فصل ۱

سوالات

۱.۱ سال ۲۰۱۱

۱) اعداد ۷۰ رقمی n را در نظر بگیرید. با این ویژگی که هر کدام از ارقام $۱,۲,۳,\ldots,۷$ در بسط دەدهی n، ده بار ظاهر میشوند (۸، ۹ و ۰ ظاهر نمیشوند). نشان دهید که هیچ عددی از این دست نمیتواند عدد دیگری از این شکل را بشمارد.

۲) فرض کنید $ABCD$ یک چهار ضلعی محاطی است که در آن اضلاع مقابل هم، موازی نیستند و X محل تقاطع AB و CD و همچنین Y محل تقاطع AD و BC است. فرض کنید نیمساز زاویه $\widehat{AXD}$، AD و BC را به ترتیب در نقاط E و F و نیمساز زاویه $\widehat{AYB}$، AB و CD را به ترتیب در نقاط G و H قطع کند. ثابت کنید که $EGFH$ یک متوازیالاضلاع است.

۳) علی یک مربع را به تعداد زیاد، ولی متناهی، مستطیل سفید و قرمز تقسیم کرده است که اضلاع هر یک از آنها با اضلاع مربع موازی است. او در داخل هر مستطیل سفید، حاصل تقسیم پهنا به ارتفاع آن را نوشته است و در داخل هر مستطیل قرمز، حاصل تقسیم ارتفاع بر پهنا را در نهایت او x را که مجموع این اعداد است، محاسبه میکند. اگر مجموع مساحت مستطیلهای سفید با مجموع مساحت مستطیلهای قرمز برابر باشند، کوچکترین مقدار ممکن برای x چند است؟

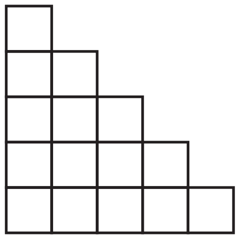
۴) نشان دهید که یک عدد صحیح مثبت N وجود دارد به طوری که برای همهی اعداد صحیح a که $a > N$ است، یک زیر رشته پیوسته از بسط دهەی a وجود دارد که بر ۲۰۱۱ بخشپذیر است. (به عنوان مثال اگر $a = ۱۵۳۲۰۴$، آن گاه ۱۵، ۵۳۲ و ۰ همگی زیر رشتههای پیوسته a هستند. به یاد داشته باشید که ۰ بر ۲۰۱۱ بخشپذیر است)

۵) فرض کنید d یک عدد صحیح مثبت باشد. نشان دهید برای هر عدد صحیح s، یک عدد صحیح n که $n > ۰$ است و یک دنباله $\varepsilon_۱,\varepsilon_۲,\ldots,\varepsilon_n$ که برای هر k، $\varepsilon_k = ۱$ یا $\varepsilon_k = -۱$ است، وجود دارد. به طوری که

$$s = \varepsilon_۱(۱+d)^۲ + \varepsilon_۲(۱+۲d)^۲ + \varepsilon_۳(۱+۳d)^۲ + \cdots + \varepsilon_n(۱+nd)^۲$$

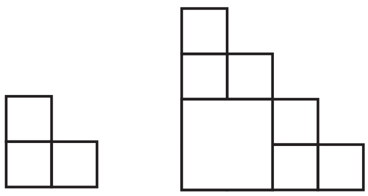
۲.۱ سال ۲۰۱۰

۱) برای یک عدد صحیح مثبت n، n− پله‌کان شکلی است که از مربع‌های واحد تشکیل شده است به طوری که یک مربع در ردیف اول، دو مربع در ردیف دوم و به همین ترتیب تا n مربع در ردیف n ام قرار دارد و تمامی مربع‌های سمت چپ در هر ردیف به صورت عمودی هم‌تراز شده‌اند. به طور مثال ۵ − پله‌کان در شکل (۱.۱) نشان داده شده است.



شکل ۱.۱

$f(n)$ کمترین تعداد کاشی‌های مربع شکل مورد نیاز برای پوشاندن n− پله‌کان مشخص می‌کند. طول ضلع این کاشی‌ها می‌تواند هر عدد صحیح مثبتی باشد. به عنوان مثال $f(۲) = ۳$ و $f(۴) = ۷$ (شکل (۲.۱))



شکل ۲.۱

الف) کلیه n هایی را که به ازای آن‌ها $f(n) = n$ است را بیابید.

ب) کلیه n هایی را که به ازای آن‌ها $f(n) = n + ۱$ است را بیابید.

۲) فرض کنید که A، B و P سه نقطه روی یک دایره باشند. ثابت کنید که اگر a و b فاصله P تا مماس‌های دایره در نقاط A و B و همچنین c فاصله P تا وتر AB باشد، آن گاه $c^۲ = ab$.

۳) سه اسکیت‌باز سرعتی یک مسابقه دوستانه در یک زمین بیضی شکل اسکیت را ترتیب دادند. همگی آن‌ها از یک نقطه مشترک شروع کرده و در یک مسیر مشترک

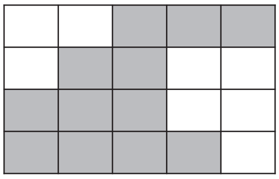
اما با سرعت‌های متفاوت که در سرتاسر مسابقه آن را حفظ نمودند اسکیت کردند. کندترین اسکیت‌باز ۱ دور در دقیقه، سریع‌ترین ۳/۱۴ دور در دقیقه و فرد متوسط L دور در دقیقه برای مقادیر $۱ < L < ۳/۱۴$ سرعت داشتند. مسابقه زمانی به پایان می‌رسد که هر سه اسکیت‌باز دوباره در یک نقطه مشترک روی زمین اسکیت به هم برسند (که ممکن است این نقطه با نقطه شروع متفاوت باشد). تعداد مقادیر مختلف ممکن برای L به طوری که قبل از پایان مسابقه ۱۱۷ عبور اتفاق بیفتد، را بیابید (یک عبور به معنی زمانی است که یک اسکیت‌باز از اسکیت‌باز دیگر عبور می‌کند. آغاز و پایان مسابقه وقتی که هر سه اسکیت باز با هم هستند به عنوان یک عبور شمرده نمی‌شود)

۴) هر رأس یک گراف محدود می‌تواند به رنگ سیاه یا سفید درآید. در ابتدا کلیه رئوس سیاه هستند. ما اجازه داریم یک رأس P را در نظر گرفته و رنگ آن را همراه با تمامی همسایه‌هایش تغییر دهیم. آیا ممکن است با عملیاتی از این نوع، رنگ همه رئوس را از سیاه به سفید مبدل کنیم؟

۵) فرض کنید $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب صحیح باشند و فرض کنید $a_n = n! + n$. نشان دهید که اگر $\frac{P(a_n)}{Q(a_n)}$ برای همه n ها، یک عدد صحیح باشد آن گاه $\frac{P(n)}{Q(n)}$ نیز برای هر عدد صحیح n به طوری که $Q(n) \neq ۰$ باشد، یک عدد صحیح است.

۳.۱ سال ۲۰۰۹

۱) یک صفحه‌ی مشبک $m \times n$ با مربع‌هایی که به رنگ سیاه یا سفید هستند را در نظر بگیرید. به یک مربع سیاه در صفحه‌ی مشبک «مجزا» گوییم اگر مربعی در سمت چپ آن در همان سطر خودش و مربعی هم در بالای آن در همان ستون خودش به رنگ سفید وجود داشته باشد (شکل را ببینید). فرمول بسته‌ای برای تعداد صفحه‌های مشبک $۲ \times n$ بدون مربع سیاه «مجزا» به دست آورید.



شکل ۳.۱) یک صفحه‌ی مشبک ۵×۴ بدون مربع سیاه «مجزا»

۲) دو دایره‌ی با شعاع‌های متفاوت را از یک مقوا جدا می‌کنیم. هر کدام از دایره‌ها را به ۲۰۰ قطاع برابر تقسیم می‌کنیم. در هر دایره ۱۰۰ قطاع سفید و ۱۰۰ قطاع دیگر به رنگ سیاه هستند. دایره‌ی کوچک‌تر را روی دایره‌ی بزرگ‌تر قرار می‌دهیم به طوری که مرکز دو دایره روی هم قرار بگیرند. نشان دهید که همواره می‌توان دایره‌ی کوچک‌تر را چنان چرخاند که خطوط شعاعی (مرزهای) قطاع‌های دو دایره روی هم قرار بگیرند و ضمناً حداقل ۱۰۰ قطاع از دایره‌ی کوچک‌تر روی قطاع هم رنگ خود در دایره‌ی بزرگ‌تر قرار بگیرند.

۳) فرض کنید $f(x,y,z) = \dfrac{(xy+yz+zx)(x+y+z)}{(x+y)(x+z)(y+z)}$، مجموعه مقادیر حقیقی r را بیابید به طوری که برای آن‌ها حداقل یک سه تایی (x,y,z) از اعداد حقیقی مثبت یافت شود که $f(x,y,z) = r$.

۴) تمام زوج مرتب‌های (a,b) که a و b اعداد صحیح هستند را بیابید به طوری که $۳^a + ۷^b$ یک مربع کامل باشد.

۵) یک مجموعه نقاط مشخص در صفحه با این خاصیت که هر سه نقطه‌ای از آن‌ها می توانند به وسیله‌ی یک دیسک به شعاع ۱ پوشانده شوند را در نظر بگیرید. ثابت کنید همه‌ی این مجموعه نقاط می‌توانند توسط دیسک به شعاع ۱ پوشانده شوند.