فصل اول

(قسمت اول)

مجموعه

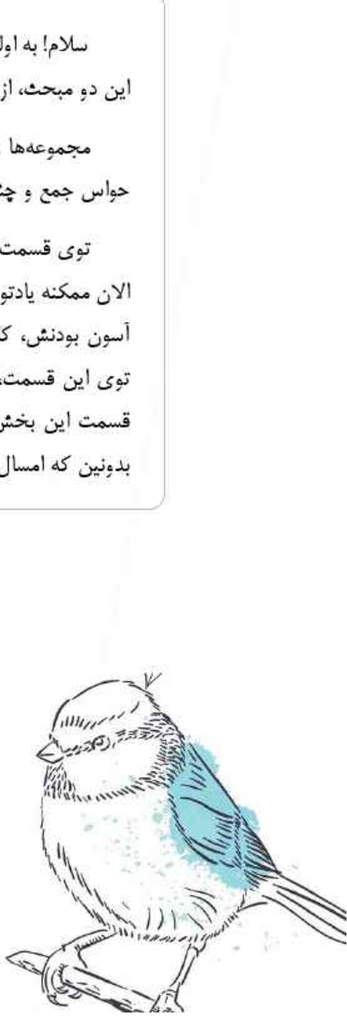
مباحث بخش

- ✓ آن‌چه گذشت ...
- ✓ جبر مجموعه‌ها
- ✓ متمم یک مجموعه
- ✓ تعداد اعضای مجموعه
- ✓ بازه‌ها

سلام! به اولین فصل کتاب خوش اومدین. این فصل از دو بخشِ مجموعه‌ها و دنباله‌ها تشکیل شده. تفاوت‌های این دو مبحث، از شباهت‌هاشون بیشتره! این شد که تصمیم گرفتیم توی دو بخش جداگونه بهشون بپردازیم.

مجموعه‌ها رو پارسال خوندین، امسال تکمیل می‌کنین و بعداً ازشون استفاده‌های زیادی می‌کنین. بنابراین با حواس جمع و چشم باز حرکت کنین.

توی قسمت اول (آن‌چه گذشت ...) و تا حدی قسمت دوم (جبر مجموعه‌ها) چیزهایی که سال پیش خوندین و الان ممکنه یادتون رفته باشه رو مرور می‌کنیم. توی قسمت سوم، متمم مجموعه رو براتون معرفی می‌کنیم علی‌رغم آسون بودنش، کلی کاربرد داره. «تعداد اعضای مجموعه» و حواشی اون رو توی قسمت چهارم بررسی می‌کنیم، توی این قسمت، کلی حرف مهم داریم که با هم بزنیم و کلی مسأله‌ی باحال داریم که با هم حل کنیم. آخرین قسمت این بخش رو به «بازه‌ها» اختصاص دادیم که یه جورایی دنیاشون با دنیای مجموعه‌ها فرق می‌کنه ولی بدونین که امسال کلی باهاشون کار دارین و از اون‌ها استفاده می‌کنین.



۱-۱-۱ آنچه گذشت ...

مبحث «مجموعه» از پایه‌ای ترین مباحث ریاضی محسوب می‌شه که البته در سال گذشته باهاش آشنا شدین. قراره توی این بخش، مباحث پارسال رو دوره کنیم و کلی مسأله‌ی خوب حل کنیم!

» مفاهیم اولیه

به هر دسته‌ی مشخص از اشیاء، مجموعه گفته می‌شه. یه مجموعه می‌تونه شامل اعداد، حروف یا ... باشه. اعضای مجموعه رو داخل $\{\}$ قرار می‌دیم. معمولاً مجموعه‌ها رو با حروف بزرگ انگلیسی نام‌گذاری می‌کنیم. مثلاً: $A=\{a,b,c\}$, $B=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$, $C=\{a,۵,-\sqrt{۲}\}$

دو نکته‌ی مهم در مورد مجموعه وجود داره:

نکته ۱: ترتیب نوشتن اعضای مجموعه هیچ اهمیتی نداره. یعنی مثلاً فرقی نمی‌کنه بنویسیم $A=\{a,b,c\}$ یا $A=\{b,c,a\}$

نکته ۲: با تکرار کردن یک عضو مجموعه، مجموعه‌ی جدیدی به‌دست نمیاد! مثلاً مجموعه‌ی $\{a,a,a,b,b\}$ هیچ فرقی با مجموعه‌ی $\{a,b\}$ نداره!

با نکات زیر هم از قبل آشنا هستین و فقط این‌جا یادآوری می‌کنیم ...

نکته ۳: مجموعه‌های A و B مساوی هستن، اگه دقیقاً عین هم باشن! یعنی هر عضو A در B و هر عضو B در A باشد. البته باید به نکته ۱ و نکته ۲ توجه ویژه‌ای داشته باشین. به عنوان مثال:

$$\{a,b,c\}=\{a,b,c\} \quad , \quad \{۱,۵\}=\{۵,۱\}=\{۱,۱,۱,۵,۵\} \quad , \quad \{۱,۲\}\neq\{۱,۴\}$$

نکته ۴: برای این‌که نشون بدیم یک عضو، متعلق به یه مجموعه هست، از نماد $\in$ استفاده می‌کنیم. مثلاً برای مجموعه‌ی $A=\{a,b,c\}$ می‌شه گفت $a\in A$
اگر هم یک عضو، متعلق به یه مجموعه نبود، می‌تونیم از نماد $\notin$ استفاده کنیم. مثلاً برای همون مجموعه‌ی $A=\{a,b,c\}$ می‌شه گفت $d\notin A$.

تمرین ۱ | اگر مجموعه‌های $B=\{y+۳,۲,۵\}$ و $C=\{۲,۴,۳x+۵\}$ با هم برابر باشند، مقادیر مجهولات را بیابید.

حل: عضو «۲» توی هر دو مجموعه هست پس کاری بهش نداریم و باید بقیه‌ی اعضا رو جور کنیم:

$$\{y+۳,۲,۵\}=\{۲,۴,۳x+۵\} \Rightarrow \begin{cases} y+۳=۴ \\ ۳x+۵=۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=۱ \\ x=۰ \end{cases} \Rightarrow B=C=\{۲,۴,۵\}$$

تمرین ۲ | اگر مجموعه‌های $X=\{۱,۵,۲x-۳\}$ و $Y=\{x-۱,y\}$ با هم برابر باشند، مقادیر مجهولات را بیابید.

حل: مجموعه‌ی X در ظاهر سه عضو داره! ولی توجه کنین که این سه عضو نمی‌تونن متمایز باشن چون مجموعه‌ی Y دو عضو داره و یه مجموعه‌ی سه عضوی با یه مجموعه‌ی دو عضوی نمی‌تونه برابر باشه. بنابراین عضو $۲x-۳$ از مجموعه‌ی X باید تکراری باشه، یعنی یا باید «۱» باشه یا «۵»! پس دو حالت داریم:

حالت اول : $۲x-۳=۱ \Rightarrow ۲x=۴ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow \begin{cases} X=\{۱,۵\} \\ Y=\{۱,y\} \end{cases} \Rightarrow y=۵$

حالت دوم : $۲x-۳=۵ \Rightarrow ۲x=۸ \Rightarrow x=۴ \Rightarrow \begin{cases} X=\{۱,۵\} \\ Y=\{۳,y\} \end{cases} \Rightarrow$ در این حالت، دو مجموعه نمی‌تونن مساوی بشن!

بنابراین فقط توی حالت اول به جواب رسیدیم و این یعنی باید $x=۲$ و $y=۵$ باشه.

تمرین ۳ | برای مجموعه‌ی $A=\{۲,\{۳\},\{۴,۵\}\}$ صحیح یا غلط بودن (الف) $۲\in A$ (ب) $۳\in A$ (ج) $\{۳\}\in A$ و (د) $\{۴\}\in A$ را تعیین کنید.

حل: الف) درسته! ۲ عضوی از مجموعه‌ی A هست.

ب) درست نیست! توجه کنین که $\{۳\}$ عضو مجموعه‌ی A هست نه ۳! یعنی $\{۳\}\in A$ ولی $۳\notin A$.

ج) درسته!

د) درست نیست! $\{۴,۵\}$ عضو مجموعه‌ی A هست نه $\{۴\}$. بنابراین $\{۴,۵\}\in A$ ولی $\{۴\}\notin A$.

» زیرمجموعه

مجموعه‌های $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، $B=\{۱,۲,۳\}$ و $C=\{۴,۵\}$ رو در نظر بگیرین. تمام اعضای مجموعه‌ی B، داخل مجموعه‌ی A وجود داره، بنابراین می‌گیم:

مجموعه‌ی B، زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی A است. به زبان ریاضی می‌نویسیم: $B\subseteq A$

اما چنین اتفاقی برای مجموعه‌ی C نمی‌افته. یعنی نمی‌شه گفت که تمام اعضای مجموعه‌ی C، داخل مجموعه‌ی A قرار داره (عضو ۵). بنابراین می‌گیم:

مجموعه‌ی C، زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی B نیست. به زبان ریاضی می‌نویسیم: $C\not\subseteq B$

برای مثال، تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $S=\{a,b,c\}$ عبارتست از:

$$\{a,b,c\}\quad,\quad\{a,b\}\quad,\quad\{a,c\}\quad,\quad\{b,c\}\quad,\quad\{a\}\quad,\quad\{b\}\quad,\quad\{c\}\quad,\quad\{\}$$

بذارید چندتا نکته بگم که یه جورایی مربوط به مثال بالا هم می‌شن ...

نکته ۱: هر مجموعه‌ای، زیرمجموعه‌ی خودش محسوب می‌شه! یعنی مثلاً $\{a,b,c\}\subseteq\{a,b,c\}$

نکته ۲: مجموعه‌ی تهی، زیرمجموعه‌ی تمام مجموعه‌هاست! اگه یادتون رفته بگم که:

تهی، یک مجموعه است که هیچ عضوی ندارد. مجموعه‌ی تهی را با نماد $\varnothing$ یا $\{\}$ نمایش می‌دهند. توجه کنید که مجموعه‌ی $\{\varnothing\}$، مجموعه‌ی تهی نیست! بلکه مجموعه‌ای است که یک عضو دارد و آن عضو هم مجموعه‌ی $\varnothing$ است!

نکته ۳: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با ۲^n. مثلاً تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $S=\{a,b,c\}$ برابر شد با $۸=۲^۳$.

تمرین ۴ | مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳\}$ را در نظر بگیرید. مجموعه‌ی زیرمجموعه‌های A را تعیین کنید.

حل: مجموعه‌ی زیرمجموعه‌ها، یعنی مجموعه‌ای که شامل تمام زیرمجموعه‌های یه مجموعه است! پس باید تمام زیرمجموعه‌های A رو بریزیم توی یه مجموعه:

$$P=\Big\{\{۱,۲,۳\},\{۱,۲\},\{۱,۳\},\{۲,۳\},\{۱\},\{۲\},\{۳\},\varnothing\Big\}$$

تمرین ۵ | با توجه به مجموعه‌ی $A=\Big\{\{۲,۳\},۲,۳,\{۵\}\Big\}$ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین نمایید.

الف) $\{۲,۳\}\subseteq A$ ب) $\{۲,۳\}\in A$ ج) $\{۵\}\subseteq A$ د) $\{۵\}\in A$ هـ) $\Big\{\{۵\}\Big\}\subseteq A$ و) $\Big\{۲,\{۲\}\Big\}\subseteq A$

حل: الف) درسته! مجموعه‌ی $\{۲,۳\}$ شامل دو عضو ۲ و ۳ هست و هر دوی این اعضا هم داخل مجموعه‌ی A هستن: $\{۲,۳\}\subseteq\Big\{\{۲,۳\},۲,۳,\{۵\}\Big\}$

ب) درسته! عضو $\{۲,۳\}$ هم داخل مجموعه‌ی A هست: $\{۲,۳\}\in\Big\{\{۲,۳\},۲,۳,\{۵\}\Big\}$

ج) غلطه! مجموعه‌ی $\{۵\}$ دارای عضو ۵ هست، اما مجموعه‌ی A دارای این عضو نیست! پس: $\{۵\}\not\subseteq\Big\{\{۲,۳\},۲,۳,\{۵\}\Big\}$

د) درسته! عضو $\{۵\}$ داخل مجموعه‌ی A قرار داره پس: $\{۵\}\in\Big\{\{۲,۳\},۲,۳,\{۵\}\Big\}$

هـ) درسته! مجموعه‌ی $\Big\{\{۵\}\Big\}$ دارای یک عضو $\{۵\}$ هست و این عضو هم درون مجموعه‌ی A قرار داره، بنابراین: $\Big\{\{۵\}\Big\}\subseteq\Big\{\{۲,۳\},۲,۳,\{۵\}\Big\}$

و) غلطه! مجموعه‌ی $\Big\{۲,\{۲\}\Big\}$ دارای دو عضو ۲ و $\{۲\}$ هست. اما مجموعه‌ی A فاقد عضو $\{۲\}$ هست.

تمرین ۶ می‌دانیم مجموعه‌ی $R=\{۱,۳,۶,۷,x,۲x\}$ دارای ۱۶ زیرمجموعه است. مقدار x را بیابید.

حل: تعداد زیرمجموعه‌های یه مجموعه‌ی ۴ عضوی برابر با ۱۶تاست، چراکه $۱۶=۲^۴$. بنابراین مجموعه‌ی R باید ۴ عضوی باشه تا بتونه ۱۶تا زیرمجموعه داشته باشه. پس مجموعه‌ی R حتماً ۲تا عضو تکراری داره. یعنی x و $۲x$ باید تکراری باشن. از طرفی با توجه به این‌که $۲x$، دو برابر x هست، تنها حالت ممکن اینه که $x=۳$ و $۲x=۶$ باشه!

» مجموعه‌های اعداد

چندتا مجموعه‌ی خیلی‌خیلی مهم هستن که این‌ها خیلی‌خیلی مهم هستن. منظورم رو که متوجه شدین؟ منظورم این بود که خیلی‌خیلی مهم هستن!

عنوان	نماد	معرفی
مجموعه‌ی اعداد طبیعی	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,\cdots\}$
مجموعه‌ی اعداد حسابی	$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,۴,\cdots\}$
مجموعه‌ی اعداد صحیح	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}=\{\cdots,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,\cdots\}$
مجموعه‌ی اعداد گویا	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b}\mid a,b\in\mathbb{Z},b\neq ۰\}$
مجموعه‌ی اعداد گنگ	$\mathbb{Q}'$	مجموعه‌ی تمام اعدادی که نشه اون‌ها رو به صورت تقسیم دو عدد صحیح نوشت.
مجموعه‌ی اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$	مجموعه‌ای شامل تمام اعدادی که می‌شناسین! چه گویا چه گنگ.

نکته: یک‌بار دیگه به تعریف مجموعه‌ی اعداد گویا نگاه کنین. این تعریف داره می‌گه که مجموعه‌ی $\mathbb{Q}$، شامل تمام اعداد کسری به فرم $\frac{a}{b}$ هست که صورت و مخرج‌شون صحیح باشه ($a,b\in\mathbb{Z}$) و ضمناً مخرج نباید صفر باشه ($b\neq ۰$).

تمرین ۷ برای مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴,x+۲,x-۲\}$ می‌دانیم $A\subseteq\mathbb{W}$ و $A\not\subseteq\mathbb{N}$. مجموع اعضای این مجموعه را بیابید.

حل: چه موقع ممکنه یه مجموعه، زیر مجموعه‌ی اعداد حسابی باشه ولی زیرمجموعه‌ی اعداد طبیعی نباشه؟! بله! زمانی که عضو «صفر» داشته باشه. چون عضو «صفر»، فقط توی مجموعه‌ی حسابی هست. پس یا باید $x+۲=۰$ باشه یا $x-۲=۰$! اما حالت $x+۲=۰$ ممکن نیست چون اون موقع x منفی در میاد و دیگه مجموعه‌مون حتی زیر مجموعه‌ی اعداد حسابی هم نیست! پس باید داشته باشیم:

$$x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow A=\{۱,۲,۳,۴,۴,۰\} \Rightarrow A=\{۰,۱,۲,۳,۴\} \Rightarrow \text{مجموع اعضا}=۰+۱+۲+۳+۴=۱۰$$

» نمایش مجموعه‌ها

برای معرفی‌کردن یه مجموعه، ۳تا راه وجود داره که توی جدول زیر در موردشون صحبت می‌کنیم ...

عنوان	توضیحات	مثال
بیان گسترده	توی این روش باید تمام اعضای مجموعه رو بنویسیم؛ واسه همین هم اسمش رو بیان گسترده می‌ذاریم.	$A=\{۱,۲,۳,۴\}$
بیان فشرده (بیان ریاضی)	توی این روش باید ویژگی مشترک اعضا رو بیان کنیم.	$A=\{m\mid m\in\mathbb{N},m\leq ۴\}$
نمودار وِن	به نمایش گرافیکی مجموعه، نمودار وِن گفته می‌شه.	

انتشارات خوشخوان

تمرین ۸ مجموعه‌های زیر را به‌صورت گسترده نمایش دهید.

الف) $A=\{\frac{a}{a+۱}|a\in\mathbb{N},a<۶\}$ ب) $B=\{\sqrt{۲+k}\,|\,k\in\mathbb{Z},k^۲\leq ۴\}$ ج) $C=\{۲^{-x}\,|\,x\in\mathbb{N},x<۵\}$

حل: الف) $a\in\mathbb{N},a<۶$، یعنی a های طبیعی و کوچک‌تر از ۶. به عبارت دیگه $a=۱,۲,۳,۴,۵$ هست. حالا باید ببینیم به ازای این مقادیر a، حاصل $\frac{a}{a+۱}$ چه‌قدر می‌شه. مثلاً اگه $a=۱$ باشه، $\frac{a}{a+۱}=\frac{۱}{۲}$ می‌شه و به همین ترتیب ...، در نهایت، داریم: $A=\{\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۴},\frac{۴}{۵},\frac{۵}{۶}\}$

ب) $k\in\mathbb{Z},k^۲\leq ۴$، یعنی k های صحیح که مربع اون‌ها از ۴ کوچیک‌تر یا مساوی هست. به عبارت دیگه $k=-۲,-۱,۰,۱,۲$ می‌شه. با جای‌گذاری این k ها در رابطه‌ی $\sqrt{۲+k}$ اعضای مجموعه رو پیدا می‌کنیم: $B=\{۰,۱,\sqrt{۲},\sqrt{۳},۲\}$

ج) ایده‌ی این‌یکی هم مثل دوتای قبلی هست. فقط جوابش رو می‌گیم: $C=\{۲^{-۱},۲^{-۲},۲^{-۳},۲^{-۴}\}=\{\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۱۶}\}$

تمرین ۹ مجموعه‌های زیر را به‌صورت فشرده نمایش دهید.

الف) $A=\{۳,۶,۹,۱۲\}$ ب) $B=\{\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۴},\frac{۳}{۶},\frac{۳}{۸},\dots,\frac{۳}{۱۰۰}\}$ ج) $C=\{۰,۱,۴,۹,۱۶,\cdots\}$

حل: برای تبدیل نمایش گسترده به نمایش فشرده، باید دقت ویژه‌ای به خاصیت مشترک اعضای مجموعه داشته باشین.

الف) اعضای مجموعه‌ی A، همه‌شون مضرب ۳ هستن. پس فرم کلی‌شون به‌صورت $۳k$ هست. البته k باید مقادیر $۱,۲,۳,۴$ رو اختیار کنه، پس:

$A=\{۳k\,|\,k\in\mathbb{N},k\leq ۴\}$

ب) اعضای مجموعه‌ی B، همه‌شون به فرم $\frac{۳}{۲k}$ هستن. توجه کنین که k باید مقادیر $۱,۲,۳,\cdots,۵۰$ رو اختیار کنه، پس: $B=\{\frac{۳}{۲k}|k\in\mathbb{N},k\leq ۵۰\}$

ج) اعضای مجموعه‌ی C، همه‌شون مربع کامل ($k^۲$) هستن. این مجموعه برخلاف ۲تای قبلی، بی‌نهایت عضو داره، از صفر تا ... ! پس کافیه بگیم که k عضوی از مجموعه‌ی اعداد حسابی هست: $B=\{k^۲\,|\,k\in\mathbb{W}\}$

چالش

سؤال: آیا همیشه می‌توان برای یک مجموعه، نمایش فشرده پیدا کرد؟

خیر! کافیه مجموعه‌ی اعداد اول $P=\{۲,۳,۵,۷,\cdots\}$ رو در نظر بگیرین. هیچ فرمولی وجود نداره که بتونه این اعداد رو تولید کنه. فقط برای مجموعه‌هایی می‌شه نمایش فشرده پیدا کرد که اعضاشون یه نظم و ترتیب خاصی داشته باشن.

سؤال: آیا نمایش فشرده برای یک مجموعه، یکتاست؟

باز هم خیر! اول این توضیح رو بدم که یکتا، یعنی «یه‌دونه!» به عبارت دیگه، سؤال داره می‌گه آیا فقط یه‌دونه نمایش فشرده می‌شه برای یه مجموعه پیدا کرد یا نه! به عنوان مثال، مجموعه‌ی A توی مثال قبل رو در نظر بگیرین. می‌شد این مجموعه رو به‌صورت زیر هم بیان کرد. $A=\{۳k+۳\,|\,k\in\mathbb{W},k\leq ۳\}$ پس نمایش فشرده‌ی یه مجموعه همیشه وجود نداره و اگر هم وجود داشته باشه، لزوماً یکتا نیست.

دنده ۲۵

۱- مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

الف) $A=\{x|x\in\mathbb{N},x^۲\leq ۱۰\}$

ب) $B=\{۲^x\times ۳^y|x,y\in\mathbb{N},x+y=۴\}$

ج) $C=\{x|x\in\mathbb{Z},\ 6\le x^2\le 70\}$

د) $D=\{x^2+x|x\in\mathbb{Z},\sqrt{-x}\in\mathbb{Z},x\ge -13\}$

۲- مجموعه‌های زیر را به‌صورت فشرده نمایش دهید.

$A=\{0,1,3,7,\ldots\}$ $\qquad B=\{\ldots,-15,-5,5,15,25,\ldots\}$ $\qquad C=\{-\frac{1}{2},\frac{1}{17},-\frac{1}{82},\frac{1}{257},-\frac{1}{626},\ldots\}$

۳- درستی یا نادرستی هر یک عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $\{a,\{a\}\}\subseteq\{a,\{\{a\}\}\}$

ب) $\{\varnothing\}\subseteq\{\{\varnothing\}\}$

ج) $A\subseteq B, B\in C\rightarrow A\in C$

د) $x\in A, A\in B\rightarrow x\in B$

۴- اگر $A=\{\{\varnothing\}\}$ و $B=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ باشند و مجموعه‌ی C نیز، «مجموعه‌ی زیرمجموعه‌های B» باشد، درستی یا نادرستی روابط داده شده را تعیین نمایید.

الف) $A\in C$ $\qquad$ ب) $A\subseteq C$ $\qquad$ ج) $B\in C$ $\qquad$ د) $B\subseteq C$

۵- به ازای چه مقادیری از a و b رابطه‌ی $\{a,a^2\}=\{1,b,b^2\}$ برقرار است؟

۱-۱-۲ جبر مجموعه‌ها

در دوران کودکی، وقتی با «اعداد» آشنا شدین، یادگرفتین که چه‌جوری می‌شه یک‌سری عملیاتی جبری بین اعداد انجام داد. مثلاً می‌شه دو تا عدد رو با هم جمع کرد یا یک عدد رو از یک عدد دیگه کم کرد یا ... . عملیات جبری، بین «مجموعه‌ها» هم قابل تعریف کردن هست که توی این بخش راجب به‌شون صحبت می‌کنیم. راستی تا یادم نرفته این رو هم بگم که این فصل هم مطالب جدید داره و هم مطالب مروری!

» اجتماع دو مجموعه

اجتماع دو مجموعه‌ی A و B یعنی مجموعه‌ای که شامل تمام اعضای A و B باشه. اجتماع مجموعه‌های A و B رو با نماد $A \cup B$ نشون می‌دیم.

مثلاً: $\{۱,۲,۳,۴\} \cup \{۴,۵,۶,۷\} = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$

اجتماع سه‌تا مجموعه هم دقیقاً همین‌جوری تعریف می‌شه: $\{۱,۲\} \cup \{۲,۳\} \cup \{۴,۵\} = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$

بعضی از ویژگی‌های اجتماع، از این قراره:

ویژگی	توضیح	مثال
$A \cup B = B \cup A$	توی اجتماع دو مجموعه، هیچ فرقی نمی‌کنه کدوم رو اول بنویسیم. به این ویژگی اجتماع، ویژگی جابه‌جایی گفته می‌شه.	$\{۱,۲\} \cup \{۲,۳\} = \{۱,۲,۳\}$ $\{۲,۳\} \cup \{۱,۲\} = \{۱,۲,۳\}$
$A \cup A = A$	اگه یه مجموعه رو با خودش اجتماع بگیریم، به خودش می‌رسیم!	$\{۱,۲\} \cup \{۱,۲\} = \{۱,۲\}$
$A \cup \varnothing = A$	از اون‌جا که مجموعه‌ی تهی هیچ عضوی نداره، وقتی یه مجموعه رو با تهی اجتماع می‌گیریم، هیچی بهش اضافه نمی‌شه!	$\{۱,۲\} \cup \varnothing = \{۱,۲\}$
$A \subseteq (A \cup B)$ $B \subseteq (A \cup B)$	انتظار داریم که مجموعه‌ی $A \cup B$ نسبت به مجموعه‌ی A اعضای بیشتر و یا برابری داشته باشه، پس A زیرمجموعه‌ای از $A \cup B$ هست. راستی توجه کنین که این داستان برای B هم هست: $B \subseteq (A \cup B)$	$\{۱,۲\} \cup \{۲,۳\} = \{۱,۲,۳\}$ $\Rightarrow \{۱,۲\} \subseteq \{۱,۲,۳\}$
اگر $A \subseteq B$ باشد آن‌گاه $A \cup B = B$	اگر $A \subseteq B$ باشه یعنی A بخشی از B هست و هیچ عضو اضافه‌ای نسبت به B نداره! پس وقتی B رو با A اجتماع بگیریم، هیچ چیزی بهش اضافه نمی‌شه! و این یعنی $A \cup B = B$	$\{۱,۲\} \subseteq \{۱,۲,۳\}$ $\Rightarrow \{۱,۲\} \cup \{۱,۲,۳\} = \{۱,۲,۳\}$

» اشتراک دو مجموعه

اشتراک دو مجموعه‌ی A و B یعنی مجموعه‌ای که شامل اعضای مشترک A و B باشه. اشتراک مجموعه‌های A و B رو با نماد $A \cap B$ نشون می‌دیم.

مثلاً: $\{۱,۲,۳,۴\} \cap \{۴,۵,۶,۷\} = \{۴\}$

اشتراک سه‌تا مجموعه هم دقیقاً همین‌جوری تعریف می‌شه:

$\{۱,۲\} \cap \{۲,۳\} \cap \{۲,۴\} = \{۲\}$

وقتی هم که دو تا مجموعه هیچ عضو مشترکی نداشته باشن، اشتراکشون تهی می‌شه، مثلاً:

$\{۱,۲,۳\} \cap \{۵,۶,۷\} = \varnothing$

به دو مجموعه‌ای که اشتراک‌شان تهی باشد، مجموعه‌های جدا از هم گفته می‌شود.

توی جدول زیر، یک‌سری از ویژگی‌های اشتراک رو بیان کردیم.

ویژگی	توضیح	مثال
$A\cap B=B\cap A$	توی اشتراک دو مجموعه، هیچ فرقی نمی‌کنه کدوم رو اول بنویسیم. (ویژگی جابه‌جایی)	$\{۱,۲\}\cap\{۲,۳\}=\{۲\}$ $\{۲,۳\}\cap\{۱,۲\}=\{۲\}$
$A\cap A=A$	اگه یه مجموعه رو با خودش اشتراک بگیریم، به خودش می‌رسیم!	$\{۱,۲\}\cap\{۱,۲\}=\{۱,۲\}$
$A\cap\varnothing=\varnothing$	از اون‌جا که مجموعه‌ی تهی هیچ عضوی نداره، بنابراین هیچ اشتراکی هم با یه مجموعه‌ی دیگه نمی‌تونه داشته باشه!	$\{۱,۲\}\cap\varnothing=\varnothing$
$(A\cap B)\subseteq A$ $(A\cap B)\subseteq B$	انتظار داریم که مجموعه‌ی $A\cap B$ نسبت به مجموعه‌ی A اعضای کمتر و یا برابری داشته باشه، پس $A\cap B$ زیرمجموعه‌ای از A هست. راستی توجه کنین که این داستان برای B هم هست: $(A\cap B)\subseteq B$	$\{۱,۲\}\cap\{۲,۳\}=\{۲\}$ $\Rightarrow\ \{۲\}\subseteq\{۱,۲\}$
اگر $A\subseteq B$ باشد آن‌گاه $A\cap B=A$	اگر $A\subseteq B$ باشه یعنی A بخشی از B هست. پس وقتی A رو با B اشتراک بگیریم، هیچ چیزی ازش کم نمی‌شه! و این یعنی $A\cap B=A$	$\{۱,۲\}\subseteq\{۱,۲,۳\}$ $\Rightarrow \{۱,۲\}\cap\{۱,۲,۳\}=\{۱,۲\}$

« تفاضل مجموعه‌ها

مجموعه‌های A و B رو در نظر بگیرین. $A-B$ یعنی مجموعه‌ی تمام اعضایی که داخل A هستن ولی داخل B نیستن! مثلاً:

$$\{۱,۲,۳\}-\{۳,۴,۵\}=\{۱,۲\}$$

حواستون باشه که توی $A-B$، مجموعه‌ی B فقط زمانی می‌تونه مجموعه‌ی A رو کوچیک کنه که باهاش اشتراک داشته باشه! مثلاً:

$$\{۱,۲\}-\{۳,۴,۵,۶,۷,۸\}=\{۱,۲\}$$

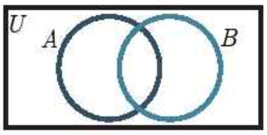
همون‌طور که دیدید چون این دو مجموعه اشتراکی با هم نداشتن در تفاضل کوچیک نشدن!

اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، آن‌گاه $A-B=A$ و $B-A=B$ است.

حالا بریم سراغ یه سری ویژگی ...

ویژگی	توضیح	مثال
$A-B\neq B-A$	تفاضل مجموعه‌ها، ویژگی جابه‌جایی نداره! یعنی مهمه کدوم رو اول بنویسیم.	$\{۱,۲\}-\{۲,۳\}=\{۱\}$ $\{۲,۳\}-\{۱,۲\}=\{۳\}$
$A-A=\varnothing$	اگه یه مجموعه رو از خودش کم کنیم، چیزی ازش باقی نمی‌مونه!	$\{۱,۲\}-\{۱,۲\}=\{\}$
$A-\varnothing=A$	تهی هیچ عضوی نداره! پس نمی‌تونه هیچ عضوی از A رو حذف کنه.	$\{۱,۲\}-\{\}=\{۱,۲\}$
$\varnothing-A=\varnothing$	تهی که از اول خودش هیچ عضوی نداره چه برسه به این‌که بخوای یه چیزی رو ازش کم کنی!	$\{\}-\{۱,۲\}=\{\}$
$(A-B)\subseteq A$ $(B-A)\subseteq B$	انتظار داریم که مجموعه‌ی $A-B$ نسبت به مجموعه‌ی A اعضای کمتر یا برابری داشته باشه، پس $A-B$ زیرمجموعه‌ای از A هست.	$\{۱,۲\}-\{۲,۳\}=\{۱\}$ $\Rightarrow\ \{۱\}\subseteq\{۱,۲\}$
$A-B=A-(A\cap B)$	هیچ فرقی نمی‌کنه B رو از A کم کنی یا این‌که $A\cap B$ رو از A کم کنی! جفت‌شون یه چیز می‌شه.	$\{۱,۲\}\cap\{۲,۳\}=\{۲\}$ $\{۱,۲\}-\{۲,۳\}=\{۱\}$ $\{۱,۲\}-\{۲\}=\{۱\}$
اگر $A\subseteq B$ باشد آن‌گاه $A-B=\varnothing$	اگر $A\subseteq B$ باشه یعنی B مجموعه‌ی بزرگ‌تری از A هست. پس وقتی B رو از A کم می‌کنیم دیگه هیچ چیزی ازش باقی نمی‌مونه!	$\{۱,۲\}\subseteq\{۱,۲,۳\}$ $\Rightarrow \{۱,۲\}-\{۱,۲,۳\}=\{\}$

» رسم نمودار ون برای دو مجموعه

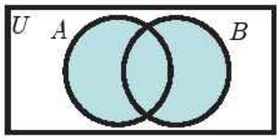
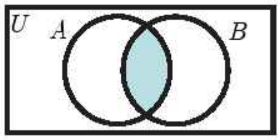
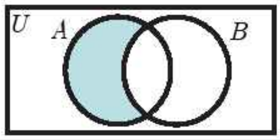
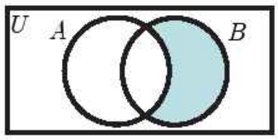
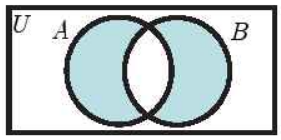


نمودار ون برای دو مجموعه‌ی A و B در حالت کلی به‌صورت مقابل رسم می‌شه. توی این شکل، مجموعه‌های A و B رو با دایره‌هایی نشون دادیم که داخل یک مستطیل قرار دارن. به این مستطیل، مجموعه‌ی مرجع گفته می‌شه. هر مسأله‌ای واسه خودش یه مجموعه‌ی مرجع داره.

در یک کلام | **مجموعه‌ی مرجع چیست؟**

مجموعه‌ی مرجع، مجموعه‌ای است که تمام مجموعه‌های یک مسأله، زیر مجموعه‌ی آن باشند. مجموعه‌ی مرجع را معمولاً با یکی از نمادهای U یا M نمایش می‌دهند. هر مسأله‌ای می‌تواند برای خودش یک مجموعه‌ی مرجع داشته باشد. مثلاً ممکن است مجموعه‌ی مرجع یک مسأله، مجموعه‌ی اعداد طبیعی باشد و مجموعه‌ی مرجع یک مسأله‌ی دیگر، مجموعه‌ی اعداد حقیقی. در نمودار ون، مجموعه‌ی مرجع را با نماد مستطیل نمایش می‌دهند.

هر کدوم از قسمت‌های این نمودار ون، یک دسته‌ی خاص از اعضا رو معرفی می‌کنن. جدول زیر رو دریابین ...

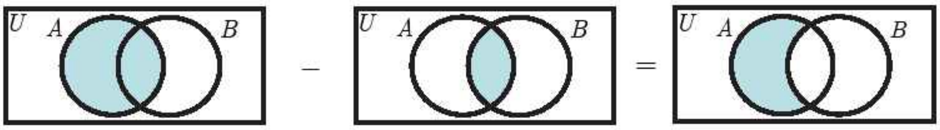
ناحیه‌ی مورد نظر	توصیف اعضا	نماد ریاضی
	اعضایی که حداقل در یکی از دو مجموعه‌ی A یا B قرار دارن.	$A\cup B$
	اعضایی که در هر دو مجموعه‌ی A و B قرار دارن.	$A\cap B$
	اعضایی که فقط در مجموعه‌ی A قرار دارن. (توی مجموعه‌ی B قرار ندارن)	$A-B$
	اعضایی که فقط در مجموعه‌ی B قرار دارن. (توی مجموعه‌ی A قرار ندارن)	$B-A$
	اعضایی که دقیقاً در یکی از مجموعه‌های A یا B قرار دارن. به این مجموعه، تفاضل متقارن دو مجموعه‌ی A و B گفته می‌شه.	$A\Delta B$

در یک کلام | **تفاضل متقارن چیست؟**

تفاضل متقارن دو مجموعه‌ی A و B شامل اعضایی است که فقط عضو یکی از دو مجموعه باشند. تفاضل متقارن مجموعه‌های A و B را با نماد $A\Delta B$ نمایش می‌دهیم. با دقت‌کردن به نمودار وِن مربوط به تفاضل متقارن، می‌توان فهمید $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$ یا به عبارت دیگر $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$.

تمرین ۱ با استفاده از نمودار ون برای دو مجموعه‌ی A و B نشان دهید $A-B=A-(A\cap B)$.

حل: طبق شکل زیر، اول نمودار وِن A و $A\cap B$ رو رسم می‌کنیم؛ بعد $A\cap B$ رو از A کم می‌کنیم. چیزی که باقی می‌مونه، همون نمودار ون $A-B$ هست.

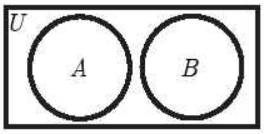
$A-(A\cap B)=$ 

$=A-B$

A $\qquad$ $A\cap B$

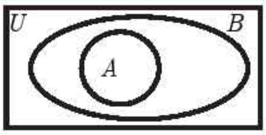
تمرین ۲ نمودار ون دو مجموعه‌ی A و B را چنان رسم کنید که $A\cap B=\varnothing$ باشد.

حل: اگه دایره‌های مربوط A و B رو جدا از هم رسم کنیم، معلوم می‌شه که هیچ اشتراکی ندارن. این‌جوری:



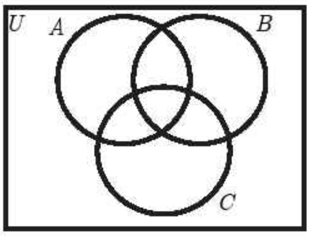
تمرین ۳ نمودار ون دو مجموعه‌ی A و B را چنان رسم کنید که $A\subseteq B$ باشد.

حل: از اون جا که A بخشی از B هست، باید ناحیه‌ی مربوط به A رو داخل ناحیه‌ی مربوط به B رسم کنیم:



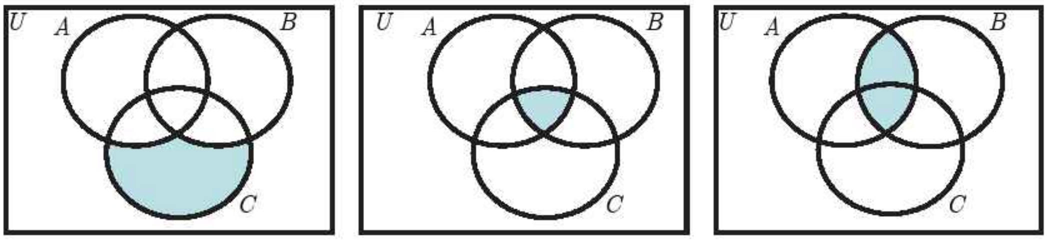
» رسم نمودار ون برای سه مجموعه

برای سه مجموعه‌ی A، B و C هم می‌تونیم نمودار ون رسم کنیم. هر چند توی کتاب درسی ۱۰ام این نمودار رسم نشده، ولی خوبه که یادش بگیرین. توی تمرین‌های آخر بخش، بیشتر بهش می‌پردازیم. فعلاً شکل‌اش رو یادبگیرین:



تمرین ۴ روی نمودار ون سه مجموعه‌ی A، B و C هر یک از نواحی (الف) $A\cap B$ (ب) $A\cap B\cap C$ (ج) $C-(A\cup B)$ را نمایش دهید.

حل: کار سختی نیست! نگاه کنین:



(ج) $\qquad$ (ب) $\qquad$ (الف)

دنده ۲۵

۶- رابطه‌ی بین A، B و C را بیابید به‌طوری که $A\cup B=B\cap C$.

۷- بررسی کنید:

الف) اگر $A\cup B=A-B$ آیا می‌توان نتیجه گرفت $B=\varnothing$ ؟

ب) اگر $A-B=A-C$ آیا می‌توان نتیجه گرفت $B=C$ ؟

۸- با استفاده از نمودار وِن، حاصل $(B-A)\cup(A\cap B)$ را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

۹- به کمک نمودار وِن، درستی یا نادرستی روابط زیر را تعیین کنید.

الف) $(A\cup B)-B=A-B$

ب) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$

ج) $(A\cup B)-(B\cup C)=(A-B)-C$

د) $(A-B)\cap C=(A\cap C)-B$

۱۰- مجموعه‌ی B دو عضو دارد و می‌دانیم $A=\{۴,۵,B\}$ و $A\cap B=\{۴,۵\}$، در این‌صورت درستی یا نادرستی روابط داده شده را تعیین کنید.

الف) $\{\{۴,۵\}\}\subseteq A$

ب) $\{\{B\}\}\subseteq A$

ج) $\{۴,۵\}\in B$

د) $B\subseteq A$

هـ) $\{۴,۵\}\subseteq B$

و) $B\in A$

۱۱- نمودار وِن سه مجموعه‌ی A، B و C را به گونه‌ای رسم کنید که $A\cap B=A\cap C=\varnothing$.

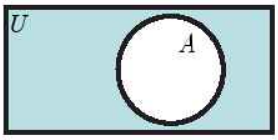
۱-۱-۳ متمم یک مجموعه

شاید با دیدن نمودارهای وِن بخش قبل پیش خودتون بگین که

« تعریف‌کردن و نمایش‌دادن مجموعه‌ی مرجع به چه دردی می‌خوره؟ »

برای گرفتن جواب این سؤال، توی این بخش، همراه ما باشین. برای شما پاسخ‌های ویژه‌ای داریم!!

» متمم یک مجموعه چیست؟



کار رو با نمودار وِن شروع می‌کنیم. توی شکل روبه‌رو، نمودار وِن مجموعه‌ی A با فرض داشتن مجموعه‌ی مرجع U رسم شده. شکل روبه‌رو از دو ناحیه تشکیل شده. ناحیه‌ی داخل دایره، معرف اعضایی هست که متعلق به مجموعه‌ی A هستن. ناحیه‌ی دوم (ناحیه‌ی رنگی)، ناحیه‌ی خارج دایره است؛ این ناحیه مربوط به اعضایی می‌شه که متعلق به مجموعه‌ی A نیستن. راستی ناحیه‌ی رنگ‌شده رو می‌شه به صورت $U-A$ معرفی کرد.

در یک کلام | **متمم یک مجموعه چیست؟**

مجموعه‌ی A را در نظر بگیرید. به مجموعه‌ی تمام اعضای U که داخل A نیستند، متمم مجموعه‌ی A گفته می‌شود. متمم یک مجموعه را با نماد «پریم» مشخص می‌کنیم، یعنی مثلاً می‌نویسیم A'. در شکل بالا، ناحیه‌ی رنگ‌شده، معرف A' است. همواره داریم $A'=U-A$.

مثلاً برای مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳\}$ با فرض مجموعه‌ی مرجع $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ داریم $A'=\{۴,۵,۶,۷\}$. توجه کنین که A' نمی‌تونه چیزی اضافه بر مجموعه‌ی مرجع داشته باشه؛ چون قرار گذاشتیم تمام مجموعه‌هامون باید زیرمجموعه‌ی U باشن.

تمرین ۱ | با فرض $U=\mathbb{N}$ باشد، متمم مجموعه‌ی $B=\{۲k|k\in\mathbb{N}\}$ را معرفی کنید.

حل: توی این تمرین، مجموعه‌ی اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$)، مجموعه‌ی مرجع هست. مجموعه‌ی B، مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج هست: $B=\{۲,۴,۶,\cdots\}$

خب حالا ما علاقه‌مند به اعضایی هستیم که توی مجموعه‌ی B نیستن! این مجموعه، مجموعه‌ی اعداد فرد هستن: $B'=\{۱,۳,۵,\cdots\}$

البته می‌تونستیم از نمایش فشرده‌ی $B'=\{۲k-۱|k\in\mathbb{N}\}$ هم استفاده کنیم. به زبون دیگه می‌شد گفت:

$$B'=U-B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,\cdots\}-\{۲,۴,۶,\cdots\}=\{۱,۳,۵,\cdots\}$$

چالش

سؤال: چرا مجموعه‌ی اعداد گنگ را با نماد $\mathbb{Q}'$ نمایش می‌دهند؟

حتماً تا به حال، بارها از این نماد استفاده کرده‌اید ولی شاید به چرایی استفاده از آن فکر نکرده باشید. مجموعه‌ی اعداد گویا را با $\mathbb{Q}$ نمایش می‌دادیم و می‌گفتیم **«هر عدد حقیقی که گویا نباشد، گنگ است»**. است یعنی اگر مجموعه‌ی اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) را مجموعه‌ی مرجع در نظر بگیریم، آن‌وقت، مجموعه‌ی اعداد گنگ برابر می‌شود با متمم مجموعه‌ی اعداد گویا ($\mathbb{Q}'=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$) بنابراین از نماد «پریم» برای مجموعه‌ی اعداد گنگ استفاده می‌کنیم.

تمرین ۲ | با فرض $A=\{۱,۲,۳\}$ و $U=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$، مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضایشان معرفی نمایید.

الف) A' ب) $A\cup A'$ ج) $A\cap A'$ د) $A-A'$ هـ) U' و) ϕ' ح) $(A')'$

حل: الف) می‌دونیم که $A'=U-A$ پس $A'=\{۴,۵\}$.

ب) با توجه به $A'=\{۴,۵\}$ می‌شه گفت $A\cup A'=\{۱,۲,۳\}\cup\{۴,۵\}=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$. توجه کنین که $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ همون مجموعه‌ی مرجع هست، یعنی $A\cup A'=U$ شد.

ج) مجموعه‌های $A=\{۱,۲,۳\}$ و $A'=\{۴,۵\}$ هیچ عضو مشترکی ندارن! پس $A\cap A'=\phi$ می‌شه.

د) با توجه به قسمت قبل، مجموعه‌های $A=\{۱,۲,۳\}$ و $A'=\{۴,۵\}$ دو مجموعه‌ی جدا از هم هستن، پس $A-A'=A$ هست. به زبون دیگه:

$$A-A'=\{۱,۲,۳\}-\{۴,۵\}=\{۱,۲,۳\}=A$$

هـ) با استفاده از تعریف متمم، می‌شه گفت $U'=U-U$ و این یعنی $U'=\phi$. به عبارت دیگه، U' شامل اعضایی از U هست که داخل U نیستن!! خب هیچ عضوی با این ویژگی وجود نداره!

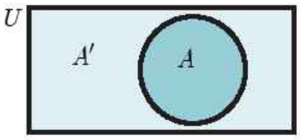
و) طبق تعریف داریم $\phi'=U-\phi=U$. به عبارت دیگه می‌شه گفت:

$$\phi'=U-\phi=\{۱,۲,۳,۴,۵\}-\{\}=\{۱,۲,۳,۴,۵\}=U$$

ح) اگه قرارداد کنیم $A'=K=\{۴,۵\}$ اون‌وقت می‌شه گفت $(A')'=(K)'$، پس: $(A')'=(K)'=U-K=\{۱,۲,۳,۴,۵\}-\{۴,۵\}=\{۱,۲,۳\}$

همون‌طور که دیدین، $(A')'=A$ شد!

ویژگی‌های به‌دست اومده توی این تمرین رو توی جدول زیر، خلاصه کردیم. توی این ویژگی‌ها، از نمودار ون رو به رو استفاده می‌کنیم.



ویژگی	توضیح
$A\cup A'=U$	به نمودار ون بالا دقت کنین. هر عضوی از U یا داخل دایره‌است یا خارج دایره! یعنی یا توی A قرار داره یا توی A'! پس $A\cup A'=U$ می‌شه.
$A\cap A'=\phi$	باز هم به نمودار ون بالا دقت کنین. مجموعه‌های A و A' دوتا مجموعه‌ی جدا از هم هستن و هیچ اشتراکی با هم ندارن.
$A-A'=A$ $A'-A=A'$	قبلاً گفته بودیم که اگه A و B دوتا مجموعه‌ی جدا از هم باشن، اون‌وقت: $A-B=A \quad , \quad B-A=B$
$U'=\phi$	با توجه به تعریف متمم، متممِ مجموعه‌ی مرجع، مجموعه‌ی تهی هست.
$\phi'=U$	با توجه به تعریف متمم، متممِ مجموعه‌ی تهی، مجموعه‌ی مرجع هست.
$(A')'=A$	اگه یه مجموعه رو دوبار متمم کنیم، به خودش می‌رسیم.

» سه ویژگی ترکیبی از متمم

کار رو با ۲تا تمرین شروع می‌کنیم.

تمرین ۳ | با فرض $A=\{۱,۲,۳\}$، $B=\{۳,۴,۵\}$ و $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$، مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضایشان معرفی نمایید.

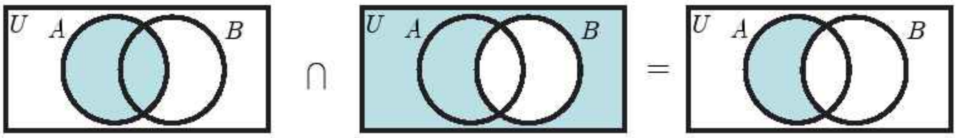
الف) $A-B$ ب) $A\cap B'$ ج) $B-A$ د) $B\cap A'$

حل: اولاً داریم $A'=\{۴,۵,۶,۷\}$ و $B'=\{۱,۲,۶,۷\}$ بنابراین:

الف) $A-B=\{۱,۲\}$ ب) $A\cap B'=\{۱,۲\}$

ج) $B-A=\{۴,۵\}$ د) $B\cap A'=\{۴,۵\}$

همون‌طور که دیدین $A-B=A\cap B'$ و $B-A=B\cap A'$ شد. و جالب این‌که این اتفاق همیشه میفته. این موضوع با استفاده از نمودار وِن هم قابل توجیه هست. مثلاً برای $A-B=A\cap B'$ داریم:

$A\cap B'=$  $=A-B$

A B'

تمرین ۴ | با فرض $A=\{۱,۲,۳\}$، $B=\{۳,۴,۵\}$ و $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$، مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضایشان معرفی نمایید.

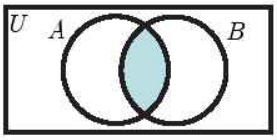
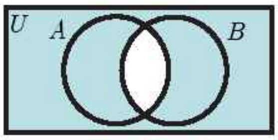
الف) $(A\cap B)'$ ب) $A'\cup B'$

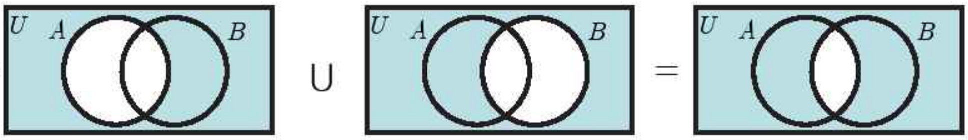
حل: برای پیدا کردن $(A\cap B)'$ باید اول $A\cap B$ رو حساب کنیم و بعد متمم بگیریم. داریم:

الف) $A\cap B=\{۳\} \quad\Rightarrow\quad (A\cap B)'=\{۱,۲,۴,۵,۶,۷\}$

ب) $A'\cup B'=\{۴,۵,۶,۷\}\cup\{۱,۲,۶,۷\}=\{۱,۲,۴,۵,۶,۷\}$

باز هم یکی شدن! یعنی $(A\cap B)'=A'\cup B'$ شد! این موضوع رو می‌شه با استفاده از نمودار ون هم توجیه کرد:

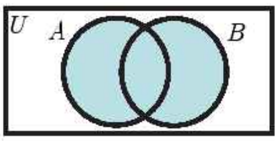
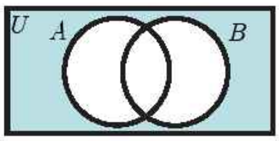
$A\cap B=$  $\Rightarrow\ (A\cap B)'=$ 

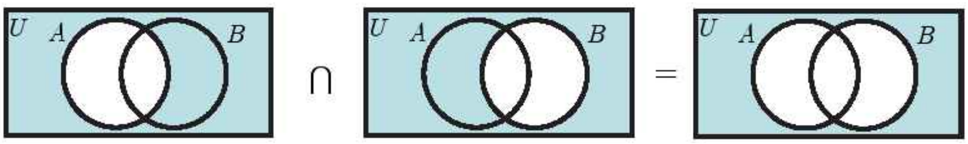
$A'\cup B'=$ 

A' B' $A'\cup B'$

تمرین ۵ | با استفاده از نمودار ون دو مجموعه‌ی A و B نشان دهید $(A\cup B)'=A'\cap B'$.

حل: به طور کاملاً مشابهی می‌شه نشون داد که $(A\cup B)'=A'\cap B'$ هست! کافیه $(A\cup B)'$ و $A'\cap B'$ رو به‌طور جداگونه رسم کنیم و نشون بدیم که با هم برابر هستن!

$A\cup B=$  $\Rightarrow\ (A\cup B)'=$ 

$A'\cap B'=$ 

A' B' $A'\cap B'$

ویژگی	توضیح
$A-B=A\cap B'$	تبدیل «منها» به «اشتراک با متمم»! این ویژگی خیلی کاربرد داره!
$B-A=B\cap A'$	
$(A\cap B)'=A'\cup B'$	علامت پریم روی پرانتز، به خود مجموعه‌ها سرایت می‌کنه و جای اجتماع و اشتراک رو هم عوض می‌کنه! این ویژگی‌ها به قوانین دمورگان مشهور هستن.
$(A\cup B)'=A'\cap B'$	

آگوستوس دمورگان (۱۸۰۶ تا ۱۸۷۱)

ریاضی‌دان متولد هند و ساکن انگلستان

» ویژگی توزیع‌پذیری

این ویژگی در کتاب درسی دهم بیان نشده! اما حیفمون اومد اونو مطرح نکنیم چرا که سرعت کارمون رو در مقایسه با نمودار ون بالاتر می‌بره. بنابراین حرفه‌ای‌ها حسابی حواسشون رو جمع کنن! این ویژگی مثل عملیات ضرب در یک پرانتزِ شامل جمع یا تفریق عمل می‌کنه:

$$a(b\pm c)=ab\pm ac$$

که در جبر مجموعه‌ها بهش می‌گیم "توزیع‌پذیری" :

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

و زمانی که برعکس بالا عمل می‌کنیم بهش می‌گیم "عکس توزیع‌پذیری" :

$$(\underline{A}\cup B)\cap(\underline{A}\cup C)=A\cup(B\cap C)$$
$$(\underline{A}\cap B)\cup(\underline{A}\cap C)=A\cap(B\cup C)$$

که این همون کاریه که در فاکتورگیری انجام می‌دادیم:

$$\underline{a}b\pm\underline{a}c=a(b\pm c)$$

تمرین ۶ حاصل عبارت $A\cap(A\cap B)'$ را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

حل: ابتدا $(A\cap B)'$ را با استفاده از ویژگی دمورگان به صورت $A'\cup B'$ می‌نویسیم و سپس از ویژگی توزیع‌پذیری استفاده می‌کنیم:

$$A\cap(A'\cup B')=(\underbrace{A\cap A'}_{\varnothing})\cup(A\cap B')=\varnothing\cup(A\cap B')=A\cap B'=A-B$$

۱۲- اگر مجموعه‌ی مرجع به‌صورت $U=\{x|x\in\mathbb{N}, x\leq 35\}$ و مجموعه‌های $A=\{x|x\in\mathbb{N}, x<10\}$ و $B=\{x|x\in\mathbb{N}, 5<x\leq 35\}$ باشند، در این‌صورت حاصل عبارت‌های داده شده را به‌دست آورید:

الف) A' ب) B' ج) $(A\cup B)'$ د) $(A'\cap B')'$

۱۳- اگر $B-A=B$ باشد، به کمک نمودار ون حاصل $[(B-A)\cup A']'-[(A\cup B')-B]'$ را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

۱۴- اگر $A\cap B=\varnothing$ باشد، به کمک نمودار ون حاصل $(A'\cup B)\cap A$ را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

۱۵- به کمک ویژگی‌های موجود در جبر مجموعه‌ها و هم‌چنین استفاده از نمودار ون، هر یک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $(A'-B)\cup(B'\cup A)'$ ب) $[A\cap(A'\cup B)]\cup[B\cap(A'\cup B')]$

ج) $[(B'-A)\cup(A'-B)]'$

۱-۱-۴ تعداد اعضای مجموعه

توی آخرین بخش مجموعه، قراره درباره‌ی مطالب مهمی صحبت کنیم. اول تکلیف مجموعه‌های متناهی و نامتناهی رو روشن می‌کنیم و بعد در مورد تعداد اعضای $A \cup B$ حرف می‌زنیم. با ما همراه باشین ...

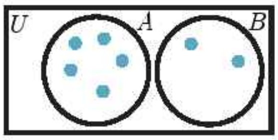
» نمادگذاری

معمولاً از دو نماد برای معرفی‌کردن تعداد اعضای یه مجموعه استفاده می‌شه ...

تعداد اعضای مجموعه‌ی A را با نماد $\mathrm{n}(A)$ یا $|A|$ نمایش می‌دهیم.

البته ما بیشتر از نماد $\mathrm{n}(A)$ استفاده می‌کنیم. مثلاً برای مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۵,۷\}$ می‌نویسیم $\mathrm{n}(A)=۴$.

تمرین ۱ برای دو مجموعه‌ی جدا از هم A و B می‌دانیم $\mathrm{n}(A)=۵$ و $\mathrm{n}(A \cup B)=۷$؛ تعداد اعضای مجموعه‌ی B را بیابید.



حل: به نمودار ون دو مجموعه‌ی جدا از هم A و B دقت کنین. از اون‌جا که این دو مجموعه هیچ عضوی مشترکی ندارن. کاملاً واضحه هست که $\mathrm{n}(A\cup B)=\mathrm{n}(A)+\mathrm{n}(B)$! بنابراین با توجه به $\mathrm{n}(A)=۵$ و $\mathrm{n}(A\cup B)=۷$ داریم $\mathrm{n}(B)=۲$

توجه کنین که رابطه‌ی $\mathrm{n}(A\cup B)=\mathrm{n}(A)+\mathrm{n}(B)$ فقط برای دو مجموعه‌ی جدا از هم برقراره و برای دو مجموعه‌ای که با هم اشتراک دارن در صفحه‌ی بعدی رابطه رو اصلاح کردیم!

» مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ها از نظر تعداد اعضا به دو دسته تقسیم می‌شن.

مجموعه‌ها:
- متناهی: مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن، یک عدد حسابی باشد. مثل مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۵,۷\}$ یا مجموعه تهی (صفر عضوی) و یا ...
- نامتناهی: مجموعه‌ای که متناهی نباشد! به عبارت دیگر مجموعه‌ای که بی‌نهایت عضو داشته باشد. مثل $\mathbb{N}$ یا $\mathbb{R}$ یا ...

مثال‌هایی از مجموعه‌های متناهی	مثال‌هایی از مجموعه‌های نامتناهی
مجموعه‌ی درختان کره‌ی زمین، مجموعه‌ی گلبول‌های قرمز بدن، مجموعه‌ی اعداد طبیعی پنج‌رقمی و ...	مجموعه‌ی اعداد مضرب ۷، مجموعه‌ی اعداد اول، مجموعه‌ی اعداد گویا و ...

در ضمن، یه مجموعه‌ی متناهی ممکنه خیلی‌خیلی بزرگ باشه! مثل مجموعه‌ی $A=\{n \mid n\in\mathbb{N}, n\leq ۱۰^{۱۰۰}\}$ که $۱۰^{۱۰۰}$ تا عضو داره ولی باز هم متناهی محسوب می‌شه. راستی تا یادم نرفته این رو هم بگم که

$\mathrm{n}(A)$ را فقط برای مجموعه‌های متناهی تعریف می‌کنیم.

یعنی معنی نداره بگی یه مجموعه‌ی نامتناهی چند تا عضو داره! به شخصه از تمرین زیر خوشم میاد (خیلی زیاد ...).

تمرین ۲ درستی یا نادرستی هر یک از جملات زیر را تعیین نمایید.

الف) زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ی متناهی، قطعاً متناهی است.
ب) زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ی نامتناهی، قطعاً نامتناهی است.
ج) اجتماع دو مجموعه‌ی متناهی قطعاً متناهی است.
د) اجتماع دو مجموعه‌ی نامتناهی قطعاً نامتناهی است.
هـ) اشتراک دو مجموعه‌ی متناهی قطعاً متناهی است.
و) اشتراک دو مجموعه‌ی نامتناهی قطعاً نامتناهی است.

حل: الف) درسته! اصلاً می‌دونین چیه؟! اگه B، یک زیرمجموعه از مجموعه‌ی متناهی A باشه ($B\subseteq A$) اون‌موقع حتماً $\mathrm{n}(B)\leq \mathrm{n}(A)$ هست.

ب) نه! مثلاً $A=\{۱\}$ یک زیرمجموعه‌ی متناهی از مجموعه‌ی نامتناهی $\mathbb{N}$ هست. البته $\mathbb{N}$ زیرمجموعه‌ی نامتناهی هم داره، مثلاً:

$E=\{۲,۴,۶,۸,\cdots\}$

پس این جمله، درستش این‌شکلی می‌شه:

زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ی نامتناهی، ممکن است متناهی و یا نامتناهی باشد.

ج) درسته! دلیل‌اش هم واضحه. اگه یه مجموعه‌ی مثلاً ۱۰عضوی رو با یه مجموعه‌ی مثلاً ۲۰عضوی اجتماع بگیریم، مجموعه‌ی به دست اومده فوقِ فوقش ۳۰ تا عضو می‌تونه داشته باشه، پس متناهیه.

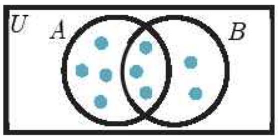
د) بله! با اجتماع گرفتن، انتظار داریم مجموعه‌مون بزرگ‌تر بشه. پس اجتماع دو مجموعه‌ی نامتناهی حتمن نامتناهی هست.

ه) درسته! با اشتراک گرفتن، انتظار داریم مجموعه‌مون کوچیک‌تر بشه. پس اشتراک دو مجموعه‌ی متناهی، حتمن متناهی هست.

و) غلطه! مثلاً مجموعه‌های اعداد گویا ($\mathbb{Q}$) و اعداد گنگ ($\mathbb{Q}'$) رو در نظر بگیرین. هر دوشون نامتناهی هستن ولی $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\phi$ و تهی یه مجموعه‌ی متناهی هست. البته ممکنه اشتراک دو مجموعه‌ی نامتناهی، نامتناهی بشه! مثل $\mathbb{N}\cap\mathbb{Z}$. پس فرم درست جمله‌مون این‌جوری می‌شه:

اشتراک دو مجموعه‌ی نامتناهی ممکن است متناهی و یا نامتناهی باشد.

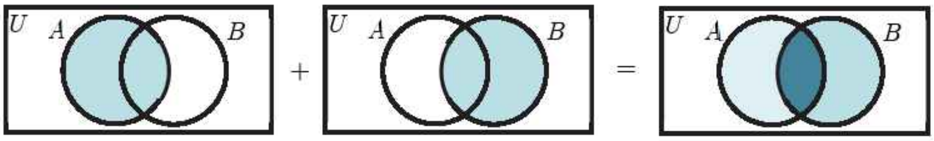
« تعداد اعضای $A\cup B$



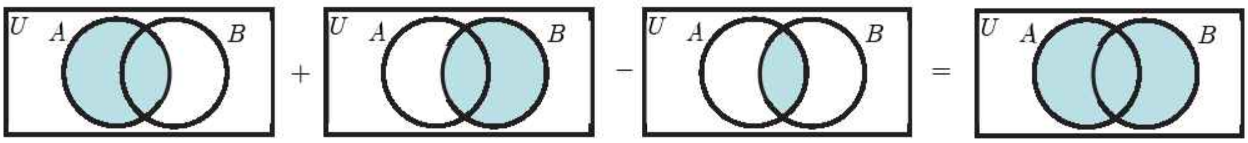
این‌جا می‌خوایم در مورد تعداد اعضای $A\cup B$ صحبت کنیم. برای این‌کار از نمودار وِن روبه‌رو کمک می‌گیریم. با توجه به این نمودار می‌تونیم بگیم:

$\mathrm{n}(A)=۷,\quad \mathrm{n}(B)=۵,\quad \mathrm{n}(A\cap B)=۳,\quad \mathrm{n}(A\cup B)=۹$

شاید یک نفر در نگاه اول بگه که خب! $A\cup B$ یعنی اعضای A و B رو بریزیم توی یک کیسه! پس باید تعداد اعضای A و B رو با هم جمع بزنیم. اما این کار درستی نیست. با انجام این کار، اعضایی که هم توی A هستن و هم توی B (یعنی توی $A\cap B$ هستن) دو بار شمرده می‌شن! نگاه کنین:



برای درست‌کردن این مشکل می‌شه یه کار خیلی ساده انجام داد! مگه اعضای $A\cap B$ رو ۲بار نشمردین؟! خب اگه یکی از این ۲بار رو کم کنیم، مسأله حل می‌شه. یعنی این‌جوری:



جمع‌بندی این‌که:

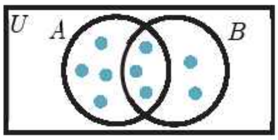
$$\mathrm{n}(A\cup B)=\mathrm{n}(A)+\mathrm{n}(B)-\mathrm{n}(A\cap B)$$

حساب کردن $\mathrm{n}(A\cup B)$ **بر حسب** $\mathrm{n}(A)$، $\mathrm{n}(B)$ **و** $\mathrm{n}(A\cap B)$

با توجه به رابطه‌ی بالا، واسه مثالی که زدیم می‌تونیم بگیم:

$$\mathrm{n}(A\cup B)=\underbrace{\mathrm{n}(A)}_{۷}+\underbrace{\mathrm{n}(B)}_{۵}-\underbrace{\mathrm{n}(A\cap B)}_{۳}\quad\Rightarrow\quad \mathrm{n}(A\cup B)=۹$$

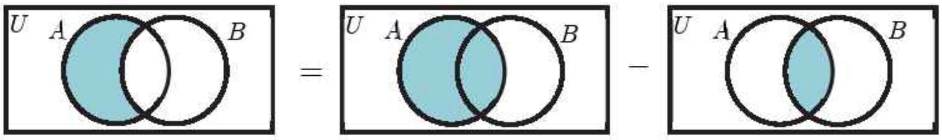
» تعداد اعضای $A-B$



باز هم از نمودار وِن روبه‌رو استفاده می‌کنیم. می‌خوایم $n(A-B)$ رو حساب کنیم. $n(A-B)$ یعنی تعداد اعضای مجموعه‌ی $A-B$. می‌تونیم بگیم:

تعداد اعضای $(A-B)$ = تعداد اعضای (A) − تعداد اعضای $(A\cap B)$

یا به‌عبارت دیگه می‌تونیم این‌جوری استدلال کنیم:



$A-B$ A $A\cap B$

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$$
$$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$$

حساب کردن $n(A-B)$ و $n(B-A)$ بر حسب $n(A)$، $n(B)$ و $n(A\cap B)$

تمرین ۳

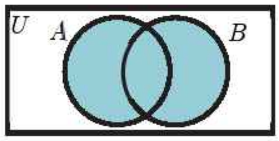
مدرسه‌ای ۱۰۰ دانش‌آموز دارد. می‌دانیم در این مدرسه ۴۰ نفر والیبال و ۷۰ نفر فوتبال بازی می‌کنند. اگر ۱۵ نفر هر دو ورزش را انجام دهند، چند نفر از دانش‌آموزان ...

الف) حداقل در یکی از رشته‌ها بازی می‌کنند؟   ب) فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

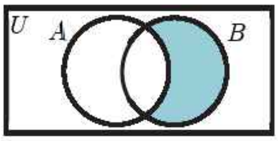
ج) فقط یک بازی را انجام می‌دهند؟   د) هیچ بازی انجام نمی‌دهند؟

حل: فرض کنین والیبالی‌ها رو توی مجموعه‌ی A و فوتبالی‌ها رو توی مجموعه‌ی B قرار بدیم. مجموعه‌ی مرجع U هم نشون‌دهنده‌ی هر ۱۰۰ دانش‌آموز هست.

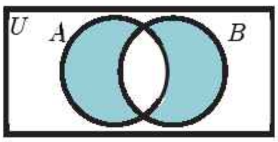
قسمت‌های این تمرین، معادل نواحی زیر در نمودار وِن هستن:



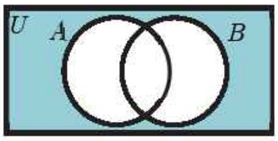
الف) حداقل در یک رشته ورزشی



ب) فقط فوتبال



ج) فقط یک بازی



د) هیچ بازی انجام نمی‌دهند.

الف) با توجه به شکل بالا باید $n(A\cup B)$ رو حساب کنیم. طبق نکته‌ای که تازه یاد گرفتیم، می‌تونیم بگیم:

$$n(A\cup B)=\underbrace{n(A)}_{\text{والیبال}}+\underbrace{n(B)}_{\text{فوتبال}}-\underbrace{n(A\cap B)}_{\text{هردو}}=۴۰+۷۰-۱۵=۹۵$$

ب) باید $n(B-A)$ رو حساب کنیم. می‌نویسیم:

$$n(B-A)=\underbrace{n(B)}_{\text{فوتبال}}-\underbrace{n(A\cap B)}_{\text{هردو}}=۷۰-۱۵=۵۵$$

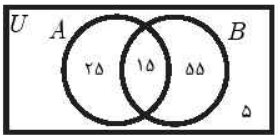
ج) اگر به ناحیه‌ی مشخص شده در شکل بالا دقت کنین متوجه می‌شین که باید $n(A-B)+n(B-A)$ رو حساب کنیم. داریم:

$$n(A-B)=\underbrace{n(A)}_{\text{والیبال}}-\underbrace{n(A\cap B)}_{\text{هردو}}=۴۰-۱۵=۲۵ \Rightarrow n(A-B)+n(B-A)=۲۵+۵۵=۸۰$$

د) با توجه به شکل بالا، باید $n(U)-n(A\cup B)$ رو حساب کنیم. این هم کار آسونیه:

$$n(U)-n(A\cup B)=۱۰۰-۹۵=۵$$

این هم نمودار وِن نهایی مسأله:



دنده ۲۵

۱۶- دو مجموعه‌ی نامتناهی مثال بزنید که یکی از آن‌ها دقیقاً دو عضو از دیگری بیشتر داشته باشد.

۱۷- متناهی یا نامتناهی‌بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص نمایید.

الف) $\mathbb{W}-\mathbb{N}$ ب) $\mathbb{N}-\mathbb{W}$ ج) $\mathbb{R}\cap\mathbb{Q}$ د) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

۱۸- فرض کنید A مجموعه‌ای متناهی و B و C دو مجموعه‌ی نامتناهی باشند. در این‌صورت وضعیت متناهی یا نامتناهی‌بودن (و یا عدم قطعیت) هر یک از مجموعه‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $B-(C-A)$ ب) $A\cup(B-C)$

۱۹- اگر $(A-B)\cup(B-A)$ مجموعه‌ای نامتناهی باشد، در این‌صورت وضعیت متناهی یا نامتناهی‌بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را معین کنید.

الف) $A-B$ ب) $A\cap B$

۲۰- همه‌ی ۱۵۰ دانش‌آموز پایه‌ی دهم مدرسه‌ای اهل فوتبال یا والیبال هستند. اگر بدانیم ۱۰۵ نفر آن‌ها فوتبال و ۸۰ نفر آن‌ها والیبال بازی می‌کنند، در این‌صورت:

الف) چند نفر در هر دو رشته بازی می‌کنند؟ ب) چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟

۲۱- اگر بدانیم مجموعه‌های A و B به ترتیب ۱۷ و ۲۰ عضو دارند و هم‌چنین $n(A\cap B)=۱۰$ باشد، مجموعه‌ی $(A-B)\cup(B-A)$ چند عضو دارد؟