فصل ۱

دوره‌ی ۲۳

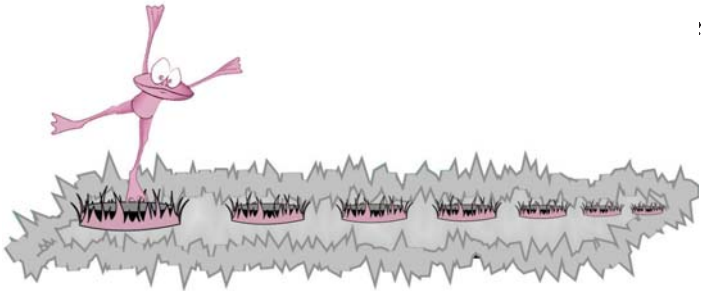
بهمن‌ماه ۱۳۸۳

سؤالات بیست و سومین المپیاد ریاضی ایران

۱ پس از بسط دادن $(۱ + ۲x + ۳x^{۲} + \cdots + ۹x^{۸} + ۱۰x^{۹})^{۲}$، چند تا از ضرایب فرد است؟

الف) ۱ ب) ۵ ج) ۷ د) ۹ ه) ۱۰

۲ در برکه‌ای ۷ قطعه سنگ وجود دارد که از چپ به راست با اعداد ۱ تا ۷ شماره‌گذاری شده‌اند. قورباغه‌ای روی سنگ شماره‌ی یک نشسته است. فاصله‌ی سنگ‌ها به گونه‌ای است که اگر قورباغه روی سنگ iـاُم باشد می‌تواند حداکثر تا i سنگ جلو بپرد. به چند طریق ممکن است قورباغه، بدون برگشت به سمت چپ، ؛



الف) ۱۰ ب) ۱۱ ج) ۱۲ د) ۱۳ ه) ۱۴

۳ به چند طریق می‌توان سه زیرمجموعه‌ی دوعضوی از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \cdots, ۶\}$ انتخاب کرد به‌طوری که هر دو تا از آن‌ها دقیقاً یک عضو مشترک داشته باشند؟

الف) ۲۰ ب) ۴۰ ج) ۵۰ د) ۶۰ ه) ۸۰

۴ به ازای چند عدد طبیعی n، $[\frac{n^{۲}}{۳}]$ عددی اول است؟ ($[x]$ جزء صحیح x است.)

الف) یک ب) دو ج) سه د) بی‌نهایت ه) چنین عددی وجود ندارد.

۵ چهارضلعی $ABCD$ در بین چهارضلعی‌هایی که داخل نیم‌دایره‌ای به شعاع واحد قرار دارند، بیش‌ترین مساحت را دارد. مساحت $ABCD$ چقدر است؟

الف) ۱ ب) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$ ج) $\frac{۶}{۵}$ د) $\frac{\sqrt{۷}}{۷}$ ه) $\sqrt{۲}$

۶ در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$، نیمساز زاویه‌ی C مثلث ABC را به دو مثلث متساوی‌الساقین دیگر تقسیم کرده است. نسبت $\frac{BC}{AB}$ برابر با کدام‌یک از اعداد زیر است؟

الف) $\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$ ب) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ج) $\sqrt{۲}$ د) $\frac{۱}{۲}$ ه) $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$

۷ سهمی $y = x^{۲} - ۲ax + ۱$ و خط $y = ۲b(a - x)$ را در نظر بگیرید. تعریف کنید

$$A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^{۲} | \text{خط و سهمی مذکور یکدیگر را قطع نمی‌کنند}\}$$

مساحت A چقدر است؟

الف) $\frac{\pi}{۴}$ ب) $\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$ ج) A بی‌کران است. د) ۱ ه) π

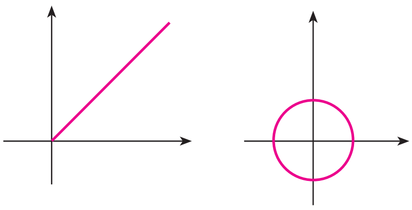
۸ ۱۸ خط در صفحه طوری رسم شده است که هر کدام افقی، عمودی یا موازی نیمساز ربع اول و سوم (یعنی خط $y = x$) است. در این وضعیت، صفحه حداکثر به چند قسمت (کران‌دار یا بی‌کران) تقسیم شده است؟

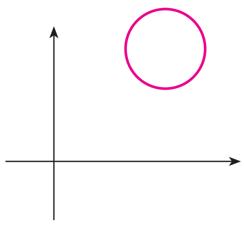
الف) ۶۳ ب) ۸۱ ج) ۱۲۱ د) ۱۲۷ ه) ۲۱۶

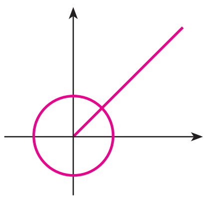
۹ فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از نقاط صفحه باشند. مجموعه‌ی $A \oplus B$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

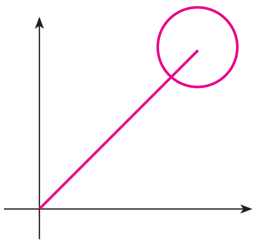
$$A \oplus B = \{(x_{۱} + x_{۲}, y_{۱} + y_{۲}) | (x_{۱}, y_{۱}) \in A, (x_{۲}, y_{۲}) \in B\}$$

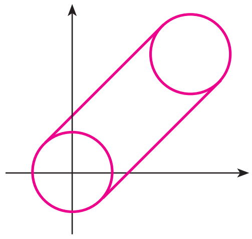
اگر A و B پاره‌خط و دایره‌ی نشان داده شده در شکل مقابل باشند، آن‌گاه $A \oplus B$ کدام‌یک از شکل‌های زیر خواهد بود؟

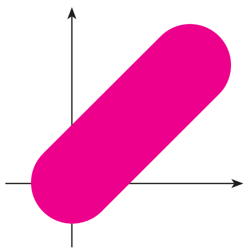


الف) 

ب) 

ج) 

د) 

ه) 

۱۰ قطر یک زیرمجموعه از صفحه یعنی بزرگ‌ترین فاصله‌ی بین نقاط آن. به عنوان مثال، قطر هر مثلث برابر طول بزرگ‌ترین ضلع آن است. فرض کنید قطر دومجموعه‌ی A و B برابر d است. کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار قطر $A \oplus B$ چقدر است؟ ($A \oplus B$ همان است که در سؤال قبل تعریف شده است.)

الف) d و d ب) $\sqrt{۲}d$ و $\sqrt{۳}d$ ج) d و $۲d$ د) $\sqrt{۲}d$ و $۲d$ هـ) $۲d$ و $۳d$

۱۱ مجموعه‌های A_k، $k \in \mathbb{N}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A_۱ \quad = \quad \text{مجموعه‌ی اعداد اول}$$
$$A_{k+۱} \;=\; \{a_۱ \times a_۲ \times \cdots \times a_{k+۱} | a_۱, a_۲, \cdots, a_{k+۱} \in A_k\}$$

توجه کنید که $a_۱, a_۲, \cdots, a_{k+۱}$ لزوماً متمایز نیستند. کدام‌یک از اعداد زیر، دست کم عضو یکی از A_kها است؟

الف) $۳^۷ \times ۲^{۲۴۳}$ ب) $۲^{۲۵} \times ۵^{۲۵}$ ج) $۲^{۲۳۱} \times ۷^{۲۵}$

د) $۲^{۱۱۱} \times ۳^۹$ هـ) $۲^{۶۰} \times ۳^{۱۲} \times ۵^۶$

۱۲ به ازای چند مقدار طبیعی برای a، معادله‌ی $\frac{۱}{y} - \frac{a}{x+y} = \frac{۱}{x}$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی جواب دارد؟

الف) چنین aای وجود ندارد. ب) یکی ج) دو تا

د) چهار تا هـ) بی‌نهایت

۱۳ می‌توان ثابت کرد در هر مثلث دلخواه ABC، قرینه‌ی مرکز ارتفاعیه (محل همرسی ارتفاع‌ها) نسبت به وسط ضلع BC روی دایره‌ی محیطی مثلث قرار می‌گیرد. این نقطه را D بنامید. اندازه‌ی زاویه‌ی DAC برابر است با:

الف) $\frac{\hat{A}}{۲}$ ب) $\frac{\hat{B}}{۲}$ ج) $۹۰ - \hat{A}$ د) $۹۰ - \hat{B}$ هـ) $۹۰ - \frac{\hat{A}+\hat{B}}{۲}$

۱۴ فرض کنید $f : R \to R$ تابعی وارون‌پذیر باشد و $h(x) = \frac{kf(x)}{۱ - f(x)}$. اگر h وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $\frac{x}{f \circ h^{-۱}(x)} - x$ برابر است با:

الف) $f(x)$ ب) $h(x)$ ج) kx د) k هـ) $\frac{x}{f(x)} - x$

۱۵ کاغذی مستطیل شکل را چندین بار تا کرده‌ایم. در هر مرحله تا بر روی خطی موازی دو ضلع و در وسط آن‌ها زده شده است تا به مستطیلی با مساحت نصف مستطیل قبل برسیم. واضح است که در هر مرحله این کار به دو روش (افقی و عمودی) امکان‌پذیر است. در نهایت، همهٔ تا ها را بازکرده‌ایم و دیده‌ایم در مجموع ۳۱۸ خط تای افقی و عمودی تولید شده است. کاغذ چند بار تا شده است؟

الف) ۱۳ ب) ۱۴ ج) ۱۵۹ د) ۳۱۷ هـ) ۳۱۸

۱۶ مربع توپری به ضلع واحد در فضا در نظر بگیرید. حجم مجموعه‌ی نقاطی که فاصله‌ی آن‌ها دست کم از یکی از نقاط مربع کوچک‌تر یا مساوی ۱ باشد، چقدر است؟

الف) ۲ ب) $2(1+\frac{2}{3}\pi)$ ج) $2(1+\pi)$ د) ۸ ه) $2(1+\frac{5}{3}\pi)$

۱۷ فرض کنید $S(n)$ مجموع ارقام عدد n باشد. چند عدد هفت رقمی n وجود دارد که ارقام ۱ تا ۹ دقیقاً یک بار در بین رقم‌های n و $S(n)$ ظاهر شده باشد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۵۰۴۰ ه) ۱۰۰۸۰

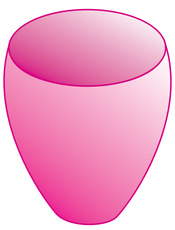
۱۸ فرض کنید عدد طبیعی a داده شده است. در هر گام، به جای عددی که در اختیار داریم یکی از عددهای $2a+1$، $3a+2$، $4a+3$ و $5a+4$ را در نظر می‌گیریم و کار را با آن ادامه می‌دهیم. با شروع از کدام‌یک از اعداد زیر می‌توان بعد از تعدادی گام به عدد $30^{1383}-1$ رسید؟

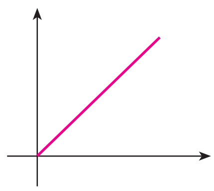
الف) ۱۰ ب) ۱۱ ج) ۱۲ د) ۱۳ ه) هیچ‌کدام

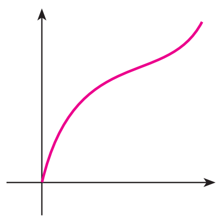
۱۹ فرض کنید $f_0(x)=x$ و برای هر $n\geq 0$، $f_{n+1}(x)=\sqrt{1-f_n(x)}$. دامنه‌ی تابع $f_{1383}(x)$ کدام است؟

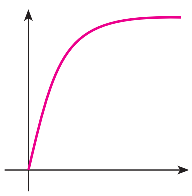
الف) $(-\infty,1]$ ب) $[0,1]$ ج) $[0,\frac{1}{2^{1383}}]$ د) $\{1\}$ ه) $\{0\}$

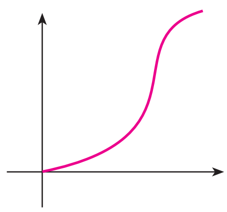
۲۰ در ظرفی به شکل روبه‌رو با نرخ ثابت در هر دقیقه یک لیتر آب می‌ریزیم:
کدام‌یک از نمودارهای زیر می‌تواند نشان‌دهنده‌ی ارتفاع آب بر حسب زمان باشد؟

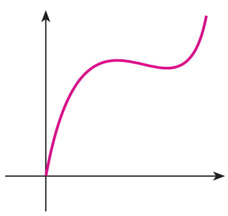


الف)


ب)


ج)


د)


ه)


۲۱ در دایره‌ای به شعاع واحد، AB کمانی ۶۰° و XY قطر متغیری از دایره است. خطوط XA و XB یکدیگر را در نقطه‌ی P قطع می‌کنند. مکان هندسی محل برخورد ارتفاع‌های مثلث PXY چیست؟

الف) دایره‌ای به شعاع $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

ب) خطی به موازات AB و به فاصله‌ی $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ از آن

ج) دایره‌ای به شعاع $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

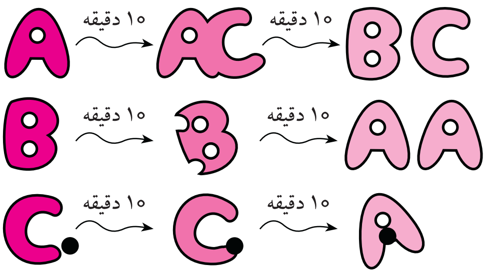
د) خطی به موازات AB و به فاصله‌ی $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ از آن

ه) دایره‌ای به شعاع ۱

۲۲ یک عدد طبیعی را یکنوا می‌گوییم هرگاه رقم صفر نداشته باشد و به علاوه ارقام آن به‌صورت اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی مرتب شده باشند. مثلاً اعداد ۱۳۵۶ و ۷۲ یکنوا هستند اما اعداد ۲۲، ۲۰۳۴ و ۱۳۸۳ یکنوا نیستند. مجموع همه‌ی اعداد یکنوای چهاررقمی چند است؟

الف) ۱۳۹۹۸۶۰ ب) ۹۹۹۹۹۸۰ ج) ۷۹۵۵۴۲۰ د) ۱۲۶۰۰۰۰ ه) ۴۹۴۹۵۵۰

۲۳ بیماری کشنده‌ی ABC توسط باکتری‌ای به همین نام تولید می‌شود. این باکتری در واقع دارای سه نوع A، B و C است که طبق این قوانین به هم تبدیل می‌شوند: پس از گذشت هر ۲۰ دقیقه هر باکتری A به یک B و یک C، هر باکتری B به دو A و هر باکتری C به یک A تبدیل می‌شود. به علاوه هر بار که C به A تبدیل می‌شود یک گلبول قرمز را نیز می‌خورد!



اگر در آغاز تنها یک باکتری از نوع B وارد بدن شده باشد، پس از گذشت ۱۰ ساعت چند گلبول قرمز خورده شده است؟

الف) بین ۱۰۰ تا ۵۰۰ هزار ب) بین ۵۰۰ هزار تا ۱ میلیون ج) بین ۱ تا ۵ میلیون

د) بین ۵ تا ۱۰ میلیون ه) بیش از ۱۰ میلیون

۲۴ دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید که در آن A و B ماتریس‌هایی ۲ × ۲، I ماتریس همانی ۲ × ۲ و 0 ماتریس ۲ × ۲ با درایه‌های صفر است.

$$۲A^۶ + ۲A^۲ + A + B = 0$$
$$A^۲ - A + I = 0$$

داریم:

الف) $۳A + B = 0$ ب) $A + B = I$ ج) $A + ۳B = 0$

د) $A^۲ + B^۲ = 0$ هـ) این دستگاه جواب ندارد.

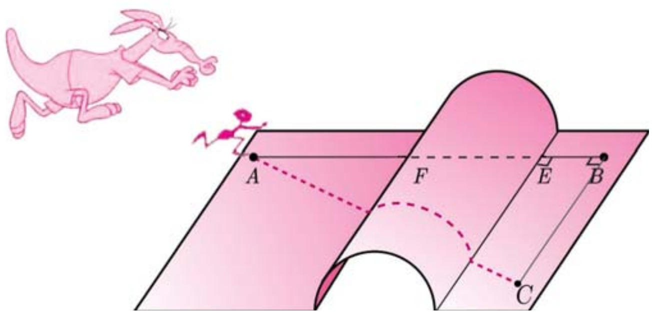
۲۵ می‌خواهیم اعداد طبیعی را طوری رنگ‌آمیزی کنیم که اولاً هر دو عدد متوالی ناهمرنگ باشند و ثانیاً برای هر دو عدد ناهمرنگ a و b، یا باقی‌مانده‌ی a و b بر ۱۱ متفاوت باشد، یا باقی‌مانده a و b بر ۱۷. کم‌ترین تعداد رنگ‌های لازم چند تاست؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۷ د) ۲۱ هـ) ۱۴۷

۲۶ معادله‌ی $[\sin x] + \sin x = [\frac{x}{۳}] + \frac{x}{۳}$ چند جواب حقیقی دارد؟ ($[a]$ جزء صحیح a است.)

الف) جواب ندارد. ب) یکی ج) دو تا د) سه تا هـ) پنج تا

۲۷ در شکل زیر مثلث ABC قائم‌الزاویه است ($\hat{B} = ۹۰^\circ$)، $AB = ۱۰ - \pi$ و $BC = ۶$. نیم‌استوانه‌ای با شعاع واحد و محور عمود بر AB، بین نقاط A و C مانع شده است.



مورچه بنا به دلایلی (!) باید هر چه سریع‌تر از نقطه‌ی A به لانه‌اش در نقطه‌ی C برود. طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن برابر است با:

الف) $\sqrt{۱۳۶}$ ب) $\sqrt{۱۳۶} - \pi$ ج) ۱۰ د) $۷ + \pi$ هـ) ۱۱

۲۸ مهره‌ای در مبدأ مختصات قرار داده‌ایم. در هر مرحله مهره را توسط یکی از چهار بردار (m,n)، $(-m,-n)$، $(n+۱,m+۱)$ یا $(-n-۱,-m-۱)$ به نقطه‌ی دیگری منتقل می‌کنیم و این کار را تکرار می‌کنیم. به ازای کدام‌یک از (m,n)های زیر می‌توان مهره را به هر نقطه‌ی صفحه با مختصات صحیح رساند؟

الف) $n=۳$ و $m=۱$ ب) $n=۳$ و $m=۲$ ج) $n=۵$ و $m=۳$

د) $n=۷$ و $m=۴$ هـ) به ازای هیچ m و nای نمی‌توان این کار را انجام داد.

۲۹ فرض کنید $f(x)=x^۵+x^۴+x^۳+x^۲+x+۱$. باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x^{۱۲})$ بر $f(x)$ کدام است؟

الف) $x^۳+x^۲+x+۱$ ب) $x^۲-x+۶$ ج) $x+۶$

د) ۶ هـ) $۶-x$

۳۰ یک چراغ راهنمای عجیب سه کلید دارد که هر کلید آن می‌تواند در یکی از وضعیت‌های ۱، ۲ یا ۳ قرار گیرد.

می‌دانیم که اگر وضعیت هر سه کلید را همزمان تغییر دهیم، رنگ چراغ تغییر می‌کند. ابتدا هر یک از سه کلید در وضعیت ۱ هستند و چراغ قرمز است. افسر پلیس با تغییر وضعیت کلید اول از ۱ به ۲ چراغ را سبز می‌کند. حال اگر کلید دوم را هم در وضعیت ۲ قرار دهد، چراغ چه رنگی می‌شود؟

الف) قرمز ب) زرد ج) سبز

د) فقط می‌توان گفت سبز نیست. هـ) هر رنگی ممکن است باشد.

پاسخ کلیدی بیست و سومین المپیاد ریاضی ایران

سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ
۱	ب	۱۱	د	۲۱	ج
۲	ب	۱۲	ب	۲۲	الف
۳	ه	۱۳	د	۲۳	ج
۴	ب	۱۴	د	۲۴	الف
۵	ب	۱۵	ب	۲۵	ب
۶	ه	۱۶	ه	۲۶	د
۷	ه	۱۷	د	۲۷	ج
۸	د	۱۸	ب	۲۸	ه
۹	ه	۱۹	ب	۲۹	د
۱۰	د	۲۰	ب	۳۰	ج

پاسخ تشریحی بیست و سومین المپیاد ریاضی ایران

۱

گام اول

جملات حاصل از آن بسط چگونه به‌دست می‌آیند؟

جملات حاصل از آن بسط به دو گونه‌اند:

I: مربعِ هر یک از جملات داخل پرانتز

II: دو برابر حاصل‌ضرب هر دوجمله‌ای از داخل پرانتز

گام دوم

زوج بودن ضریب کدام‌یک از جملات حاصل یقینی است؟

معلوم است که ضرایب تمام جملات ایجاد شده در بندِ II زوج هستند. در بندِ I نیز مرجعِ جملاتی که ضریب آن‌ها زوج است، دارای ضریب زوج خواهند شد.

گام سوم

مابقیِ جملات همگی ضرایبی فرد دارند آن‌ها را مشخص کنید.

فقط جملاتی از بندِ I می‌ماند که ضرایب فردی دارند. آن جملات به شکل زیر به‌دست می‌آیند:

$$(۵x^{۴})^{۲} = ۲۵x^{۸} \quad , \quad (۳x^{۲})^{۲} = ۹x^{۴} \quad , \quad (۱)^{۲} = ۱$$
$$(۹x^{۸})^{۲} = ۸۱x^{۱۶} \quad , \quad (۷x^{۶})^{۲} = ۴۹x^{۱۲}$$

۲

گام اول

تصور کنید که اگر تعداد سنگ‌ها زیاد بود و قرار بود قورباغه به سنگ بیستم برسد آن‌گاه آن قورباغه قبل از سنگ بیستم بر روی چه سنگی بوده است (یعنی پرش از روی چه سنگ‌هایی به سنگ بیستم فقط با یک پرش امکان‌پذیر است)؟

معلوم است که جواب، سنگ‌های ۱۰، ۱۱، ۱۲، ...، ۱۹ می‌باشد.

گام دوم

پرش به روی سنگ nـاُم از روی چه سنگ‌هایی ممکن است؟

اگر n زوج باشد آن‌گاه جواب، سنگ‌های $\frac{n}{۲}$، $\frac{n}{۲}+۱$، ...، $\frac{n}{۲}+\frac{n}{۲}-۱$ می‌باشد و اگر n فرد باشد آن‌گاه جواب، سنگ‌های $\frac{n+۱}{۲}$، $\frac{n+۱}{۲}+۱$، ...، $\frac{n-۱}{۲}+\frac{n+۱}{۲}-۱$ می‌باشد.

گام سوم

اگر تعداد طرق رسیدن قورباغه به سنگ iـاُم را a_i بنامیم آن‌گاه بین a_i و a_jهای قبل از a_i چه رابطه‌ای برقرار است؟

با توجه به گام‌های قبلی معلوم است که اگر i زوج باشد آن‌گاه رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$a_i = a_{i-۱} + a_{i-۲} + \cdots + a_{\frac{i}{۲}}$$

و اگر i فرد باشد آن‌گاه رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$a_i = a_{i-۱} + a_{i-۲} + \cdots + a_{\frac{i+۱}{۲}}$$

گام چهارم

با توجه به مقدار $a_۲$ و $a_۳$ که به راحتی به‌دست می‌آیند $a_۴$، $a_۵$، $a_۶$ و $a_۷$ را بیابید.

مقادیر a_i به شکل زیر به‌دست می‌آیند:

$$a_۲ = ۱ \quad , \quad a_۳ = a_۲ = ۱ \quad , \quad a_۴ = a_۳ + a_۲ = ۱ + ۱ = ۲$$

$$a_۵ = a_۴ + a_۳ = ۲ + ۱ = ۳ \quad , \quad a_۶ = a_۵ + a_۴ + a_۳ = ۳ + ۲ + ۱ = ۶$$

$$a_۷ = a_۶ + a_۵ + a_۴ = ۶ + ۳ + ۲ = ۱۱$$

۳

گام اول

مسأله را به این صورت حالت‌بندی کنید که آن سه زیرمجموعه آیا باید هر سه عضوی مشترک داشته باشند و یا می‌توانند دوبه‌دو اشتراک داشته ولی عضوی در هر سه تای آن‌ها مشترک نباشد.

آن سه زیرمجموعه به یکی از دو شکل زیر است:

I: به شکل $\{a, b\}$، $\{a, c\}$ و $\{b, c\}$ باشند.

II: به شکل $\{a, b\}$، $\{a, c\}$ و $\{a, d\}$ باشند.

گام دوم

تعداد طرق اختصاص دادن ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ به حروف a، b و c را در حالت اول و به حروف a، b، c و d را در حالت دوم بررسی کنید.

در حالتِ I باید از ۶ رقم داده شده، ۳ رقم انتخاب کنیم که این کار به $\binom{۶}{۳}$ یعنی ۲۰ طریق، شدنی است. اختصاص دادن سه رقمِ منتخب به سه حرفِ a، b و c به یک طریق ممکن است، چون نقش a، b و c در حالتِ I همگی یکسان است.

در حالتِ II باید از ۶ رقم داده شده ۴ رقم انتخاب کنیم که این کار به $\binom{۶}{۴}$ یعنی ۱۵ طریق، شدنی است. در چهار حرف موجود، نقش حرفِ a با بقیه متفاوت است، بنابراین یکی از چهار رقم را به a و سه رقمِ دیگر را به سه حرفِ متشابه b، c و d اختصاص می‌دهیم، بنابراین جواب این حالت برابر $۱ \times ۴ \times \binom{۶}{۴}$ یعنی ۶۰ می‌باشد.

گام سوم

با توجه به حالت‌بندیِ فوق جواب نهایی را بیابید.

با توجه به حالت‌بندی گام‌های قبلی جواب موردنظر برابر ۶۰ + ۲۰ یعنی ۸۰ می‌باشد. البته لازم به ذکر است که تعداد جواب‌ها در حالتِ II را به شکل زیر نیز می‌توان پیدا کرد:

$$۶۰ = \binom{۵}{۳}.\binom{۶}{۱} = \left(\begin{array}{c}\text{انتخاب سه رقم از ۵ رقم باقی‌مانده}\\ \text{و اختصاص آن‌ها به سه حرف یکسان}\end{array}\right) \text{ و } \left(\begin{array}{c}\text{انتخاب یک رقم از ۶ رقم و اختصاص}\\ \text{آن به حرفِ متفاوت } a\end{array}\right)$$

۴

گام اول

می‌دانیم هر عدد طبیعی مانند n به یکی از سه شکل $۳k$، $۳k + ۱$ و $۳k + ۲$ می‌باشد. در هر یک از سه حالت فوق حاصل $[\frac{n^۲}{۳}]$ را بیابید.

اگر $n = ۳k$ آن‌گاه خواهیم داشت:

$$[\frac{n^۲}{۳}] = [\frac{۹k^۲}{۳}] = [۳k^۲] = ۳k^۲$$

اگر $n = ۳k + ۱$ آن‌گاه خواهیم داشت:

$$[\frac{n^۲}{۳}] = [\frac{۹k^۲ + ۶k + ۱}{۳}] = [۳k^۲ + ۲k + \frac{۱}{۳}] = ۳k^۲ + ۲k = k(۳k + ۲)$$

و بالاخره اگر $n = ۳k + ۲$ آن‌گاه خواهیم داشت:

$$[\frac{n^۲}{۳}] = [\frac{۹k^۲ + ۱۲k + ۴}{۳}] = [۳k^۲ + ۴k + ۱ + \frac{۱}{۳}]$$
$$= ۳k^۲ + ۴k + ۱ = (۳k + ۱)(k + ۱)$$

گام دوم

با توجه به حالت‌بندیِ قسمت قبل در چه مواقعی $[\frac{n^۲}{۳}]$ اول می‌شود؟

در حالت اول، $۳k^۲$ فقط وقتی اول می‌شود که $k = ۱$.

در حالت دوم، $k(۳k + ۲)$ فقط وقتی اول می‌شود که $k = ۱$.

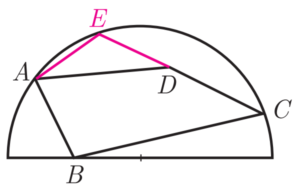
در حالت سوم، حاصلِ $(۳k + ۱)(k + ۱)$ هرگز عددی اول نمی‌شود.

بنابراین حاصل $[\frac{n^۲}{۳}]$ فقط به ازای $n = ۳$ و $n = ۴$ عددی اول می‌شود که به‌ترتیب برابرِ ۳ و ۵ به‌دست می‌آید.

۵

گام اول

اولاً استدلال کنید که ۴ رأس آن چهارضلعی باید بر روی محیط نیم‌دایره باشند.



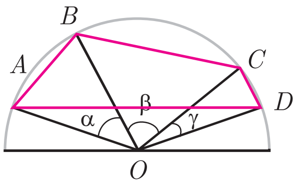
اگر رأسی مانند D از آن چهارضلعی در داخل نیم‌دایره باشد، آن‌گاه CD را امتداد می‌دهیم تا محیط نیم‌دایره را در نقطه‌ای مانند E قطع کند. معلوم است که مساحت چهارضلعیِ $ABCD$ از مساحت چهارضلعیِ $ABCD$ بیشتر است.

گام دوم

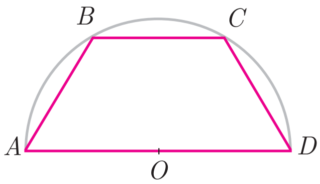
با در نظر گرفتن چهار رأس چهارضلعی بر روی محیط نیم‌دایره و با در نظر گرفتن نابرابریِ $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \leq ۳\sin(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{۳})$ برای زوایای α، β و γ با شرط $\alpha+\beta+\gamma \leq ۱۸۰^\circ$ (که به نامساوی ینسن معروف است) مسأله را حل کنید.

با فرض این‌که O مرکز نیم‌دایره باشد، با رسم شعاع‌های OA، OB، OC و OD خواهیم داشت:

$$S_{ABCD} \leq S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD}$$
$$= \frac{۱}{۲}r^۲.\sin\alpha + \frac{۱}{۲}r^۲.\sin\beta + \frac{۱}{۲}r^۲.\sin\gamma$$



$$\begin{aligned}&= \frac{۱}{۲}[\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma]\\ &\leq \frac{۱}{۲} \times ۳\sin(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{۳})\\ &\leq \frac{۳}{۲}\sin(\frac{۱۸۰^\circ}{۳}) = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}\end{aligned}$$



حالت تساوی موقعی اتفاق می‌افتد که چهارضلعی به شکل مقابل ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقینی باشد که طول هر ساق آن ۱، طول قاعده‌ی کوچکش ۱ و طول قاعده‌ی بزرگش برابر ۲ باشد:

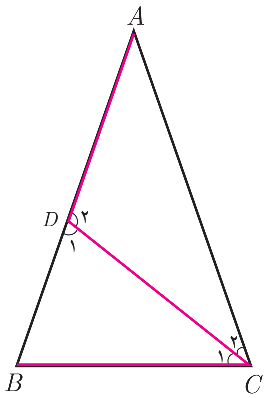
۶

راه‌حل اول:

گام اول

با تلاش بر روی زاویه‌های داخلی و خارجی مثلث‌ها، اندازه‌ی هر یک از زاویه‌های مثلث را بیابید.

اگر مقدار $\hat{C}_۱$ را برابر α در نظر بگیریم، آن‌گاه:



$$\angle C_۱ = \angle C_۲ \;\Rightarrow\; \angle C_۲ = \alpha$$

$$\angle B = \angle C \;\Rightarrow\; \angle B = ۲\alpha$$

$$\angle C_۲ = \angle A \;\Rightarrow\; \angle A = \alpha$$

$$\angle D_۲ = \angle C_۱ + \angle B = \alpha + ۲\alpha = ۳\alpha$$

$$\angle D_۱ = \angle B = ۲\alpha$$

$$\angle D_۱ + \angle D_۲ = ۱۸۰^\circ \;\Rightarrow\; ۲\alpha + ۳\alpha = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow\; ۵\alpha = ۱۸۰^\circ \;\Rightarrow\; \alpha = ۳۶^\circ$$

گام دوم

با روابط مثلثاتی $\sin ۱۸^\circ$ را پیدا کرده و مسأله را حل کنید.

$$\sin ۳۶^\circ = \cos ۵۴^\circ \;\Rightarrow\; \sin[۲(۱۸^\circ)] = \cos[۳(۱۸^\circ)]$$

$$\Rightarrow\ ۲\sin ۱۸^\circ.\cos ۱۸^\circ = ۴\cos^۳ ۱۸^\circ - ۳\cos ۱۸^\circ$$
$$\Rightarrow\ ۲\sin ۱۸^\circ = ۴\cos^۲ ۱۸^\circ - ۳ = ۴(۱-\sin^۲ ۱۸^\circ) - ۳$$
$$\Rightarrow\ ۴\sin^۲ ۱۸^\circ + ۲\sin ۱۸^\circ - ۱ = ۰$$
$$\Rightarrow\ \sin ۱۸^\circ = \frac{-۲+\sqrt{۲۰}}{۸} = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۴}$$

در مسأله‌ی اصلی با رسم ارتفاع وارد بر قاعده مقدار زاویه‌ی $\hat{A}_۱$ برابر ۱۸° به‌دست می‌آید، بنابراین:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{۲BH}{AB} = ۲\sin ۱۸^\circ = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$$

راه‌حل دوم:

گام اول

قضیه نیمسازها را به یاد آورید و با نوشتن تناسب‌های مربوطه مسأله را حل کنید.

بدون آن‌که به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد شود مقدار ساق مثلث ABC را برابر واحد در نظر گرفته و مقدار AD را برابر x و مقدار BD را برابر y در نظر می‌گیریم:

$$x+y=۱ \qquad (۱)$$
$$CD = \text{نیمساز} \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{x}{۱} \Rightarrow y = x^۲ \qquad (۲)$$

با استفاده از دو رابطه‌ی به‌دست آمده خواهیم داشت:

$$(۱),(۲) \Rightarrow ۱-x=x^۲ \Rightarrow x = \frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{x}{۱} = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$$

۷

گام اول

شرط لازم و کافی برای آن‌که نمودارهای $y=f(x)$ و $y=g(x)$ با یکدیگر نقطه‌ی تلاقی نداشته باشد را بیان کنید.

شرط لازم و کافی برای چنین امری آن است که دستگاه زیر جواب نداشته باشد:

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$$

به عبارت دیگر معادله‌ی $f(x)=g(x)$ در مجموعه اعداد حقیقی فاقد جواب باشد.

گام دوم

دستگاه مربوطه را تشکیل داده و پس از به‌دست آوردن معادله‌ی لازم، شرط لازم و کافی برای ریشه نداشتن معادله‌ای درجه ۲ در مجموعه اعداد حقیقی را بنویسید.

$$\begin{cases} y = x^{۲} - ۲ax + ۱ \\ y = ۲ba - ۲bx \end{cases} \Rightarrow x^{۲} - ۲ax + ۱ = ۲ba - ۲bx$$

$$\Rightarrow x^{۲} + ۲(b-a)x + ۱ - ۲ab = ۰$$

معادله‌ی درجه دوم فوق باید فاقد ریشه باشد، در نتیجه مبین آن باید منفی باشد:

$$\Delta < ۰ \Rightarrow (b-a)^{۲} - (۱ - ۲ab) < ۰ \Rightarrow a^{۲} + b^{۲} < ۱$$

می‌دانیم معادله‌ی $x^{۲} + y^{۲} = ۱$ معادله‌ی دایره‌ای به مرکز $O(۰, ۰)$ و به شعاع ۱ می‌باشد. بنابراین مجموعه نقاط

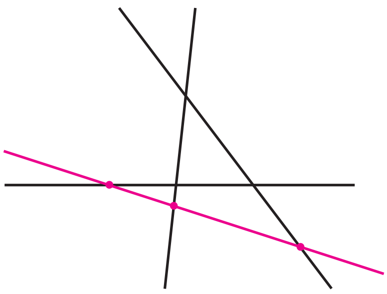
$$A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^{۲} | a^{۲} + b^{۲} < ۱\}$$

مجموعه نقاط درون دایره‌ای به شعاع ۱ است که مساحت آن برابر با $\pi(۱)^{۲}$ یعنی π می‌باشد.

۸

گام اول

ابتدا فرض کنید ۳ خط دوبه‌دو متقاطعی در صفحه موجود باشد. می‌دانیم آن سه خط صفحه را به ۷ ناحیه تقسیم کرده است. استدلال کنید که با رسم خط چهارم که با هیچ‌یک از خطوط قبلی موازی نبوده و هیچ سه خطی همرس نباشند به تعداد نواحی قبلی چند ناحیه افزوده می‌شود.



خط چهارم سه خط قبلی را در سه نقطه قطع می‌کند و با هر نقطه‌ی تقاطعی یک ناحیه از ناحیه‌های قبلی به دو قسمت تقسیم می‌شود. باید دقت نمود که با نقطه‌ی تقاطع آخر یک ناحیه‌ی دیگر نیز به تعداد نواحی اضافه می‌شود، بنابراین:

$$a_{۴} = a_{۳} + (۳) + ۱ = ۷ + (۳) + ۱ = ۱۱$$

گام دوم

به نظر شما اگر a_k نشان‌گر تعداد نواحی حاصل از تقاطع k خط در یک صفحه باشد، با رسم خط $(k+1)$ـاُم حداکثر چند ناحیه به نواحی قبلی اضافه می‌شود؟

با توجه به این‌که خط $(k+1)$ـاَم خطوط قبلی را حداکثر در k نقطه قطع می‌کند و با توجه به استدلال گام قبلی معلوم می‌شود که حداکثر نواحی ایجاد شده برابر $a_k + k + 1$ می‌باشد به عبارت دیگر رابطه‌ی $a_{k+1} = a_k + k + 1$ برقرار است.

گام سوم

اگر مجموعاً ۴ خط افقی و عمودی داشته باشیم در حالتی که دو تا از آن‌ها عمودی باشد و ۲ تا افقی، تعداد نواحی بیش‌تری خواهیم داشت و یا در حالتی که سه تا از آن‌ها عمودی و یکی افقی باشد؟

در حالت اول تعداد نواحی برابر ۹ و در حالت دوم تعداد نواحی برابر ۸ می‌باشد.

گام چهارم

با توجه به گام قبلی به نظر می‌رسد بیش‌ترین نواحی را موقعی خواهیم داشت که ۶ تا از خطوط عمودی، ۶ تا از آن‌ها افقی و ۶ تای دیگر موازی نیمساز ربع اول و سوم باشند. در این حالت تعداد نواحی ایجاد شده را به‌دست آورید.

۶ خط عمودی صفحه را به ۷ ناحیه تقسیم می‌کند.

هر یک از خطوط افقی هر یک از خطوط قبلی را در ۶ نقطه قطع می‌کنند، بنابراین با رسم خط اول ۷ ناحیه، با رسم خط دوم ۷ ناحیه‌ی دیگر، ... و بالاخره با رسم خط ششم نیز ۷ ناحیه به آن نواحی اضافه شده و با اضافه شدن ۷×۶ یعنی ۴۲ ناحیه به نواحی قبلی تعداد کل نواحی به ۴۹ می‌رسد.

هر یک از خطوط مورب را می‌توان چنان رسم کرد که اولاً هر ۱۲ خط قبلی را در ۱۲ نقطه قطع کرده و هیچ سه خطی همرس نباشند که در این‌صورت با رسم هر خط، به نواحی قبلی ۱۳ ناحیه اضافه می‌شود. بنابراین تعداد کلِ نواحیِ ایجاد شده برابر خواهد بود با:

$$? = ۴۹ + ۶ \times ۱۳ = ۴۹ + ۷۸ = ۱۲۷$$

گام پنجم

با توجه به نابرابری $m^۲ + n^۲ + k^۲ \geq \frac{(m+n+k)^۲}{۳}$ که آن را اثبات می‌کنید استدلال کنید که تعداد کل نواحی ایجاد شده نمی‌تواند از ۱۲۷ بیش‌تر باشد.

ابتدا نابرابری اشاره شده را اثبات می‌کنیم:

$$m^۲ + n^۲ + k^۲ \geq \frac{(m+n+k)^۲}{۳}$$

$$\iff ۳m^۲ + ۳n^۲ + ۳k^۲ \geq m^۲ + n^۲ + k^۲ + ۲mn + ۲mk + ۲nk$$
$$\iff m^۲ - ۲mn + n^۲ + m^۲ - ۲mk + k^۲ + n^۲ - ۲nk + k^۲ \geq ۰$$
$$\iff (m-n)^۲ + (m-k)^۲ + (n-k)^۲ \geq ۰$$

چون تمام روابط برگشت‌پذیر بوده و نابرابری آخر واضح است پس اثبات نابرابری، تمام است فقط باید دقت نمود که تساوی موقعی اتفاق می‌افتد که $m = n = k$.

اما برای استدلال دوم گام، فرض کنید که تعداد خطوط افقی، عمودی و مورب به‌ترتیب برابر m، n و k باشد در آن صورت حداکثر تعداد کل نواحی ایجاد شده برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} ? &= (m+۱)(n+۱) + (m+n+۱)k \\ &= (m+n+k) + (mn+mk+nk) + ۱ \\ &= (m+n+k) + \frac{(m+n+k)^۲}{۲} - \frac{(m^۲+n^۲+k^۲)}{۲} + ۱ \end{aligned}$$

حال از نابرابری اشاره شده استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \Rightarrow ? &\leq (m+n+k) + \frac{(m+n+k)^۲}{۲} - \frac{(m+n+k)^۲}{۶} + ۱ \\ &= ۱۸ + ۱۶۲ - ۵۴ + ۱ = ۱۲۷ \end{aligned}$$

۹

گام اول

نقطه‌ای از مجموعه A و نقطه‌ی دیگری را از مجموعه‌ی B در نظر گرفته و با جاگذاری آن‌ها در رابطه گزینه و یا گزینه‌هایی را رد کنید.

$(۰,۰) \in A\ ,\ (۱,۰) \in B \Rightarrow (۱,۰) \in A \oplus B \Rightarrow$ [رد گزینه‌های الف و ج]

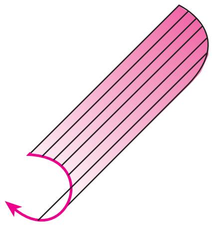
$(۱,۱) \in A\ ,\ (۱,۰) \in B \Rightarrow (۲,۱) \in A \oplus B \Rightarrow$ [رد گزینه‌ی ب]

$(\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}) \in A\ ,\ (\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}) \in B \Rightarrow (\sqrt{۲}, \sqrt{۲}) \in A \oplus B \Rightarrow$ [رد گزینه‌ی د]

گام دوم

عمل یاد شده در صورت مسأله را شبیه‌سازی کرده و مسأله را به‌صورت مستقیم و بدون رد گزینه حل کنید.

مسأله مانند آن است که دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات را با برداری در جهت نیمساز ربع اول بکشیم (انتقال دهیم) و یا تصور کنید که نیمساز کشیده شده در مجموعه‌ی A را با دایره‌ی موجود در مجموعه‌ی B دوران دهیم (شکل مقابل) معلوم است که شکل نهایی همانند شکل موجود در گزینه‌ی ه خواهد بود.



۱۰

گام اول

تصور کنید به شما گفته‌اند که دو پاره‌خط مساوی به طول d در صفحه بکشید تا نفر مقابل شما به دلخواه خود به آن دو پاره‌خط جهت داده و تبدیل به بردار کند. طرف مقابل می‌خواهد جهت‌ها را چنان انتخاب کند که برایند بردارها بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد. در چه حالتی این برایند ماکزیمم و در چه حالی می‌نیمم خواهد بود؟

در حالتی که دو پاره‌خط در یک راستا باشند طرف مقابل با انتخاب جهت‌های یکسان برای آن دو پاره‌خط به برداری به طول $۲d$ خواهد رسید و در حالتی که دو پاره‌خط را عمود بر هم بکشید طول بردار برایند دو بردار به‌دست آمده برابر $\sqrt{۲}d$ خواهد شد.

گام دوم

با تصوری که در گام قبلی از معادل‌سازی بردار به‌دست آمد ثابت کنید جواب مسأله به‌ترتیب همان اعداد $۲d$ و $\sqrt{۲}d$ می‌باشد.

اگر دقت کنید $A \oplus B$ شامل مجموعه نقاطی است که از انتهای بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به‌دست می‌آید. $\vec{a}$ برداری دلخواه است که ابتدا و انتهای آن نقاطی از A باشد و $\vec{b}$ نیز برداری است که ابتدا و انتهایش در B باشد. معلوم است که بیش‌ترین مقدار $\vec{a}+\vec{b}$ برابر $|\vec{a}|+|\vec{b}|$ است و آن موقعی است که آن دو بردار در یک راستا و جهت باشند که این مقدار برابر $۲d$ است و اما کم‌ترین طول برایند برای موقعی است که دو بردار بر هم عمود شوند (البته باید توجه داشت که زاویه‌ی بین دو بردار منفرجه نیست زیرا اگر زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ منفرجه باشد آن‌گاه زاویه‌ی بین بردار $\vec{a}$ و $(-\vec{b})$ حاده بوده و برایند بزرگ‌تری دارد). برایند دو بردار با طول d که بر هم عمودند برابر $\sqrt{۲}d$ می‌باشد.