت‌های ممکن برای این دو عدد را بنویسید.

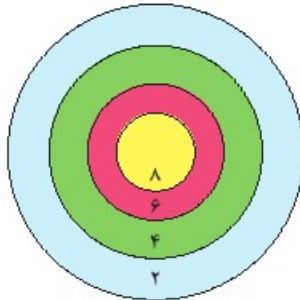




راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب

گاهی در حل مسئله، می‌توانیم با حذف کردن حالت‌هایی که با شرایط مسئله سازگاری ندارند (حالت‌های نامطلوب) پاسخ مسئله را به دست آوریم.

مسئله ۱



علی ۴ تیر به سمت صفحه‌ی هدف شلیک کرد. همه‌ی تیرهای او به هدف برخورد کرد. امتیازهای روی صفحه‌ی هدف ۲، ۴، ۶ و ۸ بودند. کدام یک از اعداد زیر می‌توانند مجموع امتیازهای علی باشند؟

۲۴، ۲۱، ۶، ۲۹، ۳۰، ۳۴

حل الف. در مورد ۳۴، حداکثر امتیاز ممکن زمانی به دست می‌آید که هر ۴ تیر به بخش ۸ امتیازی برخورد کند. در این صورت حداکثر امتیاز که ۳۲ است به دست می‌آید. پس ۳۴ نمی‌تواند امتیاز علی باشد.

ب. مشخص است که مجموع امتیازهای علی نمی‌تواند عددی فرد باشد. چون امتیاز همه‌ی بخش‌ها زوج است. پس عددهای ۲۹ و ۲۱ هم حذف می‌شوند.

ج. حداقل امتیاز علی زمانی به دست می‌آید که هر ۴ تیر او به بخش ۲ امتیازی برخورد کند (طبق فرض هر ۴ تیر به هدف خورده و هیچ تیری به خارج از هدف برخورد نکرده است). در این صورت امتیاز او ۸ خواهد بود. پس عدد ۶ هم نمی‌تواند امتیاز علی باشد.

د. علی می‌تواند به گونه‌ای به هدف زده باشد که امتیاز او ۲۴ یا ۳۰ باشد. مثلاً

$$۸ + ۸ + ۸ + ۶ = ۳۰ \quad \text{و} \quad ۸ + ۶ + ۶ + ۴ = ۲۴$$



مسئله ۲

مجموع دو عدد طبیعی ۳۰ و حاصل ضرب آن‌ها مضرب ۴۵ است. این دو عدد را بیابید.





حل. حالت‌های ممکن برای این دو عدد را مشاهده کنید:

$$(۱, ۲۹), (۲, ۲۸), (۳, ۲۷), \dots, (۱۵, ۱۵)$$

چون حاصل ضرب دو عدد مورد نظر مضرب ۴۵ است و هر عددی که بر ۴۵ بخش پذیر باشد، بر ۵ بخش پذیر است. پس حاصل ضرب دو عدد باید مضرب ۵ باشد. در نتیجه لااقل یکی از دو عدد مورد نظر باید مضرب ۵ باشد. با حذف حالت‌های نامطلوب فقط سه حالت باقی می‌ماند:

$$(۵, ۲۵), (۱۰, ۲۰), (۱۵, ۱۵)$$

(۵, ۲۵) را بررسی می‌کنیم: $۲۵ \times ۵ = ۱۲۵$ ولی ۱۲۵ بر ۴۵ بخش پذیر نیست. این حالت حذف می‌شود.

(۱۰, ۲۰) را بررسی می‌کنیم: $۲۰ \times ۱۰ = ۲۰۰$ ولی ۲۰۰ بر ۴۵ بخش پذیر نیست. این حالت هم حذف می‌شود.

(۱۵, ۱۵) را بررسی می‌کنیم: $۱۵ \times ۱۵ = ۲۲۵$ و ۲۲۵ بر ۴۵ بخش پذیر است. پس دو عدد طبیعی مورد نظر ۱۵ و ۱۵ می‌باشند.



مسئله ۳

سه برادر به نام‌های محسن، یوسف و علی، همگی بین ۱۸ و ۳۱ سال سن دارند. اگر مجذور سن هر یک از این سه نفر را بنویسیم (مجذور یک عدد یعنی حاصل ضرب آن عدد در خودش. مثلاً مجذور عدد ۷ برابر است با ۴۹ چون $۷ \times ۷ = ۴۹$) هر یک از رقم‌های ۱، ۲، ۳، ... و ۹ دقیقاً یک بار در مجذور سن این سه نفر دیده می‌شوند. سن هر یک از این سه نفر را مشخص کنید.

حل. اعداد ۱۹ تا ۳۰ و مجذورهای آن‌ها را در جدول زیر مشاهده می‌کنید:

مجدور	عدد	مجدور	عدد	مجدور	عدد
۳۶۱	۱۹	۵۲۹	۲۳	۷۲۹	۲۷
۴۰۰	۲۰	۵۷۶	۲۴	۷۸۴	۲۸
۴۴۱	۲۱	۶۲۵	۲۵	۸۴۱	۲۹
۴۸۴	۲۲	۶۷۶	۲۶	۹۰۰	۳۰

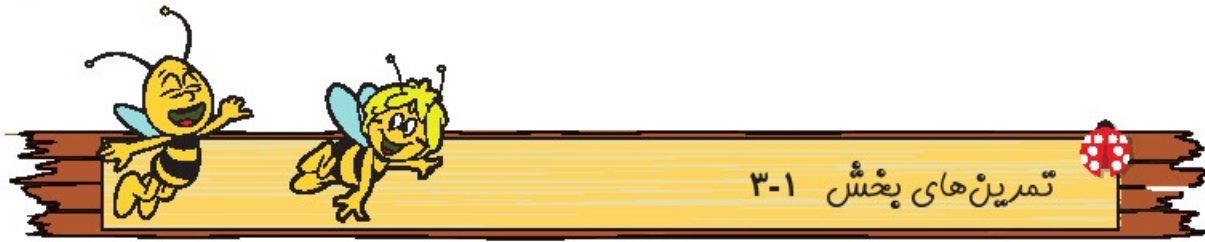
می‌خواهیم سه تا از مجذورها را انتخاب کنیم که هر یک از ارقام ۱ تا ۹ در آن‌ها یک بار دیده شوند. نباید عددی را انتخاب کنیم که در آن رقم‌های تکراری وجود داشته باشد. (چرا؟) به این ترتیب اعداد ۴۰۰، ۴۴۱، ۴۸۴، ۶۷۶ و ۹۰۰ حذف می‌شوند.

اعداد ۳۶۱، ۵۲۹، ۵۷۶، ۶۲۵، ۷۲۹ و ۷۸۴ می‌مانند. در بین این اعداد فقط ۳۶۱ دارای رقم ۳ است. پس اگر بخواهیم سه تا از این اعداد را انتخاب کنیم که ارقام ۱ تا ۹ داشته باشند حتماً باید ۳۶۱ را انتخاب کنیم. این عدد تنها عددی از بین این اعداد است که رقم ۳ در آن وجود دارد. در بین اعداد دیگر، اعدادی را که رقم‌های ۳، ۶ و ۱ (که





در ۳۶۱ وجود دارند) دارند حذف می‌کنیم. به این ترتیب اعداد ۵۲۹، ۷۲۹ و ۷۸۴ باقی می‌مانند. رقم ۵ فقط در ۵۲۹ وجود دارد. پس دومین عدد انتخابی ما ۵۲۹ است. روشن است که سومین عدد ۷۸۴ خواهد بود. بنابراین سه عدد مجذور ۳۶۱، ۵۲۹ و ۷۸۴ می‌باشند و سن این سه نفر ۱۹، ۲۳ و ۲۸ خواهد بود.



یک عدد چهاررقمی را در ۴ ضرب کرده‌ایم؛ حاصل عددی چهاررقمی است که ترتیب قرار گرفتن ارقام آن، برعکس عدد چهاررقمی اولیه است. (مثلاً اگر عدد چهاررقمی اولیه ۱۲۰۷ باشد چهار برابر آن باید ۷۰۲۱ بشود که البته این مثال غلط است.) این عدد چهاررقمی را بیابید.

عددی را در خودش ضرب کردیم، حاصل برابر با ۵۳۲۹ شده است. آن عدد را بیابید.

در یک کلاس تعداد دانش‌آموزان کم‌تر از ۳۵ نفر می‌باشد. اگر دانش‌آموزان این کلاس را به گروه‌های ۲ نفره تقسیم کنیم، یک نفر اضافه می‌ماند. اگر دانش‌آموزان این کلاس را به گروه‌های ۳ نفره تقسیم کنیم، ۲ نفر اضافه می‌ماند و اگر دانش‌آموزان این کلاس را به گروه‌های ۵ نفره تقسیم کنیم ۴ نفر اضافه می‌ماند. این کلاس چند دانش‌آموز دارد؟

در عمل ضرب زیر، هر حرف به جای یک رقم قرار گرفته است و حروف مختلف نشان‌گر رقم‌های مختلف می‌باشند. به جای هر حرف چه رقمی باید قرار گیرد؟

$$\begin{array}{r}
 ab \\
 \times \quad cd \\
 \hline
 ed \\
 + \quad da \\
 \hline
 d f d
 \end{array}$$





راهبرد الگویابی

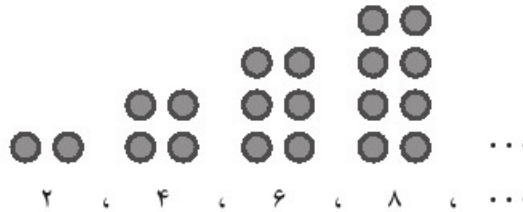


مطالعه‌ی الگوهایی که در اطراف ما وجود دارد خیلی مهم است. بعضی‌ها ریاضیات را، «علم الگوه‌ا» می‌نامند. طراحی‌های صنعتی، سنگ‌فرش خیابان‌ها، طراحی‌های هنری و معماری و ... دارای الگوهایی هستند. برای پیدا کردن الگوه‌ا باید یک نگاه دقیق و آگاهانه داشته باشیم. معمولاً کلید یافتن یک الگو، سازمان‌دهی و تنظیم داده‌ها است.

الگو در اعداد

اعداد طبیعی زوج

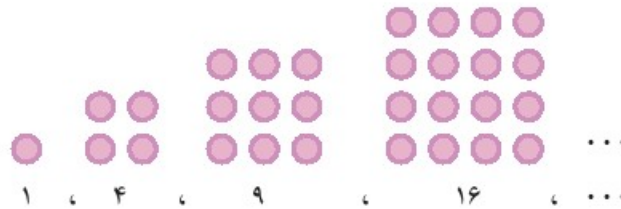
اگر اعداد طبیعی زوج را با تعداد دایره‌های سیاه نمایش دهیم، یک الگو به دست می‌آید.



با کشف الگوی این شکل‌ها، می‌توان شکل‌های بعدی را رسم کرد.

اعداد مربعی

به این الگو توجه کنید:



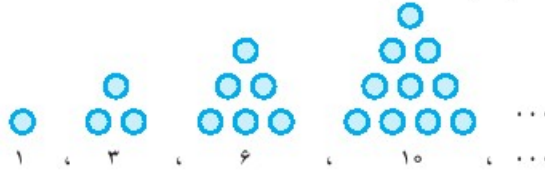
اعداد ۱، ۴، ۹، ۱۶ و ... را اعداد مربعی یا مربع کامل یا مجذور کامل می‌نامند. با توجه به الگوی این شکل‌ها، دو شکل بعدی و عدد مربوط به هر شکل را مشخص کنید. عدد مربوط به شکل دوازدهم را بیابید. آیا عدد ۴۰۰ جزو این اعداد است؟





مسئله ۱

با توجه به شکل‌های زیر، شکل‌های پنجم و ششم و عدد مربوط به هر شکل را بیابید.

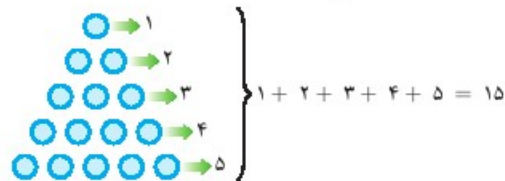


۱. آیا می‌توان بدون کشیدن شکل، عدد مربوط به شکل دهم را یافت؟ چگونه؟

۲. آیا می‌توان بدون کشیدن شکل، عدد مربوط به شکل صدم را یافت؟ چگونه؟

حل. در شکل پنجم که به صورت زیر است اگر دایره‌های هر طبقه را جدا جدا بشماریم، در می‌یابیم که تعداد دایره‌های

شکل پنجم برابر است با مجموع اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵



این الگو در شکل‌های اول تا چهارم هم دیده می‌شود. پس در شکل ششم تعداد دایره‌ها برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

و تعداد دایره‌های شکل دهم برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 55$$

و در شکل صدم تعداد دایره‌ها برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100$$

جواب این عبارت ۵۰۵۰ است. چگونگی به دست آوردن آن را در فصل ۲ خواهید آموخت.



مسئله ۲

با توجه به الگوی دنباله‌ی اعداد زیر، سه عدد بعدی هر دنباله را مشخص کنید:

الف. ۳، ۷، ۱۱، ۱۵، ...

ب. ۱، ۳، ۷، ۱۵، ...

ب. ۱، ۳، ۷، ۱۵، ...

الف. ۳، ۷، ۱۱، ۱۵، ...

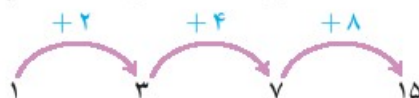




حل. الف. با توجه به فاصله‌ی بین هر دو عدد پشت سر هم، می‌توان به الگوی این دنباله پی برد. هر عدد به علاوه‌ی ۴ عدد بعدی را می‌سازد.



ب. در این دنباله، هم، طبق معمول ابتدا فاصله‌ی بین هر دو عدد پشت سر هم را به دست می‌آوریم:

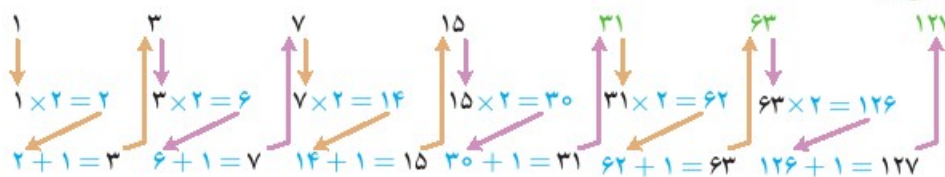


مشاهده می‌کنید که فاصله‌ی بین اعداد، دو برابر می‌شود پس فاصله‌ی ۱۵ با عدد بعدی باید دو برابر ۸ یعنی ۱۶ باشد و ...



و به این ترتیب می‌توان اعداد بعدی را پیدا کرد:

اما راه دیگری هم وجود دارد. «اگر هر عدد را دو برابر کنیم و حاصل را به علاوه‌ی یک کنیم» عدد بعدی به وجود می‌آید.



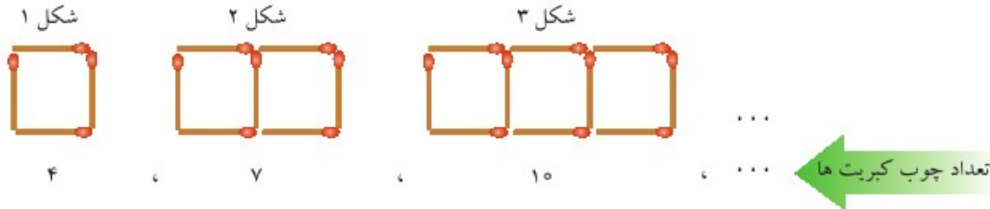
به این فکر کنید که اگر در این مسئله، عدد صدم هر دنباله را از ما می‌خواستند، باید چه کار می‌کردیم؟ برای تعیین عددهای یک دنباله در حالت کلی، مثلاً تعیین عدد صدم یا سیصد و هفتادم یا ... باید قانون الگو را بیابیم. یک بار دیگر مسئله‌ی (۱) را نگاه کنیم. برای تعیین عدد صدم گفته شد که باید «مجموع اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰» را به دست آوریم. با این قانون می‌توان هر عدد دلخواهی از دنباله‌ی اعداد مثلثی را یافت. اما همیشه تعیین «قانون الگو» کار آسانی نیست. تلاش کنید مسئله‌ی بعدی را به تنهایی حل کنید و قانون الگو را خودتان کشف کنید و به کسی اجازه ندهید به جای شما فکر کند.





مسئله ۳

با توجه به الگوی زیر تعداد چوب‌کبریت‌های شکل چهارم و پنجم را تعیین کنید.



در شکل ۱۰ چند چوب‌کبریت وجود خواهد داشت؟ در شکل ۱۰۰ چند چوب‌کبریت وجود خواهد داشت؟ قانون الگو را بیابید.

حل. برای حل این مسئله، ابتدا جدول زیر را در نظر بگیرید. با رسم کردن شکل ۴ و شکل ۵ تعداد چوب‌کبریت‌ها مشخص می‌شود.

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	۴	۵	...
تعداد چوب‌کبریت	۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶	...

به شماره‌ی شکل و تعداد چوب‌کبریت‌ها نگاه کنید. با دقت و نگاه آگاهانه و البته کمی هوش مشخص می‌شود که اگر شماره‌ی شکل را ۳ برابر کنیم و حاصل را به علاوه‌ی ۱ کنیم تعداد چوب‌کبریت‌ها به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} 1 \times 3 = 3 & \quad 2 \times 3 = 6 & \quad \dots \\ 3 + 1 = 4 & \quad 6 + 1 = 7 & \quad \dots \end{aligned}$$

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	۴	۵	...
تعداد چوب‌کبریت	۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶	...

بنابراین تعداد چوب‌کبریت‌های شکل ۱۰ برابر است با ۳۱:

$$10 \times 3 = 30$$

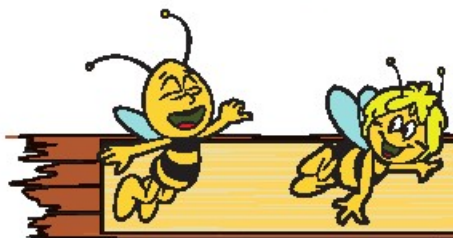
$$30 + 1 = 31$$

و تعداد چوب‌کبریت‌های شکل ۱۰۰ برابر است با ۳۰۱:

$$100 \times 3 = 300$$

$$300 + 1 = 301$$





تمرین‌های بخش ۴-۱

سه جمله‌ی بعدی هر یک از دنباله‌های زیر را بنویسید و الگوی هر دنباله را بیان کنید.

- الف. $۵, ۹, ۱۳, ۱۷, \dots$ ج. $۱, ۲, ۴, ۸, \dots$
 ب. $۲, ۵, ۱۰, ۱۷, \dots$ د. $۲, ۶, ۱۲, ۲۰, \dots$

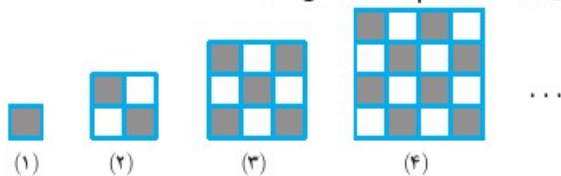
با توجه به الگوی زیر، تعداد دایره‌های شکل هفتم را مشخص کنید.



با توجه به الگوی زیر:

الف. تعداد خانه‌های سیاه در شکل بیست‌وششم را مشخص کنید.

ب. تعداد خانه‌های سیاه در شکل بیست‌وهفتم را مشخص کنید.



در ضرب‌های زیر رقم یکان عدد حاصل را در نظر بگیرید:

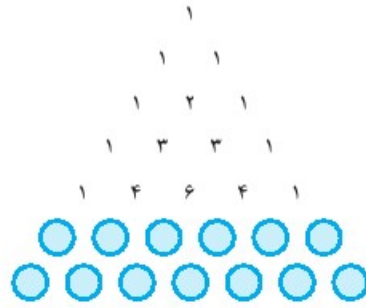
ضرب	۲	۲×۲	$۲ \times ۲ \times ۲$	$۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲$	$۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲$	$۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲$	\dots
حاصل ضرب	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	\dots	\dots
رقم یکان حاصل ضرب	۲	۴	۸	۶	۲	\dots	\dots





- الف. اگر پانزده تا ۲ را در هم ضرب کنیم، رقم یکان حاصل ضرب، چند است؟
 ب. اگر هفتاد و چهار تا ۲ را در هم ضرب کنیم، رقم یکان حاصل ضرب، چند است؟
 ج. یک الگوی کلی برای پیدا کردن رقم یکان، با توجه به تعداد ۲های ضرب شده، بیابید.

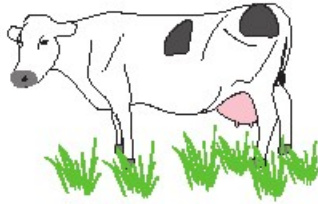
با توجه به الگوی زیر، اعدادی را که باید داخل دایره‌ها نوشته شوند، بیابید.



راهبرد حدس و آزمایش



بعضی وقت‌ها برای رسیدن به جواب مسئله «حدس زدن» به ما کمک می‌کند و با «آزمایش کردن» می‌توانیم به درستی حدس‌مان اطمینان پیدا کنیم. در ابتدای این فصل مسئله‌ای را مطرح کردیم راجع به یک کشاورز که تعدادی گاو و مرغ داشت. تعداد سرهای این حیوانات ۱۷ و تعداد پاهایشان ۴۲ بود. اکنون همین مسئله را با استفاده از راهبرد حدس و آزمایش حل می‌کنیم.



اگر ۱۲ تا گاو داشته باشیم و ۵ تا مرغ؛
 ۱۲ تا گاو ۴۸ تا پا دارند. ($12 \times 4 = 48$)
 و ۵ تا مرغ ۱۰ تا پا دارند. ($5 \times 2 = 10$)
 روی هم $48 + 10 = 58$ تا پا دارند.
 زیاد شد! تعداد پاها باید ۴۲ تا باشند.
 فکر کنیم باید تعداد گاوها را کم کنیم.

اگر ۸ تا گاو داشته باشیم در نتیجه ۹ تا هم مرغ داریم (تعداد حیوان‌ها ۱۷ تا باید باشد).
 ۸ تا گاو ۳۲ تا پا دارند. ($8 \times 4 = 32$)





و ۹ تا مرغ ۱۸ پا دارند. ($9 \times 2 = 18$)
روی هم ۵۰ پا دارند.
باز هم زیاد شد! تعداد پاها باید ۴۲ تا باشد.

اگر ۵ تا گاو داشته باشیم در نتیجه ۱۲ تا مرغ داریم. ($5 + 12 = 17$)

۵ تا گاو ۲۰ پا دارند. ($5 \times 4 = 20$)

و ۱۲ تا مرغ ۲۴ پا دارند. ($12 \times 2 = 24$)

روی هم ۴۴ پا دارند. ($20 + 24 = 44$)

باز هم زیاد شد! اما نزدیک شدیم.

اگر ۴ تا گاو داشته باشیم در نتیجه ۱۳ تا مرغ داریم.

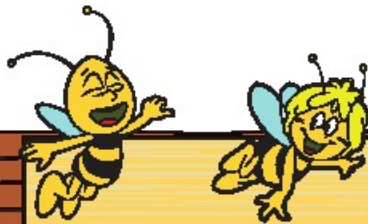
۴ تا گاو ۱۶ پا دارند. ($4 \times 4 = 16$)

و ۱۳ تا مرغ ۲۶ پا دارند. ($13 \times 2 = 26$)

روی هم ۴۲ پا دارند. ($16 + 26 = 42$)

بله، درست است. بالاخره جواب پیدا شد.

شاید بعضی‌ها خیلی از این روش لذت نبرند. اما این روش به ما کمک می‌کند مسئله را بهتر بفهمیم و گاهی نقطه‌ی شروع خوبی برای فکر کردن به مسئله و حل آن است. گاهی با این روش خیلی زود جواب پیدا می‌شود و گاهی کار طولانی می‌شود. دلسرد نشوید. منظم کار کنید و با سماجت و پشتکار زیاد تلاش کنید تا جواب را پیدا کنید. این روش زحمت زیادی دارد اما در هر صورت ما را به سمت جواب می‌برد.



تمرین‌های بخش ۱-۵

۱ احمد ۱۳ تا اسکناس دارد. اسکناس‌های او یا ۵۰۰ تومانی است یا ۱۰۰۰ تومانی. اگر پول احمد ۱۰۵۰۰ تومان باشد، او چند اسکناس ۵۰۰ تومانی و چند اسکناس ۱۰۰۰ تومانی دارد؟

۲ محیط یک زمین مستطیل شکل ۹۴ متر است. طول زمین از دو برابر عرض زمین ۲ متر بیش‌تر است. مساحت این زمین را تعیین کنید.

