فصل ۱

پنجمین دوره

اردیبهشت ۱۳۶۷

۱.۱ مسائل

۱. اعداد صحیح و مثبت a و b و c را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\begin{cases} a^۳ - b^۳ - c^۳ = ۳abc \\ a^۲ = ۲(b+c) \end{cases}$$

۲. فرض کنید تابع حقیقی f در فاصلهٔ $[۰,\infty]$ تعریف شده و f' و f'' در این فاصله موجود باشند و داشته باشیم:

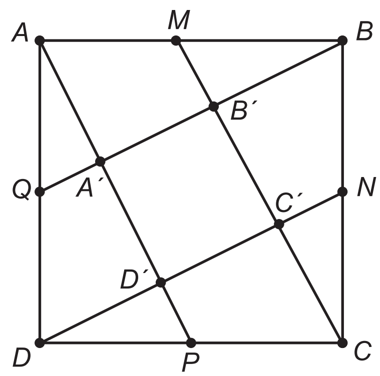
$$f''(x) = \frac{۱}{x^۲ + f'(x)^۲ + ۱}; \qquad f(۰) = f'(۰) = ۰$$

ثابت کنید تابع g با ضابطهٔ:

$$g(۰) = ۰, \qquad g(x) = \frac{f(x)}{x} \qquad (x > ۰)$$

کران‌دار است.

۳. در شکل زیر نقاط M و N و P و Q به ترتیب در وسط اضلاع مربع $ABCD$ قرار دارند. A' محل برخورد AP و BQ، B' محل برخورد BQ و CM، C' محل برخورد DN و CM و D' محل برخورد DN و AP می‌باشند. ثابت کنید مقدار مساحت چهارضلعی $A'B'C'D'$ برابر $\frac{۱}{۵}$ مساحت مربع $ABCD$ است.



۴. مطلوب است محاسبهٔ عبارت:

$$A = \sin ۱^\circ \times \sin ۲^\circ \times \ldots \times \sin ۸۹^\circ$$

۵. تابع پیوستهٔ $f : R \longrightarrow R$ را چنان تعیین کنید که به ازای هر $x, y \in R$ داشته باشیم:

$$f(x^۲ - y^۲) = f(x)^۲ + f(y)^۲$$

۶. چهار خط متمایز $L_۱$ و $L_۲$ و $L_۳$ و $L_۴$ را در فضا در نظر بگیرید که هیچ سه‌تای آن‌ها در یک صفحه قرار نداشته باشند. فرض کنید محل تقاطع خطوط $L_۱$ و $L_۲$ نقطهٔ A، محل تقاطع خطوط $L_۲$ و $L_۳$ نقطهٔ B و محل تقاطع خطوط $L_۳$ و $L_۴$ نقطهٔ C باشد. حداقل و حداکثر تعداد خطوطی را که در فضا هر چهار خط فوق را قطع می‌نمایند تعیین کرده و ادعای خود را ثابت کنید.

۲.۱ پاسخ مسائل

۱. طبق اتحاد اویلر داریم:

$$a^۳ - b^۳ - c^۳ = (a-b-c)(a^۲ + b^۲ + c^۲ + ab - bc + ac) + ۳abc$$

از طرفی طبق فرض مسأله داریم:

$$a^۳ - b^۳ - c^۳ = ۳abc$$

لذا از مقایسهٔ این دو رابطه به‌دست می‌آید که:

$$(a-b-c)(a^۲ + b^۲ + c^۲ + ab - bc + ac) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^۲ + b^۲ + c^۲ + ab - bc + ac = ۰ & (۱) \\ \text{یا} \\ a - b - c = ۰ & (۲) \end{cases}$$

در حالت (۱) داریم:

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ + ab - bc + ac = \frac{۱}{۲}[(a+b)^۲ + (b-c)^۲ + (c+a)^۲] = ۰$$
$$\Rightarrow a = -b = -c$$

از آن‌جائی که c, b, a باید مثبت باشند لذا نتیجه می‌شود که:

$$a = -b = -c = ۰ \quad \Rightarrow \quad a = b = c = ۰$$

که با فرض طبیعی بودن اعداد مغایر است.

در حالت (۲) داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a - b - c = ۰ \quad \Rightarrow \quad a = b + c \\ \\ a^۲ = ۲(b+c) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{a^۲}{۲} = b + c \end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{a^۲}{۲} \Rightarrow a(۱ - \frac{a}{۲}) = ۰$$

$$\begin{cases} a = ۰ \Rightarrow \text{غیر قابل قبول} \\ \text{یا} \\ a = ۲ \qquad (۳) \end{cases}$$

در حالت (۳) داریم:

$$a=۲ \Rightarrow b+c=۲ \Rightarrow \begin{cases} b=۰ \quad , \quad c=۲ \\ b=۱ \quad , \quad c=۱ \\ b=۲ \quad , \quad c=۰ \end{cases}$$

لذا تنها یک دسته جواب صحیح و مثبت برای (a,b,c) عبارت است از: $(۲,۱,۱)$

۲. می‌دانیم که f' و f'' پیوسته‌اند لذا انتگرال‌پذیر نیز می‌باشند. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} f'(x)-f'(۰) &= \int_۰^x f''(t)dt = \int_۰^x \frac{dt}{t^۲+f'(t)^۲+۱} \\ &\leq \int_۰^x \frac{dt}{t^۲+۱} = \arctan(t)\ |_۰^x = \arctan(x) \end{aligned}$$

لذا داریم که:

$$f'(x)-f'(۰) \leq \arctan(x) \Rightarrow f'(x) \leq \arctan(x) \qquad (۱)$$

از طرفین رابطهٔ (۱) در بازهٔ $[۰,x]$، انتگرال می‌گیریم:

$$\Rightarrow \int_۰^x f'(t)dt \leq \int_۰^x \arctan(t)\ \ dt$$

$$\Rightarrow f(x)-f(۰) \leq x.\arctan(x) - \frac{۱}{۲}\ln(۱+x^۲)$$

$$\Rightarrow f(x) \leq x.\arctan(x) - \frac{۱}{۲}\ln(۱+x^۲)$$

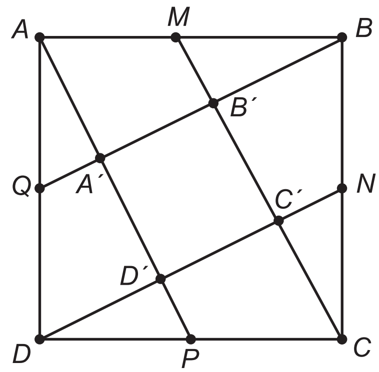
$$\Rightarrow g(x)=\frac{f(x)}{x} \leq \arctan(x) - \frac{۱}{۲x}\ln(۱+x^۲)$$

حد سمت راست نامساوی فوق در بی‌نهایت برابر $\frac{\pi}{۲}$ است. پس عددی مانند A وجود دارد که تابع g در بازهٔ $[A,\infty)$ ، از بالا کراندار باشد.

همچنین بدلیل پیوستگی تابع g در بازهٔ $[۰,A]$ نتیجه می‌شود که g در این بازه هم از بالا کراندار است و چون در g، $x>۰$ است ، لذا تابع g در بازهٔ $[۰,\infty]$ کراندار است.

۳. با استفاده از خواص خطوط موازی بدیهی است که $A'B'C'D'$ مربع است، همچنین از تقارن و تشابهات موجود در شکل مشخص است که:

$$۲QA'=A'B'=B'B$$



داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{S_{\overset{\triangle}{ADP}}}{S_{ABCD}} = \dfrac{۱}{۴} \\ \dfrac{S_{\overset{\triangle}{AQA'}}}{S_{\overset{\triangle}{ADP}}} = \dfrac{\frac{۱}{۲}QA'.AA'}{\frac{۱}{۲}DD'.AP} = (\dfrac{QA'}{DD'}).(\dfrac{AA'}{AP}) = \dfrac{۱}{۲}.\dfrac{۲}{۵} = \dfrac{۱}{۵} \\ \dfrac{S_{A'B'C'D'}}{S_{\overset{\triangle}{AQA'}}} = \dfrac{A'B'.A'B'}{\frac{۱}{۲}AA'.QA'} = ۲(\dfrac{A'B'}{AA'}).(\dfrac{A'B'}{QA'}) = ۲ \times ۱ \times ۲ = ۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{ADP}}}{S_{ABCD}} \times \frac{S_{\overset{\triangle}{AQA'}}}{S_{\overset{\triangle}{ADP}}} \times \frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{\overset{\triangle}{AQA'}}} = \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۵} \times ۴$$

$$\Rightarrow \frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{۱}{۵}$$

۴. از اتحاد مثلثاتی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sin(x)\sin(۹۰^\circ - x) = \sin\ x.\cos x = \frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

لذا داریم اگر:

$$\begin{aligned} M &= \sin ۱^\circ \times \sin ۲^\circ \times \sin ۳^\circ \times \ldots \times \sin ۸۹^\circ \\ &= (\sin ۱^\circ \times \sin ۸۹^\circ) \times (\sin ۲^\circ \times \sin ۸۸^\circ) \times \ldots \times (\sin ۴۴^\circ \times \sin ۴۶^\circ) \times \sin ۴۵^\circ \\ &= (\frac{۱}{۲}\sin ۲^\circ) \times (\frac{۱}{۲}\sin ۴^\circ) \ldots \times (\frac{۱}{۲}\sin ۸۸^\circ) \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ &= \frac{\sqrt{۲}}{۲^{۴۵}} \times (\sin ۲^\circ \times \sin ۸۸^\circ) \times \ldots \times (\sin ۴۴^\circ \times \sin ۴۶^\circ) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2}}{2^{45}} \times (\frac{1}{2}\sin 4^\circ) \times (\frac{1}{2}\sin 8^\circ) \times \ldots \times (\frac{1}{2}\sin 88^\circ)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2^{67}} \times (\sin 4^\circ \times \sin 8^\circ \times \ldots \times \sin 88^\circ)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2^{67}} \times (\sin 4^\circ \times \sin 56^\circ \times \sin 64^\circ) \times (\sin 8^\circ \times \sin 52^\circ \times \sin 68^\circ)\\
&\quad \times \ldots \times (\sin 28^\circ \times \sin 32^\circ \times \sin 88^\circ) \times (\sin 60^\circ)
\end{aligned}
$$

از طرفی داریم:

$$\sin x . \sin(60 - x) . \sin(60 + x) = \frac{1}{4}\sin 3x$$

در نتیجه:

$$
\begin{aligned}
M &= \frac{\sqrt{2}}{2^{67}} \times \frac{1}{4^7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times [\sin 12^\circ \times \sin 24^\circ \times \ldots \times \sin 84^\circ]\\
&= \frac{\sqrt{6}}{2^{82}}(\sin 12^\circ \times \sin 48^\circ \times \sin 72^\circ)(\sin 24^\circ \times \sin 36^\circ \times \sin 84^\circ)\sin 60^\circ\\
&= \frac{\sqrt{6}}{2^{82}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{4^2}(\sin 36^\circ \times \sin 72^\circ) \quad = \frac{\sqrt{18}}{2^{87}} \times \sin 36^\circ \times \sin 72^\circ
\end{aligned}
$$

البته می‌توان $\sin 36^\circ$ و $\sin 72^\circ$ را نیز محاسبه کرد و مقدار عددی آنها را در رابطهٔ آخر قرار داد.

.۵

$$
\begin{aligned}
&x = y \Rightarrow f(0) = f(x)^2 - f(x)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0\\
&x = 0 \Rightarrow f(-y^2) = -f(y)^2 \quad (1)\\
&y = 0 \Rightarrow f(x^2) = f(x)^2 \qquad (2)
\end{aligned}
$$

فرض کنید u, v دو عدد حقیقی باشند که $v < 0, u > 0$
با فرض $u = x^2$ و $v = -y^2$ داریم:

$$f(u + v) = f(u) + f(v)$$

همچنین طبق روابط (۱) و (۲) داریم:

$$f(-u) = -f(\sqrt{u})^2 = -f(u)$$

حال اگر $u \geq 0$ داریم:

$$u = 2u - u$$

پس:

$$f(u)=f(۲u)-f(u)\Rightarrow f(۲u)=۲f(u)$$

به کمک استقرا می‌توان ثابت کرد که:

$$f(nu)=nf(u) \qquad (۳)$$

و واضح است که رابطهٔ اخیر به ازای $u<۰$ نیز برقرار است.

$$\forall n\in Z \qquad : f(n)=nf(۱)$$

اگر به جای u در رابطهٔ (۳)، $\frac{۱}{n}$ بگذاریم، داریم:

$$f(\frac{۱}{n})=\frac{f(۱)}{n}$$

پس برای هر r گویا، $f(r)=rf(۱)$.

اگر فرض کنیم $f(۱)=a$، تابع f در تمام نقاط گویا بر تابع $g(x)=ax$ منطبق است و به خاطر پیوسته بودن f، $f=g$ است.

$$\Rightarrow f(x)=ax\Rightarrow f(x^۲)=f(x)^۲\Rightarrow ax^۲=a^۲x^۲\Rightarrow a=\begin{cases} ۰ & \Rightarrow \quad f(x)=۰ \\ \text{یا} & \\ ۱ & \Rightarrow \quad f(x)=x\end{cases}$$

۶. مسأله را در سه حالت بررسی می‌کنیم:

a- اگر هر سه نقطه بر هم منطبق باشند هر خطی که از این نقطه بگذرد یک جواب است. بنابراین بی‌نهایت خط با خاصیت مورد نظر قابل رسم است.

b- اگر دو نقطه بر هم منطبق باشند نیز بی‌نهایت خط جواب مسأله است.

c- اگر A و B و C متمایز باشند، خطی که از A به C وصل می‌شود جواب مسأله است. حال برای تعیین تعداد حداکثر خطوط، صفحهٔ گذرنده از $L_۱$ و $L_۲$ را با $P_۱$ و صفحهٔ گذرنده از $L_۳$ و $L_۴$ را با $P_۲$ نمایش می‌دهیم. چون B به هر دو صفحه تعلق دارد، پس $P_۱$ و $P_۲$ یا بر هم منطبق‌اند یا فصل مشترکی چون L دارند. شرط اول امکان ندارد، چون در آن صورت چهار خط در یک صفحه قرار می‌گیرند که خلاف فرض است. اگر L با خطوط $L_۱$ و $L_۲$ موازی نباشد، آنگاه L نیز یک جواب مسأله است.
اگر L با یکی از این دو خط موازی باشد آنگاه L نمی‌تواند جواب مسأله باشد. از طرف

دیگر هیچ خط دیگری جز L و خطی که A و C را به هم وصل می‌کند نمی‌تواند هر چهار خط را قطع نماید زیرا اگر چنین خطی از A نگذرد، در صفحهٔ $P_۱$ واقع است. در این صورت اگر محل تقاطع این خط با خط $L_۳$ نقطهٔ B' باشد چون B متعلق به $P_۱$ است و B' نیز به $P_۱$ تعلق دارد پس دو نقطهٔ خط $L_۳$ روی $P_۱$ هستند و در نتیجه $L_۳, L_۲, L_۱$ در یک صفحه‌اند که خلاف فرض است. به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که این خط از C نیز باید بگذرد، پس خط مفروض همان AC است.

فصل ۲

ششمین دوره

فروردین ۱۳۶۸

۱.۲ مسائل

۱. الف) نشان دهید برای هر m و n طبیعی:

$$\sum_{k=۱}^{n} k(k+۱)\dots(k+m-۱) = \frac{n(n+۱)\dots(n+m)}{m+۱}$$

ب) اگر $P(x)$ یک چند جمله‌ای از درجهٔ m با ضرایب گویا باشد، نشان دهید وقتی که n به سمت بی‌نهایت میل کند،

$$\frac{\sum_{k=۱}^{n} P(k)}{n^{m+۱}}$$

دارای حد است.

۲. اگر در چهار ضلعی محیطی $ABCD$، I وسط قطر AC و J وسط قطر BD و O مرکز دایرهٔ محاط در چهار ضلعی باشد، ثابت کنید نقاط I و J و O بر یک استقامت هستند.

۳. ثابت کنید که تابع همانی، تنها تابع پوشا مانند f از N (مجموعهٔ اعداد طبیعی) به N است که در شرط:

$$f(f(n)+f(m)) = n+m \quad (n,m \in N)$$

صدق می‌کند.

۴. دنبالهٔ $\{a_n\}$ چنین تعریف شده است:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{اگر } n = 1 \\ \left(\frac{2n-3}{2n}\right) a_{n-1} & \text{اگر } n \geq 2 \end{cases}$$

ثابت کنید به ازای هر $n \geq 1$، $\sum_{k=1}^{n} a_k < 1$.

۵. اگر در چهار وجهی $ABCD$ ارتفاع‌های وارد از هر رأس بر وجه مقابل را با h_a، h_b، h_c و h_d نمایش دهیم، ثابت کنید:

$$\frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d}$$

۶. تعداد 1369^n عدد گویای مثبت با این خاصیت مفروض‌اند که با کنار گذاشتن هر یک از این اعداد بقیه را می‌توان به ۱۳۶۸ دستهٔ مساوی (از نظر تعداد) تقسیم کرد که حاصل ضرب تمام اعداد در هر دسته یکسان باشد. ثابت کنید تمام این اعداد مساوی‌اند.

۲.۲ پاسخ مسائل

۱. الف- داریم:

$$k(k+1)\dots(k+m-1) = k(k+1)\dots\times(k+m-1)\times\frac{(k+m)-(k-1)}{m+1}$$
$$= ([k(k+1)\dots(k+m)] - [(k-1)k\times\dots\times(k+m-1)])\times\frac{1}{m+1}$$

بنابراین وقتی سیگما بسته می‌شود، عبارت‌های داخل کروشه، یکی در میان با یکدیگر ساده خواهند شد.

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k(k+1)\dots(k+m-1) = \frac{1}{m+1}[n(n+1)\times\dots\ (n+m)-0]$$
$$= \frac{n(n+1)\times\dots\times(n+m)}{m+1}$$

ب-

ابتدا نشان می‌دهیم که بزرگترین توان n در $\sum_{k=1}^{n} P(k)$ برابر $m+1$ است.
اثبات با استقرا نسبت به m است. واضح است که هر چند جمله‌ای از درجهٔ m را می‌توان به صورت

$$ax(x+1)\dots(x+m-1) + P_{m-1}(x)$$

نوشت که در آن a عددی است ثابت و P_{m-1} چند جمله‌ای از درجهٔ حداکثر $m-1$ است.
حال اگر $m=1$ آنگاه $P(x)$ به‌صورت $ax+b$ $(a\neq 0)$ است و در نتیجه:

$$P(1)+P(2)+\dots+P(n) = a(1+2+\dots+n)+nb = a\frac{n(n+1)}{2}+nb$$

واضح است که درجهٔ آن نسبت به n، $2 = m+1$ است و در نتیجه:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} P(k)}{n^2} = \frac{a}{2}$$

اگر حکم فوق در مورد چند جمله‌ای‌هایی با درجهٔ کمتر از m برقرار باشد آنگاه:

$$P_m(x) = ax(x+۱) \times \ldots \times (x+m-۱) + P_{m-۱}(x)$$

بنابراین:

$$\sum_{k=۱}^{n} P(k) = a\sum_{k=۱}^{n} k(k+۱)\ldots(k+m-۱) + \sum_{k=۱}^{n} P_{m-۱}(k)$$

در جملهٔ دوم بنابر فرض استقرا حداکثر توان n برابر m است و جملهٔ اول بنابر (الف) برابر:

$$\frac{a}{m+۱}n(n+۱)\ldots(n+m-۱)$$

است که توان n در آن $m+۱$ است و بنابراین:

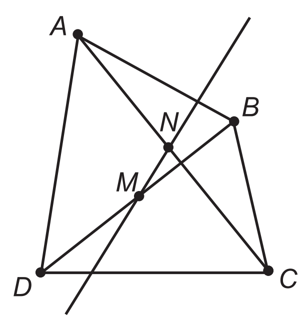
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=۱}^{n} P(k)}{n^{m+۱}} = \frac{a}{m+۱}$$

موجود است.

۲. لم: مکان هندسی نقاطی مانند P در صفحهٔ چهارضلعی $ABCD$، به‌طوری که داشته باشیم:

$$S_{\overset{\triangle}{PAB}} + S_{\overset{\triangle}{DPC}} = S_{\overset{\triangle}{APD}} + S_{\overset{\triangle}{BPC}}$$

خطی است که از وسط دو قطر AC و BD می‌گذرد. (اثبات به عهدهٔ خواننده)

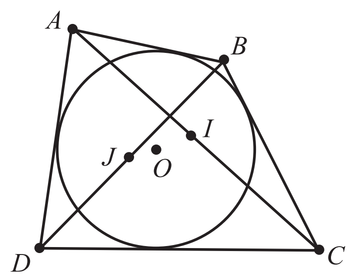


بدیهی است که:

$$\left.\begin{array}{l} S_{\overset{\triangle}{ABJ}} = S_{\overset{\triangle}{AJD}} \\ S_{\overset{\triangle}{JDC}} = S_{\overset{\triangle}{JCB}} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AJB}} + S_{\overset{\triangle}{DJC}} = S_{\overset{\triangle}{AJD}} + S_{\overset{\triangle}{BJC}}$$

به روش مشابه:

$$S_{\overset{\triangle}{AIB}} + S_{\overset{\triangle}{DIC}} = S_{\overset{\triangle}{AID}} + S_{\overset{\triangle}{BIC}}$$



اگر r شعاع دایره محاطی باشد داریم:

$$\left.\begin{array}{r} S_{\overset{\triangle}{AOB}} + S_{\overset{\triangle}{DOC}} = \frac{r}{۲}(AB+DC) \\ S_{\overset{\triangle}{AOD}} + S_{\overset{\triangle}{BOC}} = \frac{r}{۲}(AD+BC) \\ ABCD \text{ چهارضلعی محیطی است} \Rightarrow AB+DC = AD+BC \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AOB}} + S_{\overset{\triangle}{DOC}} = S_{\overset{\triangle}{AOD}} + S_{\overset{\triangle}{BOC}}$$

بنابراین هر سه نقطهٔ J, O, I در خاصیت مربوط به «لم» فوق صدق می‌کنند یعنی J, O, I هم‌خط‌اند.

۳. *راه حل اول:* ابتدا یک به یکی تابع را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} f(m) = f(n) &\Rightarrow f(f(m)+f(n)) = f(f(n)+f(n)) \\ &\Rightarrow m+n = n+n \ \Rightarrow m = n \end{aligned}$$

پس تابع یک به یک است. اکنون فرض می‌کنیم که:

$f(۱) = a > ۱$
$\Rightarrow a = s + t \qquad$ که $\qquad s, t \in N$
$\Rightarrow f(f(s) + f(t)) = s + t = a = f(۱)$
$\Rightarrow f(f(s) + f(t)) = f(۱) \xrightarrow{\text{طبق یک به یکی}} f(s) + f(t) = ۱$

اما می‌دانیم که $f(t), f(s) \in N$ هستند و هیچ‌گاه جمع دو عدد طبیعی، یک نمی‌شود.
از تناقض بوجود آمده نتیجه می‌گیریم که $a = ۱$ است. پس $f(۱) = ۱$ است.
حال به کمک استقرا بدیهی است که $f(n) = n$ است.

راه حل دوم: ابتدا ثابت می‌کنیم که:

$$\forall n \geq ۲ \Rightarrow f(n) \geq ۲$$

حال اگر $n \geq ۲$ باشد آنگاه $n = (n-۱) + ۱ ,\; n - ۱ \in N, ۱$ و از آن‌جا که تابع f پوشاست پس اعدادی طبیعی مانند β, α وجود دارند که:

$$f(\alpha) = n - ۱ \quad , \quad f(\beta) = ۱$$

بنابراین:

$$f(n) = f((n-۱)+۱) = f(f(\alpha) + f(\beta)) = \alpha + \beta \Rightarrow f(n) = \alpha + \beta$$

و $\alpha, \beta \in N$ اند لذا $\alpha + \beta \geq ۲$ است پس:

$$\forall n \geq ۲ \Rightarrow f(n) \geq ۲ \qquad (۱)$$

از رابطهٔ (۱) می‌توان نتیجه گرفت که $f(۱) = ۱$ است.
حال با استقرا بدیهی است که $f(n) = n$ است.

۴. از رابطهٔ $a_n = (\frac{۲n - ۳}{۲n}) a_{n-۱}$ بلافاصله نتیجه می‌شود که

$۲k \times a_k = (۲k - ۳) \times a_{k-۱} \qquad (k \geq ۲)$

$$\Rightarrow a_{k-1} = (2k-2)a_{k-1} - 2k \times a_k$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1} = \sum_{k=2}^{n+1}[(2k-2)a_{k-1} - 2ka_k]$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k = 2a_1 - 2(n+1)a_{n+1} = 1 - 2(n+1)a_{n+1}$$

توسط استقرا واضح است که:

$$\forall \in N: \qquad a_n > 0$$

پس:

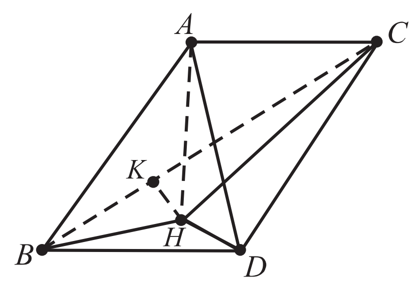
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 1 - 2(n+1)a_{n+1} < 1$$

۵. در چهاروجهی $ABCD$ مساحت هر یک از وجه‌ها را به‌صورت‌های زیر نمایش می‌دهیم:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = S_d \ , \ S_{\overset{\triangle}{ABD}} = S_c \ , \ S_{\overset{\triangle}{ACD}} = S_b \ , \ S_{\overset{\triangle}{BCD}} = S_a$$

حال اگر حجم هرم را با V نمایش دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{1}{3}S_a h_a = \frac{1}{3}S_b h_b = \frac{1}{3}S_c h_c = \frac{1}{3}S_d h_d = V$$



از این رو داریم:

$$S_d = \frac{3V}{h_d} \ , \ S_c = \frac{3V}{h_c} \ , \ S_b = \frac{3V}{h_b} \ , \ S_a = \frac{3V}{h_a}$$

حال ثابت می‌کنیم که $S_a < S_b + S_c + S_d$ است.
برای اثبات از A ارتفاع AH را بر وجه BCD رسم می‌کنیم. در حالتی که H در داخل

مثلث BCD باشد، H را به رئوس D,C,B وصل کرده و از H عمود HK را بر یال BC رسم می‌کنیم. از K به A وصل می‌کنیم. AK بر BC عمود است زیرا $AH\perp BCD$، پس $AH\perp BC$ و $HK\perp BC$ پس $AHK\perp BC$. به بیان دیگر، در صفحهٔ AHK دو خط AH و HK بر BC عمودند پس BC بر صفحهٔ AHK عمود است و در نتیجه بر کلیهٔ خطوط آن و به‌خصوص بر AK عمود است.
از طرفی داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = S_d = \frac{AK.BC}{۲} \quad , \quad S_{\overset{\triangle}{HBC}} = \frac{KH.BC}{۲}$$

اما در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHK، AK وتر است. پس $AK > KH$ و در نتیجه $S_d > S_{HBC}$. به روش مشابه ثابت می‌شود که:

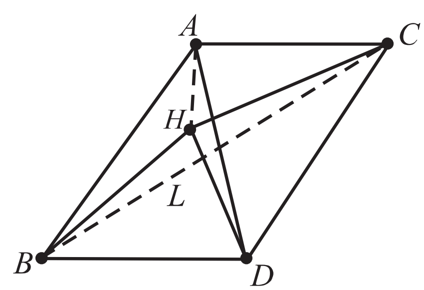
$$\begin{cases} S_b > S_{HCD} \\ S_c > S_{HBD} \end{cases}$$

از جمع این سه نامساوی داریم:

$$S_a < S_b + S_c + S_d$$

$$\Rightarrow \frac{۳V}{h_a} < \frac{۳V}{h_b} + \frac{۳V}{h_c} + \frac{۳V}{h_d} \Rightarrow \frac{۱}{h_a} < \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} + \frac{۱}{h_d}$$

این حالتی بود که H در داخل مثلث BCD باشد. در حالتی که H خارج از مثلث BCD باشد، فرض می‌کنیم H در طرف BC باشد و L را محل تقاطع BC و HD می‌گیریم.



خواهیم داشت:

$$\begin{cases} S_b > S_{\overset{\triangle}{HCD}} > S_{\overset{\triangle}{LCD}} \\ S_c > S_{\overset{\triangle}{HBD}} > S_{\overset{\triangle}{LBD}} \end{cases}$$

پس:

$$S_b + S_d > S_{\overset{\triangle}{LCD}} + S_{\overset{\triangle}{LBC}}$$

و از این رو داریم:

$$S_a < S_b + S_c + S_d$$

یعنی:

$$\frac{۳V}{h_a} < \frac{۳V}{h_b} + \frac{۳V}{h_c} + \frac{۳V}{h_d} \Rightarrow \frac{۱}{h_a} < \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} + \frac{۱}{h_d}$$

پس حکم برقرار است.

۶. بدون این‌که از کلیت مسأله کاسته شود می‌توان تمام اعداد را در کوچکترین مضرب مشترک مخرج‌ها ضرب کرد. با این کار تمام اعداد را می‌توان طبیعی در نظر گرفت. آشکار است که هر یک از اعداد را که برداریم، بقیهٔ اعداد را می‌توان به دو دستهٔ مساوی تقسیم کرد که حاصل‌ضرب هر دو دسته یکسان گردد.
فرض کنید تمام اعداد اولی که در تجزیهٔ این اعداد به کار رفته‌اند $p_k, \ldots, p_۲, p_۱$ باشند. با ضرب تمام اعداد در عبارت $p_۱ \times p_۲ \times \ldots p_k$ می‌توان فرض کرد که در تجزیهٔ تمام اعداد، اعداد اول یکسان بکار رفته است.
حال کافی است نشان دهیم که توان هر یک از این اعداد اول در هر یک از این اعداد یکسان است. اگر توان‌های عدد اول $p_۱$ را به ترتیب با $\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_m$ نشان دهیم. ($m = ۱۳۶۹^n$) ادعا می‌کنیم که $\alpha_۱ = \alpha_۲ = \ldots = \alpha_m$ است. همچنین برای بقیهٔ p_i ها نیز به روش مشابه چنین رابطه‌ای صادق است.
α_i ها دارای این خاصیت هستند که هر یک از آن‌ها را کنار بگذاریم بقیه را می‌توان به دو دسته مساوی تقسیم کرد که حاصل جمع اعداد هر دو دسته یکسان گردند و لذا اگر هر α_i را به یک عدد تقسیم، یا در یک عدد ضرب و یا با یک عدد جمع کنیم این خاصیت باقی می‌ماند. آشکار است که همهٔ α_i ها با هم یا زوج هستند یا فرد، زیرا اگر یکی را کنار می‌گذاشتیم مجموع بقیه به ۲ بخش‌پذیر می‌شد.
حال فرض می‌کنیم که α_k کوچکترین این اعداد باشد. پس اعداد $\alpha_۱ - \alpha_k$،

$\alpha_2-\alpha_k$ ، ... ، $\alpha_n-\alpha_k$ نیز دارای این خاصیت α_i هستند. حال فرض می‌کنیم که $\alpha_i-\alpha_k=2^{m_i}\times x_i$ که x_i ها فرد هستند. آنگاه همهٔ $\alpha_i-\alpha_k$ ها را بر 2^p تقسیم می‌کنیم (p کوچکترین m_i هاست.) بنابراین در بین اعداد $\frac{\alpha_1-\alpha_k}{2^p},\frac{\alpha_2-\alpha_k}{2^p},\dots,\frac{\alpha_n-\alpha_k}{2^p}$ یک عدد فرد و یک عدد زوج (که همان صفر است) ظاهر می‌گردد که غیر ممکن است. مگر اینکه $\forall i:\alpha_i=\alpha_k$ باشد.

فصل ۳

هفتمین دوره

بهمن ۱۳۶۸

۱.۳ مسائل

۱. الف) ثابت کنید برای هر عدد صحیح و مثبت n، نامساوی زیر برقرار است:

$$\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}<\frac{۱}{۲\sqrt{n}}$$

ب) یک عدد طبیعی n پیدا کنید به طوری که:

$$\lfloor ۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}+\ldots+\frac{۱}{\sqrt{n}}\rfloor=۱۲$$

($\lfloor x\rfloor$ نمایش جزء صحیح عدد حقیقی x است.)

۲. کرهٔ S به مرکز O و شعاع R و نقطهٔ ثابت P روی آن داده شده است. سه نقطهٔ A و B و C روی کره به گونه‌ای حرکت می‌کنند که کنج $P-ABC$ همواره کنج سه قائمه است. ثابت کنید صفحهٔ مثلث ABC از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۳. اگر $\{a_n\}_{n\geq ۱}$ یک دنباله باشد که $a_۱=۱$ و $a_۲=۲$ و

$$a_{n+۱}=۱+a_۱a_۲a_۳\ldots a_{n-۱}+(a_۱a_۲a_۳\ldots a_{n-۱})^۲\quad,\quad(n\geq ۲)$$