سؤالات

۱. تمام چندجمله‌ای‌های تکین $p(x)$ با ضرایب صحیح از درجه‌ی ۲ را بیابید به طوری که چند جمله‌ای $q(x)$ با ضرایب صحیح وجود داشته باشد به طوری‌که $p(x)q(x)$ یک چند جمله‌ای با ضرایب تماماً ±1 باشد.

۲. فرض کنید $\mathbb{R}^+$ بیان‌گر مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت باشد. تمام توابع $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ را بیابید به طوری‌که

$$f(x)f(y)=2f(x+f(y))$$

برای تمام اعداد حقیقی مثبت y,x برقرار باشد.

۳. چهار عدد حقیقی r,q,p و s در شرایط

$$p+q+r+s=9 \quad \text{و} \quad p^2+q^2+r^2+s^2=21$$

صدق می‌کنند. ثابت کنید $ab-cd\geq 2$ برای جایگشتی از (p,q,r,s) مانند (a,b,c,d) برقرار است.

۴. تمام توابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را بیابید که برای هر y,x حقیقی در معادله‌ی

$$f(x+y)+f(x)f(y)=f(xy)+2xy+1$$

صدق می‌کنند.

۵. فرض کنید y,x و z اعداد حقیقی مثبت باشد به طوری که $xyz\geq1$ باشد. ثابت کنید.

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\geq 0$$

۶. یک خانه تعداد زوجی لامپ بین اتاق‌های آن توزیع شده است به طوری‌که در هر اتاق حداقل سه لامپ وجود دارد. هر لامپ دقیقاً با یک لامپ دیگر تغییر وضعیت می‌دهد، نه لزوماً از همان اتاق. هر تغییر در وضعیّت‌های دو لامپ، وضعیت دولامپ را به صورت هم‌زمان تغییر می‌دهد. ثابت کنید به ازای هر حالت اوّلیّه از لامپ‌ها دنباله‌ای از تغییرات در سوئیچ‌ها وجود دارد به طوری که در انتها هر اتاق شامل لامپ‌های روشن و خاموش باشد.

۷. فرض کنید k یک عدد صحیح مثبت ثابت باشد. یک شرکت رویّه‌ی خاصی برای فروش کلاه‌های لبه‌پهن دارد. هر مشتری می‌تواند دو مشتری را برای خرید کلاه لبه‌پهن بعد از این که خودش یکی خرید، تبلیغ کند؛ تبلیغ کسی که قبلاً تبلیغ شده، شمرده نمی‌شود. هر یک از این مشتری‌های تازه می‌توانند به دو مشتری دیگر تبلیغ کنند و به همین ترتیب ادامه می‌یابد. اگر یکی از دو مشتری تبلیغ شده به وسیله‌ی یک نفر حداقل k نفر را به خرید کلاه‌پهن وا دارد. (مستقیماً و یا به صورت غیرمستقیم)، آن‌گاه آن نفر به صورت رایگان یک ویدئو برنده می‌شود. ثابت کنید اگر n نفر، کلاه لبه‌پهن خریده باشد، آن‌گاه حدّاکثر $\frac{n}{k+2}$ از آن‌ها ویدئو گرفته‌اند.

۸. در یک صفحه‌ی مستطیلی $m\times n$ از mn مربّع واحد، مربّع‌های مجاور، مربّع‌هایی هستند که در یک ضلع مشترکند و یک مسیر دنباله‌ای از مربّع‌هاست که هر دو مربّع متوالی آن، مجاور باشند و هر مربّع از صفحه می‌تواند سیاه یا سفید رنگ شود. فرض کنید N تعداد رنگ‌آمیزی‌هایی از صفحه را نشان دهد که حداقل یک مسیر سیاه از ضلع سمت چپ صفحه تا ضلع سمت راست آن وجود داشته باشد و فرض کنید M تعداد رنگ‌آمیزهایی را نشان دهد که در آن حداقل دو مسیر سیاه غیرمتقاطع از ضلع سمت چپ صفحه تا ضلع سمت راست صفحه وجود داشته باشد. ثابت کنید $N^2\geq 2^{mn}M$.

۹. فرض کنید $n \geq ۳$ یک عدد صحیح مثبت داده شده باشد. می‌خواهیم هر ضلع و هر قطر از یک n ضلعی منتظم $P_۱ \dots P_n$ را با عدد صحیح کم‌تر یا مساوی r برچسب‌گذاری کنیم به طوری‌که

(i) هر عدد صحیح بین r,۱ به عنوان برچسب به کار رود.

(ii) در هر مثلث $P_iP_jP_k$ دو تا از برچسب‌ها مساوی و بزرگ‌تر از سومی باشند این شرایط داده شده است:

(a) بزرگ‌ترین عدد صحیح مثبت r را بیابید به طوری‌که این کار عملی باشد.

(b) برای آن مقدار از r، چند رنگ‌آمیزی خواسته شده وجود دارد؟

۱۰. n ماژیک وجود دارد، هر یک با یک طرف سفید و با طرف سیاه، که در یک سطر چیده شده‌اند به طوری‌که سمت سفید آن‌ها به سمت بالاست. در هرگام، اگر ممکن باشد، ماژیکی با سمت بالای سفید را انتخاب می‌کنیم (ولی نه از ماژیک‌های انتهایی)، آن را حذف می‌کنیم و نزدیک‌ترین ماژیک به آن از سمت چپ و از سمت راست را وارونه می‌کنیم. ثابت کنید یک نفر می‌تواند به حالتی با ۲ ماژیک برسد اگر و تنها اگر $n-۱$ مضربی از ۳ نباشد.

۱۱. در یک مسابقه‌ی ریاضی ۶ مسأله به مسابقه‌دهندگان داده شد. هر جفت از مسأله‌ها به وسیله‌ی بیش از $\frac{۲}{۵}$ مسابقه‌دهندگان حلّ شد. هیچ کس ۶ مسأله را حلّ نکرد. نشان دهید حدّاقل ۲ مسابقه‌دهنده وجود داشت که دقیقاً ۵ مسأله حلّ کرده بودند.

۱۲. فرض کنید $n \geq ۱$ یک عدد صحیح داده شده باشد، و فرض کنید $a_۱, \dots, a_n$ دنباله‌ای از اعداد صحیح باشد به طوری‌که n مجموع $a_۱ + \dots + a_n$ را عاد می‌کند. نشان دهید جایگشت‌های σ, τ از $۱,۲,\dots,n$ وجود دارد. به طوری‌که برای تمام $i = ۱,۲,\dots,n$، $\sigma(i) + \tau(i) \equiv a_i \pmod n$ برقرار باشد.

۱۳. فرض کنید M یک n ضلعی محدّب باشد، $n \geq ۴$. $n-۳$ قطر سبز و $n-۳$ قطر دیگر قرمز رنگ‌آمیزی می‌شوند، به طوری‌که هیچ دو قطر هم‌رنگ همدیگر را در داخل M قطع نمی‌کند. ماکسیمم تعداد نقاط برخورد قطرهای سبز و قرمز را در داخل M بیابید.

۱۴. در مثلث ABC که در شرط $AB + BC = ۳AC$ صدق می‌کند I مرکز دایره‌ی محاطی داخلی است و دایره‌ی محاطی داخلی AB و BC را بر ترتیب در D و E قطع می‌کند. فرض کنید L, K نقاط قرینه‌ی D و E نسبت به I باشد. ثابت کنید $ACKL$ محاطی است.

۱۵. ۶ نقطه روی اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC انتخاب می‌شوند: $A_۱, A_۲$ روی BC؛ $B_۱, B_۲$ روی CA؛ $C_۱, C_۲$ روی AB. این‌ها رئوس شش ضلعی محدّب $A_۱A_۲B_۱B_۲C_۱C_۲$ است که هر شش ضلع آن باهم برابرند. ثابت کنید خطوط $A_۱B_۲, B_۱C_۲$ و $C_۱A_۲$ هم‌رسند.

۱۶. فرض کنید $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع باشد. خطّ متغیّر l گذرا از نقطه‌ی A پرتوهای BC, DC را به ترتیب در نقاط X, Y قطع می‌کند. فرض کنید K, L مراکز دوایر محاطی خارجی مثلث‌های ABX, ADY باشند که به ترتیب بر اضلاع BX, DY مماسند. ثابت کنید اندازه‌ی زاویه‌ی KCL به انتخاب l بستگی ندارد.

۱۷. فرض کنید $ABCD$ یک چهارضلعی محدّب داده شده باشد که اضلاع AD, BC آن برابر و غیرموازی‌اند. فرض کنید E, F به ترتیب نقاطی از اضلاع BC, AD باشند به طوری‌که $BE = DF$ باشد. خطوط AC, BD در P و خطوط BD, EF در Q و خطوط EF, AC در R متقاطع‌اند. تمام مثلث‌های PQR را به ازای تغییر نقاط E, F در نظر بگیرید. نشان دهید دایره‌ی محیطی این مثلث‌ها نقطه‌ی مشترکی به‌جز P دارند.

۱۸. فرض کنید ABC یک مثلث حاده‌الزاویه با شرط $AB \neq AC$ باشد، فرض کنید H مرکز ارتفاعی آن و M نقطه‌ی وسط BC باشد. نقاط D روی AB و E روی AC چنان‌اند که $AE = AD$ و E, H, D هم‌خط‌اند. ثابت کنید HM بر وتر مشترک دوایر محیطی مثلث‌های ABC و ADE عمود است.

۱۹. میانه‌ی AM از مثلث ABC دایره‌ی محاطی داخلی‌اش (w) را در L, K قطع می‌کند. خطوط گذرا از L, K و به موازات BC، w را دوباره در Y, X قطع می‌کنند. خطوط AX و AY ، BC را در Q, P قطع می‌کنند. ثابت کنید $BP = CQ$.

۲۰. در مثلث حاده‌الزاویه‌ی ABC، فرض کنید R, Q, P, F, E, D به‌ترتیب پای عمودهای مرسوم از C, B, A, C, B, A بر FD, EF, AB, CA, BC و DE باشد. ثابت کنید $P(ABC)P(PQR) \geq P(DEF)^2$ است که $P(T)$ بیان‌گر محیط مثلث T است.

۲۱. دنباله‌ی $a_1, a_2, \ldots$ به صورت ذیل تعریف می‌شوند:

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

تمام اعداد صحیح مثبت را تعیین کنید به طوری که نسبت به هر جمله‌ی این دنباله اوّل باشند.

۲۲. فرض کنید $a_1, a_2, \ldots$ دنباله‌ای از اعداد صحیح با نامتناهی جمله‌ی صحیح مثبت و نامتناهی جمله‌ی صحیح منفی باشد و برای هر عدد صحیح مثبت n فرض کنید، $a_1, a_2, \ldots, a_n$ در تقسیم بر n، n باقی‌مانده‌ی متفاوت برجای گذارند، ثابت کنید هر عدد صحیح دقیقاً یک بار در دنباله ظاهر می‌شود.

۲۳. فرض کنید a, b, c, d, e و f اعداد صحیح مثبت باشند. فرض کنید مجموع $S = a + b + c + d + e + f$ هر دوی $abc + def$ و $ab + bc + ca - de - ef - fd$ را عاد کند. ثابت کنید S مرکّب است.

۲۴. تمام اعداد صحیح $n > 1$ را بیابید که عدد صحیح یکتای a با شرط $0 < a \leq n!$ موجود باشد به طوری‌که $a^n + 1$ مضربی از $n!$ باشد.

۲۵. تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد صحیح مثبت n را با $d(n)$ مشخّص می‌کنیم. یک عدد صحیح n، بیش مضرب نامیده می‌شود اگر برای تمام اعداد صحیح مثبت $m < n$، $d(n) > d(m)$ باشد. دو عدد بیش مضرب صحیح n, m با شرط $m < n$ متوالی نامیده می‌شوند اگر هیچ عدد بیش مضرب صحیح sای وجود نداشته باشد که $m < s < n$ باشد

(a) نشان دهید متناهی جفت (a, b) از اعداد بیش مضرب صحیح متوالی وجود دارد که $a \mid b$.

(b) نشان دهید برای هر عدد اوّل p بی‌شمار عدد صحیح مثبت بیش مضرب r وجود دارد به طوری‌که pr خودش بیش مضرب باشد.

۲۶. فرض کنید b, a اعداد صحیح مثبتی هستند به طوری که $a^n + n$ به ازای هر عدد صحیح مثبت n، $b^n + n$ را عاد می‌کند. نشان دهید $a = b$.

۲۷. فرض کنید $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ باشد که $a_0, \ldots, a_n$ صحیح‌اند و $a_n > 0$، $n \geq 2$ است. ثابت کنید عدد صحیح مثبت m وجود دارد به طوری‌که $P(m!)$ عدد مرکّب است.

پاسخ‌ها

۱. به وضوح، $p(x)$ باید به صورت $p(x)=x^{۲}\pm ax\pm ۱$ باشد که a عددی صحیح است. برای $a=\pm ۱$ و $a=۰$، چند جمله‌ای p ویژگی خواسته شده را دارد: کافی است به ترتیب $q=۱$ و $q=x+۱$ بگیریم.

حال فرض کنید $|a|\geq ۲$ باشد. پس $p(x)$ دو ریشه‌ی حقیقی دارد که با $x_۲, x_۱$ نشان می‌دهیم که همچنین ریشه‌های $p(x)q(x)=x^{n}+a_{n-۱}x^{n-۱}+\ldots+a_{۰}$ هستند، $a_i=\mp ۱$. بنابراین

$$۱=\left|\frac{a_{n-۱}}{x_i}+\ldots+\frac{a_{۰}}{x_i^{n}}\right|\leq\frac{۱}{|x_i|}+\ldots+\frac{۱}{|x_i|^{n}}<\frac{۱}{|x_i|-۱}$$

که ایجاب می‌کند $|x_۱|,|x_۲|<۲$ باشد. این بلافاصله حالت $|a|\geq ۳$ را حذف می‌کند و نیز چندجمله‌ای‌های $p(x)=x^{۲}\pm ۲x-۱$ را دو چند جمله‌ای باقی‌مانده‌ی $x^{۲}\pm ۲x+۱$ شرط را به ازای $q(x)=x\mp ۱$ ارضا می‌کنند.

در مجموع، چند جمله‌ای‌های $p(x)$ با شرایط خواسته شده عبارتند از $x^{۲}\pm ۱, x^{۲}\pm x\pm ۱$ و $x^{۲}\pm ۲x+۱$.

۲. $y>۰$ داده شده است، تابع $\varphi(x)=x+yf(x)$ و $x>۰$ را در نظر بگیرید. این تابع یک به یک است: در حقیقت اگر $\varphi(x_۱)=\varphi(x_۲)$ باشد آن گاه $f(x_۱)f(y)=f(\varphi(x_۱))=f(\varphi(x_۲))=f(x_۲)f(y)$ بنابراین، $f(x_۱)=f(x_۲)$ بنابراین طبق تعریف φ، $x_۱=x_۲$ است. حال اگر $f(x_۱)<f(x_۲), x_۱>x_۲$ باشد، برای $y=\frac{x_۱-x_۲}{f(x_۲)-f(x_۱)}>۰$ داریم: $\varphi(x_۱)=\varphi(x_۲)$، که نامکن است؛ بنابراین f غیرنزولی است. معادله‌ی تابعی اکنون نتیجه می‌دهد $f(x)f(y)=۲f(x+yf(x))\geq ۲f(x)$ و نتیجتاً $f(y)\geq ۲$ برای $y>۰$ برقرار است. به همان خاطر $f(x+yf(x))=f(xy)=f(y+xf(y))\geq f(۲x)$

برای $y>۰$ به‌دلخواه کوچک برقرار است، که ایجاب می‌کند f روی بازه‌ی $[x,۲x)$ برای هر $x>۰$ ثابت باشد. امّا آن موقع f باید روی اجتماع تمام بازه‌های $[x,۲x)$ بر روی تمام xهای مثبت ثابت باشد، یعنی روی تمام $\mathbb{R}^{+}$. حال معادله‌ی تابعی به ما می‌دهد برای تمام xها $f(x)=۲$، که به وضوح یک جواب است.

۳. بدون کاسته شدن از کلیت مسأله فرض کنید $p\geq q\geq r\geq s$ باشد. داریم:

$$(pq+rs)+(pr+qs)+(ps+qr)=\frac{(p+q+r+s)^{۲}-p^{۲}-q^{۲}-r^{۲}-s^{۲}}{۲}=۳۰$$

دیدن این‌که $pq+rs\geq pr+qs\geq ps+qr$ برقرار است و نتیجه می‌دهد $pq+rs\geq ۱۰$ باشد، امری آسان به شمار می‌رود. حال با قرار دادن $p+q=x$ به دست می‌آوریم. $x^{۲}+(۹-x)^{۲}=(p+q)^{۲}+(r+s)^{۲}=۲۱+۲(pq+rs)\geq ۴۱$ که معادل $(x-۴)(x-۵)\geq ۰$ است. چون $x=p+q\geq r+s$ است نتیجه می‌گیریم که $x\geq ۵$ است.

بنابراین $۲۵\leq p^{۲}+q^{۲}+۲pq=۲۱-(r^{۲}+s^{۲})+۲pq\leq ۲۱+۲(pq-rs)$ و یا $pq-rs\geq ۲$ که مطابق چیزی است که خواسته شده.

توجّه: چهارتایی مرتّب $(p,q,r,s)=(۳,۲,۲,۲)$ نشان می‌دهد تخمین ۲، بهترین است.

۴. با جای‌گذاری $y=0$ نتیجه می‌شود $(f(0)+1)(f(x)-1)=0$ و چون $f(x)=1$ برای تمام x ها، ناممکن است، به دست می‌آوریم $f(0)=-1$. حال قرار دادن $x=1$ و $y=-1$ نتیجه می‌دهد $f(1)=1$ است و یا $f(-1)=0$ است. درحالت اوّل جای‌گذاری $x=1$ در معادله‌ی تابعی نتیجه می‌دهد $f(y+1)=2y+1$ (یعنی $f(x)=2x-1$) که یک جواب است.

حال فرض کنید $f(1)=a\neq 1$ باشد و $f(-1)=0$ باشد. با جای‌گذاری $(x,y)=(z,1)$ و $(x,y)=(-z,-1)$ در معادله‌ی تابعی نتیجه می‌شود.

$$f(z+1)=(1-a)f(z)+2z+1$$
$$f(-z-1)=f(z)+2z+1 \qquad (*)$$

آن نتیجه می‌دهد که $f(z+1)=(1-a)f(-z-1)+af(2z+1)$ باشد. یعنی $f(x)=(1-a)f(-x)+a(2x-1)$ است. به صورت مشابه $f(-x)=(1-a)f(x)+a(-2x-1)$ است، که به همراه معادله‌ی قبلی نتیجه می‌دهد.

$$(a^2-2a)f(x)=-2a^2x-(a^2-2a)$$

حال $a=2$ به وضوح ناممکن است. برای $a\notin\{0,2\}$ به دست می‌آوریم $f(x)=\dfrac{-2ax}{a-2}-1$.

این تابع شرایط خواسته شده را تنها $a=-2$ ارضا می‌کند که جواب $f(x)=-x-1$ را نتیجه می‌دهد. در حالت باقی‌مانده که $a=0$ است داریم $f(x)=f(-x)$. با قرار دادن $y=z$ و $y=-z$ در معادله‌ی تابعی و کاستن، نتیجه می‌شود $f(2z)=4z^2-1$، بنابراین $f(x)=x^2-1$ که در معادله صدق می‌کند.

بنابراین جواب‌ها عبارتند از $f(x)=2x-1, f(x)=-x-1$ و $f(x)=x^2-1$.

۵. نامساوی خواسته شده معادل:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2}\le 3 \quad (*)$$

است. طبق نامساوی کوشی داریم

$$(x^5+y^2+z^2)(yz+y^2+z^2)\ge (x^{\frac{5}{2}}(yz)^{\frac{1}{2}}+y^2+z^2)^2\ge (x^2+y^2+z^2)^2$$

و به همان خاطر

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}\le\frac{yz+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$$

برای دو عبارت دیگر در (*) دو نامساوی مشابه دیگر به دست می‌آوریم. با جمع زدن این سه نامساوی به‌دست آمده، داریم:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2}\le 2+\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$$

که به همراه نامساوی مشهور $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$ به ما نتیجه‌ی خواسته شده را می‌دهد.

۶. یک اتاق اقتصادی نامیده می‌شود اگر بعضی از لامپ‌های آن روشن و بعضی از لامپ‌های آن خاموش باشد. دو لامپ که وضعیت‌شان تعویض می‌شود دوقلو نامیده می‌شوند. دوقلوی لامپ l با $\bar{l}$ مشخّص می‌کنیم.

فرض کنید به حالتی رسیده‌ایم که کم‌ترین تعداد اتاق‌های غیراقتصادی را دارد، و این عدد مطلقاً مثبت است.

اجازه دهید اتاقی غیراقتصادی به نام $R_۰$ انتخاب کنیم و لامپ $l_۰$ در آن باشد. فرض کنید لامپ $\bar{l}_۰$ در اتاق $R_۱$ باشد. با تغییر وضعیت $R_۰, l_۰$ را اقتصادی می‌کنیم؛ چون تعداد اتاق‌های غیراقتصادی نمی‌تواند کاهش بیابد، این تغییر باید اتاق $R_۱$ را غیراقتصادی کند. حال لامپ $l_۱$ را در $R_۱$ انتخاب می‌کنیم که دوقلوی آن $\bar{l}_۱$ در اتاق $R_۲$ قرار دارد. تغییر وضعیت $l_۱$، $R_۱$ را اقتصادی می‌کند، بنابراین باید $R_۲$ را غیراقتصادی کند با ادامه‌ی این روند دنباله‌ی $l_۰, l_۱, ...$ از لامپ‌ها را به دست می‌آوریم که l_i در اتاق R_i قرار دارد و $\bar{l}_i \neq l_{i+۱}$ برای تمام i ها در اتاق $R_{i+۱}$ قرار دارد. لامپ‌های $l_۰, l_۱, ...$ به این ترتیب تغییر وضعیت داده می‌شوند. این دنباله دارای این خاصیت است که تغییر وضعیت l_i, $\bar{l}_i$، اتاق R_i را اقتصادی و اتاق $R_{i+۱}$ را غیراقتصادی می‌کند.

فرض کنید $R_m = R_k$ با شرط $m > k$ اوّلین تکرار در دنباله‌ی (R_i) باشد. فرض کنید تغییر وضعیت لامپ‌ها را در $l_{m-۱}$ قطع کنیم، اتاق R_k قبل از تغییر وضعیت l_k، غیراقتصادی بود. بنابراین لامپ‌های $\bar{l}_{m-۱}, l_k$ در اتاق R_k تغییر وضعیت داده شده‌اند، امّا چون این دو لامپ متمایزند (در حقیقت، دوقلوهای نظیر آن‌ها $l_{m-۱}, \bar{l}_k$ متمایزند)، اتاق R_k اکنون اقتصادی است آن چنان که اتاق‌های $R_۰, R_۱, ...$ و $R_{m-۱}$ اقتصادی هستند. این تعداد اتاق‌های غیراقتصادی را کاهش می‌دهد، که مخالف فرض ماست.

۷. فرض کنید v تعداد برنده‌های ویدئو باشد. چیزی که به آسانی به دست می‌آید این است که برای $v = ۱$ و $v = ۲$، تعداد مشتری‌ها (n) به‌ترتیب حداقل $۲k + ۳$ و $۳k + ۵$ است. با استقرا روی v ثابت می‌کنیم که اگر $n \geq k + ۱$ باشد آن‌گاه $n \geq (k+۲)(v+۱) - ۱$ است.

بدون کاسته شدن از کلیت مسأله می‌توانیم فرض کنیم که تعداد مشتری‌ها (n) برای $v \rangle ۰$ داده شده، مقدار مینیمم ممکن است. فرد P را در نظر بگیرید که به وسیله‌ی هیچ‌کسی به غیر از خودش متقاعد نشده است آن‌گاه P باید یک ویدئو برده باشد؛ در غیراین صورت P می‌توانست بدون کاسته شدن تعداد برنده‌های ویدئو از گروه حذف شود. فرض کنید R, Q دو فرد متقاعد شده به وسیله‌ی P باشند. مجموعه افرادی را که به وسیله‌ی P از طریق Q برای خرید کلاه اسپانیایی متقاعد شده‌اند به همراه Q با C مشخّص می‌کنیم و مجموعه‌ی تمام مشتری‌های دیگر به جز P را با D مشخّص می‌کنیم. فرض کنید x تعداد برنده‌هایی ویدئو در C، باشد. آن‌گاه $v - x - ۱$ برنده‌ی ویدئو در D خواهدبود. $|C| \geq (k+۲)(x+۱) - ۱$ برقرار است طبق فرض استقرا اگر $x \rangle ۰$ باشد و اگر $x = ۰$ باشد چون P برنده است. مشابهاً، $|D| \geq (k+۲)(v-x) - ۱$ بنابراین $n \geq ۱ + (k+۲)(x+۱) - ۱ + (k+۲)(v-x) - ۱$ یعنی $n \geq (k+۲)(v+۱) - ۱$

۸. **فرض کنید یک صفحه‌ی دو بعدی $T, m\times n$ در نظرگرفته شود، که دقیقاً k تا از مربّع‌ها پشت‌نما باشند. مربّع پشت‌نما، تنها از یک طرف رنگ می‌شود (بنابراین از طرف دیگر به صورت مشابه به نظر می‌رسد)، در حالی که مربّع غیر پشت‌نما دو طرفش رنگ شود (نه لزوماً یک رنگ).**

فرض کنید $C = C(T)$ مجموعه‌ی رنگ‌آمیزی‌هایی از صفحه باشد که در آن دو مسیر سیاه از یال سمت چپ به یال سمت راست باشد، یکی در بالا و یکی در پایین که در هیچ مربّع پشت‌نمایی متقاطع نباشند. اگر $k = 0$ باشد آن‌گاه $|C| = N^2$ ، با استقرا روی k ثابت می‌کنیم که $2^k |C| \le N^2$ است: این، حکم مسأله را به ازای $|C| = M$ برای $k = mn$ ایجاب خواهد کرد.

فرض کنید q یک مربّع پشت‌نمای ثابت باشد. هر B رنگ شده در C را در نظر بگیرید: اگر q به مربّع غیر پشت‌نمایی تبدیل شد، یک صفحه‌ی جدید T' با $k-1$ مربّع پشت‌نما به دست می‌آید، پس طبق فرض استقرا $2^{k-1} |C(T')| \le N^2$. چون B شامل دو مسیر سیاه است که حداکثر یکی از این دو مسیر از q می‌گذرد، رنگ‌آمیزی q به هر رنگ در طرف دیگر، رنگ‌آمیزی دیگری در C' را نتیجه خواهد داد؛ بنابراین $|C(T')| \ge 2|C(T)|$، که ایجاب می‌کند $2^k |C(T)| \le N^2$ باشد و استقرا کامل می‌شود.

۹. **اجازه دهید برچسب پاره‌خطّ XY را با $[XY]$ مشخّص کنیم، که X و Y در آن رئوسی از چندضلعی هستند. هر پاره‌خط MN ای را که دارای برچسب ماکزیمم است با برچسب $[MN] = r$ مشخّص می‌کنیم. طبق شرط (ii)، برای هر $P_i \neq M, N$ ، دقیقاً یکی از پاره‌خط‌های P_iN, P_iM با r برچسب‌گذاری می‌شود. بنابراین مجموعه‌ی تمام رأس‌های n ضعلی به دو گروه مجزّا افراز می‌شوند: $B = \{P_i \mid [P_iN] = r\}, A = \{P_i \mid [P_iM] = r\}$. ادّعا می‌کنیم که پاره‌خط XY با r برچسب‌گذاری می‌شود اگر و تنها اگر دو نقطه از دو گروه متفاوت را به هم وصل کند. بدون کاسته شدن از کلیّت مسأله فرض کنید $X \in A$ باشد. اگر $Y \in A$ باشد، آن‌گاه $[XM] = [YM] = r$.**

بنابراین $[XY] < r$ است. اگر $Y \in B$ باشد، آن‌گاه $[XM] = r$ و $[YM] < r$، بنابراین طبق $[XY] = r, (ii)$ است که مطابق ادّعای ماست.

نتیجه می‌گیریم یک برچسب‌گذاری که شرط (ii) را ارضا می‌کند به طور یکتا به وسیله‌ی گروه-های A و B و برچسب‌گذاری‌های داخل A و B که در شرط (ii) صدق می‌کنند تعیین می‌شود.

(a) با استقرا روی n ثابت می‌کنیم که بزرگ‌ترین مقدار ممکن $n-1, r$ است. حالات تباهیده‌ی $n = 1, 2$ بدیهی هستند. اگر $n \ge 3$ باشد، تعداد برچسب‌های متفاوت از پاره‌خط‌هایی که رأس‌های A (همچنین B) را به هم وصل می‌کنند از $|A| - 1$ (همچنین $|B| - 1$) تجاوز نمی‌کند، در حالی که تمام پاره‌خط‌هایی که به رأسی در A وصلند و به رأسی در B وصلند با r برچسب‌گذاری می‌شوند. به همان خاطر $r \le (|A| - 1) + (|B| - 1) = n - 1$. تساوی برقرار است اگر تمام برچسب‌های مذکور متفاوت باشند.

(b) فرض کنید a_n تعداد برچسب‌گذاری‌های به شرط $r = n - ۱$ باشد. به کمک استقرا ثابت می‌کنیم که $a_n = \frac{n!(n-۱)!}{۲^{n-۱}}$ است. این برای $n = ۱$ بدیهی است، پس فرض کنید $n \geq ۲$ باشد. اگر $|A| = k$ ثابت باشد، گروه‌های A، B به $\binom{n}{k}$ طریق می‌توانند انتخاب می‌شوند. مجموعه‌ی برچسب‌های به کار رفته در A می‌تواند از میان $۱,۲,...,n-۲$ به $\binom{n-۲}{k-۱}$ طریق انتخاب شود. حال پاره‌خط‌های موجود در گروه‌های A و B می‌توانند مطابق شرط (ii) به ترتیب به a_k و a_{n-k} طریق برچسب‌گذاری شوند.

در این روش هر برچسب‌گذاری‌ای، دوبار شمرده می‌شود، چون انتخاب A معادل انتخاب B است. نتیجه می‌دهد:

$$a_n = \frac{۱}{۲}\sum_{k=۱}^{n-۱}\binom{n}{k}\binom{n-۲}{k-۱}a_k a_{n-k} = \frac{n!(n-۱)!}{۲(n-۱)}\sum_{k=۱}^{n-۱}\frac{a_k}{k!(k-۱)!}.\frac{a_{n-k}}{(n-k)!(n-k-۱)!}$$
$$= \frac{n!(n-۱)!}{۲(n-۱)}\sum_{k=۱}^{n-۱}\frac{۱}{۲^{k-۱}}.\frac{۱}{۲^{n-k-۱}} = \frac{n!(n-۱)!}{۲^{n-۱}}$$

۱۰. چپ‌ترین ماژیک را با L و راست‌ترین ماژیک را با R مشخّص می‌کنیم. برای شروع، توجّه کنید که زوجیّت تعداد ماژیک‌های سمت بالا سیاه ثابت است. بنابراین، اگر فقط دو ماژیک باقی بماند، این دو ماژیک باید رنگ‌های سمت بالای یکسانی داشته باشند.

به کمک استقرا روی n نشان خواهیم داد که بازی می‌تواند به صورت موفقیت‌آمیز پایان یابد اگر و تنها اگر $n \equiv ۰ \pmod{۳}$ یا $n \equiv ۲ \pmod{۳}$ باشد، و این که سمت بالای R, L در حالت اوّل سیاه و در حالت دوم سفید خواهدبود.

گزاره برای $n = ۲,۳$ واضح است. فرض کنید که بازی را برای nای تمام کرده‌ایم، و موقعیت ماژیک X (با شمارش از سمت چپ) را که آخرین مورد حذف شده بود با k مشخّص کنیم. علاوه بر تمام شدن بازی، زیر بازی‌های با k ماژیک از L تا X و با $n-k+۱$ ماژیک از X تا R هم پایان یافته‌اند. به همان خاطر، قبل از حذف شدن X، سمت بالای L سیاه بوده است اگر $k \overset{۳}{\equiv} ۰$ بوده باشد و سفید بوده‌است اگر $k \overset{۳}{\equiv} ۲$ بوده باشد. ماژیک‌های R, L زمان حذف X معکوس شده بودند. به همان خاطر، در موقعیت نهایی R, L سفیدند اگر و تنها اگر $k \equiv n-k+۱ \equiv ۰$ باشد که نتیجه می‌دهد $k \overset{۳}{\equiv} ۲$ است و سیاه است اگر و تنها اگر $k \equiv n-k+۱ \equiv ۲$ باشد که نتیجه می‌دهد $n \overset{۳}{\equiv} ۰$ است.

از طرف دیگر، بازی با n ماژیک می‌تواند به بازی با $n-۳$ ماژیک با حذف ماژیک‌های دوم، چهارم و سوم (با همین ترتیب) کاهش یابد. این استقرا را پایان می‌دهد.

۱۱. فرض کنید n مسابقه‌دهنده وجود داشته باشد و a_i تا از آن‌ها دقیقاً i مسأله حل کرده باشند که $a_0+\dots+a_5=n$ است. اجازه دهید تعداد جفت‌های (C,P) که در آن مسابقه‌دهنده‌ی C یک جفت از مسایل P را حل کرده باشد با N مشخّص کنیم و محاسبه کنیم. هر جفت از ۱۵ جفت مسأله حداقل به وسیله‌ی $\frac{2n+1}{5}$ مسابقه‌دهنده حل شده بود، که ایجاب می‌کند $N\ge 15\frac{2n+1}{5}=6n+3$ باشد. از طرف دیگر، a_i دانش‌آموز، $\frac{i(i-1)}{2}$ جفت مسأله حل کردند؛ بنابراین

$$6n+3\le N\le a_2+3a_3+6a_4+10a_5=6n+4a_5-(3a_3+5a_2+6a_1+6a_0)$$

نتیجتاً $a_5\ge 1$ است. فرض کنید $a_5=1$ باشد. آن‌گاه باید داشته باشیم $N=6n+4$، که تنها زمانی ممکن است که ۱۴ جفت از مسأله‌ها به وسیله‌ی دقیقاً $\frac{2n+1}{5}$ دانش‌آموز حل شده باشد و بقیّه به وسیله‌ی $\frac{2n+1}{5}+1$ دانش‌آموز حل شده باشد، و تمام دانش‌آموزان به جز برنده ۴ مسأله حل کرده باشند.

مسأله‌ی t در صورتی که به وسیله‌ی برنده حل نشده باشد سخت نامیده می‌شود و جفت‌هایی از مسایل که به وسیله‌ی $\frac{2n+1}{5}+1$ دانش‌آموز حل شده‌اند، مخصوص نامیده می‌شوند.

اجازه دهید تعداد جفت‌های (C,P) که P شامل مسأله‌ی ثابت p باشد را با M_p مشخّص کنیم و محاسبه کنیم. فرض کنید b_p تعداد مسابقه‌دهندگانی باشد که مسأله‌ی p را حل کرده‌اند. پس $M_t=3b_t$ (هر یک از b_t دانش‌آموز مورد نظر سه جفت مسأله‌ی شامل t حل کرده‌اند)، و $M_p=3b_p+1$ برای $p\ne t$ (برنده، چهار جفت از جفت‌های مذکور حل کرده است). از طرف دیگر، هریک از پنج جفت شامل p به وسیله‌ی $\frac{2n+1}{5}$ یا $\frac{2n+1}{5}+1$ دانش‌آموز حل شده، بنابراین $M_p=2n+2$ است اگر جفت مخصوص شامل p باشد وگرنه $M_p=2n+1$ است.

حال چون $M_t=3b_t=2n+1$ یا $2n+2$ است، داریم $2n+1\overset{3}{\equiv}0$ یا ۲، امّا اگر $p\ne t$ مسأله‌ای باشد که در جفت مخصوصی یافته نشود، داریم $M_p=3b_p+1=2n+1$؛ بنابراین $2n+1\overset{3}{\equiv}1$، که یک تناقض است.

۱۲. فرض کنید جایگشت‌های مطلوب σ,τ برای دنباله‌ی $a_1,\dots,a_n$ وجود داشته باشد. دنباله‌ی (b_i) با مجموع مضرب n که به پیمانه‌ی n با (a_i) در دو موقعیت متفاوت است، (بگیرید i_1,i_2) داده شده است. نشان می‌دهیم چگونه می‌توان جایگشت‌های مطلوب σ',τ' را برای دنباله‌ی (b_i) ساخت. در این روند، می‌توانیم جایگشت‌های مطلوب را برای هر دنباله‌ی دیگری که مجموعش مضربی از n باشد، بسازیم.

می‌دانیم که برای هر $i \ne i_1, i_2$، $\sigma(i) + \tau(i) \overset{n}{\equiv} b_i$ است. دنباله‌ی $i_1, i_2, i_3 ...$ را به شرح ذیل می‌سازیم:
برای هر $k \ge 2$، i_{k+1} اندیس یکتایی است به طوری‌که

$$\sigma(i_{k-1}) + \tau(i_{k+1}) \overset{n}{\equiv} b_{i_k} \quad (*)$$

فرض کنید $i_p = i_q$ یک تکرار در دنباله با کوچک‌ترین q باشد. ادّعا می‌کنیم که $p = 1$ یا $p = 2$ است. فرض خُلف کنید که $p \rangle 2$ باشد. باجمع زدن (*) برای $k = p, p+1, ..., q-1$ و در نظر گرفتن تساوی $\sigma(i_k) + \tau(i_k) = b_{i_k}$ برای $i_k \ne i_1, i_2$ به دست می‌آوریم $\sigma(i_{p-1}) + \sigma(i_p) + \tau(i_{q-1}) + \tau(i_q) \overset{n}{\equiv} b_p + b_{q-1}$. چون $i_p = i_q$ است، نتیجه می‌دهد که $\sigma(i_{p-1}) + \tau(i_{q-1}) \overset{n}{\equiv} b_{q-1}$ باشد و به همان خاطر $i_{p-1} = i_{q-1}$ باشد که یک تناقض است. بنابراین مطابق ادّعای ما $p = 1$ یا $p = 2$ است.

حال جایگشت‌های ذیل را تعریف می‌کنیم:

برای $\sigma'(i_1) = \sigma(i_{q-1}), \sigma'(i_k) = \sigma(i_{k-1})\ k = 2, 3, ..., q-1$

برای $k = 2, 3, ..., q-1$ $\tau'(i_k) = \tau(i_{k+1})$ ، $\tau'(i_1) = \begin{cases} \tau(i_2) & \text{اگر } p = 1 \text{ باشد} \\ \tau(i_1) & \text{اگر } p = 2 \text{ باشد} \end{cases}$

برای $\sigma'(i) = \sigma(i), \tau'(i) = \tau(i)\ i \notin \{i_1, ..., i_{q-1}\}$

جایگشت‌های τ', σ' ویژگی مطلوب را دارند. در حقیقت، $\sigma'(i) + \tau'(i) = b_i$ به وضوح برای هر $i \ne i_1$ برقرار است، امّا پس آن برای $i = i_1$ هم باید برقرار باشد.

۱۳. برای هر قطر سبز d، فرض کنید C_d تعداد برخوردهای سبز- قرمز نقطه‌ها روی d را مشخّص کند. وظیفه‌ی ما پیدا کردن ماکسیمم مقدار ممکن مجموع $\sum_d C_d$ روی تمام قطرهای سبز است.

فرض کنید d_j, d_i دو قطر سبز باشند و فرض کنید بخشی از M که بین d_j, d_i است m رأس داشته باشد. حداکثر $n - m - 1$ قطر قرمز، هر دوی d_j, d_i را قطع می‌کنند، در حالی که $m - 2$ قطر باقی‌مانده حداکثر یکی از d_j, d_i را قطع می‌کند. آن نتیجه می‌دهد که:

$$C_{d_i} + C_{d_j} \le 2(n - m - 1) + (m - 2) = 2n - m - 4 (*)$$

حال قطرهای سبز را در دنباله‌ی $d_1, d_2, ..., d_{n-3}$ به صورت ذیل مرتب می‌کنیم. به آسانی دیده می‌شود که دو قطر d_1, d_2 وجود دارد به طوری که M را به دو مثلث و یک $n-2$ ضلعی تقسیم می‌کنند؛ پس دو قطر d_3, d_4 وجود دارند به طوری‌که $n-2$ ضلعی را به دو مثلث و یک $n-4$ ضلعی تقسیم می‌کند و به همین ترتیب ادامه می‌یابد. این روند را تا زمانی که به یک مثلث یا چهارضلعی برسیم ادامه می‌دهیم. حال بخشی از M بین d_{2k-1}, d_{2k} برای $1 \le k \le r$، حداقل $n - 2k$ رأس دارد، که برای $n - 3 = 2r + e, e \in \{0, 1\}$ است؛ بنابراین، طبق (*)، $C_{d_{2k-1}} + C_{d_{2k}} \le n + 2k - 4$ است. علاوه بر آن، $C_{d_{n-3}} \le n - 3$ است. جمع زدن نتیجه می‌دهد.

$$C_{d_1} + C_{d_2} + ... + C_{d_{n-3}} \le \sum_{k=1}^{r} (n + 2k - 4) + e(n - 3) = 3r^2 + e(3r + 1) = \left\lceil \frac{3}{4}(n - 3)^2 \right\rceil$$

این مقدار در مثال ذیل به دست می‌آید. فرض کنید $A_۱A_۲,...A_n$ ، n ضلعیِ M باشد و فرض کنید $l=\left[\frac{n}{۲}\right]+۱$ باشد. قطرهای $A_۱A_i$ ، $i=۳,...,l$ ، A_iA_j ، $j=l+۲,...,n$ سبز رنگ می‌شوند، در حالی که قطرهای $A_۲A_i$ ، $i=l+۱,...,n$ ، $A_{l+۱}A_j$ ، $j=۳,...,l-۱$ قرمز رنگ می‌شوند، بنابراین جواب $\left[\frac{۳}{۴}(n-۳)^۲\right]$ است.

۱۴. فرض کنید F محلّ تماس دایره‌ی محاطی داخلی با AC باشد و N,M به ترتیب نقاط تماس دوایر محاطی خارجی متناظر با BC,AB باشند. اگر I مرکز دایره‌ی محاطی داخلی باشد و I_a مرکز دایره‌ی محاطی خارجی نظیر رأس A باشد و P نقطه‌ی تماس دایره‌ی محاطی خارجی نظیر رأس A با پرتو AC باشد. داریم $\frac{AI}{IL}=\frac{AI}{IF}=\frac{AI_a}{I_aP}=\frac{AI_a}{I_aN}$ ، که ایجاب می‌کند که $\Delta AIL \sim \Delta AI_aN$ باشد. بنابراین L روی AN قرار دارد، و به صورت مشابه K روی CM قرار دارد. $y=CF, x=AF$ بگیرید. چون $CE=BN=y, AD=BM=x, BD=BE$ است شرط $AB+BC=۳AC$ نتیجه می‌دهد $EN=x, DM=y$ است. حال مثلث‌های MKA, CLN متشابه‌اند چون ارتفاع‌های LE, KD در شرط $AD=EN, DM=CE, DK=EL$ صدق می‌کنند. بنابراین $\angle AKM=\angle CLN$ است که ایجاب می‌کند $ACKL$ محاطی باشد.

۱۵. فرض کنید P رأس چهارم لوزی $C_۲A_۱A_۲P$ باشد. چون $\Delta C_۲PC_۱$ متساوی‌الاضلاع است، به آسانی نتیجه می‌گیریم که $B_۱B_۲C_۱P$ هم لوزی است. بنابراین $\Delta PB_۱A_۲$ متساوی‌الاضلاع است و $\angle(C_۲A_۱, C_۱B_۲)=\angle A_۲PB_۱=۶۰^\circ$ است. به آسانی نتیجه می‌شود که $\Delta AC_۱B_۲ \cong \Delta BA_۱C_۲$ و نتیجتاً $AC_۱=BA_۱$ است؛ مشابهاً $BA_۱=CB_۱$ است. به همان خاطر مثلث $A_۱B_۱C_۱$ متساوی-الاضلاع است. حال از $B_۱B_۲=B_۲C_۱$ نتیجه می‌شود که $A_۱B_۲$ زاویه‌ی $\angle C_۱A_۱B_۱$ را نصف می‌کند. مشابهاً، $C_۱A_۲, B_۱C_۲$ زوایای $\angle A_۱B_۱C_۱$ و $\angle B_ہC_ہA_ہ$ را نصف می‌کنند؛ بنابراین $C_۱A_۲, B_۱C_۲, A_۱B_۲$ در مرکز دایره‌ی محاطی داخلی $A_۱B_۱C_۱$ یعنی مرکز ABC هم رسند.

۱۶. چون $\angle ALD=\frac{۱}{۲}\angle AYD=\angle KAB, \angle ADL=\angle KBA=۱۸۰^\circ-\frac{۱}{۲}\angle BCD$ است، مثلث‌های LDA, ABK متشابه‌اند. بنابراین $\frac{BK}{BC}=\frac{BK}{AD}=\frac{AB}{DL}=\frac{DC}{DL}$ است که به همراه $\angle LDC=\angle CBK$ به ما می‌دهد $\Delta LDC \sim \Delta CBK$ به همان خاطر

$$\angle KCL=۳۶۰^\circ-\angle BCD-(\angle LCD+\angle KCB)=۳۶۰^\circ-\angle BCD-(\angle CKB+\angle KCB)=۱۸۰^\circ-\angle CBK$$

که ثابت است.