

درس سوم معادلات گویا و معادلات رادیکالی



معادلات گویا

اگر مجهول یک معادله، در مخرج کسر باشد، به آن معادله می‌گوییم «معادله گویا». معادله‌های گویا ممکن است در مسائل غلظت، حرکت و ... به دست بیایند. توی این قسمت سراغ حل معادله‌های گویا می‌رویم و کاربرد آن‌ها را در چند نوع از مسائل بیرون ریاضی می‌بینیم. همین اول کار هم یادآوری می‌کنیم که هیچ وقت مخرج نباید صفر شود، هیچ وقت!

روش حل معادله‌های گویا

در مقدمه بالا گفتیم که معادله‌ای مثل $\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x} = 2$ را یک معادله گویا می‌نامیم. برای حل معادله گویا باید آن را از شکل کسری در بیاوریم. پس دو طرف را در ک.م.م مخرج‌ها ضرب می‌کنیم تا کسرها از بین بروند. مثلاً در معادله $\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x} = 2$ مخرج‌ها x و $x-1$ هستند و ک.م.م آن‌ها $x(x-1)$ است. با ضرب دو طرف در $x(x-1)$ داریم:

$$\xrightarrow{\times x(x-1)} x(x-1)\frac{x}{x-1} + x(x-1)\frac{1}{x} = 2x(x-1) \xrightarrow{\text{مخرج‌ها ساده می‌شوند}} x^2 + x - 1 = 2x^2 - 2x \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{روش دلتا}} x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

دیدید؟ معادله از فرم کسری درآمد؟ حالا این معادله جدید را حل می‌کنیم:

گفتیم مخرج هیچ وقت نباید صفر شود، پس جوابی را قبول می‌کنیم که مخرج هیچ‌کدام از کسرها را صفر نکند. مثلاً در معادله بالا، مخرج‌ها x و $x-1$ هستند و جواب‌های ما $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ شدند که مخرج‌ها را صفر نمی‌کنند پس هر دو جواب قبول‌اند.

• **مراحل حل یک معادله گویا** ۱) دو طرف را در ک.م.م مخرج‌ها ضرب کنیم. ۲) معادله جدید (که فرم کسری ندارد) را حل کنیم.

۳) کنترل کنیم که جواب (های) به دست آمده مخرج را صفر نکنند.

مثال معادله $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-1} = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$ را حل کنید.

پاسخ مخرج کسرها $x-2$ ، $x-1$ و $(x-1)(x-2)$ هستند، دقت کنید که با کمک اتحاد جمله مشترک، $x^2 - 3x + 2$ را به صورت $(x-1)(x-2)$ تجزیه کردیم. پس ک.م.م مخرج‌ها $(x-1)(x-2)$ است و داریم:

$$\xrightarrow{\times (x-1)(x-2)} x-1+2(x-2) = x \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

این جواب قابل قبول است، چون مخرج‌ها را صفر نمی‌کنند.

آزمون در معادله $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-3}$ ، جواب (ها):

۱) دو عدد گنگ مثبت هستند.

۲) دو عدد گنگ منفی هستند.

۳) دو عدد گنگ و مختلف‌العلامت هستند.

پاسخ ک.م.م مخرج‌ها $(x-1)(x-2)(x-3)$ است و با ضرب دو طرف در آن داریم:

$$\xrightarrow{\times (x-1)(x-2)(x-3)} (x-2)(x-3) - (x-1)(x-3) = (x-1)(x-2)$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کنیم}} -x+3 = x^2 - 3x + 2 \xrightarrow{\text{ضرب‌ها را انجام دهیم}} x^2 - 5x + 6 - (x^2 - 4x + 3) = x^2 - 3x + 2$$

$$\xrightarrow{\text{همه را به یک طرف بیاوریم}} x^2 - 2x - 1 = 0 \xrightarrow{\text{روش دلتا}} x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

ریشه‌های مخرج اعداد ۱، ۲ و ۳ هستند و جواب‌های معادله $1 + \sqrt{2}$ و $1 - \sqrt{2}$ ؛ پس هیچ‌کدام از جواب‌ها مخرج را صفر نمی‌کنند و هر دو قابل قبول‌اند.

• **ریشه معادله، در معادله صدق می‌کند!** • اگر سؤال به ما مقدار ریشه معادله را بدهد، مثل همیشه می‌گوییم ریشه معادله در معادله صدق

می‌کند. مثلاً اگر بدانیم $x = 2$ ریشه معادله $\frac{1}{x-1} + \frac{a}{x+2} = \frac{3}{x}$ است، داریم:

$$\frac{1}{2-1} + \frac{a}{2+2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2$$

مثال ۱ به ازای یک مقدار از k ، یک ریشه معادله $\frac{2x}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-x} = \frac{k}{x^2+x}$ برابر $x = -2$ است.

الف k کدام است؟ **ب** ریشه دیگر معادله کدام است؟

پاسخ ۱ **الف**

$$\begin{aligned} \xrightarrow{x=-2} \frac{2(-2)}{4-1} + \frac{1}{4+2} = \frac{k}{4-2} &\Rightarrow \frac{-4}{3} + \frac{1}{6} = \frac{k}{2} \Rightarrow \frac{k}{2} = \frac{-4}{3} + \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{k}{2} = \frac{-8}{6} + \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{k}{2} = \frac{-7}{6} \Rightarrow k = \frac{-7}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{2x}{(x-1)(x+1)} + \frac{1}{x(x-1)} = \frac{-7}{3x(x+1)}$$

ب **راه ۱** حالا با قراردادن $k = \frac{-7}{3}$ داریم:

ک.م.م.مخرجها $x(x-1)(x+1)$ است.

خاطره از سال‌های قبل به خاطر داریم که ک.م.م.م. (کوچک‌ترین مضرب مشترک) برابر حاصل ضرب کل پایه‌ها با توان بیشتر است.

$$\xrightarrow{\times x(x-1)(x+1)} 2x^2 + 1(x+1) = \frac{-7}{3}(x-1) \Rightarrow 2x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} = 0$$

$$2x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} = (x+2)(2x - \frac{2}{3}) = 0 \xrightarrow{x_1=-2} x_2 = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-1}{6} - (-2) = \frac{1}{3}$$

راه ۲ جمع ریشه‌ها $S = \frac{-b}{a} = \frac{-1}{6}$ است پس با $x_1 = -2$ داریم:

راه ۳ ضرب ریشه‌ها $P = \frac{c}{a} = \frac{-2}{3}$ است پس از $x_1 = -2$ نتیجه می‌شود $x_2 = \frac{1}{3}$.

آزمون ۱ یک جواب معادله $\frac{x}{x+a} - \frac{2-2a}{2a-x} = \frac{1}{x}$ عدد ۱ است. مقدار a کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

$$\xrightarrow{x=1} \frac{1}{1+a} - \frac{2-2a}{2a-1} = \frac{1}{1} = 1$$

پاسخ ۱ **راه ۱** عدد $x = 1$ در معادله صدق می‌کند:

حالا یک معادله گویای جدید برای a داریم.

$$\xrightarrow{\times (a+1)(2a-1)} (2a-1) - (2-2a)(a+1) = (a+1)(2a-1)$$

مخرجها $1+a$ و $2a-1$ و ک.م.م. آن‌ها $(a+1)(2a-1)$ است:

$$\xrightarrow{\text{همه به یک طرف}} a-2=0 \Rightarrow a=2$$

عددگذاری مثل همیشه، امتحان گزینه‌ها را از یاد نبرید! در معادله $\frac{1}{1+a} - \frac{2-2a}{2a-1} = 1$ ، عدد ۲ می‌خورد: $\frac{1}{3} - (\frac{-2}{3}) = 1$ پس (۲) را برمی‌داریم

و تمام.

• **ردپای معادله درجه دوم و روابط ریشه‌ها** • در خیلی از معادله‌های گویا وقتی دو طرف را در ک.م.م.مخرجها ضرب می‌کنیم به یک معادله

درجه ۲ می‌رسیم. در درس (۲) با معادله درجه دوم به طور کامل آشنا شدیم و می‌توانیم تعداد، علامت، جمع، ضرب و ... را درباره ریشه‌ها بررسی کنیم.

مثلاً در معادله $\frac{x-2}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+7}{x^2-1}$ با ضرب دو طرف در ک.م.م.مخرجها یعنی $(x+1)(x-1)$ داریم:

$$(x-2)(x+1) - (x-1) = x+7 \Rightarrow x^2 - 3x - 8 = 0$$

(حالا می‌توان گفت این معادله ۲ تا ریشه دارد $\Delta > 0$)

هر دو قابل قبول‌اند (چون هیچ کدامشان ۱ یا -۱ نیست که مخرج را صفر کند).

هم‌چنین جمع ریشه‌ها $S = \frac{-b}{a} = 3$ و ضرب ریشه‌ها $P = \frac{c}{a} = -8$ است. راستی دو ریشه مختلف‌العلامت هستند (چون $P < 0$) و عدد ریشه مثبت

بزرگ‌تر است (چون $S > 0$).

مثال ۲ در معادله $\frac{x}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{k}{x^2-4}$ مقدار k را طوری بیابید که:

الف معادله ریشه مضاعف داشته باشد. **ب** ضرب دو ریشه -۵ باشد.

پ معادله دارای دو ریشه مختلف‌العلامت باشد.

پاسخ

دو طرف را در ک.م.م.مخرجها یعنی $(x-2)(x+2)$ ضرب می‌کنیم و داریم:

$$\Rightarrow x(x+2) - (x-2) = k \xrightarrow{\text{ضرب کنیم}} x^2 + 2x - x + 2 - k = 0 \Rightarrow x^2 + x + (2-k) = 0$$

رسیدیم به معادله درجه دوم ... حالا خواسته‌های سؤال را در هر قسمت بررسی می‌کنیم.

الف شرط ریشه مضاعف $\Delta = 0$ است، پس داریم:

$$x^2 + x + (2-k) = 0 \xrightarrow{\frac{a=b=1}{c=2-k}} \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(2-k) = 0 \Rightarrow 1 - 8 + 4k = 0 \Rightarrow 4k = 7 \Rightarrow k = \frac{7}{4}$$

به ازای $k = \frac{7}{4}$ ، معادله به صورت $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$ می‌شود که ریشه مضاعف $\frac{-1}{2} = \frac{-1}{2}$ است. $x_1 = x_2 = \frac{-1}{2}$

دقت کنید که باید مراقب صفر شدن مخرج باشیم، به همین دلیل کنترل ریشه‌ها لازم است.

ب ضرب دو ریشه $P = \frac{c}{a} = \frac{2-k}{1}$ است و باید -5 باشد پس داریم: $k = +7$

دوباره دقت می‌کنیم به ازای $k = 7$ معادله به صورت $x^2 + x - 5 = 0$ دوتا ریشه دارد که هیچ کدامشان $+2$ یا -2 نیستند و مخرج را صفر نمی‌کنند.

پ برای دو ریشه مختلف‌العلامت باید ضرب دو ریشه یعنی $P = \frac{c}{a} = 2 - k$ منفی باشد. پس $k > 2$. اما صبر کنید ... ریشه‌ها نباید 2 یا -2 باشند:

اگر یک ریشه $x_1 = 2$ باشد، داریم: $2^2 + 2 + 2 - k = 0$ که نتیجه می‌شود $k = 8$ و اگر یک ریشه $x_1 = -2$ باشد، از رابطه $0 = (-2)^2 + (-2) + 2 - k$ به

$k = 4$ می‌رسیم. این دوتا مقدار برای k قبول نیستند، چون یک ریشه ± 2 می‌دهند پس جواب کامل، $k > 2$ به جز 4 و 8 است؛ یعنی $k \in (2, +\infty) - \{4, 8\}$.

آزمون ۵ | در معادله $\frac{x^2}{x^2 - x - 2} + \frac{x}{x - 2} = \frac{k}{x + 1}$ اگر جمع دو ریشه $\frac{-2}{3}$ باشد، k کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) نشدنی

پاسخ ۴ | تجزیه $x^2 - x - 2$ به صورت $(x-2)(x+1)$ است و ضرب دو طرف در ک.م.م.مخرجها داریم:

$$\frac{x^2}{(x-2)(x+1)} + \frac{x}{x-2} = \frac{k}{x+1} \xrightarrow{\text{همه به طرف چپ}} 2x^2 + (1-k)x + 2k = 0 \xrightarrow{\text{ضرب کنیم}} x^2 + x(x+1) = k(x-2)$$

جمع ریشه‌های این معادله می‌شود $S = \frac{-b}{a} = -\frac{1-k}{2} = \frac{k-1}{2}$ ، سؤال گفته باید جمع ریشه‌ها $-\frac{2}{3}$ باشد پس:

$$\frac{k-1}{2} = \frac{-2}{3} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3k - 3 = -4 \Rightarrow 3k = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$$

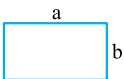
اما دقت کنید! به ازای $k = -\frac{1}{3}$ معادله به صورت $2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} = 0$ درمی‌آید که ریشه‌هایش $\frac{1}{3}$ و -1 هستند و $x = -1$ مخرج را صفر می‌کند.

پس این مقدار k قبول نیست (صورت سؤال گفته «ریشه» و باید «نشدنی» را بزنیم).

کاربردهای معادله گویا

تا این‌جا کار، سؤال به ما معادله را می‌داد. اما بعضی اوقات باید خودمان معادله را بسازیم و بعد آن را حل کنیم! با مدل‌های مختلف این مسائل آشنا می‌شویم:

۱. کاربرد معادله گویا در عدد طلایی • مستطیلی به طول a و عرض b را در نظر بگیرید:



اگر رابطه $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ برقرار شود یعنی: نسبت طول به عرض با نسبت طول+عرض به طول برابر باشد، می‌گوییم این مستطیل «طلایی» است.

اگر x را بگیریم (انگار طول مستطیل x و عرض آن 1 باشد)، آن وقت شرط مستطیل طلایی به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \Rightarrow \frac{x+1}{x} = x$$

$$x^2 = x + 1 \xrightarrow{\text{همه به طرف چپ}} x^2 - x - 1 = 0 \xrightarrow{\text{دلتا}} x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

برای حل این معادله دو طرف را در x ضرب می‌کنیم و داریم:

$$\xrightarrow{x>0} x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

اما x نسبت طول دو پاره‌خط است و منفی نیست پس:

اشاره دقت می‌کنید که وقتی در معادله گویا، فقط دوتا کسر داریم. از طرفین وسطین هم می‌توانیم کمک بگیریم.

۳. کاربرد معادله گویا در مسائل میانگین • از متوسط اول به یاد دارید که برای محاسبه میانگین باید جمع را بر تعداد تقسیم کرد.

مثلاً اگر جمع نمرات شخصی در ۸ آزمون، برابر ۱۲۰ باشد، میانگین نمرات او می‌شود: $\frac{\text{جمع}}{\text{تعداد}} = \frac{120}{8} = 15$

حالا اگر همین شخص، در n آزمون دیگر، ۲۰ شود، به جمع نمراتش ۲۰ × n و به تعداد آن‌ها n اضافه می‌شود، پس میانگین جدیدش $\frac{120 + 20n}{8 + n}$ است و پای معادله گویا به ماجرا باز شده است!

توی همین ماجرای بالا، فرض کنید برای راهیابی به مدرسه تیزهوشان باید میانگین این شخص به ۱۸ برسد و می‌خواهیم بدانیم در چند آزمون بعدی بیاید ۲۰ بیاورد.

$$\frac{120 + 20n}{8 + n} = 18 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 18(8 + n) = 120 + 20n \Rightarrow 144 + 18n = 120 + 20n \Rightarrow 24 = 2n \Rightarrow n = 12$$

پس برای رسیدن به معدل ۱۸، باید ۱۲ بار ۲۰ بیاورد.

مثال مجله ورلد ساکر، در پایان هر هفته از لیگ فوتبال به بازیکنان امتیاز می‌دهد. در ۵ هفته اول لیگ، میانگین نمرات یک بازیکن ۴/۲ است. از هفته ششم به بعد در تمام بازی‌ها نمره ۴/۸ را می‌گیرد. میانگین نمرات او پس از چند بازی به ۴/۶ می‌رسد؟

پاسخ در ۵ هفته اول جمع نمراتش $4/2 \times 5 = 21/2$ بوده، از هفته ششم همیشه همراهش ۴/۸ است پس در X هفته بعدی به جمع نمرات ۴/۸X اضافه می‌شود و داریم:

$$\frac{\text{جمع کل امتیاز}}{\text{جمع کل بازی}} = \frac{21 + 4/8X}{5 + X} = 4/6 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 4/6(5 + X) = 21 + 4/8X$$

$$\Rightarrow 23 + 4/6X = 21 + 4/8X \Rightarrow 2 = 0/2X \Rightarrow X = 10$$

پس در هفته پانزدهم (۱۰ هفته بعد) به میانگین ۴/۶ می‌رسد.

۴. کاربرد معادله گویا در مسائل همکاری • در این مسئله‌ها چند نفر، چند شیر، چند دستگاه و ... قرار است کاری را با هم انجام دهند.

برای ساختن معادله باید اول اطلاعات صورت سؤال را برحسب ۱ واحد زمان بیان کنیم. مثلاً جدول زیر را ببینید:

بیان سؤال	بیان در ۱ واحد زمان
یک شیر آب، استخر را در ۴ ساعت پر می‌کند.	در هر ساعت، $\frac{1}{4}$ استخر را پر می‌کند.
یک نقاش اتاقی را در ۶ روز رنگ می‌کند.	در هر روز، $\frac{1}{6}$ اتاق را رنگ می‌کند.
شخصی کاری را در ۲۵ دقیقه تمام می‌کند.	در هر دقیقه، $\frac{1}{25}$ از کار را انجام می‌دهد.

حالا اگر چندتا شیر، چند نقاش یا چند نفر با هم مشغول کار شوند، باید عملکرد آن‌ها برحسب ۱ واحد زمان را با هم جمع کنیم. مثلاً اگر علی و رضا به ترتیب در ۳ و ۶ روز پروژه‌ای را تمام می‌کنند (ترجمه: علی هر روز $\frac{1}{3}$ و رضا هر روز $\frac{1}{6}$ پروژه را انجام می‌دهد) اگر با هم کار کنند هر روز $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ یعنی $\frac{1}{2}$ کار را انجام می‌دهند و بنابراین کل کار در ۲ روز تمام می‌شود.

مثال دو نقاش A و B به ترتیب در ۱۵ و ۱۰ روز خانه‌ای را رنگ می‌کنند. کار رنگ چه قدر طول می‌کشد اگر:

الف هر دو باهم کار کنند. **ب** ۳ روز اول با هم کار کنند و سپس بقیه کار را B انجام دهد.

پ پنج روز اول A تنها باشد و از روز ششم B به کمک او بیاید.

پاسخ قرار شد برحسب واحد زمان صحبت کنیم. پس A و B در یک روز به ترتیب $\frac{1}{15}$ و $\frac{1}{10}$ کار را انجام می‌دهند، پس با هم هر روز

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{3+2}{30} = \frac{1}{6}$$

الف اگر هر دو با هم کار کنند، هر روز $\frac{1}{6}$ کار انجام شده و کلاً ۶ روز طول می‌کشد.

ب اگر ۳ روز اول با هم کار کنند $3 \times \frac{1}{6}$ یعنی نصف کار در این ۳ روز تمام می‌شود. حالا B باید نصف دیگر کار را به تنهایی انجام دهد که برایش ۵ روز

طول می‌کشد (وقتی کل کار را در ۱۰ روز می‌کند، نصف کار ۵ روز خواهد بود).

اشاره ۱۳۸ این طوری هم فکر کنید:

B در هر روز $\frac{1}{10}$ کار را انجام می‌دهد پس نصف کار برای او $\frac{1}{2} = \frac{2}{10}$ روز طول خواهد کشید.

پ اگر A در پنج روز اول تنها کار کند، $\frac{1}{15} \times 5 = \frac{1}{3}$ کار انجام می‌شود. حالا با کمک B، از روز ششم به بعد، $\frac{2}{3}$ کار باقی‌مانده را انجام می‌دهند که ۴

$$\frac{2}{3} = 4 \times \frac{1}{6}$$

اگر زمان انجام کار توسط یک شخص را ندانیم، به معادله گویا می‌رسیم. تست را ببینید:

آ تست ۱۳۹ علی کاری را در n روز تمام می‌کند و دوستش ۹ روز دیرتر از او کار را تمام می‌کند. اگر با هم کار کنند، کل کار در ۶ روز تمام می‌شود. n کدام است؟

- ۸ (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴)

پاسخ ۱۴۰ علی هر روز $\frac{1}{n}$ کار و دوستش هر روز $\frac{1}{n+9}$ کار را انجام می‌دهد، پس با هم هر روز $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+9}$ کار را انجام داده‌اند و چون ۶ روزه تمام شده،

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+9} = \frac{1}{6}$$

داریم:

عددگذاری گزینه‌ها را کنترل کنیم $n = 9$ می‌خورد.

راه II ک.م.م.مخرجها $6n(n+9)$ است:

$$\frac{\times 6n(n+9)}{\times 6n(n+9)} \rightarrow 6(n+9) + 6n = n(n+9)$$

$$\frac{\text{ضرب کنیم}}{\text{همه یک طرف}} \rightarrow 6n + 54 + 6n = n^2 + 9n \rightarrow n^2 - 3n - 54 = 0 \Rightarrow (n-9)(n+6) = 0 \xrightarrow{n>0} n = 9$$

اشاره ۱۳۹ اگر کاری در n روز انجام می‌شود، جواب منفی برای n قبول نیست.

۵. کاربرد معادله گویا در مسائل حرکت • از فیزیک می‌دانید که اگر متحرکی مسافت d را با سرعت v طی کند، این حرکت به اندازه $t = \frac{d}{v}$

طول می‌کشد. مثلاً اگر مسافت ۲۰۰ کیلومتر را با سرعت ۴۰ km/h طی کنیم ۵ ساعت طول خواهد کشید. حالا در همین مسافت، اگر سرعت را به اندازه

۱۰ km/h افزایش دهیم (یعنی ۴۰ بشود ۵۰) آن وقت حرکت به اندازه $\frac{200}{50} = 4$ ساعت طول می‌کشد.

اشاره ۱۴۰ تغییر سرعت ممکن است به خاطر شیب زمین، وزش باد یا جریان آب باشد. اگر حرکت هم جهت باد یا آب باشد، سرعت باد به سرعت

حرکت اضافه می‌شود و اگر خلاف جهت باشد از سرعت کم می‌شود. مثلاً اگر سرعت متحرکی در رودخانه یا هوای آرام برابر ۲۰ باشد و باد (یا جریان آب) با

سرعت ۵ هم جهت آن باشد، سرعت می‌شود ۲۰ + ۵ و اگر جریان آب یا باد مخالف با سرعت ۵ داشته باشیم، سرعت می‌شود ۲۰ - ۵.

مثال ۱۴۱ یک قایق موتوری با سرعت ۹۰ متر بر دقیقه در آب آرام حرکت می‌کند. مسافت ۱۲۰۰ متری چه قدر طول می‌کشد اگر:

الف رودخانه آرام باشد. **ب** سرعت جریان آب ۳۰ متر بر دقیقه هم جهت قایق باشد.

پ سرعت جریان آب ۱۰ متر بر دقیقه و خلاف جهت قایق باشد.

پاسخ ۱۴۲ در رودخانه آرام، زمان حرکت $t = \frac{d}{v} = \frac{1200}{90} = \frac{40}{3}$ یعنی $\frac{40}{3}$ دقیقه است (۱۳ دقیقه و ۲۰ ثانیه).

پ جریان هم جهت قایق، سرعت را از ۹۰ به ۹۰ + ۳۰ می‌رساند و حرکت به اندازه $\frac{1200}{120} = 10$ دقیقه طول می‌کشد.

پ با جریان مخالف، سرعت ۸۰ = ۹۰ - ۱۰ خواهد بود و زمان حرکت $\frac{1200}{80} = 15$ دقیقه می‌شود.

آ تست ۱۴۳ یک هواپیمای کوچک در مسافت ۴۰۰ کیلومتری، با سرعت v در حال حرکت است. در مسیر برگشت، بادی با سرعت ۴۰ کیلومتر بر ساعت،

در خلاف جهت می‌وزد. اگر بر اثر وزش باد، زمان حرکت نیم ساعت بیشتر شود، زمان رفت چند ساعت است؟

- ۲ (۱) ۲/۵ (۲) ۳ (۳) ۳/۵ (۴)

مثال ۱ معادله $x = \sqrt{3x+6} - 2$ چند جواب دارد؟

پاسخ ۱ قرار شد رادیکال را در یک طرف معادله تنها کنیم و دو طرف را به توان ۲ برسانیم:

$$\sqrt{3x+6} = x+2 \Rightarrow 3x+6 = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4 \xrightarrow{\text{همه یک طرف}} x^2 + x - 2 = 0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر است}} x_1 = 1, x_2 = -2$$

هر دو عدد ۱ و -۲ قابل قبول اند (زیر رادیکال یا جواب آن را منفی نمی کنند)، پس معادله ۲ جواب دارد.

آزمون ۱ اگر یک ریشه معادله $\sqrt{a-x} = |x-1|$ برابر $\frac{-1}{4}$ باشد، ریشه دیگر آن کدام است؟

۱) $\frac{7}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) ۲

پاسخ ۲ باید $x = \frac{-1}{4}$ در معادله صدق کند:

$$\sqrt{a - (-\frac{1}{4})} = |-\frac{1}{4} - 1| \Rightarrow \sqrt{a + \frac{1}{4}} = \frac{5}{4} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a + \frac{1}{4} = \frac{25}{16} \Rightarrow a = \frac{25}{16} - \frac{1}{4} = \frac{21}{16}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{21}{16} - x = |x-1|^2 = x^2 - 2x + 1 \quad \text{حالا معادله } \sqrt{\frac{21}{16} - x} = |x-1| \text{ را حل می کنیم:}$$

خاطره اگر $|u|$ را به توان ۲ برسانیم، جواب می شود u^2 (انگار قدرمطلق ندارد).

راه ۱ از تجزیه استفاده می کنیم: $x^2 - x - \frac{3}{4} = 0 \xrightarrow{\text{یک ریشه } \frac{-1}{4} \text{ است}} (x + \frac{1}{4})(x - \frac{3}{4}) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-1}{4}, x_2 = \frac{3}{4}$

پس ریشه دیگر معادله $\frac{3}{4}$ است. (قابل قبول هم هست، زیر رادیکال و جواب آن را منفی نمی کند).

راه ۲ به جای تجزیه می توانیم از جمع ریشه ها برویم: $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \Rightarrow \frac{-1}{4} + x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{5}{4}$

راه ۳ به جای تجزیه می توانیم از ضرب ریشه ها برویم: $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{-1}{4} \times x_2 = \frac{-3}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{4}$

• معادله هایی که دوتا $\sqrt{\quad}$ دارند.

وقتی فقط دوتا رادیکال داریم، یک رادیکال را در هر طرف می گذاریم و به توان ۲ می رسانیم.

مثلاً برای معادله $\sqrt{x^2+5} = \sqrt{x+7}$ داریم: $x^2+5 = x+7$ و در نتیجه $x^2 - x - 2 = 0$ که جواب های -۱ و ۲ را می دهد. هر دو جواب هم قبول اند چون زیر رادیکال منفی نمی شود. اما وقتی غیر از دوتا رادیکال، عبارت دیگری هم داشته باشیم، کار در یک مرحله تمام نمی شود.

مثلاً در معادله $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2} = 2$ اول هر رادیکال را در یک طرف می گذاریم:

$$\sqrt{2x+3} = \sqrt{x+2} + 2 \quad \text{حالا به توان ۲:}$$

$$2x+3 = (\sqrt{x+2} + 2)^2 = \underbrace{x+2}_{\text{دو برابر اولی در دومی}} + \underbrace{4}_{\text{دومی به توان ۲}} + \underbrace{4\sqrt{x+2}}_{\text{اولی به توان ۲}}$$

می بینید؟ رادیکال از بین نرفت. البته اوضاع خیلی بهتر از قبل است و الان فقط یک رادیکال داریم که در مرحله بعدی نابودش می کنیم:

$$\xrightarrow{\text{مرتب کنیم}} x-3 = 4\sqrt{x+2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (x-3)^2 = 16(x+2) \xrightarrow{\text{اتحاد مربع کامل}} x^2 - 6x + 9 = 16x + 32$$

$$\xrightarrow{\text{همه یک طرف}} x^2 - 22x - 23 = 0 \xrightarrow{b=a+c} x_1 = -1, x_2 = 23$$

حالا دقت کنید که $x = -1$ در معادله اولیه نمی خورد:

با این که زیر رادیکال را منفی نکرد! اما در معادله صدق نمی کند و تنها جواب قابل قبول $x = 23$ است:

$$\sqrt{1} = \sqrt{1} + 2 \quad \times$$

$$\sqrt{49} = \sqrt{25} + 2 \quad \checkmark$$

مثال ۲ مقدار x ، $\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x} = 4$ چگونه است؟

پاسخ ۲ هر رادیکال را در یک طرف می گذاریم و به توان ۲ می رسانیم:

$$\sqrt{x+3} = 4 - \sqrt{5-x} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x+3 = (4 - \sqrt{5-x})^2$$

$$= 4^2 + 5 - x - 2(4)\sqrt{5-x}$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب}} 11\sqrt{5-x} = 16 + 5 - x - x - 3 = 18 - 2x \xrightarrow{\div 2} 4\sqrt{5-x} = 9 - x$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 16(5-x) = (9-x)^2 = 81 + x^2 - 18x \xrightarrow{\text{مرتب}} x^2 - 2x + 1 = 0$$

پس معادله ریشه مضاعف $x = 1$ دارد (کنترل کردیم که صدق می کند).

آزمون ۱ | از معادله $\sqrt{x+3} + 2\sqrt{3-x} = 5$ مجموع مقادیر x کدام است؟

- (۱) $-1/2$ (۲) $-1/8$ (۳) -2 (۴) $-2/4$

پاسخ ۱

هر رادیکال را در یک طرف می‌گذاریم و به توان ۲ می‌رسانیم:

$$2\sqrt{3-x} = 5 - \sqrt{x+3} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4(3-x) = \frac{25}{a^2} + \frac{x+3}{b^2} - \frac{10\sqrt{x+3}}{-2ab}$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب کنیم}} 10\sqrt{x+3} = 28 + x - 12 + 4x \Rightarrow 10\sqrt{x+3} = 16 + 5x$$

پس داریم:

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 100(x+3) = 256 + 25x^2 + 160x \xrightarrow{\text{همه یک طرف}} 25x^2 + 60x - 44 = 0$$

صورت سؤال گفته «مجموع مقادیر x » پس حتماً ۲ مقدار x یعنی $\frac{-60 \pm \sqrt{8000}}{50}$ یا $\frac{-6 \pm 2\sqrt{20}}{5}$ قبول هستند. جمع ریشه‌ها می‌شود:

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-60}{25} = \frac{-12}{5} = -2/4$$

• جمع رادیکال‌ها صفر نمی‌شود مگر ... گفتیم حاصل $\sqrt{P(x)}$ همیشه بزرگ‌تر یا مساوی صفر است پس مجموع دو یا چند رادیکال فقط

وقتی می‌تواند صفر باشد که حاصل همه آن‌ها صفر باشد. مثلاً حاصل $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}$ هرگز صفر نیست چون هیچ عددی وجود ندارد که هم‌زمان آن‌ها را صفر کند اما برای $\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2+x-2} = 0$ می‌گوییم فقط در $x=1$ حاصل هر دو $\sqrt{\quad}$ صفر است و مجموعشان هم می‌شود صفر، پس $x=1$ تنها ریشه معادله است.

نکته اگر مجموع عبارت‌های دارای $\sqrt{\quad}$ ، توان زوج یا قدرمطلق برابر صفر شود، نتیجه می‌گیریم همه آن‌ها هم‌زمان صفر هستند.

مثال ۱ | از معادله $\sqrt{x^2-x-2} + \sqrt{x^2-4} = 0$ مقدار x کدام است؟

پاسخ ۱ باید $x^2-x-2=0$ و $x^2-4=0$ باشد. ریشه‌های $x^2-x-2=0$ اعداد -1 و 2 و ریشه‌های $x^2-4=0$ اعداد 2 و -2 هستند، پس تنها عددی که هر دو را صفر می‌کند، $x=2$ است یعنی تنها جواب این معادله می‌شود $x=2$.

آزمون ۲ | اگر $x=1$ ریشه معادله $\sqrt{-3x+a} + \sqrt{x^3+x^2+b} = 0$ باشد، مقدار ab کدام است؟

- (۱) -6 (۲) 6 (۳) 3 (۴) نشدنی

پاسخ ۲

گفتیم جمع رادیکال‌ها فقط در حالتی صفر است که همگی صفر باشند پس در این معادله $x=1$ ، هم $-3x+a$ و هم x^3+x^2+b را صفر می‌کند. بنابراین:

الف) $-3(1)+a=0 \Rightarrow a=3$

ب) $1^3+1^2+b=0 \Rightarrow b=-2$

و در نتیجه $ab = -6$.

• رادیکال زیر رادیکال اگر در یک معادله رادیکالی، عبارت زیر رادیکال هم شامل $\sqrt{\quad}$ بود، حرف‌های قبلی تغییری نمی‌کند؛ یعنی باید زیر تمام

رادیکال‌ها بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشند و راه‌حل، به توان ۲ رساندن است. مثلاً در معادله $\sqrt{x^2-\sqrt{x+1}} = x-1$ باید $x^2-\sqrt{x+1}$ ، $x+1$ و $x-1$ همگی بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشند و برای حل، دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2 - \sqrt{x+1} = x^2 - 2x + 1 \xrightarrow{\text{مرتب کنیم}} 2x - 1 = \sqrt{x+1}$$

$$\xrightarrow{\text{دوباره توان ۲}} 4x^2 - 4x + 1 = x + 1 \xrightarrow{\text{مرتب}} 4x^2 - 5x = 0 = x(4x - 5) \Rightarrow x = 0 \text{ یا } \frac{5}{4}$$

البته $x=0$ عبارت $x-1$ و هم‌چنین زیر رادیکال را منفی می‌کند.

و فقط $x = \frac{5}{4}$ را باید کنترل کنیم:

$$\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - \sqrt{\frac{5}{4} + 1}} = \frac{5}{4} - 1$$

$$\sqrt{\frac{25}{16} - \frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \checkmark$$

پس $x = \frac{5}{4}$ تنها جواب این معادله است.

مثال | جواب معادله $\sqrt{3+\sqrt{x}} = \sqrt{x} + 1$ چگونه است؟

پاسخ | دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$3 + \sqrt{x} = x + 2\sqrt{x} + 1 \xrightarrow{\text{مرتب کنیم}} 2 - x = \sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{\text{دوباره توان ۲}} 4 - 4x + x^2 = x \xrightarrow{\text{همه یک طرف}} x^2 - 5x + 4 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} x_1 = 1, x_2 = 4$$

پس جواب‌های معادله ۱ و ۴ هستند اما $x = 4$ در معادله اولیه نمی‌خورد و فقط $x = 1$ را قبول می‌کنیم.

• **بیان هندسی در معادله گویا** • از درس (۱) یادمان هست که فاصله دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ به صورت $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

بود. فاصله نقطه A از مبدأ هم $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ بود.

حالا با کمک این فاصله‌ها می‌توانیم معادله‌های گنگ بسازیم. مثلاً دنبال نقطه $A(x, 1)$ می‌گردیم که فاصله‌اش از مبدأ برابر $x + 2$ باشد. پس

$$\sqrt{x^2 + 1} = x + 2 \quad \text{که با توان ۲ به صورت } x^2 + 1 = x^2 + 4x + 4 \quad \text{درمی‌آید و تنها جوابش می‌شود } x = \frac{-3}{4}$$

مثال | نقطه‌ای به طول x روی خط $y = -1$ را طوری پیدا کنید که:

الف | از مبدأ به فاصله $2x - 1$ باشد. **ب** | فاصله‌اش از $(1, 2)$ دو برابر فاصله‌اش از $(0, 2)$ باشد.

$$OA = \sqrt{x^2 + (-1)^2}$$

پاسخ | الف) فاصله $A(x, -1)$ از مبدأ برابر است با:

$$\sqrt{x^2 + 1} = 2x - 1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2 + 1 = 4x^2 - 4x + 1$$

و سؤال گفته $OA = 2x - 1$ پس داریم:

$$\Rightarrow 3x^2 - 4x = 0 = x(3x - 4) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

البته $x = 0$ قبول نیست چون $2x - 1$ را منفی می‌کند و تنها جواب $x = \frac{4}{3}$ است یعنی نقطه A دارای مختصات $(\frac{4}{3}, -1)$ است.

$$\sqrt{(x-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + 9} = \sqrt{x^2 - 2x + 10}$$

ب | فاصله $A(x, -1)$ از $(1, 2)$ برابر است با:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (-1-(-2))^2} = \sqrt{x^2 + 1}$$

و فاصله A از $(0, -2)$ می‌شود:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 10} = 2\sqrt{x^2 + 1} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2 - 2x + 10 = 4(x^2 + 1)$$

پس صورت سؤال می‌گوید:

$$\xrightarrow{\text{همه یک طرف}} 3x^2 + 2x - 6 = 0 \xrightarrow{\text{دستور دلتا}} x = \frac{-1 \pm \sqrt{19}}{3}$$

نگران صدق کردن نباشید، زیر رادیکال‌ها منفی نیست.

درس سوم: معادلات گویا و معادلات رادیکالی

معادلات گویا

۳۳۲- جواب‌های معادله $\frac{x}{x-1} = \frac{2}{x+1} + 2$ کدام وضع را دارند؟

(۱) دو ریشه منفی (۲) دو ریشه مثبت (۳) دو ریشه مختلف‌العلامه (۴) یک ریشه منفی

۳۳۳- تعداد جواب‌های معادله $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۳۴- معادله $\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x^2-x}$ چند جواب دارد؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۳۵- معادله $\frac{2}{x-3} + \frac{2}{x+3} = \frac{x}{4}$ ، ریشه دارد که از آن‌ها مثبت است.

(۱) چهار - دوتا (۲) سه - دوتا (۳) چهار - یکی (۴) سه - یکی

(کتاب درسی)

۳۳۶- به ازای کدام مقدار a ، عدد صفر یک جواب معادله $\frac{x+a}{3x+6} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{a+2}{4-x^2}$ است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

۳۳۷- اگر $x=2$ جواب معادله $\frac{x}{a-x} - \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ باشد، a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۳۳۸- چند مقدار برای x پیدا می‌شود به طوری که تفاضل دو عدد $\frac{1+x}{x}$ و $\frac{x-1}{x-2}$ برابر با $\frac{x+4}{x^2-2x}$ باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۳۳۹- در معادله $x + \frac{4}{x} + \frac{x}{x^2+4} = 2$ حاصل ضرب جواب(ها) کدام است؟

- (۱) فاقد جواب (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۳۴۰- معادله $\frac{x^2-x-2}{x^2-1} + 4 = \frac{5x^2}{x-1}$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۳۴۱- اگر $x=-1$ یک جواب معادله $\frac{1}{x^2+2x-3} + \frac{a}{2x-2} = \frac{x-1}{x^2+x-6}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

- (۱) جواب دیگر ندارد. (۲) $\frac{1}{13}$ (۳) $\frac{11}{13}$ (۴) $\frac{12}{13}$

۳۴۲- معادله $\frac{x}{x^2-1} + \frac{k}{x+1} = \frac{x-2}{x^2-x}$ ریشه منفی ندارد. مقدار k چند برابر ریشه معادله است؟ ($k < 0$)

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{8}$ (۴) -۲

۳۴۳- اگر $x=2$ یکی از جواب‌های معادله $\frac{5-m}{2x} + \frac{m-3}{x(x+4)} = \frac{x}{x^2+3x-4}$ باشد، آن‌گاه مجموع m و جواب دیگر کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۱ (۳) ۹ (۴) -۱

۳۴۴- واسطه حسابی جواب‌های معادله $\frac{3}{x^2+x-2} + \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{1}{2(x-2)}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{6}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{25}$ (۴) $-\frac{2}{5}$

۳۴۵- به ازای کدام مقدار k ، مجموع ریشه‌های معادله $\frac{k}{x} + \frac{x}{x-3} = 2$ برابر ۵ است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۳۴۶- اگر ریشه‌های معادله $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} = \frac{x^2+5x}{x^2-4}$ مقادیر α و β باشند، مقدار $\beta\sqrt{\alpha} + \alpha\sqrt{\beta}$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۶

۳۴۷- اگر جمع مربعات جواب‌های معادله $\frac{5}{y} + \frac{x+1}{x+2} = \frac{a}{x^2-4}$ برابر $\frac{5}{y}$ باشد، اختلاف جواب‌های معادله کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{19}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{13}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{15}}{2}$

۳۴۸- جواب‌های معادله $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$ چگونه‌اند؟

- (۱) یک جواب مثبت و یک جواب منفی (۲) فقط یک جواب منفی

- (۳) فقط یک جواب مثبت (۴) معادله حقیقی ندارد.

۳۴۹- اگر $x=a$ یک جواب معادله $\frac{a-1}{x+2} + \frac{2}{x} = \frac{4x-4}{x^2-a}$ باشد، آن‌گاه چند مقدار a وجود دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۳۵۰- اگر اختلاف جواب‌های معادله $\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} = ax(1 - \frac{x-1}{x+1})$ برابر ۳ باشد، آن‌گاه a کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) ۱

۳۵۱- معادله $\frac{72}{(x+1)^2} - \frac{35}{x(x+2)} = 1$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۵۲- معادله $\frac{a}{x-1} = \frac{2-x}{1+x-2x^2}$ جواب ندارد. مجموعه مقادیر a کدام است؟

- (۱) $\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\}$ (۲) $\{-\frac{1}{3}\}$ (۳) $\{\frac{1}{3}\}$ (۴) $\{-\frac{1}{3}\}$

۳۵۳- اگر معادله $\frac{2x}{x-2} + \frac{x+a}{x^2-4} = 1$ ریشه نداشته باشد، آن گاه مجموعه مقادیر ممکن برای a کدام است؟

- (۱) $a > \frac{41}{4}$ (۲) $a > -\frac{9}{4}$ (۳) $a > \frac{9}{4}$ (۴) $a > -\frac{25}{4}$

۳۵۴- به جای A کدام یک از عبارتهای زیر قرار بگیرد تا معادله $\frac{x+1}{2x-2} - \frac{A}{x^2-1} = \frac{x-1}{2x+2}$ جواب داشته باشد؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $3x+1$ (۴) $3x+2$

۳۵۵- اگر معادله $\frac{2-x}{x+2} + \frac{x+1}{x-2} = \frac{mx+n}{x^2-4}$ دارای بی شمار جواب باشد، آن گاه $\frac{m}{n}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{7}$ (۲) $-3/5$ (۳) -۷ (۴) -۲

کاربردهای معادله گویا

۳۵۶- طول یک مستطیل طلائی به عرض ۴، کدام است؟

- (۱) $2+2\sqrt{5}$ (۲) $1+\sqrt{5}$ (۳) $2\sqrt{5}-2$ (۴) $\sqrt{5}-1$

۳۵۷- در مستطیل طلائی به عرض ۱، طول مستطیل ریشه کدام معادله است؟

- (۱) $x^2-x-1=0$ (۲) $x^2+x-1=0$ (۳) $x^2+x+1=0$ (۴) $x^2-x+1=0$

۳۵۸- $2/3$ کیلوگرم محلول آب نمک با غلظت ۴۰ درصد داریم. اگر بخواهیم بدون افزودن نمک به محلول ۵۰ درصد برسیم، چه مقدار از آن را باید تبخیر کنیم؟

- (۱) ۴۶۰ گرم (۲) ۵۲۵ گرم (۳) ۶۲۵ گرم (۴) ۶۹۰ گرم

۳۵۹- مهدی ۵۰۰ سهم بانک ملت را با میانگین قیمت ۳۰۰۰ تومان خریده است. چند سهم دیگر به قیمت ۱۲۰۰ تومان بخرد تا میانگین قیمت خرید کل سهمها ۱۵۰۰ تومان شود؟

- (۱) ۱۵۰۰ (۲) ۲۵۰۰ (۳) ۳۵۰۰ (۴) ۴۵۰۰

۳۶۰- حوضی دارای دو فواره است. هر کدام به تنهایی حوض را در ۱۲ ساعت و ۸ ساعت پر می کنند. اگر هر دو فواره باز شوند، این حوض در مدت زمان ۴ ساعت و چند دقیقه پر می شود؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۴۵ (۳) ۴۸ (۴) ۵۴

۳۶۱- دو شیر آب داریم که یکی ۴ دقیقه زودتر از دیگری مخزن را پر می کند. اگر دو شیر با هم باز باشند، پر شدن مخزن ۵ دقیقه و پنجاه ثانیه طول می کشد. شیر سریع تر به تنهایی در چند دقیقه مخزن را پر می کند؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

۳۶۲- سرعت کار یک نقاش ماهر، دو برابر یک نقاش مبتدی است و این دو با هم در ۲۰ ساعت یک آپارتمان را رنگ می کنند. اگر نقاش مبتدی مصدوم شود، سرعت او نصف می شود، در این صورت نقاشی آپارتمان چند ساعت طول می کشد؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۵ (۳) ۲۶ (۴) ۲۷

۳۶۳- اگر دو کارگر ساختمانی با هم دیواری را بچینند، ۸ روز نسبت به حالتی که کارگر دوم به تنهایی کار کند، زودتر چیده می شود و اگر کارگر اول به تنهایی کار کند، ۱۰ روز نسبت به حالتی که کارگر دوم به تنهایی کار کند، دیرتر دیوار را می چیند. زمان چیدن دیوار توسط کارگر اول چند روز است؟

- (۱) ۲۸ (۲) ۱۲ (۳) ۲۰ (۴) ۳۰

۳۶۴- دو کارگر با هم کاشی کاری یک ساختمان را در ۱۸ روز تمام می کنند. اگر هر یک به تنهایی کار را انجام دهند، کارگر اول ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم این کار را انجام می دهد. سرعت کارگر اول چند برابر دومی است؟

- (۱) $\frac{8}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{6}{5}$

۳۶۵- یک استاد مقاله ای را ۸ روز زودتر از یک دانشجو می نویسد. اگر ۲ دانشجو و یک استاد با هم کار کنند، مقاله در ۱۵ روز تمام می شود. استاد به تنهایی مقاله را در چند روز می نویسد؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴) ۴۰

۳۶۶- وقتی دو شیر آب را با هم باز می کنیم، یک بشکه در ۱۲ دقیقه از آب پر می شود، ولی اگر نصف حجم بشکه را به کمک شیر اول، سپس نیمه دیگر آن را توسط شیر دوم پر کنیم، ۲۵ دقیقه طول می کشد. اگر بشکه را با هر کدام از شیرها به تنهایی پر کنیم اختلاف زمان پر شدن در این دو حالت چه قدر است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۳۶۷- در مسافت ۴۰۰ کیلومتری، اگر سرعت v را به اندازه 10 km/h افزایش دهیم، ۲ ساعت زودتر می رسیم. سرعت v چند کیلومتر بر ساعت بوده است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴) ۶۰

(کتاب درسی)

(کتاب درسی)

۳۶۸- قطاری یک مسیر به طول ۶۰ کیلومتر را در مسیر رفت با سرعت ثابت ۷ کیلومتر بر ساعت طی می‌کند. اگر در مسیر بازگشت از سرعت متوسط قطار 10 km/h کاسته شود، زمان بازگشت نیم ساعت طولانی‌تر از زمان رفت خواهد شد، v کدام است؟

(کتاب درسی)

- ۵۰ (۱) ۶۰ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴)

۳۶۹- متحرکی مسیر 300 متری را با سرعت v متر بر ثانیه می‌رود و با سرعت $8-7$ متر بر ثانیه برمی‌گردد. اگر مسیر رفت و برگشت روی هم 40 ثانیه طول بکشد، v کدام است؟

- ۳ (۱) ۱۳ (۲) ۲۰ (۳) ۲۳ (۴)

۳۷۰- سرعت حرکت موشک در هوا، 20 متر بر ثانیه بیشتر از سرعت حرکت آن در آب است. از زیردریایی واقع در عمق 40 متری آب، موشکی به طرف هدف واقع در 140 متری بالای سطح آب پرتاب می‌شود و ظرف 10 ثانیه به آن می‌خورد. سرعت موشک در آب چه قدر است؟

- ۶ (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۲۸ (۴)

۳۷۱- سرعت یک قایق موتوری در آب راکد 100 متر در دقیقه است. این قایق فاصله 1200 متر در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت 5 دقیقه است. سرعت آب رودخانه چند متر در دقیقه است؟

(سرآسری ۹۸)

- ۱۲ (۱) ۱۵ (۲) ۲۰ (۳) ۲۵ (۴)

۳۷۲- پرنده‌ای فاصله 1 کیلومتر را در جهت موافق باد رفته و در جهت مخالف باد برگشته است. اگر سرعت باد 5 کیلومتر در ساعت و مدت رفت و برگشت 9 دقیقه باشد، سرعت پرنده در هوای آرام، چند کیلومتر در ساعت است؟

(خارج ۹۸)

- ۱۲ (۱) $12/5$ (۲) $13/5$ (۳) 15 (۴)

۳۷۳- نقاط $A(2,1)$ و $B(-1,2)$ و نقطه M روی نیمساز ربع اول و سوم را در نظر بگیرید. اگر شیب پاره‌خط MA به اندازه 1 واحد کم‌تر از شیب پاره‌خط MB باشد، مجموع مقادیر طول M کدام است؟

- ۷ (۱) -7 (۲) ۳ (۳) -3 (۴)

۳۷۴- به ازای مقادیری از a معادله $2 = \frac{x}{x-1} + \frac{x+a}{x^2-1}$ حداکثر یک ریشه دارد. کدام عدد جزء مقادیر a نیست؟

- -3 (۱) -4 (۲) -2 (۳) 1 (۴)

۳۷۵- مجموع ریشه‌های معادله $\frac{13}{x^3+1} - \frac{17x+10}{5x^2-5x+5} = \frac{-5}{x+1}$ کدام است؟

- $1/5$ (۱) $4/5$ (۲) $5/5$ (۳) $6/5$ (۴)

۳۷۶- اگر $x = 2$ یکی از جواب‌های معادله $\frac{1}{x^2+x} + \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{ax-1}{x^3-x}$ باشد، آن‌گاه حداکثر اختلاف ریشه‌ها کدام است؟

- 2 (۱) 4 (۲) 8 (۳) صفر (۴)

معادلات رادیکالی

(کتاب درسی)

۳۷۷- جواب معادله $\sqrt{2-x} = 1 - 2x$ کدام است؟

- $-1/4$ (۱) -1 (۲) $1/4$ (۳) $-1/4$ (۴)

(کتاب درسی)

۳۷۸- از معادله $\sqrt{11x-2} = 2x+1$ اختلاف دو ریشه کدام است؟

- $1/4$ (۱) $2/11$ (۲) $1/3$ (۳) $1/4$ (۴)

(خارج ۸۷)

۳۷۹- معادله $0 = 3x - 2 + \sqrt{4x-3}$ چگونه است؟

- ۱) یک جواب دارد. ۲) دو جواب هم‌علامت دارد. ۳) دو جواب با علامت مخالف دارد. ۴) جواب ندارد.

(کتاب درسی)

۳۸۰- نسبت جواب‌های معادله $\sqrt{2x+5} - 2x = 5$ کدام است؟

- 5 (۱) 3 (۲) $4/5$ (۳) $2/5$ (۴)

(سرآسری ۸۷)

۳۸۱- اگر $x = 4$ یکی از جواب‌های معادله $x+a = \sqrt{5x-x^2}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

- $1/4$ (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) جواب دیگر ندارد.

۳۸۲- اگر یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع 50 متر سقوط آزاد کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار خواهد داشت؛ به طوری که $t = \sqrt{10 - \frac{h}{5}}$

(کتاب درسی)

این جسم دو ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار دارد؟

- 20 (۱) 30 (۲) 35 (۳) 40 (۴)

(کتاب درسی)

۳۸۳- در چند عدد صحیح، تفاضل جذر عدد از آن عدد برابر نصف آن است؟

- صفر (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴)

۳۸۴- معادله $\sqrt{2x^2+5x+2} = x-2$ چه جواب‌هایی دارد؟

- ۱) فقط یک جواب مثبت ۲) فقط یک جواب منفی ۳) دو جواب غیرهم‌علامت ۴) فاقد جواب

			۳۸۵- جواب معادله $x + \sqrt{x^2 - 4x + 6} = 2$ کدام است؟	(۱) $(-\infty, 2]$	(۲) $[2, +\infty)$	(۳) \mathbb{R}	(۴) \emptyset
(خارج ۹۸)			۳۸۶- اگر $1 = 2a + \sqrt{3a + 16}$ باشد، عدد $4a + 9$ ، کدام است؟	(۱) ۴	(۲) ۶	(۳) ۱۵	(۴) ۲۱
(سراسری ۹۸)			۳۸۷- اگر $2 = 3a + \sqrt{2a^2 + 4a}$ باشد، عدد $\frac{a+1}{a}$ کدام است؟	(۱) $1/5$	(۲) $2/5$	(۳) $3/5$	(۴) $4/5$
			۳۸۸- از معادله $\sqrt{4-x^2} = x-1 $ مجموع مجزورات دو ریشه چه قدر است؟	(۱) ۱	(۲) ۲	(۳) ۳	(۴) ۴
(کتاب درسی)			۳۸۹- اگر $x = k$ ریشه طبیعی معادله $x + \sqrt{x} = 6$ باشد، جواب معادله $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = k - 2$ کدام است؟	(۱) ۱	(۲) ۴	(۳) ۹	(۴) ۱۶
(کتاب درسی)			۳۹۰- جواب معادله $\frac{1}{\sqrt{u-3}} - \frac{2}{\sqrt{u}} = 0$ چگونه است؟				
			(۱) مثبت و بزرگتر از ۵ است. (۲) مثبت و کوچکتر از ۵ است. (۳) منفی است. (۴) جواب ندارد.				
			۳۹۱- معادله $\sqrt{ x - \sqrt{x}} + \sqrt{x^3 - x} = 0$ چند جواب دارد؟	(۱) ۱	(۲) ۲	(۳) ۳	(۴) صفر
(کتاب درسی)			۳۹۲- کدام معادله جواب دارد؟	(۱) $\sqrt{t+2} = 0$	(۲) $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+3} + 1 = 0$	(۳) $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-2} = 0$	(۴) $2\sqrt{2t-1} - t = 1$
			۳۹۳- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، $x = -1$ جواب معادله $\sqrt{x^2 + x + a} - 2 = ax$ است؟	(۱) $\{1, 4\}$	(۲) $\{\}$	(۳) $\{-2\}$	(۴) $\{-2, 4\}$
			۳۹۴- معادله $\sqrt{1+x} = \sqrt{1+x^2} + 1$ چند جواب حقیقی دارد؟	(۱) ۱	(۲) ۲	(۳) بی شمار	(۴) هیچ
			۳۹۵- تعداد و علامت جواب‌های معادله $1 = \sqrt{2x+5} - \sqrt{x+6}$ چگونه است؟	(۱) فقط یک ریشه منفی	(۲) فقط یک ریشه مثبت	(۳) دو جواب مثبت و منفی	(۴) دو جواب مثبت
			۳۹۶- معادله $1 = \sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5}$ چه ریشه‌هایی دارد؟	(۱) فقط یک ریشه مثبت	(۲) دو ریشه مثبت	(۳) فاقد ریشه	(۴) سه ریشه مثبت
			۳۹۷- معادله $\sqrt{8-2x} = 2 + \sqrt{x-3}$ چند جواب دارد؟	(۱) صفر	(۲) ۱	(۳) ۲	(۴) ۳
			۳۹۸- جواب معادله $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$ چگونه است؟	(۱) مربع کامل است. (۲) عدد فرد است. (۳) عدد گنگ است. (۴) عدد گویای غیر صحیح است.			
(سراسری ۱۴۰۰)			۳۹۹- فاصله نقطه تلاقی منحنی‌های $2y = x^2$ و $x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$ با مبدأ مختصات کدام است؟	(۱) $\sqrt{3}$	(۲) $\sqrt{6}$	(۳) $2\sqrt{3}$	(۴) $\sqrt{15}$
			۴۰۰- تعداد جواب‌های معادله $\sqrt{x^3 + x^2 + 4x - 13} = x\sqrt{x}$ کدام است؟	(۱) ۱	(۲) ۲	(۳) صفر	(۴) ۳
			۴۰۱- جمع ریشه‌های حقیقی معادله $\sqrt{x^2 + 4x + 5} = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$ کدام است؟	(۱) -۸	(۲) -۲	(۳) -۶	(۴) -۴
			۴۰۲- حاصل جمع جواب‌های حقیقی معادله $\sqrt{-(x+3)(2x+1)} = (x+1)(2x+5)$ کدام است؟	(۱) -۲	(۲) ۲	(۳) $-\frac{7}{2}$	(۴) ۷
			۴۰۳- جواب معادله $4 = \sqrt{1 + \frac{9}{x}} + 4\sqrt{\frac{x}{x+9}}$ کدام می‌تواند باشد؟	(۱) ۳	(۲) ۴	(۳) ۲	(۴) ۱
			۴۰۴- پاسخ معادله $\frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2}$ به صورت a^b است $(a, b \in \mathbb{N})$ ، مقدار $a + b$ کدام نمی‌تواند باشد؟	(۱) ۹	(۲) ۱۲	(۳) ۱۸	(۴) ۲۹

۴۰۵- اگر $x = 1$ جواب معادله $\frac{1}{x - \sqrt{x-1}} + \frac{1}{x + \sqrt{x-1}} = a$ باشد، معادله چند جواب دیگر دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۰۶- مجموعه جواب معادله $\sqrt{x - \sqrt{x+1}} = 1$ کدام است؟

- (۱) دو عدد صحیح (۲) یک عدد طبیعی (۳) تهی (۴) فقط صفر

۴۰۷- جمع مربعات ریشه‌های معادله $\sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} = x + 1$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۹

۴۰۸- معادله $\sqrt{2 + \sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$ چند ریشه دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۰۹- معادله $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = x-4$ چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۴۱۰- معادله $\sqrt{x-7} + \sqrt{9 + \sqrt{7-x}} = 3$ چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۱۱- نقطه M طوری روی خط $y = 4$ انتخاب شده که فاصله آن از مبدأ برابر فاصله آن از خط $x = 2$ باشد. طول نقطه M کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۳ (۳) -۴ (۴) -۶

۴۱۲- فاصله نقطه $M(x, 1)$ از $A(2, 0)$ ، دو برابر فاصله آن از $B(-1, 0)$ است. جمع مقادیر x کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۳ (۴) -۳

۴۱۳- نقطه A روی محور x ها قرار دارد و از نقطه $F(2, 4)$ و خط $x = -1$ به یک فاصله است. طول A کدام است؟

- (۱) $\frac{17}{6}$ (۲) $\frac{19}{6}$ (۳) $\frac{13}{6}$ (۴) $\frac{11}{6}$

۴۱۴- مجموع فواصل نقطه C روی محور x ، از دو نقطه $A(0, 6)$ و $B(12, 0)$ برابر ۱۴ است. اگر طول C کم‌تر از ۱۲ باشد، نسبت $\frac{CB}{CA}$ چه قدر است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۴۱۵- در معادله $\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = 1 - x$ اختلاف جواب‌ها کدام است؟

- (۱) فاقد جواب (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۳

۴۱۶- تفاضل فواصل نقطه $M(x, y)$ از دو نقطه $F(3, 1)$ و $F'(-3, 1)$ برابر ۴ است. اگر طول نقطه M برابر ۴ باشد؛ اختلاف مقادیر عرض آن کدام است؟

- (۱) $\sqrt{15}$ (۲) ۱۵ (۳) $2\sqrt{15}$ (۴) $4\sqrt{15}$

۴۱۷- جواب منفی معادله $\sqrt{4-x} + \sqrt{x+3} = 1 + \sqrt{1-x}$ در کدام فاصله است؟

- (۱) $(-1/6, -1/5)$ (۲) $(-1/7, -1/6)$ (۳) $(-1/5, -1/4)$ (۴) $(-1/4, -1/3)$

۴۱۸- ریشه گنگ معادله $\sqrt{5 + 4x - x^2} = |x - 3| + 2$ به صورت $\frac{\alpha + \sqrt{\beta}}{\gamma}$ است. $\beta - \alpha$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۲۲ (۴) ۱۷

۴۱۹- تعداد جواب‌های معادله $\sqrt{x + \sqrt{-x^3 + 4x^2 + 25x - 100}} + \sqrt{x^2 + \sqrt{-x^2 + 6x - 8}} = x + 2$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۴۲۰- دو مستطیل عرض‌های مساوی دارند و طول‌هایشان $\sqrt{2}$ و ۴ است. اگر قطرهای آن‌ها $\sqrt{6}$ واحد اختلاف داشته باشند، عرض آن‌ها چه قدر است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ (۲) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۴) $\sqrt{6}$

پس معادله سه ریشه دارد $x = 5$ ، $x = -5$ و $x = 0$ که با توجه به گزینه‌ها **۴** درست است.

۳۳۶. گزینه ۱ $x = 0$ را قرار می‌دهیم:

$$\frac{0+a}{0+6} + \frac{-1}{-2} = \frac{a+2}{4-0} \Rightarrow \frac{a}{6} + \frac{1}{2} = \frac{a+2}{4}$$

$$\xrightarrow{\times 12} 2a+6 = 3(a+2) = 3a+6 \Rightarrow a=0$$

۳۳۷. گزینه ۲ جواب معادله باید در معادله صدق کند، پس:

$$\frac{x}{a-x} - \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x} \xrightarrow{x=2} \frac{2}{a-2} - \frac{a-2}{2} = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{4-(a-2)^2}{2(a-2)} = \frac{a}{2} \Rightarrow 4-a^2+4a-4 = a(a-2)$$

$$\Rightarrow -a^2+4a = a^2-2a \Rightarrow 2a^2-6a = 0$$

$$\Rightarrow 2a(a-3) = 0 \Rightarrow a=0, a=3$$

پس با توجه به گزینه‌ها جواب می‌شود $a=3$.

۳۳۸. گزینه ۱ تفاضل دو عدد $\frac{1+x}{x}$ و $\frac{x-1}{x-2}$ برابر است با

$$\left| \frac{x-1}{x-2} - \frac{1+x}{x} \right| \text{ و قرار است این تفاضل برابر } \frac{x+4}{x^2-2x} \text{ باشد، پس:}$$

$$\left| \frac{x-1}{x-2} - \frac{1+x}{x} \right| = \frac{x+4}{x^2-2x}$$

الف) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{1+x}{x} = \frac{x+4}{x^2-2x}$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)x - (1+x)(x-2)}{x(x-2)} = \frac{x+4}{x(x-2)}$$

حذف مخرج‌ها با شرط $x \neq 2$ و $x \neq 0$

$$\xrightarrow{\text{حذف مخرج‌ها با شرط } x \neq 2 \text{ و } x \neq 0} x^2 - x - x + 2 - x^2 + 2x = x + 4$$

$$\Rightarrow 2 = x + 4 \Rightarrow x = -2$$

ب) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{1+x}{x} = \frac{-x-4}{x^2-2x}$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)x - (1+x)(x-2)}{x(x-2)} = \frac{-x-4}{x(x-2)}$$

مثل حالت الف) $\xrightarrow{\text{مثل حالت الف)}} 2 = -x - 4 \Rightarrow x = -6$

حالا باید حواسمان باشد که مقدار کسر $\frac{(x+4)}{x^2-2x}$ (که مساوی یک قدر مطلق

است) همواره باید نامنفی باشد $x = -2$ و $x = -6$ را امتحان می‌کنیم:

$$x = -2 \Rightarrow \frac{-2+4}{4+4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \checkmark$$

$$x = -6 \Rightarrow \frac{-6+4}{36+12} = \frac{-2}{48} = -\frac{1}{24} \times$$

پس x فقط یک مقدار دارد.

۳۳۹. گزینه ۱ با کمی دقت $x + \frac{4}{x}$ را به صورت $\frac{x^2+4}{x}$ می‌نویسیم که

معکوس $\frac{x}{x^2+4}$ است. پس داریم:

$$\frac{x^2+4}{x} + \frac{x}{x^2+4} = 2 \Rightarrow a + \frac{1}{a} = 2$$

پس می‌خواهیم جمع یک عدد و معکوشش ۲ شود. بنابراین آن عدد باید ۱ باشد:

$$a = \frac{x^2+4}{x} = 1 \Rightarrow x^2+4 = x \Rightarrow x^2-x+4=0$$

اما دلتای این معادله منفی است و جواب ندارد.

۳۳۲. گزینه ۳ ک.م.م مخرج‌ها $(x+1)(x-1)$ است و داریم.

$$\xrightarrow{\times(x-1)(x+1)} \frac{x}{x-1} = \frac{2}{x+1} + 2(x-1)(x+1)$$

$$\Rightarrow x(x+1) = 2(x-1) + 2(x-1)(x+1)$$

$$\Rightarrow x^2+x = 2x-2+2x^2-2 \Rightarrow 0 = x^2+x-4$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

البته با دقت به شرط $\frac{c}{a} < 0$ هم می‌شد گفت که معادله یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد. بنابراین دو ریشه مختلف‌العلامه داریم.

دقت کنید که ریشه مخرج‌ها ± 1 است و ریشه‌های معادله ± 1 نیستند پس خیالمان راحت است که هر دو ریشه قابل قبول‌اند.

۳۳۳. گزینه ۲ کمی متفاوت حل کنیم!

مخرج مشترک در طرف چپ، (x^2-4) است. ببینید:

$$\frac{(x-2)(x-2) + x(x+2)}{x^2-4} = \frac{8}{x^2-4}$$

حالا مخرج‌ها یکسان‌اند، پس داریم:

$$x^2-4x+4+x^2+2x=8 \Rightarrow 2x^2-2x-4=0$$

$$\xrightarrow{\div 2} x^2-x-2=0 \Rightarrow x=-1 \text{ یا } 2$$

البته $x=2$ ریشه مخرج است، پس تنها جواب معادله $x=-1$ است.

۳۳۴. گزینه ۲ مخرج مشترک می‌گیریم و معادله را ساده می‌کنیم:

$$\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x^2-x} \Rightarrow \frac{2x+2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2-x}{x(x-1)}$$

($x-1$) ها از مخرج حذف می‌کنیم (با توجه به این که باید $x \neq 1$ باشد).

$$\frac{4x-2}{x+1} = \frac{2-x}{x} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x(4x-2) = (x+1)(2-x)$$

$$\Rightarrow 4x^2-2x = -x^2+2x-x+2 \Rightarrow 5x^2-3x-2=0$$

حالا در معادله $5x^2-3x-2=0$ مجموع ضرایب برابر صفر است، پس:

$$5x^2-3x-2=0 \begin{cases} \text{غ ق } x=1 \\ x=-\frac{2}{5} \end{cases}$$

پس معادله فقط یک جواب دارد $x = -\frac{2}{5}$.

۳۳۵. گزینه ۴ مخرج مشترک می‌گیریم و معادله را ساده می‌کنیم:

$$\frac{2}{x-3} + \frac{2}{x+3} = \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{2(x+3+x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{4x}{x^2-9} = \frac{x}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{حذف } x \text{ از طرفین و یک جواب } x=0} \frac{4}{x^2-9} = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2-9=16$$

$$\Rightarrow x^2=25 \Rightarrow x=5, x=-5$$

۳۴۳. گزینه ۱ | اول $x = 2$ باید صدق کند:

$$\frac{5-m}{2 \times 2} + \frac{m-3}{2(6)} = \frac{2}{4+6-4} \Rightarrow \frac{5-m}{4} + \frac{m-3}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{3(5-m) + m-3}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{12-2m}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 12-2m = 4 \Rightarrow 2m = 8 \Rightarrow m = 4$$

و جواب دیگر معادله را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{m=4}{2x} \rightarrow \frac{1}{2x} + \frac{1}{x(x+4)} = \frac{x}{x^2+3x-4}$$

تجزیه مخرج‌ها $(x-1)(x+4)$ ، $(x+4)$ و $2x$ هستند و ک.م.م آن‌ها $2x(x-1)(x+4)$ است:

$$\frac{\times 2x(x-1)(x+4)}{\times 2x(x-1)(x+4)} \rightarrow (x-1)(x+4) + 2(x-1) = x(2x)$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 4 + 2x - 2 = 2x^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ یا } 3$$

پس جواب دیگر $x_2 = 3$ است و داریم:

۳۴۴. گزینه ۴ | ک.م.م مخرج‌ها با توجه به تجزیه آن‌ها

$2(x-1)(x+2)(x-2)$ است و با ضرب کردن در ک.م.م مخرج‌ها، داریم:

$$\frac{\times 2(x-1)(x+2)(x-2)}{\times 2(x-1)(x+2)(x-2)} \rightarrow 3 \times 2(x-2) + 2(x+1)(x-1)$$

$$= (x-1)(x+2) \Rightarrow 6x - 12 + 2(x^2 - 1) = x^2 + x - 2$$

$$\frac{2x^2 - 2}{2x^2 - 2}$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x - 12 = 0$$

این معادله دو جواب دارد (چون $\frac{c}{a} < 0$) که هیچ‌کدام آن‌ها ۲، ۳، ۴ و ۱ نیستند،

پس هر دو جواب قبول‌اند و داریم:

$$x_1 + x_2 = S = \frac{-b}{a} = -5$$

و واسطه حسابی آن‌ها می‌شود:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-5}{2} = -2.5$$

۳۴۵. گزینه ۲ | دو طرف را در ک.م.م مخرج‌ها یعنی $x(x-2)$ ضرب

$$\frac{\times x(x-2)}{\times x(x-2)} \rightarrow k(x-2) + xx = 2x(x-2)$$

کنیم:

$$\Rightarrow kx - 2k + x^2 = 2x^2 - 4x$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - kx + 2k = 0 \Rightarrow x^2 - (k+4)x + 2k = 0$$

مجموع ریشه‌ها برابر است با:

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-(k+4)}{1} = k+4$$

سؤال خواسته $S = 5$ باشد:

$$k+4 = 5 \Rightarrow k = 1$$

۳۴۶. گزینه ۴ | دو طرف را در $(x-2)(x+2)$ ضرب کنیم تا معادله از

فرم کسری خارج گردد:

$$\frac{\times (x-2)(x+2)}{\times (x-2)(x+2)} \rightarrow (x+1)(x+2) + (x-1)(x-2) = x^2 + 5x$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 2 + x^2 - 3x + 2 = x^2 + 5x$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } 4$$

$$\Rightarrow \alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha} = 1\sqrt{4} + 4\sqrt{1} = 6$$

۳۴۷. گزینه ۲ | دو طرف را در ک.م.م مخرج‌ها ضرب کنیم:

$$\frac{\times (x-2)(x+2)}{\times (x-2)(x+2)} \rightarrow x(x+2) + (x+1)(x-2) = a$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + x^2 - x - 2 = a \Rightarrow \underbrace{x^2}_A + \underbrace{x^2}_B + \underbrace{-x - 2}_C = a$$

$$\Rightarrow S = -\frac{B}{A} = -\frac{1}{2}, P = \frac{C}{A} = \frac{-2-a}{2}$$

۳۴۰. گزینه ۱ | اول معادله را ساده می‌کنیم:

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \frac{\Delta x^2}{x-1} + 4 \Rightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{\Delta x^2 + 4x - 4}{x-1}$$

$$\xrightarrow[\text{باشروط } x \neq -1 \text{ و } x \neq 1]{\text{حذف } x+1 \text{ و } x-1} x - 2 = \Delta x^2 + 4x - 4$$

$$\Delta x^2 + 3x - 2 = 0 \xrightarrow{a+c=b} x = -1, x = \frac{2}{\Delta}$$

جواب $x = -1$ قابل قبول نیست و معادله تنها یک جواب $x = \frac{2}{\Delta}$ دارد.

۳۴۱. گزینه ۳ | یک جواب معادله است پس باید در معادله صدق

کند:

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} + \frac{a}{2x - 2} = \frac{x-1}{x^2 + x - 6}$$

$$\xrightarrow{x=-1} \frac{1}{-4} + \frac{a}{-4} = \frac{-2}{-6} \Rightarrow \frac{a}{4} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{a}{4} = -\frac{7}{12} \Rightarrow a = -\frac{7}{3}$$

حالا مقدار a را قرار می‌دهیم و معادله را حل می‌کنیم:

$$\frac{1}{(x-1)(x+3)} - \frac{\frac{7}{3}}{2(x-1)} = \frac{x-1}{(x-2)(x+3)}$$

$$\Rightarrow \frac{2 - \frac{7}{3}(x+3)}{2(x-1)(x+3)} = \frac{x-1}{(x-2)(x+3)}$$

$$\xrightarrow[\text{باشروط } x \neq -3]{\text{حذف } (x+3)} \frac{2 - \frac{7}{3}x - 7}{2(x-1)} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$\Rightarrow (-5 - \frac{7}{3}x)(x-2) = 2(x-1)^2$$

$$\Rightarrow -5x + 10 - \frac{7}{3}x^2 + \frac{14}{3}x = 2x^2 - 4x + 2$$

$$\Rightarrow \frac{13}{3}x^2 - \frac{11}{3}x - 8 = 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{-(-8)}{\frac{13}{3}} = \frac{24}{13} = 1\frac{11}{13} \end{cases}$$

۳۴۲. گزینه ۳ | تجزیه مخرج‌ها $x(x-1)$ ، $(x+1)$ و $(x-1)(x+1)$

است؛ پس ک.م.م مخرج‌ها $x(x-1)(x+1)$ است و با ضرب در آن داریم:

$$\frac{\times x(x-1)(x+1)}{\times x(x-1)(x+1)} \rightarrow x^2 + kx(x-1) = (x-2)(x+1)$$

$$= x^2 - x - 2 \Rightarrow kx^2 + x^2 - kx = x^2 - x - 2$$

$$\Rightarrow kx^2 + (1-k)x + 2 = 0$$

سؤال گفته $k < 0$ تا ما مطمئن باشیم این معادله دو ریشه حقیقی مختلف‌العلامه دارد اما خودش گفته ریشه منفی ندارد! تنها راه این است که ریشه منفی معادله، مخرج را صفر کند؛ یعنی $x = -1$ باشد. پس داریم:

$$\xrightarrow{x=-1} k(-1)^2 + (1-k)(-1) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow k + k - 1 + 2 = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

پس معادله غیرکسری به صورت $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = 0$ و ریشه دیگر آن

$$\frac{-1}{4} = -\frac{1}{8} \text{ است. پس نسبت } k \text{ به ریشه دیگر می‌شود } \frac{-c}{a} = 4$$

جمع مربعات جوابها برابر است با:

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{-2-a}{4}\right) = \frac{1}{16} + \frac{2+a}{2} = \frac{1}{4} + a$$

سؤال می گوید جمع مربعات دو ریشه $\frac{5}{4}$ است، پس $a = \frac{1}{4}$ و حالا اختلاف دو

$$2x_1^2 + x_2 - \frac{9}{4} = 0$$

جواب:

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{S^2 - 4P} = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 4\left(\frac{-9}{4}\right)} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{9}{1}} = \sqrt{\frac{145}{16}} = \frac{\sqrt{145}}{4}$$

۳۴۸. گزینه ۱ | راه I | در مورخها ۴ عامل اول با توان ۱ داریم که ک.م.م

آن‌ها حاصل ضربشان است. پس باید دو طرف را در $x(x+1)(x-1)(x+2)$ ضرب

کنیم: $x(x-1)(x+2) - (x-1)(x+1)(x+2)$ ک.م.م مورخها ×

$$= x(x+1)(x+2) - x(x-1)(x+1)$$

نرسید! جملات x^2 حذف می شوند:

$$\frac{x(x^2+x-2) - (x^2-1)(x+2)}{x^2+x^2-2x} = \frac{x(x^2+2x+2) - x(x^2-1)}{x^2+2x^2+2x} \Rightarrow -x^2 - x + 2 = 3x^2 + 2x$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4x - 2 = 0 \xrightarrow{\div 2} 2x^2 + 2x - 1 = 0$$

ریشه‌های این معادله دو عدد مختلف‌العلامه هستند و هیچ کدام از اعداد $-2, 1,$

-1 و صفر نیستند، پس دو ریشه قابل قبول داریم.

راه II | این بار کمی هوشمندانه تر عمل می کنیم و ابتدا در هر طرف

$$\frac{x - (x+1)}{x(x+1)} = \frac{(x+2) - (x-1)}{(x+2)(x-1)}$$

مخرج مشترک می گیریم:

$$\Rightarrow \frac{-1}{x^2+x} = \frac{3}{x^2+x-2}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} -x^2 - x + 2 = 3x^2 + 3x \Rightarrow 4x^2 + 4x - 2 = 0$$

و همان ادامه ماجرا که در راه اول دیدیم!

۳۴۹. گزینه ۲

$$\frac{a-1}{x+2} + \frac{2}{x} = \frac{4x-4}{x^2-a} \xrightarrow{\text{صدق می کند}} \frac{a-1}{a+2} + \frac{2}{a} = \frac{4a-4}{a^2-a}$$

$$\frac{4a-4}{a^2-a} = \frac{4(a-1)}{a(a-1)} = \frac{4}{a}$$

کسر سمت راست ساده می شود:

پس داریم:

$$\frac{a-1}{a+2} + \frac{2}{a} = \frac{4}{a} \Rightarrow \frac{a-1}{a+2} = \frac{2}{a}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} a(a-1) = 2(a+2)$$

$$\Rightarrow a^2 - a = 2a + 4 \Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه}} (a-4)(a+1) = 0 \Rightarrow a = -1 \text{ یا } a = 4$$

با قراردادن $a = -1$ ، مورخها به ازای $x = a = -1$ صفر نمی شوند؛ برای

$a = 4$ هم مشکلی نداریم و هر دو جواب قبول اند.

۳۵۰. گزینه ۲ | دو طرف را در ک.م.م مورخها ضرب کنیم:

$$\xrightarrow{\times(x+1)(x-1)} (x-1)(x-1) - (x+1)(x+1)$$

$$= ax(x-1)(x+1)\left(1 - \frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 - (x+1)^2 = ax(x-1)(x+1 - (x-1))$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2x + 1) - (x^2 + 2x + 1) = ax(x-1)(2)$$

$$\Rightarrow -4x = 2ax(x-1)$$

حالا همه را به یک طرف می آوریم و از $2x$ فاکتور می گیریم:

$$2x(2+a(x-1)) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } 2+ax-a = 0 \Rightarrow x = \frac{a-2}{a}$$

اختلاف جوابها هم می شود $\frac{a-2}{a}$ که باید طبق صورت سؤال ۳ باشد. پس:

$$\frac{a-2}{a} = 3 \Rightarrow 3a = a-2 \Rightarrow a = -1$$

۳۵۱. گزینه ۴ | در معادله $1 = \frac{72}{(x+1)^2} - \frac{35}{x(x+2)}$ یا

$$\frac{72}{x^2+2x+1} + \frac{35}{x^2+2x} = 1$$

اگر فرض کنیم $x^2+2x = t$ ، داریم:

$$\frac{72}{t+1} - \frac{35}{t} = 1 \Rightarrow \frac{72t-35t-35}{t(t+1)} = 1$$

$$\Rightarrow t^2+t-37t-35 \Rightarrow t^2-36t+35=0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0} t=1, t=35$$

$$x^2+2x=1 \Rightarrow x^2+2x-1=0$$

حالا x را پیدا می کنیم:

دو ریشه مختلف‌العلامت $ac < 0$

$$x^2+2x=35 \Rightarrow x^2+2x-35=0$$

دو ریشه مختلف‌العلامت $ac < 0$

پس معادله چهار ریشه دارد.

۳۵۲. گزینه ۱ | اول معادله را ساده تر می کنیم:

$$\frac{a}{x-1} = \frac{2-x}{1+x-2x^2} \Rightarrow \frac{a}{x-1} = \frac{2-x}{(1-x)(1+2x)}$$

$$\xrightarrow{\text{حذف (x-1)}} \frac{a}{x \neq 1} = \frac{x-2}{1+2x} \Rightarrow a+2ax = x-2$$

$$\Rightarrow (2a-1)x = -a-2$$

حالا این معادله آخر وقتی جواب ندارد که یا (الف) ضریب x برابر صفر باشد یعنی

$$a = \frac{1}{2} \text{ و یا (ب) جواب معادله } x=1 \text{ (همان ریشه مورخ) باشد:}$$

$$x=1 \Rightarrow 2a-1 = -a-2 \Rightarrow 3a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

پس معادله به ازای مقادیر $\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right\}$ جواب ندارد.

۳۵۳. گزینه ۳ | دو طرف را در ک.م.م مورخها یعنی در $(x-2)(x+2)$ ضرب می کنیم:

$$2x(x+2)+x+a = (x+2)(x-2)$$

$$\Rightarrow 2x^2+4x+x+a = x^2-4 \Rightarrow x^2+5x+a+4=0$$

این معادله وقتی جواب ندارد که دلتایش منفی باشد:

$$5^2 - 4(1)(a+4) < 0 \Rightarrow 25 - 4(a+4) < 0$$

$$\Rightarrow 4(a+4) > 25 \Rightarrow a+4 > \frac{25}{4} \Rightarrow a > \frac{25}{4} - 4 \Rightarrow a > \frac{9}{4}$$

اشاره اگر هر دو ریشه این عبارت ± 2 هم باشند، معادله جواب

ندارد. تحقیق کنید که چرا این حالت نمی تواند رخ دهد!؟

۳۵۴. گزینه ۴ | مخرج مشترک می گیریم و معادله را ساده می کنیم:

$$\frac{x+1}{2x-2} - \frac{A}{x^2-1} = \frac{x-1}{2x+2}$$



راه II | تعریف نسبت طلایی این بود که $\frac{\text{عرض} + \text{طول}}{\text{طول}} = \frac{\text{طول}}{\text{عرض}}$ پس الان با عرض ۱ و طول x داریم:

$$\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x} \Rightarrow x^2 = x+1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

۳۵۸. گزینه ۱ | در $\frac{2}{3}$ کیلوگرم محلول ۴۰ درصد نمک داریم، پس وزن نمک برابر است با:

$$\frac{40}{100} \times \frac{23}{100} = \frac{92}{100} = 0.92$$

$$\text{وزن آب} = \frac{1}{3} - 0.92 = 1/3 - 0.92$$

حالا می‌خواهیم مقدار آب به اندازه‌ای باشد که غلظت محلول به ۵۰ درصد برسد، پس اگر مقدار آب باقی‌مانده برابر x باشد:

$$\frac{0.92}{0.92+x} = \frac{50}{100} \Rightarrow 92 = 46 + 50x$$

$$\Rightarrow 50x = 46 \Rightarrow x = 0.92$$

از اول $1/38$ کیلوگرم آب داشتیم که می‌خواهیم به 0.92 کیلوگرم برسد، پس مقداری که باید تبخیر شود، برابر است با:

$$\text{گرم } 460 \rightarrow \text{تبدیل به گرم} \rightarrow \text{کیلوگرم } 0.46 = 1/38 - 0.92$$

۳۵۹. گزینه ۲ | اگر n سهم با قیمت ۱۲۰۰ تومان بخرد، میانگین قیمت برابر است با:

$$\frac{\text{جمع کل قیمت}}{\text{تعداد کل سهم}} = \frac{500 \times 3000 + n \times 1200}{500 + n} = 1500$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 1500000 + 1200n = 750000 + 1500n$$

$$\Rightarrow 750000 = 300n \Rightarrow n = \frac{750000}{300} = 2500$$

پس باید ۲۵۰۰ سهم دیگر بخرد.

۳۶۰. گزینه ۳ | فواره اول در هر ساعت $\frac{1}{11}$ حوض و فواره دوم در هر ساعت

$$\frac{1}{8} \text{ حوض را پر می‌کند. پس دوتایی با هم در هر ساعت } \frac{1}{24} + \frac{1}{8} = \frac{5}{24}$$

را پر می‌کنند. یعنی به اندازه $\frac{24}{5}$ ساعت طول می‌کشد تا هر دو با هم حوض را پر کنند و $\frac{24}{5}$ ساعت می‌شود ۴ ساعت و ۴۸ دقیقه.

۳۶۱. گزینه ۲ | اگر شیر سریع‌تر در t دقیقه پر کند، در هر دقیقه $\frac{1}{t}$ مخزن

را پر می‌کند. پس شیر کندتر در $t+4$ دقیقه پر می‌کند یعنی در هر دقیقه

$$\frac{1}{t+4} \text{ از مخزن را پر می‌نماید. پس با هم در هر دقیقه } \frac{1}{t} + \frac{1}{t+4}$$

می‌کنند که باید $\frac{1}{35}$ شود.

دقت کنید که زمان برحسب دقیقه است و ۵ دقیقه و پنجاه ثانیه می‌شود $\frac{35}{6}$

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+4} = \frac{6}{35}$$

دقیقه. پس داریم:

$$\xrightarrow{\times 35t(t+4)} 35(t+4) + 35t = 6t(t+4)$$

$$\Rightarrow 70t + 140 = 6t^2 + 24t \Rightarrow 6t^2 - 46t - 140 = 0$$

$$\Rightarrow 3t^2 - 23t - 70 = 0 \xrightarrow{\text{ضرب کنیم}} t^2 - 23t - 210 = 0$$

$$\Rightarrow (t-30)(t+7) = 0 \Rightarrow t = 30 \text{ یا } -7$$

$$\xrightarrow{\text{۲ را پس می‌گیریم}} t = 10 \text{ یا } -\frac{7}{3}$$

پس شیر سریع‌تر به تنهایی در $t=10$ دقیقه مخزن را پر می‌کند.

$$\Rightarrow \frac{x+1}{2(x-1)} - \frac{A}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{2(x+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)^2 - 2A}{2(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{2(x+1)} \Rightarrow (x+1)^2 - 2A = (x-1)^2$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 - (x-1)^2 = 2A \Rightarrow 4x = 2A \Rightarrow x = \frac{A}{2}$$

حالا با توجه به ریشهٔ منفرجه، جواب معادله نمی‌تواند $x=1$ یا $x=-1$ باشد، پس به جای A هر کدام از گزینه‌ها را قرار می‌دهیم و مقدار x را پیدا می‌کنیم:

۱ $A=2 \Rightarrow x = \frac{A}{2} = \frac{2}{2} = 1$ غ ق ق

۲ $A=-2 \Rightarrow x = \frac{A}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ غ ق ق

۳ $A=3x+1 \Rightarrow x = \frac{3x+1}{2} \Rightarrow 2x = 3x+1$

$\Rightarrow x = -1$ غ ق ق

۴ $A=3x+2 \Rightarrow x = \frac{3x+2}{2} \Rightarrow 2x = 3x+2$

$\Rightarrow x = -2$ ✓

۳۵۵. گزینه ۲ | راه I | دارای بی‌شمار جواب است یعنی دو طرف تساوی همیشه با هم برابرند. دو راه داریم:

به x دو عدد دلخواه (به جز ریشه‌های منفرجه) بدهیم و n و m را به دست بیاوریم؛ مثلاً با قراردادن $x=0$ داریم:

$$\xrightarrow{x=0} \frac{2}{2} + \frac{1}{-2} = \frac{n}{-4} \Rightarrow \frac{1}{2} = -\frac{n}{4} \Rightarrow n = -2$$

و با قراردادن $x=-1$ داریم:

$$\xrightarrow{x=-1} \frac{3}{1} + 0 = \frac{-m+n}{-3} \xrightarrow{n=-2} 3 = \frac{-m-2}{-3} \Rightarrow m = 7$$

و در نتیجه $\frac{m}{n} = -3/5$.

راه II | منفرجه مشترک بگیریم (یا در ک.م.م منفرجه ضرب کنیم) و سپس بگوییم دو طرف عیناً مساوی‌اند:

$$\frac{(2-x)(x-2) + (x+1)(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{mx+n}{x^2-4}$$

$$\Rightarrow -x^2 + 4x - 4 + x^2 + 3x + 2 = mx + n$$

$$\Rightarrow 7x - 2 = mx + n \Rightarrow m = 7, n = -2 \Rightarrow \frac{m}{n} = -3/5$$

۳۵۶. گزینه ۱ | می‌دانیم نسبت طول به عرض مستطیل طلایی برابر

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ است! پس اگر عرض را } b = 4 \text{ بنامیم، طول مستطیل (a) برابر است با:}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Rightarrow a = 2(\sqrt{5}+1) = 2\sqrt{5}+2$$

۳۵۷. گزینه ۱ | راه I | عرض مستطیل طلایی برابر ۱ است و چون

نسبت طول به عرض باید برابر $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ باشد پس طول مستطیل برابر است با $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ، حالا ببینیم ریشهٔ کدام معادله برابر این عدد است:

۱ $x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ✓

پس جواب **۱** است، در مورد بقیهٔ گزینه‌ها می‌توانید بررسی کنید تا ببینید در

گزینه‌های **۳** و **۴** که $\Delta < 0$ است و در **۲** هم ریشه‌ها برابر $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

هستند.

۳۶۶. گزینه ۳ اگر شیر اول بشکه را در a دقیقه و شیر دوم بشکه را در b دقیقه پر کند، داریم:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{50}{ab} = \frac{1}{12} \Rightarrow ab = 600$$

$$\frac{a}{4} + \frac{b}{4} = 25 \Rightarrow a + b = 50$$

پس داریم: $a + b = 50$ و $ab = 600$ ، با کمی دقت می‌بینیم که $a = 20$ و $b = 30$. پس اختلاف زمان وقتی بشکه را با هر کدام از شیرها پر می‌کنیم برابر است با: $30 - 20 = 10$ دقیقه.

۳۶۷. گزینه ۳ زمان حرکت با سرعت v برابر $\frac{400}{v}$ و با سرعت $v+10$ برابر $\frac{400}{v+10}$ است. پس سؤال گفته:

$$t_2 = t_1 - 2 \Rightarrow \frac{400}{v+10} = \frac{400}{v} - 2$$

یواش تریبرویم تندتریبرویم

این یک معادله گویا است. با ضرب در $v(v+10)$ داریم:

$$400v = 400(v+10) - 2v(v+10)$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب کنیم}} 400v = 400v + 4000 - 2v^2 - 20v$$

$$\xrightarrow{\text{همه یک طرف}} 2v^2 + 20v - 4000 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} v^2 + 10v - 2000 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (v+50)(v-40) = 0 \xrightarrow{v>0} v = 40$$

پس با سرعت $v = 40$ حرکت می‌کرده ($\frac{400}{40} = 10$) ساعت طول کشیده و اگر سرعت را 10 تا افزایش دهد ($\frac{400}{50} = 8$) ساعت طول می‌کشد، دو ساعت زودتر می‌رسد.

۳۶۸. گزینه ۴ قطار مسیر رفت 60 کیلومتری را با سرعت v طی می‌کند، پس زمان طی این مسیر برابر است با $\frac{60}{v}$. در مسیر برگشت 10 km/h از سرعت قطار کم می‌شود یعنی زمان طی شدن مسیر برگشت می‌شود $\frac{60}{v-10}$ که باید نیم ساعت یعنی $\frac{1}{2}$ ساعت از زمان مسیر رفت طولانی‌تر باشد، پس:

$$\frac{60}{v-10} = \frac{60}{v} + \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2v(v-10)} 120v = 120(v-10) + v(v-10)$$

$$\Rightarrow v^2 - 10v + 120v - 1200 - 120v = 0$$

$$\Rightarrow v^2 - 10v - 1200 = 0 \Rightarrow (v-40)(v+30) = 0 \Rightarrow v = 40$$

حتماً موافقتی که سرعت (v) منفی نیست!

۳۶۹. گزینه ۳ زمان رفت $\frac{300}{v}$ و زمان برگشت $\frac{300}{v-8}$ است و داریم:

$$\frac{300}{v} + \frac{300}{v-8} = 40 \xrightarrow{\div 20} \frac{15}{v} + \frac{15}{v-8} = 2$$

$$\xrightarrow{\times v(v-8)} 15(v-8) + 15v = 2v(v-8)$$

$$\Rightarrow 30v - 120 = 2v^2 - 16v$$

$$\Rightarrow 2v^2 - 46v + 120 = 0 \Rightarrow v^2 - 23v + 60 = 0$$

$$\Rightarrow (v-3)(v-20) = 0 \xrightarrow{v>8} v = 20$$

۳۶۲. گزینه ۱ اگر سرعت کار نقاش مبتدی $\frac{1}{x}$ آپارتمان در ساعت باشد، سرعت کار نقاش ماهر $\frac{2}{x}$ است. این دو با هم آپارتمان را در 20 ساعت رنگ می‌کنند؛ پس:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x}\right) \times 20 = 1 \Rightarrow \frac{6}{x} = 1 \Rightarrow x = 60$$

پس این دو به ترتیب $\frac{1}{60}$ و $\frac{1}{30}$ آپارتمان را در هر ساعت رنگ می‌کنند. بعد از مصدوم شدن نقاش مبتدی سرعت او نصف می‌شود یعنی $\frac{1}{120}$ ، پس مدت زمان رنگ شدن آپارتمان می‌شود:

$$\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{120}\right) \times t = 1 \Rightarrow \left(\frac{4+1}{120}\right)t = 1 \Rightarrow t = \frac{120}{5} = 24$$

۳۶۳. گزینه ۴ فرض کنیم کارگر اول به تنهایی در x روز کار را کامل می‌کند. سؤال می‌گوید کارگر دوم 10 روز کم‌تر طول می‌دهد، پس برای او $x-10$ روز طول می‌کشد. بنابراین اولی و دومی به ترتیب در هر روز $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{x-10}$ کار را انجام می‌دهند و دو نفری در هر روز $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} = \frac{2x-10}{x(x-10)}$ از کار را انجام می‌دهند. صورت سؤال می‌گوید:

$$-8 \text{ زمان کار دومی} = \text{زمان کار دو نفر با هم}$$

$$\Rightarrow \frac{x(x-10)}{2x-10} = x-10-8 \Rightarrow \frac{x^2-10x}{2x-10} = x-18$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x = (2x-10)(x-18) = 2x^2 - 46x + 180$$

$$\Rightarrow x^2 - 36x + 180 = 0 \Rightarrow (x-30)(x-6) = 0$$

$$\Rightarrow x = 30 \text{ یا } x = 6$$

پس فقط $x = 30$ قابل قبول است؛ چون برای $x = 6$ زمان کار دومی منفی است!

۳۶۴. گزینه ۲ اگر کارگر اول کار را در x روز تمام کند کارگر دوم در $x+15$ روز تمام می‌کند. پس در یک روز، اولی $\frac{1}{x}$ و دومی $\frac{1}{x+15}$ از کار را انجام می‌دهند و با هم در هر روز $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} = \frac{2x+15}{x^2+15x}$ از کار را انجام می‌دهند. پس داریم:

$$\frac{1}{2x+15} = \frac{x^2+15x}{2x+15} = 18$$

$$\Rightarrow x^2 + 15x = 18(2x+15) = 36x + 270$$

$$\Rightarrow x^2 - 21x - 270 = 0 \Rightarrow (x-30)(x+9) = 0$$

پس اولی در $x = 30$ روز تمام می‌کند و دومی در 45 روز و سرعت اولی $1/5$ برابر دومی است.

۳۶۵. گزینه ۴ اگر استاد در n روز مقاله را بنویسد، دانشجو در $n+8$ روز می‌نویسد (وقتی گفته استاد زودتر می‌نویسد یعنی دانشجو زمان بیشتری می‌برد). پس در هر روز استاد $\frac{1}{n}$ و دانشجو $\frac{1}{n+8}$ از مقاله را می‌نویسد بنابراین

$$2 \text{ دانشجو و یک استاد } \frac{1}{n} + \frac{2}{n+8} \text{ کار را در یک روز انجام می‌دهند و چون}$$

$$\frac{1}{n} + \frac{2}{n+8} = \frac{1}{15} \text{ داریم:}$$

با ضرب دو طرف در $15n(n+8)$ داریم:

$$\xrightarrow{\times 15n(n+8)} 15(n+8) + 2 \times 15n = n(n+8)$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب کنیم}} 15n + 120 + 30n = n^2 + 8n$$

$$\xrightarrow{\text{همه یک طرف}} 0 = n^2 - 37n - 120$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه}} (n+3)(n-40) = 0 \xrightarrow{n>0} n = 40$$

البته کنترل گزینه‌ها هم مثل همیشه قابل استفاده بود.

و چون v مثبت است پس $v = 15$ قابل قبول است.

عددگذاری در معادله $\frac{1}{v+5} + \frac{1}{v-5} = \frac{3}{20}$ ، گزینه‌ها را امتحان کنیم و ۱۵ می‌خورد.

گزینه ۴ مختصات M به صورت $M(x, x)$ است و داریم:

$$MA = MB \text{ شیب}$$

$$\Rightarrow \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{y_M - y_B}{x_M - x_B} - 1 \Rightarrow \frac{x-1}{x-2} = \frac{x-2}{x+1} - 1$$

$$\xrightarrow{\times(x-2)(x+1)} (x-1)(x+1)$$

$$= (x-2)(x-2) - (x-2)(x+1)$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = x^2 - 4x + 4 - (x^2 - x - 2)$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 7 = 0$$

$$x \text{ جمع مقادیر } S = -\frac{b}{a} = -3$$

گزینه ۳ اگر دو طرف را در $(x-1)(x+1)$ ضرب کنیم داریم:

$$x(x+1) + x + a = 2(x-1)(x+1)$$

$$\Rightarrow x^2 + x + x + a = 2(x^2 - 1) = 2x^2 - 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - (a+2) = 0$$

این معادله وقتی حداکثر یک ریشه می‌دهد که دلتایش کمتر یا مساوی صفر باشد یا یک ریشه آن $+1$ یا -1 شود و ما آن را قبول نکنیم:

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow (-2)^2 - 4(1)(-a-2) \leq 0$$

$$\Rightarrow 4 + 4a + 8 \leq 0 \Rightarrow a \leq -3$$

$$\text{ب) } \xrightarrow{x=1} 1 - 2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = -3$$

$$\text{پ) } \xrightarrow{x=-1} 1 + 2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

پس $a = -2$ قبول نیست.

گزینه ۴ ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$\frac{13}{x^2+1} - \frac{17x+10}{5x^2-5x+5} = \frac{-5}{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{13}{(x+1)(x^2-x+1)} - \frac{17x+10}{5(x^2-x+1)} = \frac{-5}{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{65 - (17x+10)(x+1)}{5(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{-5}{x+1}$$

$$\xrightarrow{\text{حذف } x+1} \xrightarrow{\text{با فرض } x \neq -1} \frac{65 - 17x^2 - 17x - 10x - 10}{5(x^2-x+1)} = -5$$

$$\Rightarrow -17x^2 - 27x + 55 = -25x^2 + 25x - 25$$

$$\Rightarrow 8x^2 - 52x + 80 = 0$$

$$-\frac{b}{a} = \frac{52}{8} = \frac{13}{2} = 6.5 \text{ حالا مجموع ریشه‌های معادله برابر است با:}$$

گزینه ۲ اول $x = 2$ را قرار دهیم:

$$\xrightarrow{x=2} \frac{1}{4+2} + \frac{4}{4-1} = \frac{2a-1}{8-2} \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{4}{3} = \frac{2a-1}{6}$$

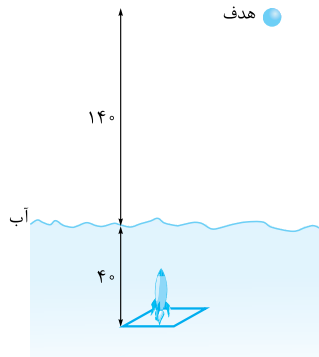
$$\Rightarrow \frac{2a-2}{6} = \frac{4}{3} = \frac{8}{6} \Rightarrow 2a-2=8 \Rightarrow 2a=10 \Rightarrow a=5$$

گزینه ۲ اگر سرعت موشک در آب v باشد، در هوا سرعت آن

$v+20$ است و داریم:

$$t = t_1 + t_2$$

$$10 = \frac{40}{v} + \frac{140}{v+20}$$



خطرناک t_1 و t_2 زمان حرکت در آب و هوا هستند که از تقسیم

مسافت بر سرعت به دست می‌آیند.

$$\xrightarrow{\div 10} \frac{14}{v+20} + \frac{4}{v} = 1$$

$$\xrightarrow{\times v(v+20)} 14v + 4(v+20) = v^2 + 20v$$

$$\Rightarrow v^2 + 20v - 80 = 0 \Rightarrow v = 8 \text{ یا } -10$$

پس $v = 8$ مورد قبول است.

گزینه ۳ اگر سرعت آب رودخانه را v متر بر دقیقه فرض کنیم، وقتی

قایق در جهت حرکت آب حرکت می‌کند سرعتش $100+v$ و زمان حرکتش

$\frac{1200}{100+v}$ است و وقتی قایق خلاف جهت حرکت آب حرکت می‌کند، سرعتش

$100-v$ و زمان حرکتش $\frac{1200}{100-v}$ است، حالا اختلاف این دو زمان باید برابر ۵ دقیقه باشد، پس:

$$\frac{1200}{100-v} - \frac{1200}{100+v} = 5$$

$$\xrightarrow{\times(100-v)(100+v)} 1200(100+v-100+v) = 5(100-v)(100+v)$$

$$\Rightarrow 240(2v) = 10000 - v^2 \Rightarrow v^2 + 480v - 10000 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = 20 \\ v = -500 \end{cases}$$

و چون سرعت باید مثبت باشد پس $v = 20$ قابل قبول است.

عددگذاری گزینه‌ها را کنترل کنیم $\frac{1200}{100-20}$ می‌شود ۱۵ و $\frac{1200}{100+20}$

می‌شود ۱۰ که اختلافشان ۵ است.

گزینه ۴ اگر سرعت پرنده را v کیلومتر در ساعت فرض کنیم، در

جهت موافق باد سرعتش برابر $v+5$ و زمان طی این مسافت برابر $\frac{1}{v+5}$

ساعت است و در جهت مخالف باد سرعتش برابر $v-5$ و زمان طی مسافتش

برابر $\frac{1}{v-5}$ ساعت است. مجموع این دو زمان برابر ۹ دقیقه یعنی $\frac{9}{60}$ ساعت

$$\frac{1}{v+5} + \frac{1}{v-5} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20}$$

است، پس:

$$\xrightarrow{\times 20(v+5)(v-5)} 20(v-5+v+5) = 3(v-5)(v+5)$$

$$\Rightarrow 20 \times 2v = 3(v^2 - 25) \Rightarrow 3v^2 - 40v - 75 = 0$$

$$\Rightarrow v = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 4(3)(-75)}}{2(3)} = \frac{40 \pm \sqrt{1600 + 900}}{6}$$

$$= \frac{40 \pm 50}{6} \Rightarrow \begin{cases} v = 15 \\ v = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

پس $0 = 1 + 5x + 2x^2$ و در نتیجه جوابها $-\frac{5}{4}$ و $-\frac{1}{2}$ هستند. در هر حال نسبت دو جواب می شود $\frac{4}{5}$.

۳۸۱. گزینه ۴ اولاً $x = 4$ صدق می کند پس:

$$4 + a = \sqrt{5 \times 4 - 4^2}$$

$$4 + a = 2 \Rightarrow a = -2$$

بنابراین:

یعنی معادله به شکل $x^2 - 2x = \sqrt{5x - x^2}$ است.

عددگذاری به راحتی می شود کنترل کرد که اعداد $\frac{1}{4}$ ، 2 و 3 نمی خورند؛ پس ریشه دیگری (در این گزینهها) نداریم.

راه II به توان ۲ می رسانیم:

$$x^2 - 4x + 4 = 5x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 9x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (2x - 1)(x - 4) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ یا } 4$$

که $x = \frac{1}{2}$ جواب $(x - 2)$ را منفی می کند و قبول نیست (یادتان هست که هم زیر رادیکال و هم جواب رادیکال، نباید منفی بشوند).

۳۸۲. گزینه ۲ دو تاییه پس از سقوط یعنی $t = 2$ ، پس داریم:

$$t = \sqrt{10 - \frac{h}{5}} \Rightarrow 2 = \sqrt{10 - \frac{h}{5}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4 = 10 - \frac{h}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{5} = 6 \Rightarrow h = 30$$

۳۸۳. گزینه ۳ اگر عدد x فرض کنیم جذر عدد یعنی \sqrt{x} ،

$$x - \sqrt{x} = \frac{1}{4}x \Rightarrow \frac{x}{4} = \sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{x^2}{4} = x \Rightarrow x^2 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

پس می شود دو عدد صحیح: صفر و ۴

۳۸۴. گزینه ۴ به توان ۲ برسانیم:

$$2x^2 + 5x + 2 = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow x^2 + 9x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 8}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{89}}{2}$$

اما از بین این جوابها، هیچ کدام قبول نیست چون هر دو $x - 2$ را منفی می کنند.

۳۸۵. گزینه ۴ x را به طرف راست می آوریم و به توان ۲ می رسانیم:

$$\sqrt{x^2 - 4x + 6} = 2 - x$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 6 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow 4 = 6$$

اما این امکان ندارد پس جواب معادله $\{ \}$ یا \emptyset است.

۳۸۶. گزینه ۱ اول معادله را حل می کنیم تا a را پیدا کنیم:

$$2a + \sqrt{3a + 16} = 1 \Rightarrow \sqrt{3a + 16} = -2a + 1$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 3a + 16 = 4a^2 - 4a + 1 \Rightarrow 4a^2 - 7a - 15 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4(4)(-15)}}{2(4)} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 240}}{8}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{289}}{8} = \frac{7 \pm 17}{8} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

حالا دو طرف را در k م.م.م.م ضرب کنیم. تجزیه مخارجها $(x - 1)(x + 1)$ ، $x(x + 1)$ و $(x - 1)(x + 1)$ است و مخارج کسر سمت راست، k م.م.م.م خواهد بود:

$$\frac{\times x(x-1)(x+1)}{\times x(x-1)(x+1)} \rightarrow 1(x-1) + x^2(x) = ax - 1$$

$$\Rightarrow x^3 - (a-1)x = 0 \xrightarrow{a=5} x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0$$

جوابهای این معادله $x = 0$ و $x = \pm 2$ هستند که $x = 0$ قبول نیست.

حداکثر اختلاف ریشهها $4 = (-2) - 2$ است.

$$\sqrt{2-x} = 1-2x$$

۳۷۷. گزینه ۴

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 2 - x = 1 - 4x + 4x^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = -\frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{x=1 \text{ طرف را منفی می کند}} x = -\frac{1}{4}$$

۳۷۸. گزینه ۴ به توان ۲ برسانیم:

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 11x - 2 = (2x + 1)^2$$

$$\Rightarrow 11x - 2 = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 4x^2 - 7x + 3 = 0$$

این معادله دو جواب $x = 1$ و $x = \frac{3}{4}$ دارد که هر دو در شرط $x \geq \frac{2}{11}$ صدق

می کنند و قابل قبول اند پس تفاضل دو ریشه $\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$ است.

۳۷۹. گزینه ۴ اگر رادیکال را یک طرف نگه داریم:

$$3x - 2 + \sqrt{4x - 3} = 0 \Rightarrow \sqrt{4x - 3} = -3x + 2$$

حالا دامنه تعریف معادله برای بازه ای است که در آن هر دو طرف تساوی بزرگتر یا مساوی صفر باشند:

$$\begin{cases} -3x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{2}{3} \\ 4x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$



و حالا که دامنه معادله تهی است پس معادله جواب ندارد. (اگر به دامنه توجه نمی کردیم طرفین را به توان ۲ می رساندیم و ...!)

۳۸۰. گزینه ۳ اگر $-2x$ را به طرف راست ببریم، رادیکال تنها می شود:

$$\sqrt{2x + 5} = 2x + 5$$

حالا دو طرف را به توان ۲ برسانیم:

$$2x + 5 = (2x + 5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 18x + 20 = 0 \xrightarrow{\div 2} 2x^2 + 9x + 10 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{روش دلتا}} x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2 \times 2} = \frac{-9 \pm 1}{4} = \frac{-5}{4} \text{ یا } -2$$

البته کارهای بهتری هم می شد کرد. مثلاً در معادله $2x + 5 = (2x + 5)^2$ اگر همه را به یک طرف ببریم و از $(2x + 5)$ فاکتور بگیریم:

$$(2x + 5)^2 - (2x + 5) = (2x + 5)(2x + 5 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{5}{2} \text{ یا } -2$$

یا حتی همان اول، در معادله $\sqrt{2x + 5} = 2x + 5$ از خودمان بپرسیم چه عددی با جذرش برابر است؟ 1 و 0 این طورند.

پیدا می‌کنیم و در اولی امتحان می‌کنیم:

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1, x = -1$$

$$x = 1 \Rightarrow \sqrt{|1| - \sqrt{1}} = \sqrt{1 - 1} = 0 \checkmark$$

$$x = 0 \Rightarrow \sqrt{|0| - \sqrt{0}} = \sqrt{0 - 0} = 0 \checkmark$$

$$x = -1 \Rightarrow \sqrt{|-1| - \sqrt{-1}} = \sqrt{1 - (-1)} = \sqrt{2} \times$$

پس معادله دو جواب دارد $x = 1$ و $x = 0$

۳۹۲. گزینه ۴ هر کدام از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. در **۱** یعنی

$\sqrt{t} + 2 = 0$ چون $\sqrt{t} \geq 0$ پس تساوی ممکن نیست و معادله جواب ندارد. در

۲ یعنی $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+3} + 1 = 0$ حاصل هر دو رادیکال نامنفی است پس ممکن نیست مجموعشان با عدد ۱ برابر صفر شود، پس این هم جواب ندارد.

در **۳** یعنی $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-2} = 0$ مجموع دو عامل نامنفی برابر صفر شده است پس هر دو باید برابر صفر باشند که ممکن نیست، پس **۳** هم جواب ندارد و فقط می‌ماند **۴** که جواب سؤال است.

۳۹۳. گزینه ۲ | راه ۱ عدد $x = -1$ ریشه معادله

$$ax - 2 = \sqrt{x^2 + x + a} \text{ است، پس باید در معادله صدق کند:}$$

$$x = -1 \Rightarrow \sqrt{-1 + a - 2} = -a \Rightarrow \sqrt{a} = -a + 2$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} a = a^2 - 4a + 4 \Rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{صفر = مجموع ضرایب}} a = 1, a = 4$$

جواب $a = 4$ قابل قبول نیست، چون در معادله $\sqrt{a} = -a + 2$ طرفین معادله باید به ازای عدد به دست آمده برای a بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشند و در نتیجه جواب معادله فقط $a = 1$ است.

راه ۲ وقتی به معادله $\sqrt{a} = -a + 2$ رسیدیم می‌توانیم گزینه‌ها را

$$a = 4 \Rightarrow \sqrt{4} = -4 + 2 \times$$

امتحان کنیم:

$$a = 1 \Rightarrow \sqrt{1} = -1 + 2 \checkmark$$

پس جواب a می‌شود ۱.

۳۹۴. گزینه ۴ به توان ۲ برسانیم:

$$(1 + \sqrt{1+x^2})^2 = 1+x$$

$$\Rightarrow 1 + (1+x^2) + 2\sqrt{1+x^2} = 1+x \Rightarrow 2\sqrt{1+x^2} = -x^2 + x - 1$$

الان برای از بین بردن رادیکال باید دوباره به توان ۲ برسانیم؛ اما از عبارت درجه چهارم می‌ترسیم! پس قبل از این کار کمی فکر لازم است:

$$-x^2 + x - 1 \text{ همواره منفی است (چون } \Delta < 0 \text{ و } a < 0 \text{). پس هرگز با}$$

$$2\sqrt{1+x^2} \text{ مساوی نمی‌شود و معادله جواب ندارد.}$$

۳۹۵. گزینه ۱ | راه ۱ باید دو طرف را به توان ۲ برسانیم تا رادیکال

از بین برود. دو راه را ببینید:

دو طرف را همین الان به توان ۲ برسانیم:

$$(\sqrt{x+6} - \sqrt{2x+5})^2 = 1$$

$$\Rightarrow (x+6) + (2x+5) - 2\sqrt{(x+6)(2x+5)} = 1$$

$$\Rightarrow 3x+11 = 2\sqrt{(x+6)(2x+5)}$$

باز هم رادیکال داریم، پس دوباره به توان ۲:

$$(3x+11)^2 = 4(x+6)(2x+5) = 4(2x^2 + 17x + 30)$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 66x + 121 = 8x^2 + 68x + 120$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0 \Rightarrow (x-10)(x+2) = 0$$

جواب $a = 3$ غیر قابل قبول است چون عبارت $-2a + 1$ به ازای $a = 3$ منفی می‌شود پس $a = -\frac{5}{4}$ است و در نتیجه:

$$fa + 9 = 4(-\frac{5}{4}) + 9 = -5 + 9 = 4$$

۳۸۷. گزینه ۴ اول معادله را حل می‌کنیم:

$$3a + \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 \Rightarrow \sqrt{2a^2 + 4a} = -3a + 2$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 2a^2 + 4a = 9a^2 - 12a + 4 \Rightarrow 7a^2 - 16a + 4 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 4(7)(4)}}{2(7)} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 112}}{14}$$

$$= \frac{16 \pm \sqrt{144}}{14} = \frac{16 \pm 12}{14} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = \frac{2}{7} \end{cases}$$

جواب $a = 2$ غیر قابل قبول است چون عبارت $-3a + 2$ به ازای $a = 2$ منفی می‌شود بنابراین $a = \frac{2}{7}$ است و در نتیجه:

$$\frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a} = 1 + \frac{7}{2} = \frac{9}{2} = 4 \frac{1}{2}$$

۳۸۸. گزینه ۴

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} 4 - x^2 = |x-1|^2 = x^2 - 2x + 1$$

خاطره $|k|^2$ همان k^2 بود پس با $|x-1|^2$ مشکلی نداریم چون همان $(x-1)^2$ است.

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} S = -\frac{b}{a} = 1 \\ P = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2} \end{matrix}} = (1)^2 - 2(-\frac{3}{2}) = 4$$

۳۸۹. گزینه ۱ اول ریشه‌های معادله $x + \sqrt{x} = 6$ را پیدا می‌کنیم. (البته راحت می‌توان ریشه را حدس زد!)

$$\sqrt{x} = u \Rightarrow u^2 + u - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (u+3)(u-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = 2 \\ u = -3 \end{cases} \text{ غق}$$

و حالا که $u = 2$ شد پس $\sqrt{x} = 2$ و در نتیجه $x = 4$. حالا به جای $x = k = 4$ می‌گذاریم و معادله دوم را حل می‌کنیم:

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = k - 2 \Rightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$$

می‌توانیم معادله را با تغییر متغیر $\sqrt{x} = u$ حل کنیم ولی چون مجموع یک عدد مثبت و معکوسش برابر ۲ شده است پس باید $\sqrt{x} = 1$ باشد و در نتیجه:

$$\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

۳۹۰. گزینه ۲ رادیکال‌ها را می‌بریم دو طرف تساوی و به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\frac{1}{\sqrt{u-3}} - \frac{2}{\sqrt{u}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{u-3}} = \frac{2}{\sqrt{u}}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \frac{1}{u-3} = \frac{4}{u} \xrightarrow{\text{توان } 2} u = 4u - 12$$

$$\Rightarrow 3u = 12 \Rightarrow u = 4$$

پس با توجه به گزینه‌ها جواب معادله مثبت و کوچک‌تر از ۵ است.

۳۹۱. گزینه ۲ معادله $\sqrt{|x| - \sqrt{x}} + \sqrt{x^3 - x} = 0$ برابر مجموع دو

عامل بزرگ‌تر یا مساوی صفر (نامنفی) است؛ پس وقتی این مجموع صفر می‌شود که هر دو عامل برابر صفر شوند. بنابراین ریشه‌های دومی را (که راحت‌تر است)

$$\Rightarrow 8x^2 - 24x + 4x - 12 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow 7x^2 - 24x - 16 = 0$$

برای حل معادله از روش ضرب C در a (یعنی ضرب x^2) استفاده می‌کنیم:

$$x^2 - 24x - 112 = 0 \Rightarrow (x+4)(x-28) = 0$$

$$\Rightarrow x = -4, x = 28$$

$x = -4$ غیر قابل قبول است و جواب این معادله عبارت است از: $x = 28$

پس جواب معادله اصلی برابر است با: $x = \frac{28}{7} = 4$ که مربع کامل است (چون C را در 7 ضرب کرده بودیم).

۳۹۹. گزینه ۴ از $x^2 = 2y$ داریم $x = \sqrt{2y}$ ، پس:

$$x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3} \Rightarrow \sqrt{2y} = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 2y = y+3+y-3-2\sqrt{(y+3)(y-3)}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{y^2-9} = 0 \Rightarrow y = 3, y = -3$$

با توجه به $\sqrt{y-3}$ مقدار $y = -3$ غیر قابل قبول است، پس:

$$y = 3 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \sqrt{6}$$

پس نقطه تلاقی دو منحنی $A(\sqrt{6}, 3)$ است که فاصله‌اش از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow OA = \sqrt{6+9} = \sqrt{15}$$

۴۰۰. گزینه ۱ دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x^2 + x^2 + 4x - 13 = x^2 \Rightarrow x^2 + 4x - 13 = 0$$

حالا دقت کنید این معادله جواب‌های مثبت و منفی دارد (چون $P = \frac{c}{a} < 0$ است دو

ریشه مختلف‌العلامه دارد) که جواب منفی با رادیکال سمت راست معادله مشکل دارد.

پس فقط جواب مثبت معادله یعنی $-2 + \sqrt{17}$ که تقریباً $2/1$ است را می‌پذیریم و فقط یک جواب داریم.

۴۰۱. گزینه ۴ به جای $x^2 + 4x$ ، $x^2 + 4x$ متغیر دیگری مثل a قرار می‌دهیم:

$$a + 3 = \sqrt{a+5}$$

حالا برای حل معادله گنگ، دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\xrightarrow{\text{به توان دو}} (a+3)^2 = a+5$$

$$\Rightarrow a^2 + 6a + 9 = a + 5 \Rightarrow a^2 + 5a + 4 = 0$$

$$\Rightarrow a = -1 \text{ یا } -4$$

صبر کنید! $a = -1$ قبول است (به $\sqrt{4}$ می‌رسیم که مشکلی ندارد) اما

$a = -4$ قبول نیست چون به $\sqrt{-1}$ می‌رسیم.

$$a = x^2 + 4x = -1$$

پس داریم:

$$x^2 + 4x + 1 = 0$$

و در نتیجه:

که جمع ریشه‌هایش $S = \frac{-b}{a} = -4$ است.

۴۰۲. گزینه ۳ دو طرف را به توان ۲ برسانیم:

$$(x+1)^2 (2x+5)^2 = -(x+3)(2x+1)$$

$$\Rightarrow (2x^2 + 7x + 5)^2 = -(2x^2 + 7x + 3)$$

دست نگه دارید! حوصله در به هم‌آوردن را نداریم. پس $2x^2 + 7x$ را A می‌گیریم و

$$\xrightarrow{2x^2+7x=A} (A+5)^2 = -(A+3)$$

داریم:

پس $x = 10$ و $x = -2$ جواب‌های معادله‌اند اما با قراردادن $x = 10$ به عبارت $\sqrt{16} - \sqrt{25} = 1$ می‌رسیم که درست نیست.

با قراردادن $x = -2$ مشکلی وجود ندارد و به $\sqrt{4} - \sqrt{1} = 1$ می‌رسیم.

راه II را به طرف راست می‌بریم و بعد به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{x+6} = \sqrt{2x+5} + 1$$

$$\xrightarrow{\text{به توان دو}} x+6 = (2x+5) + 1 + 2\sqrt{2x+5} \Rightarrow -x = 2\sqrt{2x+5}$$

پس x باید عددی منفی باشد. حالا دوباره به توان ۲:

$$x^2 = 4(2x+5) \Rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0 \xrightarrow{x < 0} x = -2$$

در هر حال، فقط یک ریشه منفی داریم.

۳۹۶. گزینه ۱ این مسئله را از دو راه حل می‌کنیم. یک بار همین

معادله را به توان ۲ می‌رسانیم و بار دوم، معادله را به شکل $\sqrt{x+1} = \sqrt{2x-5} + 1$

به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{2x-5} + 1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}}$$

$$x+1 = (2x-5) + 1 + 2\sqrt{2x-5} \Rightarrow -x+5 = 2\sqrt{2x-5}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2 - 10x + 25 = 4(2x-5) = 8x - 20$$

$$\Rightarrow x^2 - 18x + 45 = 0 \Rightarrow (x-15)(x-3) = 0$$

اما $x = 15$ در معادله دوم (یعنی $-x+5 = 2\sqrt{2x-5}$) طرف چپ را منفی می‌کند و قبول نیست. پس تنها جواب معادله $x = 3$ است.

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1$$

راه II

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (x+1) + (2x-5) - 2\sqrt{(x+1)(2x-5)} = 1$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2x^2 - 3x - 5} = 3x - 5$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4(2x^2 - 3x - 5) = (3x - 5)^2$$

$$\Rightarrow 8x^2 - 12x - 20 = 25 + 9x^2 - 30x$$

$$\Rightarrow x^2 - 18x + 45 = 0 \Rightarrow (x-15)(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ x = 3 \end{cases}$$

۳۹۷. گزینه ۱ اول دامنه معادله را پیدا می‌کنیم:

$$\sqrt{8-2x} = 2 + \sqrt{x-3}$$

$$\begin{cases} 8-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \\ x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \end{cases} \rightarrow 3 \leq x \leq 4$$

حالا طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$8-2x = 4 + 4\sqrt{x-3} + x-3 \Rightarrow 4\sqrt{x-3} = -3x+7$$

در این معادله هم باید $-3x+7 \geq 0$ باشد:

$$-3x+7 \geq 0 \Rightarrow -3x \geq -7$$

$$\Rightarrow x \leq \frac{7}{3} \xrightarrow{\text{اشتراک با } 3 \leq x \leq 4} \emptyset$$

پس معادله جواب ندارد.

۳۹۸. گزینه ۱ اول دامنه معادله را پیدا می‌کنیم:

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$$

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2} \\ x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \\ x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \end{cases} \rightarrow x \geq 3$$

حالا طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$2x+1+x-3+2\sqrt{2x+1}\sqrt{x-3} = 4x$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2x+1}\sqrt{x-3} = x+2$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 4(2x+1)(x-3) = x^2 + 4x + 4$$

۴۰۶. گزینه ۲ دو طرف را به توان ۲ برسانیم:

$$\sqrt{x - \sqrt{x+1}} = 1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x - \sqrt{x+1} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} = x - 1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x + 1 = x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } 3$$

حالا امتحان کنیم:

$$x = 0 \Rightarrow \sqrt{0 - \sqrt{0+1}} = 1 \Rightarrow \sqrt{-1} = 1$$
 این قبول نیست.

$$x = 3 \Rightarrow \sqrt{3 - \sqrt{3+1}} = 1 \Rightarrow \sqrt{3-2} = 1$$
 این خوب است.

پس مجموعه جواب فقط شامل یک عدد طبیعی است.

۴۰۷. گزینه ۲ دو طرف را به توان ۲ برسانیم:

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 2x + \sqrt{6x^2 + 1} = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{6x^2 + 1} = x^2 + 1$$

$$6x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$$
 حالا دوباره به توان ۲:

$$\Rightarrow x^4 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } \pm 2$$

اما یادممان نرفته که باید جوابها را کنترل کنیم:

$$x = 0 \Rightarrow \sqrt{0 + \sqrt{0+1}} = 1 \Rightarrow$$
 درست است.

$$x = 2 \Rightarrow \sqrt{4 + \sqrt{24+1}} = 2 \Rightarrow$$
 درست است.

$$x = -2 \Rightarrow \sqrt{-4 + \sqrt{24+1}} = -1 \Rightarrow$$
 درست نیست.

پس مجموع مربعات جوابها می شود $4 = 2^2 + 0^2$.

۴۰۸. گزینه ۲ اول دقت کنیم که $x - 5$ و $13 - x$ باید هر دو نامنفی باشند پس فقط $5 \leq x \leq 13$ قابل قبول است.

حالا به توان ۲ برسانیم:

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 2 + \sqrt{x-5} = 13 - x \Rightarrow \sqrt{x-5} = 11 - x$$

$$\xrightarrow{\text{دوباره به توان ۲}} x - 5 = (11 - x)^2 = 121 - 22x + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 23x + 126 = 0 \Rightarrow (x-9)(x-14) = 0$$

پس جوابهای معادله $x = 9$ و $x = 14$ هستند که با توجه به دامنه رادیکالها،

حتماً $x = 14$ قبول نیست ولی $x = 9$ می خورد:

$$\sqrt{2 + \sqrt{9-5}} = \sqrt{13-9} \Rightarrow \sqrt{2+2} = \sqrt{4} \Rightarrow 2 = 2$$

۴۰۹. گزینه ۱ اول دامنه معادله را پیدا می کنیم:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = x-4$$

$$\left. \begin{aligned} x-1 \geq 0 &\Rightarrow x \geq 1 \\ 3-x \geq 0 &\Rightarrow x \leq 3 \\ x-4 \geq 0 &\Rightarrow x \geq 4 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\cap} \emptyset$$

دامنه معادله تهی است، پس معادله جواب ندارد.

۴۱۰. گزینه ۲ قبل از شروع کار دقت کنید که زیر رادیکالها منفی نباشند.

$\sqrt{x-7}$ ما را مجبور می کند که $x \geq 7$ باشد و $\sqrt{7-x}$ از ما می خواهد که $x \leq 7$ باشد. پس تنها راه این است که $x = 7$ باشد و گر نه هیچ عدد دیگری در

دامنه این معادله صدق نمی کند. حالا برویم ببینیم این عدد ۷ معادله را برقرار

$$\xrightarrow{x=7} \sqrt{0} + \sqrt{9+0} = 3$$
 می کند یا نه؟

$$\Rightarrow A^2 + 10A + 25 = -A - 3 \Rightarrow A^2 + 11A + 28 = 0$$

$$\Rightarrow (A+4)(A+7) = 0$$

پس -7 یا $-4 = A$ و داریم:

$$2x^2 + 7x = -4 \text{ یا } -7$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 7x + 4 = 0 \text{ یا } 2x^2 + 7x + 7 = 0$$

دلتهای معادله دوم منفی است. در معادله اول $\Delta > 0$ ، $S < 0$ و $P > 0$ است، پس

دو ریشه منفی دارد که $\frac{-7 \pm \sqrt{17}}{4}$ هستند و با توجه به گویش صورت سؤال،

حتماً هر دو قبول اند، پس ضرب آنها $P = \frac{c}{a} = 2$ است و جمعشان $S = \frac{-b}{a}$.

۴۰۳. گزینه ۱ $1 + \frac{9}{x}$ همان $\frac{x+9}{x}$ است! معادله با در نظر گرفتن این

اتفاق، به صورت $a + \frac{4}{a} = 4$ درمی آید. ببینید:

$$\sqrt{\frac{x+9}{x}} + 4\sqrt{\frac{x}{x+9}} = 4 \xrightarrow{\sqrt{\frac{x+9}{x}} = a} a + \frac{4}{a} = 4$$

$$\xrightarrow{\times a} a^2 + 4 = 4a \Rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (a-2)^2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

پس داریم:

$$\sqrt{\frac{x+9}{x}} = 2 \Rightarrow \frac{x+9}{x} = 4 \Rightarrow x+9 = 4x \Rightarrow x = 3$$

۴۰۴. گزینه ۳ اول معادله را حل می کنیم:

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x} = \sqrt{x} + \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} = 0$$

از $\sqrt[3]{x}$ فاکتور می گیریم:

$$x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} = 0 \Rightarrow x^{\frac{1}{6}}(x^{\frac{1}{6}} - 3) = 0 \xrightarrow{x \neq 0} x^{\frac{1}{6}} = 3$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۶}} x = 3^6$$

پس پاسخ معادله 3^6 است، که می تواند به شکل های زیر هم نوشته شود:

$$3^6 = (3^2)^3 = 9^3$$

$$3^6 = (3^3)^2 = 27^2$$

پس وقتی ریشه را به شکل a^b در نظر بگیریم $a+b$ می تواند ۹ یا ۱۲ یا ۲۹ باشد.

۴۰۵. گزینه ۴ اول $x = 1$ را در معادله صدق می دهیم تا a را پیدا کنیم:

$$\frac{1}{x - \sqrt{x-1}} + \frac{1}{x + \sqrt{x-1}} = a \xrightarrow{x=1} \frac{1}{1-0} + \frac{1}{1+0} = a$$

$$\Rightarrow a = 2$$

حالا به جای a می گذاریم ۲ و معادله را حل می کنیم:

$$\frac{1}{x - \sqrt{x-1}} + \frac{1}{x + \sqrt{x-1}} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{x + \sqrt{x-1} + x - \sqrt{x-1}}{(x - \sqrt{x-1})(x + \sqrt{x-1})} = 2 \Rightarrow \frac{2x}{x^2 - x + 1} = 2$$

$$\xrightarrow{\div 2} x = x^2 - x + 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

پس جواب معادله فقط $x = 1$ است و جواب دیگری ندارد.

که درست است. پس فقط یک جواب $x = 7$ داریم.

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$$

$$\Rightarrow (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}) - \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x} - \frac{1}{1+\sqrt{x}}) = 0$$

از پرانتز اول داریم $\sqrt{x} = 1$ و در نتیجه $x = 1$. از پرانتز دوم هم داریم:

$$\frac{(1+\sqrt{x})^2 - 1}{1+\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow (1+\sqrt{x})^2 = 1$$

$$\Rightarrow 1 + \sqrt{x} = \pm 1 \Rightarrow x = 0$$

پس فقط $x = 0$ و $x = 1$ جواب‌های معادله‌اند که اختلافشان ۱ است.

۴۱۶. گزینه ۳ صورت سؤال می‌گوید اختلاف MF و MF' برابر ۴ است:

$$|MF - MF'|$$

$$= |\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} - \sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2}| = 4$$

$$\xrightarrow{x=4} |\sqrt{1 + (y-1)^2} - \sqrt{49 + (y-1)^2}| = 4$$

$$|\sqrt{1+A} - \sqrt{49+A}| = 4 \quad \text{به جای } A, (y-1)^2 \text{ بگذاریم:}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (1+A) + (49+A) - 2\sqrt{(1+A)(49+A)}$$

$$= 16 \Rightarrow 2A + 34 = 2\sqrt{49 + 50A + A^2}$$

$$\xrightarrow{\div 2} A + 17 = \sqrt{49 + 50A + A^2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} A^2 + 34A + 289 = A^2 + 50A + 49$$

$$\Rightarrow 240 = 16A \Rightarrow A = 15 \Rightarrow (y-1)^2 = 15 \Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{15}$$

اختلاف دو مقدار y هم می‌شود $2\sqrt{15}$.

۴۱۷. گزینه ۱ به توان ۲ برسانیم:

$$4 - \sqrt{x} + \sqrt{x+3} = 1 + (1 - \sqrt{x}) + 2\sqrt{1-x}$$

$$\Rightarrow 2 + \sqrt{x+3} = 2\sqrt{1-x}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4 + (x+3) + 4\sqrt{x+3} = 4(1-x)$$

$$\Rightarrow 7 + x + 4\sqrt{x+3} = 4 - 4x \Rightarrow 4\sqrt{x+3} = -3 - 5x$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 16(x+3) = 9 + 25x^2 + 30x$$

$$\Rightarrow 0 = 25x^2 + 14x - 39$$

$$\xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر است.}} x = 1 \text{ یا } -\frac{39}{25}$$

جواب منفی معادله $-\frac{39}{25}$ است که می‌شود $-1/56$ و بین اعداد $-1/5$ و $-1/6$ است.

اشاره اگر $-1/56$ یعنی جواب معادله را در طرفین معادله قرار

دهیم به $2/6 = 2/6$ می‌رسیم.

۴۱۸. گزینه ۲ الف) اگر $x \geq 3$ باشد قدرمطلق را برمی‌داریم:

$$\sqrt{5+4x-x^2} = x-3+2 = x-1$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 5+4x-x^2 = x^2-2x+1 \Rightarrow 2x^2-6x-4=0$$

اشاره اگر مثلاً معادله به صورت $\sqrt{x-7} + \sqrt{9-\sqrt{7-x}} = 4$

بود، باز هم تنها عضو دامنه $x = 7$ می‌شد اما با قراردادن $x = 7$ به $3 = 4$ می‌رسیدیم و می‌گفتیم معادله جواب ندارد.

۴۱۱. گزینه ۲ مختصات نقطه M روی خط $y = 4$ به صورت $M(x, 4)$

است. پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} \text{فاصله } M(x, 4) \text{ از مبدأ} &= \sqrt{x^2 + 4^2} \\ \text{فاصله } M(x, 4) \text{ از خط } x = 2 &= |x - 2| \end{aligned} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{مساوی‌اند}} \sqrt{x^2 + 16} = |x - 2|$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2 + 16 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow 4x = -12$$

$$\Rightarrow x = -3$$

$$AM = 2BM$$

۴۱۲. گزینه ۲ سؤال گفته:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (1-0)^2} = 2\sqrt{(x-(-1))^2 + (1-0)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 4 + 1} = 2\sqrt{x^2 + 2x + 1 + 1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 5} = 2\sqrt{x^2 + 2x + 2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2 - 4x + 5 = 4(x^2 + 2x + 2) = 4x^2 + 8x + 8$$

$$\Rightarrow 0 = 3x^2 + 12x + 3 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = S = -\frac{b}{a} = -4$$

۴۱۳. گزینه ۲ فاصله $A(x, 0)$ از $F(2, 4)$ برابر $\sqrt{(x-2)^2 + (0-4)^2}$

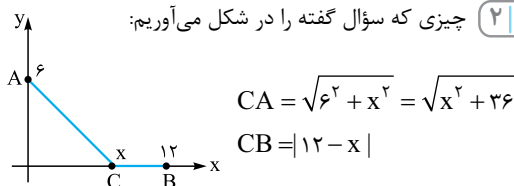
است. فاصله $A(x, 0)$ از خط $x = -1$ هم برابر $|x - (-1)|$ است. پس داریم:

$$\sqrt{(x-2)^2 + 16} = |x+1|$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (x^2 - 4x + 4 + 16) = x^2 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow -4x + 20 = 2x + 1 \Rightarrow 6x = 19 \Rightarrow x = \frac{19}{6}$$

۴۱۴. گزینه ۲ چیزی که سؤال گفته را در شکل می‌آوریم:



و با فرض سؤال یعنی $x < 12$ داریم: $CB = 12 - x$ پس مجموع فواصل C از دو نقطه A و B برابر است با:

$$CA + CB = \sqrt{x^2 + 36} + 12 - x = 14$$

$$\xrightarrow{\text{رابطه را تنه‌کنیم}} \sqrt{x^2 + 36} = x + 2$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2 + 36 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow 4x = 32$$

$$\Rightarrow x = 8 \Rightarrow \frac{CA}{CB} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \Rightarrow \text{نسبت} = \frac{CB}{CA} = 2/5$$

۴۱۵. گزینه ۳ راه حل این تست کمی خلاقانه است. $1-x$ را به صورت

$$(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{2} \Rightarrow x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$$

دقت کنید که $\frac{3 - \sqrt{17}}{2}$ منفی است و با شرط $x \geq 3$ سازگاری ندارد. پس $\alpha = 3$ و $\beta = 17$ و در نتیجه $\beta - \alpha = 14$.

(ب) اگر $x < 3$ باشد قدرمطلق را با علامت منفی برمی داریم:

$$\sqrt{5+4x-x^2} = -x+3+2 = -x+5$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} 5+4x-x^2 = x^2-10x+25$$

$$\Rightarrow 2x^2-14x+20=0$$

$$\Rightarrow x^2-7x+10=0 \xrightarrow{x < 3} x=2$$

این جواب که گنگ نیست.

۴۱۹. گزینه ۳ | اول دامنه رادیکال‌ها را پیدا کنیم:

$$\sqrt{x+\sqrt{-x^2+4x^2+25x-100}} + \sqrt{x^2+\sqrt{-x^2+6x-8}}$$

$$= x+2$$

$$-x^2+4x^2+25x-100 \geq 0$$

$$\Rightarrow -x^2(x-4)+25(x-4) \geq 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(-x^2+25) \geq 0 \Rightarrow (x-4)(-x+5)(x+5) \geq 0$$

تعیین علامت	x	-∞	-5	4	5	+∞
			+	-	+	-

$$\Rightarrow x \leq -5 \text{ یا } 4 \leq x \leq 5$$

$$-x^2+6x-8 \geq 0 \Rightarrow -(x^2-6x+8) \geq 0$$

$$\Rightarrow -(x-2)(x-4) \geq 0 \Rightarrow (x-2)(x-4) \leq 0$$

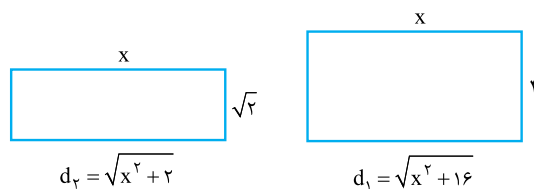
$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 2 \leq x \leq 4$$

حالا اشتراک این دو جواب می‌شود $\{4\}$ ، پس اگر معادله جواب داشته باشد فقط می‌تواند $x=4$ باشد، امتحان می‌کنیم:

$$x=4 \Rightarrow \sqrt{4+\sqrt{0}} + \sqrt{16+\sqrt{0}} = 4+2 \Rightarrow 2+4=4+2 \checkmark$$

پس معادله فقط یک ریشه دارد.

۴۲۰. گزینه ۳ |



سؤال می‌گوید:

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} x^2+16 = x^2+2+6+2\sqrt{6(x^2+2)}$$

$$\Rightarrow 8 = 2\sqrt{6(x^2+2)} \Rightarrow 4 = \sqrt{6(x^2+2)}$$

$$\Rightarrow 6(x^2+2) = 16 \Rightarrow x^2+2 = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{گویاکنیم}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$