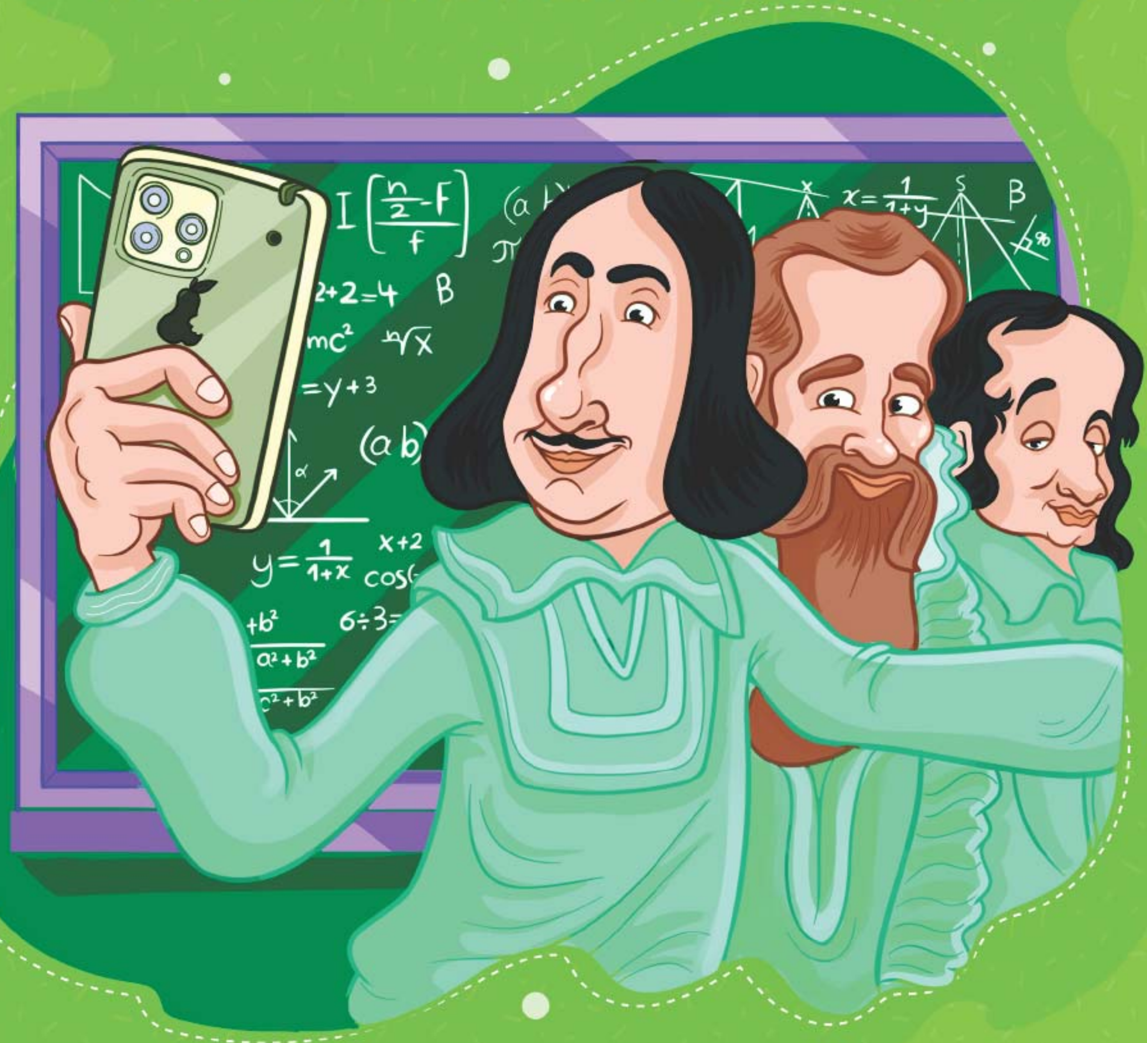
فصل اول: هندسهٔ تحلیلی و جبر

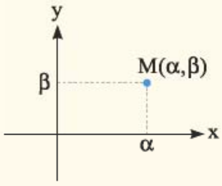
- درس اول: هندسهٔ تحلیلی
- درس دوم: معادلهٔ درجه دوم
- درس سوم: تابع درجه دوم
- درس چهارم: معادلات گویا و گنگ



درس اول: هندسهٔ تحلیلی

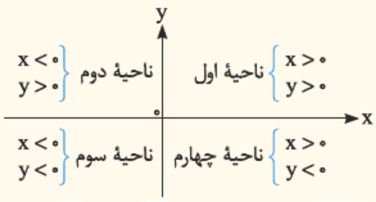
تست‌های مربوط به این درسنامه: ۱ تا ۳

مفاهیم اولیهٔ نقطه



در زمان‌های قدیم، ریاضی‌دانی به نام دکارت در خارج می‌زیست. او دو محور مختلف را بر هم عمود کرد و نتیجهٔ کارش ایجاد یک دستگاه به نام دستگاه مختصات دو بعدی یا همان دستگاه دکارتی شد. در این دستگاه محورهای افقی و عمودی را به ترتیب محور xها و yها می‌نامیم. این را هم بلد باشید که هر نقطه روی این دستگاه به‌صورت $M(\alpha,\beta)$ نمایش داده می‌شود. شکل مقابل را ببینید:

همان‌طور که از روی شکل زیر دیده می‌شود، دستگاه مختصات دارای چهار ناحیه (ربع) است و علامت x و y در هر ناحیه به‌صورت زیر می‌باشد:



مثلاً نقطهٔ $A(۲,-۳)$ در ناحیهٔ چهارم قرار دارد. همچنین محل برخورد دو محور، نقطهٔ $O(۰,۰)$ است که به آن مبدأ مختصات می‌گوییم.

تذکر: هر نقطه روی محورxها مختصاتش به‌صورت $A(x,۰)$ و هر نقطه روی محور yها به‌صورت $B(۰,y)$ می‌باشد (*قبوله؟*).

تست آموزشی اگر نقاط $A(۲\alpha+۱,\beta-۱)$ و $B(\alpha+۲,۲\beta)$ به‌ترتیب روی محور xها و yها باشند، نقطهٔ $C(\alpha,-\beta)$ در کدام ناحیه قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

پاسخ گزینه ۳ نقطهٔ A روی محور xها است، پس y آن صفر و همچنین نقطهٔ B روی محور yها است، در نتیجه x آن صفر می‌باشد، پس می‌توان نوشت:

$$\beta-۱=۰\Rightarrow\beta=۱ \quad , \quad \alpha+۲=۰\Rightarrow\alpha=-۲$$

خلاصه اینکه نقطهٔ $C(\alpha,-\beta)$ به‌صورت $C(-۲,-۱)$ در می‌آید که به‌وضوح این نقطه در ناحیهٔ سوم محورهای مختصات قرار دارد.

تست آموزشی نقطهٔ $A(m^۲+۲m,-m+۱)$ در ناحیهٔ دوم قرار دارد. حدود m کدام است؟

۱) $۰<m<۱$ ۲) $-۲<m<۰$ ۳) $m<۱$ ۴) $m>-۲$

پاسخ گزینه ۲ شرط آنکه یک نقطه در ناحیهٔ دوم باشد این است که طولش منفی و عرضش مثبت باشد، پس داریم:

$$\begin{cases} m^۲+۲m<۰\Rightarrow m(m+۲)<۰ \\ -m+۱>۰\Rightarrow m<۱ \qquad (۲)\end{cases} ;$$

m	$-\infty$		-۲		۰		$+\infty$
$m^۲+۲m$		+	۰	−	۰	+	

$$\Rightarrow -۲<m<۰ \quad (۱)$$

در نهایت با اشتراک‌گیری از دو محدودهٔ (۱) و (۲)، حدود m به‌صورت $-۲<m<۰$ به‌دست می‌آید.

تست‌های مربوط به این درسنامه: ۴ تا ۲۴

مفاهیم اولیهٔ خط

اقلیدس می‌گفت از هر دو نقطهٔ متمایز فقط یک خط می‌گذرد. معادلهٔ خط یک رابطه بین x و y است. همچنین اگر نقطهٔ A روی خطی قرار داشته باشد، مختصات طول و عرض آن در معادلهٔ خط صدق می‌کند. برای مثال نقطهٔ $A(۲,۶)$ روی خط $y=۳x$ قرار دارد ولی این نقطه روی خط $y=x+۵$ قرار ندارد. ببینید:

$$y=۳x\xrightarrow{A(۲,۶)}۶=۳(۲)\ ✓ \qquad , \qquad y=x+۵\xrightarrow{A(۲,۶)}۶=۲+۵\ ×$$

مثال آموزشی نقطهٔ $A(۲,-۴)$ روی خط $y=\frac{x}{a}+۲a+۱$ قرار دارد. a را پیدا کنید.

پاسخ اگر نقطهٔ $A(۲,-۴)$ بخواهد روی خط $y=\frac{x}{a}+۲a+۱$ قرار داشته باشد، باید مختصات طول و عرضش روی خط صدق کند، پس می‌توان نوشت:

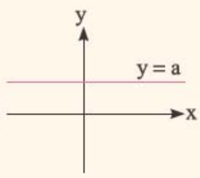
$$y=\frac{x}{a}+۲a+۱\xrightarrow{A(۲,-۴)\ \text{روی خط است.}}-۴=\frac{۲}{a}+۲a+۱\Rightarrow\frac{۲}{a}+۲a+۵=۰$$

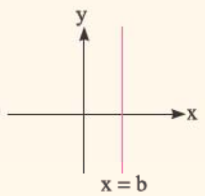
$$\xrightarrow{\times a}۲+۲a^۲+۵a=۰\Rightarrow ۲a^۲+۵a+۲=۰\ ;\ \Delta=(۵)^۲-۴(۲)(۲)=۲۵-۱۶=۹\Rightarrow\begin{cases}a_۱=\frac{-۵+۳}{۴}=\frac{-۲}{۴}=\frac{-۱}{۲}\\ a_۲=\frac{-۵-۳}{۴}=\frac{-۸}{۴}=-۲\end{cases}$$

هر خط از سه عنصر مهم شیب، عرض از مبدأ و طول از مبدأ تشکیل شده است که هر کدام را به‌طور مفصل خدمتتان عرض می‌کنیم:

شیب خط و روش‌های پیدا کردن آن

خط‌هایی که نمودارشان به‌صورت  است، شیب‌شان مثبت و خط‌هایی که نمودارشان به‌صورت  می‌باشد، شیب‌شان منفی است. همچنین دو حالت خاص $y=a$ و $x=b$ را هم بلد باشید:





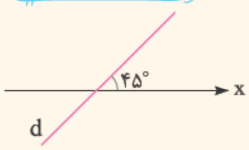
دقت داشته باشید که شیب خط افقی $y=a$ برابر صفر و شیب خط عمودی $x=b$ تعریف نشده (∞) است. (*جانِ من یادتون نره که معادلهٔ خط‌های افقی* $y=\bigcirc$ *و معادلهٔ خط‌های عمودی* $x=\bigcirc$ *هستن.*)

شیب خط از یکی از دو حالت زیر به‌دست می‌آید:

حالت اول (به‌کمک دو نقطه): اگر دو نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ را داشته باشیم، شیب خطی که از این دو نقطه می‌گذرد از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

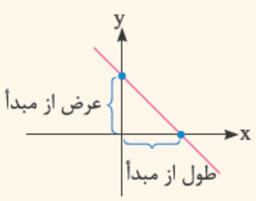
$$m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

حالت دوم (به‌کمک تانژانت زاویهٔ θ): شیب هر خط، تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد. برای مثال در شکل مقابل شیب خط d برابر $\tan(45^\circ)=1$ است:



عرض از مبدأ و طول از مبدأ

نقطهٔ برخورد خط با محور yها را عرض از مبدأ و نقطهٔ برخورد آن با محور xها را طول از مبدأ می‌نامیم. برای درک بهتر، شکل مقابل را ببینید:

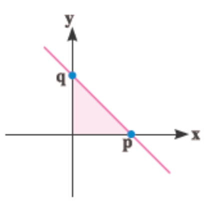


به زبان ساده‌تر اینکه برای پیدا کردن عرض از مبدأ یک خط به‌جای x آن، صفر و برای پیدا کردن طول از مبدأ یک خط به‌جای y آن، صفر قرار می‌دهیم (*قبوله؟*).

نکته

اگر طول از مبدأ و عرض از مبدأ یک خط به‌ترتیب p و q باشند، معادلهٔ خط و مساحت مثلث ایجاد شده با محورهای مختصات، از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آیند:

$$\text{مساحت}: S=\frac{1}{2}|p\times q| \quad , \quad \text{معادلهٔ خط}: \frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$$

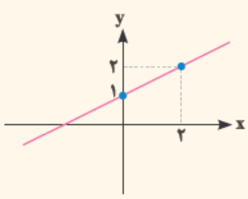


برای مثال معادلهٔ خطی که طول از مبدأ آن ۴ و عرض از مبدأ آن ۳ است به‌صورت $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ می‌باشد.

تذکر: برای کشیدن نمودار هر خط، تنها کافی است که دو نقطه از آن خط را داشته باشیم و آن‌ها را به‌هم وصل کنیم. برای مثال نمودار خط $y=\frac{x}{2}+1$ به‌صورت مقابل رسم می‌شود:

$y=\frac{x}{2}+1$ ؛

x	۰	۲
y	۱	۲

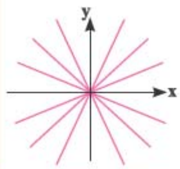


معادلهٔ خط

مواد لازم برای نوشتن معادلهٔ هر خط، داشتن شیب و یک نقطه از آن خط است. اگر شیب خط برابر m و مختصات یک نقطه از خط به‌صورت $A(x_1,y_1)$ باشد، معادلهٔ خط از رابطهٔ مقابل به‌دست می‌آید:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

نکته



بلد باشید که معادلهٔ خطوط گذرنده از مبدأ مختصات به‌صورت $y = mx$ می‌باشد. دلیلش هم این است که عرض از مبدأ این خطوط مساوی صفر است.

و در آخر کسی هست که ندونه $y = x$ نیمساز ناحیهٔ اول و سوم و $y = -x$ نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم است؟

تذکر: برای پیدا کردن نقطهٔ تلاقی دو خط، آن‌ها را در یک دستگاه قرار می‌دهیم و با حل این دستگاه دو معادله دو مجهول، نقطهٔ تلاقی دو خط را پیدا می‌کنیم.

مثال آموزشی نقطهٔ تلاقی دو خط $2x + y = 1$ و $4x + y - 5 = 0$ را به‌دست آورید.

پاسخ برای پیدا کردن نقطهٔ تلاقی دو خط، دستگاه شامل این دو معادله را تشکیل می‌دهیم و از آن x و y را پیدا می‌کنیم، ببینید:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + y = 5 \end{cases} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{cases} -2x - \cancel{y} = -1 \\ 4x + \cancel{y} = 5 \end{cases} \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = -3$$

پس نقطهٔ تلاقی این دو خط، نقطهٔ $A(2, -3)$ است.

تست آموزشی اگر نقطهٔ $A(2, -2)$ روی خط $y - ax + 4 = 0$ قرار داشته باشد، مجموع طول از مبدأ و عرض از مبدأ این خط کدام است؟

۱) صفر ۲) -4 ۳) -8 ۴) -10

پاسخ گزینه ۱ با توجه به این‌که نقطهٔ $A(2,-2)$ روی خط $y - ax + 4 = 0$ قرار دارد، پس مختصات طول و عرضش روی این خط صدق می‌کند، یعنی:

$$y - ax + 4 = 0 \xrightarrow{\text{روی خط قرار دارد. } A(2,-2)} -2 - 2a + 4 = 0 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

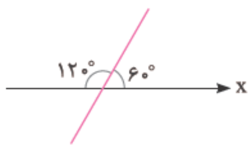
پس معادلهٔ خط به‌صورت $y - x + 4 = 0$ است و همچنین مجموع طول از مبدأ و عرض از مبدأ آن برابر است با:

$$\begin{cases} \text{عرض از مبدأ}: x = 0 \Rightarrow y = -4 \\ \text{طول از مبدأ}: y = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{طول از مبدأ} + \text{عرض از مبدأ} = -4 + (4) = 0$$

تست آموزشی عرض از مبدأ خطی که با جهت منفی محور xها زاویهٔ 120° می‌سازد و از نقطهٔ $(4,1)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $4\sqrt{3} - 1$ ۲) $4\sqrt{3} + 1$ ۳) $-4\sqrt{3} + 1$ ۴) $-4\sqrt{3} - 1$

پاسخ گزینه ۳ وقتی یک خط با جهت منفی محور xها زاویهٔ 120° می‌سازد، زاویه‌اش با جهت مثبت محور xها 60° است و در نتیجه شیب این خط مساوی با $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ می‌باشد. از طرفی با توجه به این‌که این خط از نقطهٔ $(4,1)$ می‌گذرد، پس معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:



$$y - 1 = \sqrt{3}(x - 4)$$

در آخر برای پیدا کردن عرض از مبدأ این خط به‌جای x آن صفر می‌گذاریم، پس می‌توان نوشت:

$$x = 0 : y - 1 = \sqrt{3}(0 - 4) \Rightarrow y = -4\sqrt{3} + 1$$

تست آموزشی خطی که از نقطهٔ تقاطع دو خط $y = 2x + 3$ و $2y - x + 9 = 0$ و نقطهٔ $A(1,1)$ می‌گذرد، با محورهای مختصات چه مساحتی ایجاد می‌کند؟

۱) $\frac{1}{24}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{8}$

پاسخ گزینه ۱ اول از همه نقطهٔ تلاقی دو خط داده شده را به کمک حل دستگاه دو معادله دو مجهول پیدا می‌کنیم، ببینید:

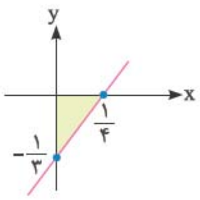
$$\begin{cases} y - 2x = 3 \\ 2y - x = -9 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} -\cancel{2y} + 4x = -6 \\ \cancel{2y} - x = -9 \end{cases} \Rightarrow 3x = -15 \Rightarrow x = -5 \Rightarrow y = -7$$

در واقع نقطهٔ تلاقی این دو خط به‌صورت $B(-5,-7)$ است. حالا با توجه به این‌که خط موردنظر از نقاط $A(1,1)$ و $B(-5,-7)$ می‌گذرد، معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$m = \frac{-7-1}{-5-1} = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3} \text{ ؛ معادلهٔ خط: } y - 1 = \frac{4}{3}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$$

حالا برای پیدا کردن مساحتی که این خط با محورهای مختصات می‌سازد، نمودارش را می‌کشیم، ببینید:

$$y=\frac{۴}{۳}x-\frac{۱}{۳}\;;\quad \begin{array}{c|cc} x & ۰ & \frac{۱}{۴} \\ \hline y & \frac{-۱}{۳} & ۰ \end{array}$$



در نتیجه مساحت مثلث ایجادشده برابر با $S=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲۴}$ است.

تست‌های مربوط به این درسنامه: ۲۵ تا ۴۴

فرم کلی خط و وضعیت خطوط نسبت به هم

به‌طور کلی معادلهٔ هر خط به یکی از دو حالت $y=mx+h$ یا $ax+by+c=۰$ است که ویژگی‌های هر کدام را به‌طور مفصل بررسی می‌کنیم:

حالت اول $(y=mx+h)$: این فرم، استاندارد نامیده می‌شود. در این حالت m شیب خط و h عرض از مبدأ خط است. برای پیدا کردن طول از مبدأ y را صفر می‌گذاریم، یعنی $x=\frac{-h}{m}$.

حالت دوم $(ax+by+c=۰)$: این فرم، گسترده نامیده می‌شود. در این حالت، شیب، عرض از مبدأ و طول از مبدأ از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آیند:

$\boxed{\text{طول از مبدأ}=\frac{-c}{a}}$, $\boxed{\text{عرض از مبدأ}=\frac{-c}{b}}$, $\boxed{\text{شیب}=-\frac{a}{b}}$

اصلاً توصیه نمی‌کنیم فرمول‌های گفته‌شده را حفظ کنید. فقط کافی است y را تنها کنید تا شیب و عرض از مبدأ پیدا شوند. همچنین برای طول از مبدأ هم به‌جای y، صفر بگذارید، ببینید:

$$ax+by+c=۰\Rightarrow by=-ax-c\xrightarrow{\div b}y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}\Rightarrow\begin{cases}\text{شیب}=\frac{-a}{b}\\ \text{عرض از مبدأ}=\frac{-c}{b}\end{cases}$$

$$y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}\xrightarrow{y=۰}\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}=۰\Rightarrow\frac{-a}{\cancel{b}}x=\frac{c}{\cancel{b}}\Rightarrow x=\frac{-c}{a}\ (\text{طول از مبدأ})$$

وضعیت دو خط نسبت به هم

منظور از وضعیت دو خط نسبت به هم یکی از سه حالت موازی، عمود و منطبق بودن است. قبل از آوردن یک جدول مهم و همهٔ ریزه‌کاری‌های مربوط به وضعیت دو خط، حواستان باشد که وقتی دو خط با هم موازی هستند، شیب‌هایشان برابر و وقتی که دو خط بر هم عمود هستند، شیب‌هایشان قرینه و معکوس هم است.

این هم جدولی که قولش را داده بودیم ...

خطوط	فرم کلی	موازی بودن (غیرمنطبق)	عمود بودن	منطبق بودن
استاندارد	$y=mx+h$ و $y=m'x+h'$	$m=m'$ و $h\neq h'$	$m\times m'=-۱$	$m=m'$ و $h=h'$
گسترده	$ax+by+c=۰$ و $a'x+b'y+c'=۰$	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$	$aa'+bb'=۰$	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

برای مثال دو خط $۲y+x+۱=۰$ و $۳y-۶x+۵=۰$ بر هم عمودند، دلیلش را هم ببینید:

$$\begin{cases} x+۲y+۱=۰ \quad (a=۱ , b=۲) \\ -۶x+۳y+۵=۰ \quad (a'=-۶ , b'=۳) \end{cases} \xrightarrow{aa'+bb'=۰} \text{دو خط داده شده بر هم عمودند.}$$

البته اگر از این سوسول‌بازی‌ها رنج می‌برید، می‌توانید yها را تنها کرده و شیب خطوط را پیدا کنید. مطمئن باشید که شیب‌های به‌دست آمده باید قرینه و معکوس هم باشند (*مله؟*).

مثال آموزشی **به‌ازای چه مقداری از m، دو خط $(m-۳)x-(۲-m)y=۴$ و $y=-x+۲$ موازی هستند؟**

پاسخ شرط آن‌که دو خط داده‌شده موازی باشند این است که شیب‌هایشان برابر باشد. همچنین همگی می‌دانیم شیب خط $y=-x+۲$، مساوی -۱ است، پس باید شیب خط دیگر هم -۱ باشد، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$(m-۳)x-(۲-m)y-۴=۰ \quad , \quad \text{شیب} = -\frac{m-۳}{-(۲-m)}=\frac{m-۳}{۲-m}$$

$$\text{برابری شیب‌ها:} \ \frac{m-۳}{۲-m}=-۱ \Rightarrow \cancel{m}-۳=-۲+\cancel{m} \quad \times$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، هیچ‌وقت دو خط داده‌شده با هم موازی نمی‌شوند.

تست آموزشی **به‌ازای کدام مقدار a، دو خط $-y+(۲a+۱)x-۲=۰$ و $(a+۱)y=x+۳$ بر هم عمودند؟**

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{-۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{-۲}{۳}$

پاسخ گزینه ۴ شرط آن‌که دو خط در حالت گستردهٔ $ax+by+c=۰$ و $a'x+b'y+c'=۰$ بر هم عمود باشند این است که $aa'+bb'=۰$ باشد، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} (۲a+۱)x-y-۲=۰ \\ x-(a+۱)y+۳=۰ \end{cases} \Rightarrow (۲a+۱)(۱)+(-۱)(-(a+۱))=۰ \Rightarrow ۲a+۱+a+۱=۰ \Rightarrow ۳a+۲=۰ \Rightarrow a=\frac{-۲}{۳}$$

البته می‌توانستیم برای حل این تست، yها را تنها کرده و شیب هر یک از خطوط را پیدا کنیم. در آخر چون دو خط داده‌شده باید بر هم عمود باشند، حاصل‌ضربشان -۱ است (*رریفه؟*).

تست آموزشی **معادلهٔ خطی که عمود بر خط $y+۲x+۱=۰$ بوده و عرض از مبدأ آن ۳ برابر عرض از مبدأ این خط است، کدام می‌باشد؟**

۱) $y=-۲x-۳$ ۲) $y=-۲x+۳$ ۳) $y=\frac{۱}{۲}x+۳$ ۴) $y=\frac{۱}{۲}x-۳$

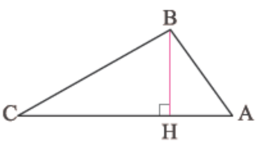
پاسخ گزینه ۴ شیب و عرض از مبدأ خط $y+۲x+۱=۰$ به‌ترتیب -۲ و -۱ است. حالا طبق فرض مسئله به‌دنبال پیدا کردن معادلهٔ خطی هستیم که شیبش $\frac{۱}{۲}$ و عرض از مبدأش -۳ باشد، پس می‌توان نوشت:

$$m=\frac{۱}{۲} , A(۰,-۳) ; \quad \text{معادلهٔ خط:} \ y+۳=\frac{۱}{۲}(x-۰) \Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x-۳$$

تست آموزشی **رئوس مثلثی نقاط $A(۳,۰)$، $B(۱,۲)$ و $C(-۲,۴)$ هستند. امتداد ارتفاع BH محور xها را با چه طولی قطع می‌کند؟**

۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{-۲}{۵}$ ۳) $\frac{-۳}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

پاسخ گزینه ۳ مطابق شکل زیر، چون ارتفاع BH بر ضلع AC عمود است، پس شیبش عکس و قرینهٔ آن می‌باشد، پس اول از همه شیب خط AC را پیدا کرده و سپس از روی آن، شیب BH و در نتیجه معادلهٔ آن را به‌دست می‌آوریم، ببینید:



$$m_{AC}=\frac{۴-۰}{-۲-۳}=-\frac{۴}{۵} \Rightarrow m_{BH}=\frac{۵}{۴} \ ; \ \text{معادلهٔ BH:} \ y-۲=\frac{۵}{۴}(x-۱)$$

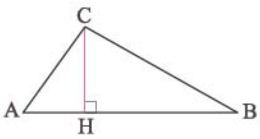
در آخر برای آن‌که ببینیم امتداد ارتفاع BH محور xها را با چه طولی قطع می‌کند، به‌جای y آن صفر می‌گذاریم، پس داریم:

$$y-۲=\frac{۵}{۴}(x-۱) \xrightarrow{y=۰} -۲=\frac{۵}{۴}x-\frac{۵}{۴} \Rightarrow \frac{۵}{۴}x=\frac{-۳}{۴} \Rightarrow x=\frac{-۳}{۵}$$

تست آموزشی **سه ضلع مثلثی به معادلات $AB: x+y=۰$، $AC: ۲x-y=۴$ و $BC: -x+۲y=۱$ هستند. معادلهٔ ارتفاع CH کدام است؟**

۱) $y=x-۱$ ۲) $y=x+۱$ ۳) $y=-x-۱$ ۴) $y=\frac{x}{۲}+۱$

پاسخ گزینه ۱ مطابق شکل زیر ارتفاع CH بر خط AB عمود است، پس با توجه به این‌که $m_{AB}=-۱$ است، پس $m_{CH}=۱$ می‌باشد. از طرفی نقطهٔ C محل برخورد دو خط AC و BC است، پس با حل دستگاه شامل این دو معادله، مختصات نقطهٔ C هم به‌دست می‌آید، ببینید:



$$\begin{cases}۲x-y=۴\\-x+۲y=۱\end{cases}\xrightarrow{\times ۲}\begin{cases}\cancel{۲x}-y=۴\\\cancel{-۲x}+۴y=۲\end{cases}\Rightarrow ۳y=۶\Rightarrow y=۲\Rightarrow x=۳$$

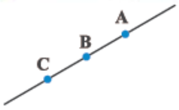
در نتیجه مختصات نقطهٔ C به‌صورت $C(۳,۲)$ می‌باشد و معادلهٔ ارتفاع CH برابر است با:

$$m_{CH}=۱,\ C(۳,۲)\ ;\ \text{معادلهٔ } CH: y-۲=۱(x-۳)\Rightarrow y=x-۱$$

نکته

شرط آن‌که سه نقطهٔ A ، B و C روی یک خط (در یک راستا یا در یک امتداد) باشند، این است که:

$$\boxed{m_{AB}=m_{BC}}$$



تست آموزشی اگر سه نقطهٔ $A(m,۴)$ ، $B(۱,۰)$ و $C(۱-m,۱)$ در یک امتداد باشند، m کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۵}$

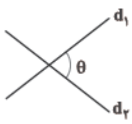
پاسخ گزینه ۱ شرط آن‌که سه نقطهٔ A ، B و C در یک امتداد باشند آن است که $m_{AB}=m_{BC}$ ، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}m_{AB}=\dfrac{۴-۰}{m-۱}=\dfrac{۴}{m-۱}\\[2mm] m_{BC}=\dfrac{۱-۰}{۱-m-۱}=\dfrac{۱}{-m}\end{cases}\xrightarrow{m_{AB}=m_{BC}}\frac{۴}{m-۱}=\frac{۱}{-m}\Rightarrow -۴m=m-۱\Rightarrow ۵m=۱\Rightarrow m=\frac{۱}{۵}$$

نکته

اگر شیب دو خط $d_۱$ و $d_۲$ به‌ترتیب $m_۱$ و $m_۲$ باشد، تانژانت زاویهٔ بین این دو خط از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

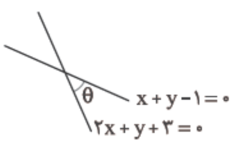
$$\tan\theta=\left|\frac{m_۱-m_۲}{۱+m_۱m_۲}\right|$$



تست آموزشی تانژانت زاویه‌ای که دو خط $x+y-۱=۰$ و $۲x+y+۳=۰$ با هم می‌سازند، چند است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

پاسخ گزینه ۲ اول از همه شیب دو خط داده‌شده را محاسبه می‌کنیم و سپس برای پیدا کردن تانژانت زاویه‌ای که این دو خط با هم می‌سازند، سراغ فرمول $\tan\theta=\left|\frac{m_۱-m_۲}{۱+m_۱m_۲}\right|$ می‌رویم، ببینید:



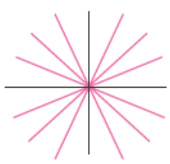
$$x+y-۱=۰\Rightarrow m_۱=-۱\ ,\ ۲x+y+۳=۰\Rightarrow m_۲=-۲$$

$$\tan\theta=\left|\frac{m_۱-m_۲}{۱+m_۱m_۲}\right|=\left|\frac{-۱-(-۲)}{۱+(-۱)(-۲)}\right|=\frac{۱}{۳}$$

نکته

دسته‌خطوط: وقتی در معادلهٔ یک خط به‌جز x و y یک پارامتر دیگر هم وجود داشته باشد، در اصطلاح به آن دسته خطوط می‌گوییم.

برای مثال $y=mx$ معادلهٔ یک دسته‌خطوط است. ویژگی جالب دسته‌خطوط این است که همگی از یک نقطهٔ ثابت می‌گذرند، ببینید:



همچنین بدانید که برای پیدا کردن این نقطهٔ ثابت، به m دو عدد دلخواه می‌دهیم تا به‌صورت رَندُم دو تا از خط‌ها به‌دست آیند.

حالا دو خط به‌دست آمده را در یک دستگاه معادلات قرار می‌دهیم تا مختصات نقطهٔ ثابت دسته‌خطوط پیدا شود.

تست آموزشی **خطی از دسته‌خطوط $2kx+(k+1)y-1=0$ با خط $y-2x=4$ موازی است. طول از مبدأ این خط کدام است؟**

۱) 1 ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{-1}{2}$

پاسخ گزینه ۲ شیب خط $y=2x+4$ مساوی ۲ است و چون خطی از دسته‌خطوط $2kx+(k+1)y-1=0$ با خط $y=2x+4$ موازی است، پس شیب‌هایشان با هم برابر می‌باشد، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$2kx+(k+1)y-1=0 \text{ ؛شیب } = \frac{-2k}{k+1} \xrightarrow[y=2x+4]{\text{موازی با خط}} \frac{-2k}{k+1}=2 \Rightarrow -2k=2k+2 \Rightarrow 4k=-2 \Rightarrow k=\frac{-1}{2}$$

در نتیجه خط موردنظر $2(\frac{-1}{2})x+(\frac{-1}{2}+1)y-1=0$ یا $-x+\frac{1}{2}y-1=0$ می‌باشد که طول از مبدأ آن برابر است با:

$$-x+\frac{1}{2}y-1=0 \xrightarrow{y=0} -x-1=0 \Rightarrow x=-1$$

از اینجا به بعد وارد مباحث اصلی کتاب یازدهم در بخش هندسه تحلیلی می‌شویم. آماده‌اید؟

تست‌های مربوط به این درسنامه: ۴۵ تا ۵۵

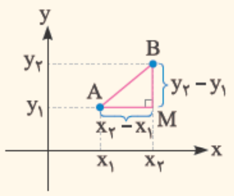
فاصلهٔ دو نقطه

برای پیدا کردن فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ از فرمول مقابل استفاده می‌کنیم:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

فرمول گفته‌شده، دقیقاً از دل قضیهٔ فیثاغورس آمده است. اثباتش را هم ببینید:

قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AMB:



$$AB^2=AM^2+BM^2 \Rightarrow AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

برای مثال فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(3,0)$ و $B(7,3)$ برابر است با:

$$AB=\sqrt{(7-3)^2+(3-0)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

علاقه‌مندان به فرمول می‌توانند در حالت‌های خاص زیر، از فرمول‌های گفته‌شده در این نکته استفاده کنند:

نکته

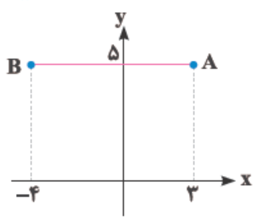
۱) **فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ از مبدأ مختصات برابر است با:** $OA=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

۲) **فاصلهٔ دو نقطهٔ هم‌عرض $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_1)$ برابر است با:** $AB=|x_2-x_1|$

۳) **فاصلهٔ دو نقطهٔ هم‌طول $A(x_1,y_1)$ و $B(x_1,y_2)$ برابر است با:** $AB=|y_2-y_1|$

برای مثال فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(3,5)$ و $B(-4,5)$ برابر $AB=|-4-3|=7$ است.

این هم شکلش که از روی آن به راحتی دیده می‌شود که فاصلهٔ این دو نقطه برابر ۷ است.



تست آموزشی **اگر نقاط $A(2,4)$ ، $B(5,0)$ و $C(-2,1)$ رئوس یک مثلث باشند، نوع این مثلث کدام است؟**

۱) قائم‌الزاویه ۲) قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ۳) متساوی‌الساقین ۴) مختلف‌الاضلاع

پاسخ گزینه ۲ به کمک فرمول فاصلهٔ دو نقطه، اندازهٔ اضلاع AB ، AC و BC را پیدا می‌کنیم، داریم:

$$AB=\sqrt{(5-2)^2+(0-4)^2}=\sqrt{9+16}=5$$

$$AC=\sqrt{(2-(-2))^2+(4-1)^2}=\sqrt{16+9}=5$$

$$BC=\sqrt{(5-(-2))^2+(0-1)^2}=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

با توجه به این‌که اضلاع AB و AC برابر هستند، پس مثلث حتماً متساوی‌الساقین است. از طرفی چون در بین گزینه‌ها هم متساوی‌الساقین و هم قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین وجود دارد باید مطمئن شویم که آیا این مثلث قائم‌الزاویه است یا نه؟ *کسی هست که نرونه اگر مثلثی قائم‌الزاویه باشد، حتماً قضیهٔ فیثاغورس در آن صدق می‌کند؟*

$$BC=\sqrt{۵۰}\ ,\ AB=۵\ ,\ AC=۵\ ;\ BC^{۲}=AB^{۲}+AC^{۲}\Rightarrow(\sqrt{۵۰})^{۲}=(۵)^{۲}+(۵)^{۲}\Rightarrow ۵۰=۵۰\ \checkmark$$

اضلاع مثلث در قضیهٔ فیثاغورس صدق می‌کنند، در نتیجه این مثلث علاوه بر آن‌که متساوی‌الساقین است، قائم‌الزاویه هم می‌باشد.

حالا نوبت یک تست فوقِ مهم و متفاوته

تست آموزشی **نقطهٔ A در ناحیهٔ سوم روی خط $y=۳x$ قرار دارد. اگر فاصلهٔ مبدأ مختصات از نقطهٔ A برابر $\sqrt{۱۰}$ باشد، مجموع طول و عرض نقطهٔ A کدام است؟**

۱) -۶ ۲) -۴ ۳) -۸ ۴) -۱۰

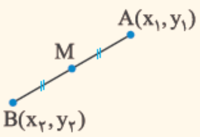
پاسخ گزینه ۲ مختصات هر نقطه روی خط $y=۳x$ به‌صورت $A(\alpha,۳\alpha)$ است. *(آخه y باید ۳ برابر x باشه دیگه.)* از طرفی طبق فرض مسئله $OA=\sqrt{۱۰}$ است، پس می‌توان نوشت:

$$OA=\sqrt{(\alpha)^{۲}+(۳\alpha)^{۲}}=\sqrt{۱۰}\Rightarrow\sqrt{۱۰\alpha^{۲}}=\sqrt{۱۰}\Rightarrow ۱۰\alpha^{۲}=۱۰\Rightarrow\alpha^{۲}=۱\Rightarrow\alpha=\pm ۱\Rightarrow\begin{cases}A(۱,۳)\ \times\\ A(-۱,-۳)\ \checkmark\end{cases}$$

توجه داشته باشید که نقطهٔ A در ناحیهٔ سوم می‌باشد، پس مختصات طول و عرضش حتماً منفی است. در نهایت مجموع طول و عرض نقطهٔ A برابر $-۱+(-۳)=-۴$ می‌باشد.

تست‌های مربوط به این درسنامه: ۵۶ تا ۷۴

مختصات وسط پاره‌خط



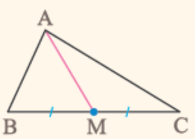
نقاط $A(x_{۱},y_{۱})$ و $B(x_{۲},y_{۲})$ دو سر پاره‌خط AB هستند. نقطهٔ وسط این پاره‌خط از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{مختصات وسط پاره‌خط AB}=M\left(\frac{x_{۱}+x_{۲}}{۲},\frac{y_{۱}+y_{۲}}{۲}\right)$$

تذکر: مهم‌ترین کاربرد فرمول مختصات وسط پاره‌خط برای محاسبهٔ میانه و عمودمنصف می‌باشد.

مثال آموزشی **در مثلث ABC با رئوس $A(۲,-۳)$، $B(۰,۴)$ و $C(-۲,۲)$، اندازهٔ میانهٔ وارد بر ضلع BC چند واحد است؟**

پاسخ مطابق شکل زیر، برای پیدا کردن اندازهٔ میانهٔ وارد بر ضلع BC، یعنی پاره‌خط AM ابتدا مختصات نقطهٔ M که وسط پاره‌خط BC است را پیدا می‌کنیم، پس داریم:



$$\begin{cases}x_M=\dfrac{x_B+x_C}{۲}=\dfrac{۰-۲}{۲}=-۱\\ y_M=\dfrac{y_B+y_C}{۲}=\dfrac{۴+۲}{۲}=۳\end{cases}\Rightarrow M(-۱,۳)$$

حالا با داشتن دو نقطهٔ $A(۲,-۳)$ و $M(-۱,۳)$ اندازهٔ پاره‌خط AM را به راحتی پیدا می‌کنیم، ببینید:

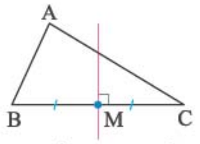
$$AM=\sqrt{(۲-(-۱))^{۲}+(-۳-۳)^{۲}}=\sqrt{۹+۳۶}=\sqrt{۴۵}=۳\sqrt{۵}$$

تست آموزشی **در مثلثی با رئوس $A(۲,۱)$، $B(۰,۲)$ و $C(۴,۴)$، معادلهٔ عمودمنصف ضلع BC کدام است؟**

۱) $y=۲x+۱$ ۲) $y=۲x+۷$ ۳) $y=-۲x+۱$ ۴) $y=-۲x+۷$

پاسخ گزینه ۴ عمودمنصف ضلع BC خطی است که از وسط پاره‌خط BC می‌گذرد و همچنین بر آن عمود می‌باشد، پس اول از همه باید مختصات نقطهٔ وسط ضلع BC و همچنین شیب پاره‌خط BC را به‌دست آوریم، داریم:

$$\begin{cases}x_M=\dfrac{x_B+x_C}{۲}=\dfrac{۰+۴}{۲}=۲\\ y_M=\dfrac{y_B+y_C}{۲}=\dfrac{۲+۴}{۲}=۳\end{cases}\Rightarrow M(۲,۳)\ ,\ m_{BC}=\frac{۴-۲}{۴-۰}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$



همچنین می‌دانیم که شیب عمودمنصف، عکس و قرینهٔ $m_{BC}=\frac{۱}{۲}$ است، پس شیب عمودمنصف ۲- می‌باشد. در آخر با داشتن نقطهٔ $M(۲،۳)$ و اینکه شیب عمودمنصف برابر ۲- است، معادلهٔ عمودمنصف را پیدا می‌کنیم، ببینید:

$$M(۲،۳)\,,\, m=-۲;\ \text{معادلهٔ عمود منصف}: y-۳=-۲(x-۲) \Rightarrow y=-۲x+۷$$

تست آموزشی **اگر اضلاع مثلث ABC به‌صورت $AB: ۲x+y=۳$ ، $AC: ۳x-y=۲$ و $BC: x+y=۱$ باشند، عرض نقطهٔ برخورد میانهٔ BM و خط $x=۱$ کدام نقطه است؟**

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

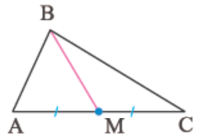
پاسخ گزینه ۱ دوبه‌دوی اضلاع را در دستگاه دو معادله دو مجهول قرار می‌دهیم تا مختصات نقاط A ، B و C پیدا شوند، پس داریم:

$$\begin{matrix}AB\\AC\end{matrix}\begin{cases}۲x+\cancel{y}=۳\\ ۳x-\cancel{y}=۲\end{cases}\Rightarrow ۵x=۵\Rightarrow x=۱\Rightarrow y=۱;\ A(۱،۱)$$

$$\begin{matrix}AB\\BC\end{matrix}\begin{cases}۲x+y=۳\\ x+y=۱\xrightarrow{\times(-۱)}\end{cases}\begin{cases}۲x+\cancel{y}=۳\\ -x-\cancel{y}=-۱\end{cases}\Rightarrow x=۲\Rightarrow y=-۱;\ B(۲،-۱)$$

$$\begin{matrix}AC\\BC\end{matrix}\begin{cases}۳x-\cancel{y}=۲\\ x+\cancel{y}=۱\end{cases}\Rightarrow ۴x=۳\Rightarrow x=\frac{۳}{۴}\Rightarrow y=\frac{۱}{۴};\ C(\frac{۳}{۴},\frac{۱}{۴})$$

از طرفی مطابق شکل مقابل، نقطهٔ M وسط ضلع AC است، پس داریم:



$$\begin{cases}x_M=\dfrac{x_A+x_C}{۲}=\dfrac{۱+\frac{۳}{۴}}{۲}=\dfrac{۷}{۸}\\[2ex] y_M=\dfrac{y_A+y_C}{۲}=\dfrac{۱+\frac{۱}{۴}}{۲}=\dfrac{۵}{۸}\end{cases}\Rightarrow M(\frac{۷}{۸},\frac{۵}{۸})$$

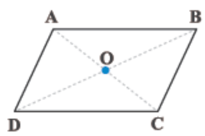
حالا باید معادلهٔ خط BM را پیدا کنیم، پس می‌توان نوشت:

$$m_{BM}=\frac{\frac{۵}{۸}-(-۱)}{\frac{۷}{۸}-۲}=\frac{\frac{۱۳}{۸}}{\frac{-۹}{۸}}=\frac{-۱۳}{۹}\,,\ \text{معادلهٔ خط } BM: y+۱=\frac{-۱۳}{۹}(x-۲)$$

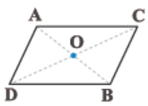
در آخر برای پیدا کردن نقطهٔ تلاقی دو خط BM و $x=۱$ ، به‌جای x عدد ۱ می‌گذاریم که جوابش $y=\frac{۴}{۹}$ می‌شود.

نکته

متوازی‌الاضلاع، یک چهارضلعی است که ضلع‌های روبه‌رویش با هم موازی و مساوی باشند. در متوازی‌الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می‌کنند. یعنی مطابق شکل مقابل، نقطهٔ O وسط دو پاره‌خط AC و BD است، پس می‌توان نوشت:



$$\begin{cases}x_O=\dfrac{x_A+x_C}{۲}\\[1ex] x_O=\dfrac{x_B+x_D}{۲}\end{cases}\Rightarrow \boxed{x_A+x_C=x_B+x_D}\quad ,\quad \begin{cases}y_O=\dfrac{y_A+y_C}{۲}\\[1ex] y_O=\dfrac{y_B+y_D}{۲}\end{cases}\Rightarrow \boxed{y_A+y_C=y_B+y_D}$$

فقط حواستان باشد که رابطهٔ گفته‌شده، برای رأس‌های روبه‌روی هم است، مثلاً در شکل  **تساوی‌های گفته‌شده به $x_A+x_B=x_C+x_D$ و $y_A+y_B=y_C+y_D$ تبدیل می‌شوند.**

تذکر: مستطیل، لوزی و مربع همگی حالت‌های خاص متوازی‌الاضلاع هستند، پس رابطهٔ گفته‌شده برای همگی آن‌ها برقرار است.

تست آموزشی **نقاط $A(۲,۳)$ ، $B(-۱,-۱)$ و $C(۱,-۲)$ سه رأس مستطیل ABCD هستند. اگر نقطهٔ D روی خط $y+ax=-۱۰$ باشد، a کدام است؟**

۱) ۵- ۲) ۶- ۳) ۲- ۴) ۳-

پاسخ گزینه ۴ نقاط A ، B ، C و D رئوس مستطیل ABCD هستند، پس برای پیدا کردن مختصات طول و عرض D می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D\Rightarrow ۲+۱=-۱+x_D\Rightarrow x_D=۴\\ y_A+y_C=y_B+y_D\Rightarrow ۳+(-۲)=-۱+y_D\Rightarrow y_D=۲\end{cases}\Rightarrow D(۴،۲)$$

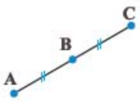
از طرفی نقطهٔ $D(۴,۲)$ روی خط $y+ax=-۱۰$ قرار دارد، پس مختصات طول و عرض آن روی این خط صدق می‌کند، داریم:

$$y+ax=-۱۰ \xrightarrow[\text{قرار دارد.}]{D(۴,۲)\ \text{روی خط}} ۲+۴a=-۱۰ \Rightarrow a=-۳$$

نکته

قرینهٔ نقطه نسبت به نقطه: قرینهٔ نقطهٔ $A(x_A,y_A)$ نسبت به نقطهٔ $B(x_B,y_B)$ را نقطهٔ $C(x_C,y_C)$ می‌نامیم. مطابق شکل زیر به‌وضوح دیده می‌شود که نقطهٔ B دقیقاً وسط دو نقطهٔ A و C است، پس می‌توان نوشت:

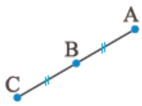
$$x_B=\frac{x_A+x_C}{۲}\ ,\ y_B=\frac{y_A+y_C}{۲}$$



تست آموزشی قرینهٔ نقطهٔ $A(۲,-۳)$ نسبت به نقطهٔ $B(۴,۰)$، نقطهٔ $C(a,b)$ است، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹

پاسخ گزینه ۴ مطابق شکل زیر، قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به B، نقطهٔ C می‌شود، وقتی که نقطهٔ B دقیقاً وسط A و C است، پس می‌توان نوشت:

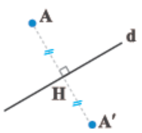


$$\begin{cases} x_B=\dfrac{x_A+x_C}{۲} \Rightarrow ۴=\dfrac{۲+x_C}{۲} \Rightarrow ۸=۲+x_C \Rightarrow x_C=۶ \\ y_B=\dfrac{y_A+y_C}{۲} \Rightarrow ۰=\dfrac{-۳+y_C}{۲} \Rightarrow ۰=-۳+y_C \Rightarrow y_C=۳ \end{cases} \Rightarrow C(۶,۳)$$

پس طبق فرض مسئله، چون $C(a,b)$ است، متوجه می‌شویم که $a=۶$، $b=۳$ و در نتیجه $a+b=۹$ است.

نکته

قرینهٔ نقطه نسبت به خط: برای پیدا کردن مختصات قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط d، یعنی نقطهٔ A'، اول از همه باید معادلهٔ خط عمود بر d که گذرنده از نقطهٔ A است را بنویسیم و سپس با قرار دادن این دو معادله در یک دستگاه، نقطهٔ برخورد این دو خط را پیدا کنیم (نقطهٔ H). حالا مطابق شکل زیر متوجه می‌شویم که نقطهٔ H دقیقاً وسط A و A' است، پس می‌توان نوشت:



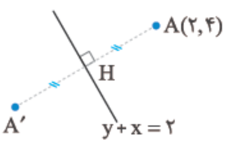
$$x_H=\frac{x_A+x_{A'}}{۲} \Rightarrow \boxed{x_{A'}=۲x_H-x_A}$$

$$y_H=\frac{y_A+y_{A'}}{۲} \Rightarrow \boxed{y_{A'}=۲y_H-y_A}$$

تست آموزشی قرینهٔ نقطهٔ $A(۲,۴)$ نسبت به خط $y+x=۲$ نقطهٔ $A'(\alpha,\beta)$ است. مقدار $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۴-

پاسخ گزینه ۱ برای پیدا کردن قرینهٔ نقطهٔ $A(۲,۴)$ نسبت به خط $y+x=۲$ اول معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ A که عمود بر خط $y+x=۲$ است را می‌نویسیم، ببینید:



$$y+x=۲ \Rightarrow \text{شیب}=-۱ \Rightarrow m_{\text{خط عمود}}=۱;\ A(۲,۴)$$

$$\text{معادلهٔ خط عمود}: y-۴=۱(x-۲) \Rightarrow y=x+۲$$

حالا برای پیدا کردن نقطهٔ H دو خط $y+x=۲$ و $y=x+۲$ را در یک دستگاه قرار می‌دهیم، داریم:

$$\begin{cases} y+\cancel{x}=۲ \\ y-\cancel{x}=۲ \end{cases} \Rightarrow ۲y=۴ \Rightarrow y=۲ \Rightarrow x=۰ \Rightarrow H(۰,۲)$$

از طرفی برای پیدا کردن نقطهٔ A' با توجه به آن‌که H دقیقاً وسط A و A' است، پس می‌توان نوشت:

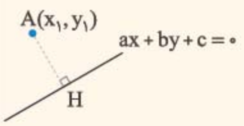
$$\begin{cases} x_H=\dfrac{x_A+x_{A'}}{۲} \Rightarrow ۰=\dfrac{۲+x_{A'}}{۲} \Rightarrow ۲+x_{A'}=۰ \Rightarrow x_{A'}=-۲ \\ y_H=\dfrac{y_A+y_{A'}}{۲} \Rightarrow ۲=\dfrac{۴+y_{A'}}{۲} \Rightarrow ۴=۴+y_{A'} \Rightarrow y_{A'}=۰ \end{cases} \Rightarrow A'(-۲,۰)$$

در نتیجه $\alpha=-۲$، $\beta=۰$ و در آخر $\alpha+\beta=-۲$ می‌باشد.

تست‌های مربوط به این درسنامه: ۷۵ تا ۹۵

فاصلهٔ نقطه از خط

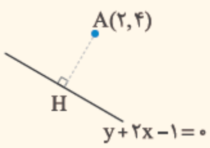
اول این‌که در ریاضی منظور از فاصله، کوتاه‌ترین فاصله است و می‌دانیم کوتاه‌ترین فاصله به‌صورت عمود اتفاق می‌افتد. در اینجا می‌خواهیم فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ از خط $ax+by+c=۰$ را پیدا کنیم. مطابق شکل مقابل، این فاصله برابر AH است و از فرمول زیر به‌دست می‌آید:



$$AH=\frac{|ax_۱+by_۱+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

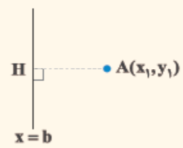
در واقع مختصات طول و عرض نقطهٔ A را به‌جای x و y در معادلهٔ خط قرار می‌دهیم و سپس از آن قدرمطلق می‌گیریم، در آخر عدد به‌دست‌آمده را بر $\sqrt{a^۲+b^۲}$ تقسیم می‌کنیم. حواستان باشد که برای استفاده کردن از فرمول گفته‌شده باید همهٔ جملات معادلهٔ خط را به یک طرف تساوی ببریم (معادلهٔ گسترده)، مانند خط $۲x+y+۱=۰$ نه مثل خط $x+y=۱$.

برای مثال فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,۴)$ از خط $y+۲x-۱=۰$ برابر است با:



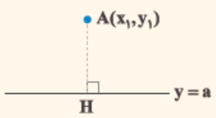
$$AH=\frac{|۴+۲(۲)-۱|}{\sqrt{(۲)^۲+(۱)^۲}}=\frac{۷}{\sqrt{۵}}$$

تذکر: دقت کنید که برای پیدا کردن فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ از خط‌های عمودی و افقی نیازی به استفاده از فرمول قبلی نیست و به راحتی از روی شکل محاسبه می‌شود، ببینید:



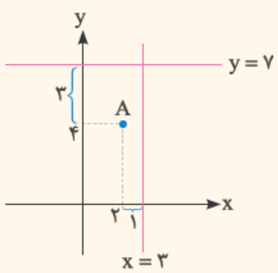
$AH=|x_۱-b|$

،



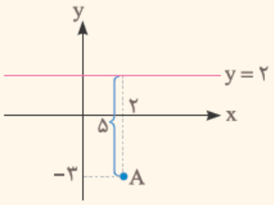
$AH=|y_۱-a|$

برای مثال فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,۴)$ از خط عمودی $x=۳$ برابر ۱ و از خط افقی $y=۷$ برابر ۳ می‌باشد. شکلش را هم ببینید:



مثال آموزشی **فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,-۳)$ را از دو خط $x+y=۱$ و $y=۲$ پیدا کرده و آن‌ها را با هم مقایسه کنید.**

پاسخ فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,-۳)$ از خط $y=۲$ برابر $۵=|۲-۳-|$ است. دلیلش را هم از روی شکل مقابل ببینید:



حالا برای پیدا کردن فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,-۳)$ از خط $x+y-۱=۰$ به کمک فرمول گفته‌شده داریم:

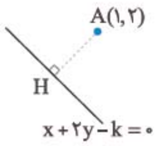
$$AH=\frac{|۲+(-۳)-۱|}{\sqrt{(۱)^۲+(۱)^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}$$

به وضوح فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,-۳)$ از خط $y=۲$ بیش‌تر از فاصلهٔ آن تا خط $x+y=۱$ می‌باشد.

تست آموزشی **اگر فاصلهٔ نقطهٔ $A(۱,۲)$ از خط $x+۲y=k$ برابر $۲\sqrt{۵}$ باشد، مجموع مقادیر به‌دست آمده برای k کدام است؟**

۱) -۱۰ ۲) ۱۰ ۳) -۲۰ ۴) ۲۰

پاسخ گزینه ۲ اول خط را به‌صورت گسترده، یعنی $x+۲y-k=۰$ می‌نویسیم. حالا با کمک گرفتن از فرمول فاصلهٔ نقطه از خط می‌توان نوشت:



$$AH=\frac{|۱+۲(۲)-k|}{\sqrt{(۱)^۲+(۲)^۲}}=۲\sqrt{۵}\Rightarrow\frac{|۵-k|}{\sqrt{۵}}=۲\sqrt{۵}\Rightarrow|۵-k|=۱۰\Rightarrow\begin{cases}۵-k=۱۰\Rightarrow k=-۵\\ ۵-k=-۱۰\Rightarrow k=۱۵\end{cases}$$

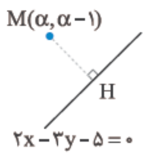
در نتیجه مجموعه مقادیر به‌دست آمده برای k برابر $۱۵+(-۵)=۱۰$ است.

یه تست فوق‌العاده مهم از کنکورهای قدیم...

تست آموزشی **دو نقطه بر خط به معادلهٔ $y=x-۱$ قرار دارند که فاصلهٔ این نقاط از خط به معادلهٔ $۲x-۳y=۵$ برابر $\sqrt{۱۳}$ است. طول این دو نقطه کدام است؟**

۱) ۹ و −۱۵ ۲) ۱۱ و −۱۵ ۳) −۹ و ۱۱ ۴) ۱۵ و −۱۱

پاسخ گزینه ۲ هر نقطه روی خط $y=x-۱$ به شکل $M(\alpha,\alpha-۱)$ است. حالا به کمک فرمول فاصلهٔ نقطه از خط می‌توان نوشت:

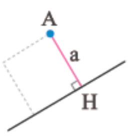


$$MH=\sqrt{۱۳}\Rightarrow\frac{|۲\alpha-۳(\alpha-۱)-۵|}{\sqrt{(۲)^۲+(-۳)^۲}}=\sqrt{۱۳}\Rightarrow\frac{|۲\alpha-۳\alpha+۳-۵|}{\sqrt{۱۳}}=\sqrt{۱۳}$$

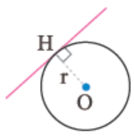
$$\Rightarrow|-\alpha-۲|=۱۳\Rightarrow\begin{cases}-\alpha-۲=۱۳\Rightarrow\alpha=-۱۵\\ -\alpha-۲=-۱۳\Rightarrow\alpha=۱۱\end{cases}$$

نکته

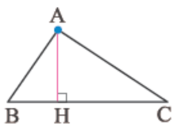
در این‌جا هم چند تا از حالت‌های پرکاربرد فاصلهٔ نقطه از خط را با هم یاد می‌گیریم:



حالت اول (محاسبهٔ طول ضلع مربع): **در این حالت معادلهٔ یک خط داده می‌شود که یکی از ضلع‌های مربع روی آن قرار دارد. هم‌چنین یک نقطهٔ غیرواقع بر این خط داده می‌شود. حالا با پیدا کردن فاصلهٔ نقطه از این خط، طول ضلع مربع پیدا می‌شود که الان به راحتی محیط، مساحت و ... مربع را می‌توانیم پیدا کنیم (این مدل تست‌ها با کمی تغییر دربارهٔ مستطیل هم مطرح می‌شود.).**



حالت دوم (محاسبهٔ شعاع دایره با داشتن مرکز و خط مماس بر دایره): *حرف خاصی نداریم.* **مطابق شکل مقابل، فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس بر دایره همان شعاع دایره است.**



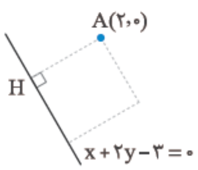
حالت سوم (محاسبهٔ ارتفاع مثلث): **در این حالت یکی از ضلع‌های مثلث و یک رأس آن که خارج از آن ضلع است، داده می‌شود که در این‌صورت فاصلهٔ رأس داده شده از خط، همان ارتفاع مثلث است. این شکل را ببینید:**

این هم دو تست دیگر در مورد فاصلهٔ نقطه از خط ...

تست آموزشی **یکی از ضلع‌های مربعی روی خط $x+۲y=۳$ قرار دارد. اگر نقطهٔ $A(۲,۰)$ یکی از رأس‌های این مربع باشد، محیط مربع کدام است؟**

۱) $\frac{۴\sqrt{۵}}{۵}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ ۳) $۴\sqrt{۵}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

پاسخ گزینه ۱ شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید:



نقطهٔ A روی خط داده شده قرار ندارد، پس همان‌طور که از روی شکل مشاهده می‌شود، فاصلهٔ نقطهٔ A تا خط داده شده همان ضلع مربع است، پس داریم:

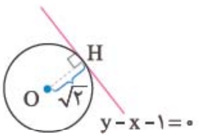
$$AH=\frac{|۲+۲(۰)-۳|}{\sqrt{(۱)^۲+(۲)^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

در نهایت محیط مربع برابر $۴AH=\frac{۴\sqrt{۵}}{۵}$ است.

تست آموزشی خط $y=x+۱$ بر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۲}$ مماس است. اگر معادلهٔ قطر دایره به‌صورت خط $y=-۲x+۳$ باشد، مجموع طول و عرض مرکز دایره کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ گزینه ۲ مطابق شکل، خط $y=x+۱$ بر دایره مماس است. از طرفی معادلهٔ قطر دایره برابر $y=-۲x+۳$ می‌باشد. بنابراین چون مرکز دایره بر روی قطر دایره است، پس مختصات مرکز به‌صورت $O(\alpha , -۲\alpha+۳)$ می‌باشد. حالا باید فاصلهٔ مرکز دایره را از خط $y-x-۱=۰$ برحسب مجهول α به‌دست آوریم و برابر $\sqrt{۲}$ قرار دهیم، پس داریم:



$$OH=\frac{|-۲\alpha+۳-\alpha-۱|}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}\Rightarrow|-۳\alpha+۲|=۲\Rightarrow\begin{cases}-۳\alpha+۲=۲\Rightarrow\alpha=۰\\-۳\alpha+۲=-۲\Rightarrow\alpha=\frac{۴}{۳}\end{cases}$$

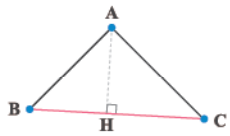
حالا با جای‌گذاری طول‌های به‌دست آمده در معادلهٔ $y=-۲x+۳$، مرکز دایره به‌دست می‌آید، پس می‌توان نوشت:

$$y=-۲x+۳\xrightarrow{\alpha=۰\,,\,\frac{۴}{۳}}\begin{cases}O(۰,۳)\\O(\frac{۴}{۳},\frac{۱}{۳})\end{cases}$$

در واقع دو دایره با این شرایط داریم که مجموع طول و عرض مرکز این دایره‌ها $۳=۳+۰$ یا $\frac{۵}{۳}=\frac{۱}{۳}+\frac{۴}{۳}$ می‌باشد و با توجه به گزینه‌ها پاسخ درست گزینهٔ «۲» است.

نکته

مساحت مثلث: احتمالاً خیلی منتظر روش پیدا کردن مساحت مثلث دلخواه ABC با داشتن سه رأس A ، B و C بودید. دو روش برای پیدا کردن مساحت خدمتتان عرض می‌کنیم:



روش اول: برای پیدا کردن مساحت مثلث ABC ، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

۱) ابتدا فاصلهٔ دو نقطهٔ B و C را پیدا می‌کنیم. این فاصله همان قاعدهٔ مثلث است.

۲) با داشتن دو نقطهٔ B و C معادلهٔ خط BC را پیدا می‌کنیم.

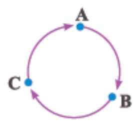
۳) به کمک فرمول فاصلهٔ نقطه از خط، فاصلهٔ نقطهٔ A از خط BC را به‌دست می‌آوریم که این فاصله همان ارتفاع مثلث می‌باشد.

۴) در آخر مساحت مثلث برابر $S=\frac{\text{قاعده}\times\text{ارتفاع}}{۲}$ است.

روش دوم: اگر $A(x_A , y_A)$ ، $B(x_B , y_B)$ و $C(x_C , y_C)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت این مثلث از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\boxed{S=\frac{۱}{۲}|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)|}$$

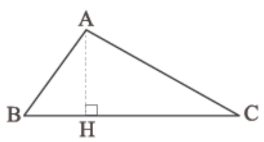
برای این‌که فرمول بالا را فراموش نکنید، چرخهٔ مقابل را به خاطرتان بیاورید:



تست آموزشی مساحت مثلث ABC با رئوس $A(۱,۲)$ ، $B(۴,۶)$ و $C(۰,۳)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

پاسخ گزینه ۲ **روش اول:** با توجه به شکل مقابل ابتدا اندازهٔ ضلع BC را پیدا می‌کنیم، داریم:



$$BC=\sqrt{(۴-۰)^۲+(۶-۳)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=\sqrt{۲۵}=۵$$

حالا با داشتن دو نقطهٔ B و C ، شیب BC و سپس معادلهٔ آن را پیدا می‌کنیم، ببینید:

$$m_{BC}=\frac{۶-۳}{۴-۰}=\frac{۳}{۴}\ ;\ \text{معادلهٔ خط } BC: y-۳=\frac{۴}{۳}(x-۰)\Rightarrow y=\frac{۴}{۳}x+۳$$

اکنون فاصلهٔ نقطهٔ $A(۱,۲)$ را از خط $y-\frac{۴}{۳}x-۳=۰$ پیدا می‌کنیم که این همان ارتفاع مثلث است، پس می‌توان نوشت:

$$AH=\frac{|۲-\frac{۴}{۳}-۳|}{\sqrt{(۱)^۲+(-\frac{۴}{۳})^۲}}=\frac{\frac{۷}{۳}}{\sqrt{\frac{۲۵}{۹}}}=\frac{\frac{۷}{\cancel{۳}}}{\frac{۵}{\cancel{۳}}}=\frac{۷}{۵}$$

در نهایت مساحت مثلث ABC برابر است با:

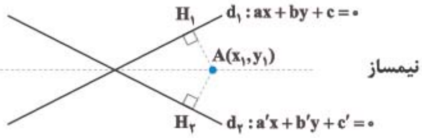
$$S=\frac{۱}{۲}\times BC\times AH=\frac{۱}{۲}\times۵\times\frac{۷}{۵}=\frac{۷}{۲}=۳/۵$$

روش دوم: به کمک فرمول گفته شده در درسنامه، مساحت مثلث ABC با سه رأس A ، B و C را پیدا می‌کنیم، ببینید:

$$S=\frac{1}{2}|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)|=\frac{1}{2}|1(6-3)+4(3-2)+0(2-6)|=\frac{1}{2}|3+4+0|=\frac{7}{2}=3/5$$

نکته

نیمساز: نیمساز دو خط، مجموعه نقاطی هستند که فاصله‌شان از دو خط برابر باشد. به بیانی دیگر اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، فاصله‌اش از دو خط یکسان است، پس با توجه به شکل مقابل می‌توان نوشت:



$$AH_1=AH_2 \Rightarrow \boxed{\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|a'x_1+b'y_1+c'|}{\sqrt{a'^2+b'^2}}}$$

تست آموزشی نقطه با کدام عرض روی نیمساز ناحیهٔ اول، از دو خط $y-2x+2=0$ و $2y+x+3=0$ به یک فاصله قرار دارد؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) امکان‌ناپذیر

پاسخ گزینه ۴ مختصات هر نقطه روی نیمساز ناحیهٔ اول به‌صورت $M(\alpha, \alpha)$ است. حالا برای این‌که این نقطه از دو خط داده شده به یک فاصله باشد، می‌توان نوشت:

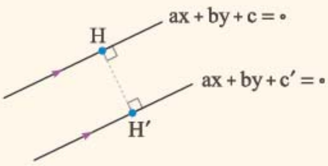
$$MH_1=MH_2 \Rightarrow \frac{|2\alpha+\alpha+3|}{\cancel{\sqrt{(1)^2+(2)^2}}}=\frac{|\alpha-2\alpha+2|}{\cancel{\sqrt{(-2)^2+(1)^2}}} \Rightarrow |3\alpha+3|=|-\alpha+2| \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha+3=-\alpha+2 \Rightarrow 4\alpha=-1 \Rightarrow \alpha=-\frac{1}{4} \Rightarrow M(\frac{-1}{4}, \frac{-1}{4}) \\ 3\alpha+3=\alpha-2 \Rightarrow 2\alpha=-5 \Rightarrow \alpha=\frac{-5}{2} \Rightarrow M(\frac{-5}{2}, \frac{-5}{2}) \end{cases}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید نقاط به‌دست آمده در ناحیهٔ سوم هستند. در واقع هیچ نقطه‌ای در نیمساز ناحیهٔ اول حضور ندارد که فاصله‌اش از دو خط $y-2x+2=0$ و $2y+x+3=0$ یکسان باشد.

تست‌های مربوط به این درسنامه: ۹۶ تا ۱۰۷

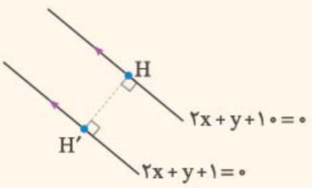
فاصلهٔ دو خط موازی

وقتی اسم فاصلهٔ دو خط می‌آید مطمئن باشید که حتماً دو خط با هم موازی هستند، یعنی شیب‌هایشان برابر است. دو خط موازی را به‌صورت $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ نمایش می‌دهیم. توجه کنید که چون دو خط موازی هستند، پس باید شیب‌هایشان برابر باشد، برای همین در هر دو معادله، عبارت $ax+by$ وجود دارد (قبوله؟). فاصلهٔ دو خط موازی گفته شده از فرمول مقابل به‌دست می‌آید:



$$\boxed{HH'=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

برای مثال فاصلهٔ دو خط موازی $2x+y+1=0$ و $2x+y+10=0$ برابر است با:

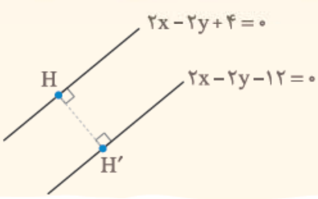


$$HH'=\frac{|10-1|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2}}=\frac{9}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{9\sqrt{5}}{5}$$

تذکر: گاهی وقت‌ها فاصلهٔ دو خط موازی پرسیده می‌شود که در آن‌ها ضرایب x و y دو معادله برابر نیستند. در این مواقع قبل از هر کاری با تقسیم و یا ضرب کردن یکی از معادله‌ها در عددی، ضرایب را یکسان کنید و سپس سراغ فرمول $HH'=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ بروید.

مثال آموزشی فاصلهٔ دو خط موازی $y=x+2$ و $-2y+2x=12$ چند است؟

پاسخ معادله‌ها در حالت گسترده به‌صورت $y-x-2=0$ و $2x-2y-12=0$ هستند که به وضوح شیب‌های هر دوی آن‌ها برابر ۱ است و دو خط موازی هستند. حالا برای محاسبهٔ فاصلهٔ این دو خط موازی، اول باید ضرایب x و y آن‌ها را یکسان کنیم و سپس سراغ فرمول گفته شده برویم، پس می‌توان نوشت:



$$y-x-2=0 \xrightarrow{\times(-2)} 2x-2y+4=0 \ , \ 2x-2y-12=0$$

$$HH'=\frac{|4-(-12)|}{\sqrt{(2)^2+(-2)^2}}=\frac{16}{\sqrt{8}}=\frac{16}{2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{16\sqrt{2}}{4}=4\sqrt{2}$$

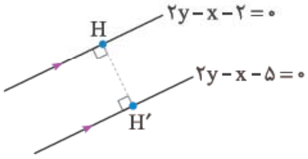
تست آموزشی دو ضلع مربعی بر خطوط $۲y - x = ۵$ و $y = \frac{x}{۲} + ۱$ قرار دارند. محیط مربع کدام است؟

۱) $۱۲\sqrt{۵}$ ۲) $\frac{۱۲}{\sqrt{۵}}$ ۳) $\frac{۳}{\sqrt{۵}}$ ۴) $۳\sqrt{۵}$

پاسخ گزینه ۲ اول از همه شیب دو خط داده شده را پیدا می‌کنیم:

$$۲y - x - ۵ = ۰ \;;\; m = \frac{-(-۱)}{۲} = \frac{۱}{۲} \,,\, y = \frac{x}{۲} + ۱ \;;\; m = \frac{۱}{۲}$$

شیب دو خط داده شده برابر است، در نتیجه خطوط با هم موازی‌اند، پس فاصلهٔ این دو خط موازی برابر طول ضلع مربع است. برای استفاده از فرمول فاصلهٔ دو خط موازی ابتدا باید ضرایب x و y دو معادله را یکسان کنیم، پس می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} ۲y - x - ۵ = ۰ \\ y - \frac{x}{۲} - ۱ = ۰ \xrightarrow{\times ۲} ۲y - x - ۲ = ۰ \end{cases}$$

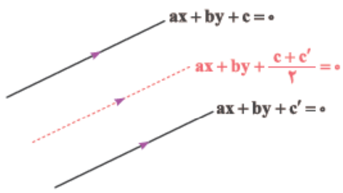
$$HH' = \frac{|-۲-(-۵)|}{\sqrt{(-۱)^۲ + (۲)^۲}} = \frac{۳}{\sqrt{۵}}$$

در نهایت محیط مربع برابر است با:

$$\text{محیط} = ۴a = ۴\left(\frac{۳}{\sqrt{۵}}\right) = \frac{۱۲}{\sqrt{۵}}$$

نکته

معادلهٔ خطی که دقیقاً وسط دو خط موازی $ax + by + c = ۰$ و $ax + by + c' = ۰$ می‌باشد برابر است با:

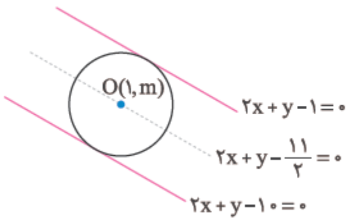


$$\boxed{ax + by + \frac{c + c'}{۲} = ۰}$$ (همون میانگین فورمونه)

دقت کنید که این خط هم موازی دو خط داده شده است.

تست آموزشی دو خط $۲x + y = ۱۰$ و $۲x = -y + ۱$ بر دایره‌ای مماس‌اند. اگر مرکز دایره نقطهٔ $O(۱ , m)$ باشد، m کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$



پاسخ گزینه ۴ با توجه به این‌که شیب دو خط داده شده با هم برابر است، مطابق شکل مقابل مرکز دایره حتماً روی خط میانی خط‌های مماس بر دایره قرار می‌گیرد؛ یعنی $O(۱ , m)$ روی خط $۲x + y + \frac{-۱۰-۱}{۲} = ۰$ یا همان $۲x + y - \frac{۱۱}{۲} = ۰$ قرار دارد و درون آن صدق می‌کند، پس داریم:

$$۲x + y - \frac{۱۱}{۲} = ۰ \xrightarrow{\text{روی خط است } O(۱ , m)} ۲(۱) + m - \frac{۱۱}{۲} = ۰ \Rightarrow m = \frac{۱۱}{۲} - ۲ = \frac{۷}{۲}$$

یادداشت:

تست‌های درس اول

مفاهیم اولیهٔ نقطه

۱) اگر $A(\alpha , ۲\beta - ۳)$ نقطه‌ای روی محور x ها و $B(۲\alpha - ۱ , ۳\beta)$ نقطه‌ای روی محور y ها باشد، $۵\alpha + \beta$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲) اگر $A(۱ , ۳)$ و $B(۲a , ۲a^{۲} + a)$ دو نقطهٔ هم‌عرض باشند و این دو نقطه در یک ناحیهٔ مختصاتی نباشند، $|a|$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۳

۳) اگر $A(\frac{۲m - ۳}{m + ۱} , ۲m - m^{۲})$ نقطه‌ای در ناحیهٔ دوم محورهای مختصات باشد، مجموعهٔ مقادیر m کدام است؟

۱) $۰ < m < ۲$ ۲) $-۱ < m < ۲$ ۳) $۰ < m < \frac{۳}{۲}$ ۴) $-۱ < m < \frac{۳}{۲}$

مفاهیم اولیهٔ خط

۴) به‌ازای کدام مقدار m ، خط به معادلهٔ $(m+۲)y - mx = ۸$ از نقطهٔ $A(-۱,۱)$ می‌گذرد؟

۱) ۵ ۲) ۵- ۳) ۳ ۴) ۳-

۵) نقطه‌ای روی خط به معادلهٔ $۲x + ۳y = ۵(۱ - x)$ قرار دارد که عرض آن از قرینهٔ طول آن ۱ واحد کم‌تر است. طول این نقطه کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۳ ۴) ۳-

۶) اگر نقطهٔ $M(۲\alpha + \frac{۵}{۲} , \alpha^{۲})$ پایین خط $y = ۲x$ باشد، α چند عدد صحیح می‌تواند باشد؟

۱) ۷ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۵

۷) معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $A(۲ , ۵)$ و $B(۲ , -۳)$ به‌صورت $x + m = ۰$ و معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $C(۱ , -۴)$ و $D(-۱ , -۴)$ به‌صورت $y + n = ۰$ می‌باشد. $m + n$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۴ ۴) ۴-

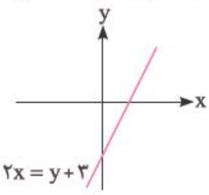
۸) خط به معادلهٔ $mx + (۲+m)y + x = ۲m$ موازی محور x ها است. این خط محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

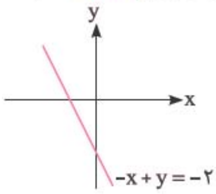
۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) ۱-

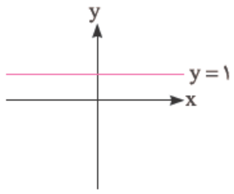
۹) دو نقطهٔ $A(۶ , ۱)$ و $B(a^{۲} + a , a)$ بر روی خطی موازی محور y ها قرار دارند. اگر نقطهٔ B در ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات باشد، $a^{۲}$ کدام است؟

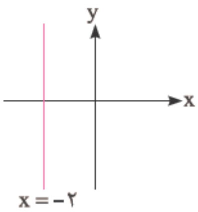
۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۹ ۴) ۱۶

۱۰) نمودار کدام‌یک از خط‌های داده شده درست رسم نشده است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱)


۲)


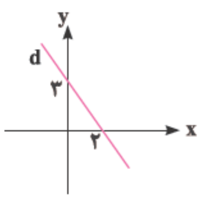
۳)


۴)


۱۱) شیب خط گذرنده از نقاط $A(۲ , -۳)$ و $B(-۱ , ۰)$ با شیب خط گذرنده از کدام دو نقطهٔ داده شده برابر است؟

۱) $C(-۲ , -۲)$ ، $D(۰ , ۱)$ ۲) $C(-۵ , -۴)$ ، $D(۴ , ۵)$ ۳) $C(۵ , -۴)$ ، $D(-۴ , ۵)$ ۴) $C(۲ , ۲)$ ، $D(۰ , -۱)$

۱۲) نمودار خط d به‌صورت مقابل رسم شده است. کدام‌یک از نقاط داده شده روی این خط قرار دارد؟ (برگرفته از کتاب درسی)



۱) $(-۲ , ۵)$
۲) $(-۲ , ۴)$
۳) $(۴ , -۳)$
۴) $(۴ , -۵)$

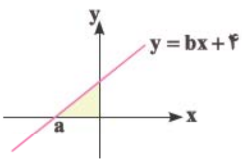
۱۳ خط گذرنده از نقاط $A(۲ , ۷)$ و $B(-۱ , ۱)$ محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۱/۵- ۴) ۲-

۱۴ خطی که از نقاط $A(-۳ , ۱-m)$ و $B(m-۱ , m+۵)$ می‌گذرد، محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع می‌کند. مساحت ناحیهٔ محدود به این خط و محورهای مختصات کدام است؟

۱) ۴/۵ ۲) ۹ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

۱۵ در شکل مقابل اگر مساحت ناحیهٔ رنگی برابر ۱۲ باشد، a کدام است؟



۱) ۲- ۲) ۳-
۳) ۴- ۴) ۶-

۱۶ خطی که از نقطهٔ $A(۲ , -۵)$ عبور می‌کند و شیب آن ۲ برابر عرض از مبدأ آن است، از کدام ناحیه محورهای مختصات عبور **نمی‌کند**؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۱۷ خط گذرنده از نقاط $A(m , ۲m+۲)$ و $B(-m , ۵m+۱)$ با جهت منفی محور x ها زاویهٔ ۴۵° می‌سازد. m کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) $\frac{-۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۱۸ مجموع طول و عرض نقطهٔ تلاقی دو خط $۲y + x = ۵$ و $y = ۲x - ۵$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۹ دو خط $ax + ۳y = b$ و $۲ax + by = ۴$ همدیگر را در نقطهٔ $(۱ , ۲)$ قطع می‌کنند. a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۴ ۴) ۴-

۲۰ دو خط $y = ۲x + a$ و $y = ax + ۲b$ همدیگر را در نقطه‌ای به طول ۱ روی محور طول‌ها قطع می‌کنند. $a + b$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۳- ۳) ۲- ۴) ۴-

۲۱ به‌ازای چه مقادیری از m، دو خط $mx + y = ۲$ و $-x + (m+۱)y = ۴$ روی محور y ها همدیگر را قطع می‌کنند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۲-

۲۲ مساحت ناحیهٔ محدود به محور x ها، نیمساز ناحیهٔ دوم و خط $y = ۲x + ۴$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

۲۳ مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار دو خط $y = x - ۱$ و $۲x + ۳y = ۶$ و محور x ها کدام است؟

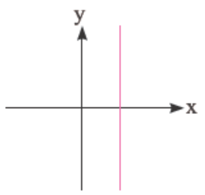
۱) ۰/۸ ۲) ۰/۹ ۳) ۱/۶ ۴) ۱/۸

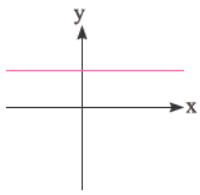
۲۴ به‌ازای کدام مقدار a، سه خط $۳x - y = ۲$، $x - ay = ۱۰$ و $۲x + y = ۸$ در یک نقطه متقاطع‌اند؟

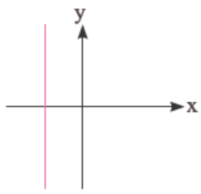
۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۲- ۴) ۴-

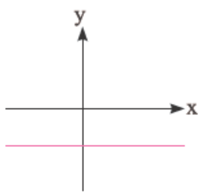
فرم کلی خط و وضعیت خطوط نسبت به هم

۲۵ دو خط $x = my + ۱$ و $۲x + ۵y = ۳$ با هم موازی هستند. نمودار خط $x = ۲m$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۶ عرض از مبدأ خط گذرنده از نقطهٔ $A(۲,-۱)$ که با خط به معادلهٔ $۲x + y = ۵$ موازی می‌باشد، کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۷ اگر خط به معادلهٔ $ax+by=-۱$ با خط به معادلهٔ $ay+x=b$ موازی باشد و از نقطهٔ $(۲,۱)$ بگذرد، $a^{۲}+۲b$ کدام است؟

۱) ۲　۲) ۳　۳) ۴　۴) ۵

۲۸ اگر دو خط $y=۱-۳x$ و $۲x=(m+۱)y+۳$ بر هم عمود باشند، m کدام است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) ۲　۲) ۳　۳) ۴　۴) ۵

۲۹ خط گذرنده از نقاط $A(a,b)$ و $B(b,a)$ بر خط d به معادلهٔ $x+(۱+۲m)y=m+۳$ عمود است. عرض از مبدأ خط d کدام است؟ $(a\neq b)$

۱) -۱　۲) ۱　۳) ۲　۴) -۲

۳۰ دو خط d و d' بر هم عمود هستند. اگر شیب خط d برابر $\sqrt{۷+۴\sqrt{۳}}$ باشد، شیب خط d' کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}$　۲) $۲-\sqrt{۳}$　۳) $\frac{۱}{\sqrt{۳}-۲}$　۴) $\sqrt{۳}-۲$

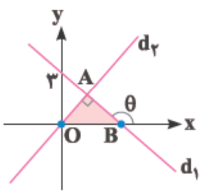
۳۱ نقطهٔ $A(۲,a)$ واقع بر خطی است که از نقطهٔ تلاقی دو خط $۳y-x=۲$ و $y+۲x=۳$ عبور کرده و بر خط به معادلهٔ $۲y-۴x=۱$ عمود است. a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$　۲) $-\frac{۱}{۲}$　۳) $\frac{۳}{۲}$　۴) $-\frac{۳}{۲}$

۳۲ مساحت ناحیهٔ محدود به خط گذرنده از نقطهٔ برخورد خط $y=۲x+۶$ و نیمساز ناحیه‌های دوم و چهارم و عمود بر خط $x-۵y=۱$ با محورهای مختصات کدام است؟

۱) ۱/۶　۲) ۳/۲　۳) ۵/۴　۴) ۶/۴

۳۳ در شکل مقابل اگر $\sin\theta=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$ باشد، مساحت مثلث OAB کدام است؟



۱) ۰/۳۵
۲) ۰/۴
۳) ۰/۴۵
۴) ۰/۵

۳۴ مثلث ABC با رئوس $A(۲,m)$، $B(-۱,۱)$ و $C(۰,۶)$ در رأس A قائمه است. مجموع مقادیر m کدام است؟

۱) ۳　۲) ۴　۳) ۵　۴) ۷

۳۵ اگر نقاط $A(۱,۲)$ و $B(۴,۳)$ دو رأس مجاور یک مستطیل باشند، معادلهٔ ضلع دیگر مستطیل که یک رأس آن نقطهٔ B است، کدام می‌باشد؟

۱) $۳x-y=۹$　۲) $۳x+y=۹$　۳) $y+۳x=۱۵$　۴) $y-۳x=۱۵$

۳۶ دو ضلع مستطیلی بر روی دو خط به معادلات $my=۸x-۱$ و $m^{۲}x+y=۲$ واقع هستند. حاصل‌ضرب مقادیر m کدام است؟

۱) -۲　۲) -۴　۳) $-\frac{۱}{۴}$　۴) $-\frac{۱}{۲}$

۳۷ سه ضلع مثلثی به معادلات $AB:۲y-x=۳$، $AC:y-۲x=۵$ و $BC:۲y+۳x=۶$ هستند. معادلهٔ ارتفاع AH از مثلث ABC کدام است؟

۱) $۶y-۴x=۱۵$　۲) $۹y-۶x=۱۷$　۳) $۳y-۲x=۷$　۴) $۳y+۲x=۹$

۳۸ معادلهٔ سه ضلع یک مثلث $x-y=۲$، $y=\frac{x}{۲}$ و محور xها می‌باشد. معادلهٔ خط بزرگ‌ترین ارتفاع این مثلث کدام است؟

۱) $y=۴$　۲) $y-x=۲$　۳) $x=۴$　۴) $۲x+y=۱$

۳۹ معادلهٔ سه ضلع یک مثلث $x+y=۱$، $y=۲x$ و $x=۱$ است. معادلهٔ خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟

۱) $y=\frac{۲}{۳}$　۲) $x=\frac{۲}{۳}$　۳) $y+x=\frac{۲}{۳}$　۴) $y+x=\frac{۱}{۳}$

۴۰ خط $x+۲y+۹=۰$ بر دایره‌ای به مرکز $O(۱,۰)$ مماس است. مجموع طول و عرض نقطهٔ تماس کدام است؟

۱) -۴　۲) -۵　۳) -۶　۴) -۷

۴۱ اگر نقاط $A(۰,۰)$، $B(۲,۲)$ و $C(۶,-۲)$ رئوس مثلث ABC باشند، مختصات پای ارتفاع AH کدام است؟

۱) $(۲,۲)$　۲) $(۲,۳)$　۳) $(-۱,۳)$　۴) $(-۱,۰)$

۴۲ نقاط $A(۲,۱)$ ، $B(-۱,۱)$ و $C(۵,۲)$ رئوس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و پای میانهٔ AM باشند، $x_M + x_H$ کدام است؟

۱) $\frac{۵۲}{۴۹}$ ۲) $\frac{۱۴۵}{۳۷}$ ۳) $\frac{۱۲۵}{۳}$ ۴) $\frac{۴۳}{۲۲}$

۴۳ به‌ازای کدام مقادیر a ، نقاط $(a,۳)$ ، $(۶,۴a+۱)$ و مبدأ مختصات در یک راستا قرار می‌گیرند؟

۱) $-۲,\frac{۹}{۴}$ ۲) $-۲,\frac{۳}{۴}$ ۳) $-۲,-\frac{۳}{۴}$ ۴) $۲,-\frac{۹}{۴}$

۴۴ زاویهٔ حادهٔ بین دو خط $۲y - x = ۱$ و $۳x = ۲ - ۹y$ کدام است؟

۱) ۳۰° ۲) ۴۵° ۳) ۶۰° ۴) ۷۵°

فاصلهٔ دو نقطه

۴۵ در مثلث ABC با رئوس $A(۱,۲)$ ، $B(-۳,۱)$ و $C(۴,۰)$ طول ضلع متوسط مثلث کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $\sqrt{۱۹}$ ۲) $\sqrt{۱۷}$ ۳) $\sqrt{۲۱}$ ۴) $\sqrt{۱۳}$

۴۶ اگر نقاط $A(۲,۰)$ ، $B(۵,۴)$ و $C(-۲,۳)$ سه رأس مثلث ABC باشند، نوع مثلث و محیط آن به‌ترتیب کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) قائم‌الزاویه - $۵(۱+\sqrt{۲})$ ۲) قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین - $۵(۲+\sqrt{۲})$

۳) متساوی‌الاضلاع - ۱۵ ۴) متساوی‌الاضلاع - $۱۵\sqrt{۲}$

۴۷ نقاط $A(۱,۳)$ ، $B(۵,-۵)$ و $C(-۱,۲)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. مساحت این مثلث کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

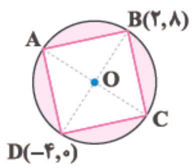
۴۸ فاصلهٔ نقطهٔ $A(۱,۳)$ از نقطهٔ $B(m,۳)$ دو برابر فاصلهٔ آن از نقطهٔ $C(۱,m+۱)$ است. حاصل‌ضرب مقادیر m کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۹ نقاط $A(۲,-۴)$ و $B(۷,۸)$ دو انتهای قطر دایره‌ای هستند. محیط دایره کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $۵/۵\pi$ ۲) $۶/۵\pi$ ۳) ۱۱π ۴) ۱۳π

۵۰ در شکل مقابل، مساحت قسمت رنگی کدام است؟ ($ABCD$ مربع و $\pi \simeq ۳$ است.)



۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۵۱ در دایره‌ای که از مبدأ مختصات می‌گذرد، معادلهٔ دو قطر به صورت $۲x - ۳y = ۵$ و $-۵y - ۲x = ۳$ هستند. طول قطر دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۵۲ نقطهٔ $O(۱,۲)$ مرکز لوزی $ABCD$ است. اگر قطرهای این لوزی به موازات محورهای مختصات باشد و یکی از اضلاع این لوزی خط $۲x + y = ۶$ باشد، محیط لوزی کدام است؟

۱) $۱۰\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۸\sqrt{۵}$ ۴) $۴\sqrt{۵}$

۵۳ دو انتهای یکی از قطرهای مستطیلی نقاط $A(-۲,۵)$ و $B(۴,-۳)$ هستند. اگر زاویهٔ بین دو قطر این مستطیل ۳۰° باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۵۴ دو نقطه روی خط $۲x + y = ۱$ وجود دارد که فاصلهٔ آن‌ها از مبدأ مختصات $\sqrt{۱۰}$ است. مجموع عرض‌های این دو نقطه کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{-۴}{۵}$ ۴) $\frac{-۲}{۵}$

۵۵ شعاع دایره‌ای که از دو نقطهٔ $M(۲,۰)$ و $N(۱,۲)$ می‌گذرد و معادلهٔ یکی از قطرهایش $x + y = ۱$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۲) $\sqrt{\frac{۵}{۲}}$ ۳) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$