پنجمین المپیاد کامپیوتر

مهر ۷۴

هر جواب درست ۱ نمرهٔ مثبت و هر جواب نادرست $\frac{1}{4}$ نمرهٔ منفی دارد.

۱. ۱۰ نقطه متمایزی روی محیط یک دایره قرار دارد. تعداد ۵ ضلعی‌هایی که می‌توان با این نقاط ساخت چندتاست؟

الف) ۳۰۲۴۰   ب) ۶۰۴۸   ج) ۲۵۲   د) ۱۰۰۸   هـ) ۱۲۰

۲. ۴ نفر راننده که هر کدام یک اتومبیل دارند در یک محل کار می‌کنند. این ۴ نفر به چند طریق می‌توانند اتومبیل‌های خود را با هم عوض کنند به قسمی که هیچ کدام اتومبیل خود را نرانند؟

الف) ۲۰   ب) ۹   ج) ۱۸   د) ۶   هـ) ۴

۳. در مربع ۳ × ۳ مقابل، اعداد ۱ , ۲ , ۳ , ... , ۹ را طوری قرار می‌دهیم که حاصل جمع هر ستون و هر سطر و هر قطر با هم برابر باشند. مجموع اعداد واقع در چهار گوشهٔ این مربع چیست؟

۱		

الف) ۲۰   ب) ۲۴   ج) ۱۸   د) ۳۰   هـ) ۲۵

۴. مبلغ ۳۶ تومان پول را بین سه برادر تقسیم کرده‌ایم. به هر یک از آنها به‌اندازهٔ سن خود پول برحسب تومان رسیده است. برادر کوچکتر نصف پول خود را به تساوی بین دو برادر دیگر تقسیم می‌کند. برادر میانی و بعد برادر بزرگتر همین کار را انجام می‌دهند. در پایان پول هر سه برادر مساوی می‌شود. برادر میانی چند سال دارد؟

الف) ۱۰   ب) ۱۰/۵   ج) ۱۱   د) ۱۱/۵   هـ) ۱۲

۵. یک مکعب به ضلع ۳ را در نظر بگیرید که در مرکز هر یک از مکعب‌های کوچک آن یک نقطه گذاشته شده است (مجموعاً ۲۷ نقطه) چند تا مجموعهٔ سه تایی از این نقاط روی یک خط مستقیم قرار دارند؟

الف) ۴۸ ب) ۳۶ ج) ۴۹ د) ۴۳ ه) ۳۷

۶. تعداد اعداد سه رقمی بزرگتر از ۵۳۰ که ارقام متمایز دارند کدام است؟

الف) ۲۰۱ ب) ۲۴۰ ج) ۳۴۵ د) ۳۳۵ ه) ۳۳۶

۷. از نقشهٔ شبکهٔ راه‌های یک استان اطلاعات زیر را به‌دست آورده‌ایم: از هر شهری می‌توان به سایر شهرها مسافرت کرد. کمترین فاصلهٔ بین دو شهر ۲۸ کیلومتر است. بیشترین فاصله بین دو شهر ۱۳۷۴ کیلومتر است. تعداد شهرها ۷ تاست. شهری وجود دارد که مستقیماً به ۳ شهر دیگر جاده دارد. اگر طول کل جاده‌هایی که بین این ۷ شهر کشیده شده است n کیلومتر باشد، آنگاه:

الف) $n \geq ۱۴۳۰$ ب) $n \leq ۲۷۴۸$

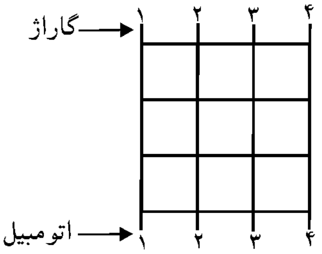
ج) $n = ۱۴۰۲$ د) $n \geq ۱۴۰۲$

ه) $۱۳۷۴ \leq n \leq ۲۷۴۸$

۸. می‌خواهیم ۸ کتاب یکسان را بین ۴ نفر تقسیم کنیم به قسمی که به نفر دوم حداکثر ۲ کتاب و به نفر سوم حداقل ۲ کتاب و به سایر نفرات حداقل ۱ کتاب برسد. تعداد حالات ممکن برابر است با:

الف) ۳۱ ب) ۳۵ ج) ۷۰ د) ۶۵ ه) ۵۶

۹. نقشهٔ خیابان‌های شهری به شکل مقابل است. (خیابان‌های عمودی رو به بالا یک‌طرفه‌اند) می‌خواهیم اتومبیل‌های ۱ تا ۴ را به گاراژهایی که در شکل نشان داده شده است ببریم، به‌طوری که از هر خیابان حداکثر یک اتومبیل عبور کند. کدام‌یک از دنباله‌های زیر (از چپ به راست) می‌تواند شماره‌های اتومبیل‌ها در گاراژهای ۱ تا ۴ باشد؟



الف) ۱ , ۳ , ۴ , ۲ ب) ۳ , ۱ , ۴ , ۲

ج) ۲ , ۱ , ۴ , ۳ د) ۲ , ۳ , ۱ , ۴

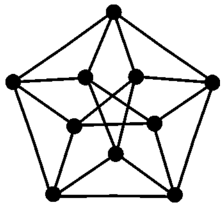
ه) هیچ‌کدام

۱۰. یک صفحهٔ شطرنجی نامتناهی را در نظر بگیرید. مهرهٔ اسب در این صفحه به این صورت حرکت می‌کند که دو خانه در یک جهت (افقی یا عمودی) و یک خانه در جهت دیگر حرکت می‌کند. حداقل تعداد حرکت‌های لازم برای این که اسب بتواند خود را از خانهٔ (۰ , ۰) به خانهٔ (۱۳۷۴ , ۱۳۷۴) برساند، چندتاست؟

الف) ۴۵۸ ب) ۹۱۶ ج) ۱۳۷۵

د) ۶۸۷ ه) ۱۳۷۴

۱۱. در شکل مقابل دایره‌های سیاه را رأس و هر پاره‌خط بین دو دایرهٔ سیاه را یک یال می‌نامیم. کدام‌یک از گزاره‌های زیر در مورد آن صحیح است؟



الف) می‌توان رأس‌های آن را با ۴ رنگ متفاوت چنان رنگ کرد که رنگ هر دو رأس که با یک یال به هم متصلند متفاوت باشد

ب) می‌توان اعداد ۱ تا ۱۰ را به رأس‌های آن نسبت داد به قسمی که رأس شمارهٔ i به رأس‌های $i-1$ و $i+1$ وصل باشد ($9 \geq i \geq 2$) و رأس ۱ نیز به ۱۰ وصل باشد

ج) می‌توان این شکل را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کرد (رأس‌ها را نقطه و یال‌ها را پاره‌خط در نظر بگیرید)

د) هر سه مورد فوق صحیح است

ه) هیچ کدام از موارد فوق صحیح نیست

۱۲. خروجی الگوریتم زیر چند است؟ (منظور از $A[i]$ در این الگوریتم عنصر iام یک دنباله به نام A است.)

۱ـ به‌ازای i از ۱ تا ۵ مقدار $A[i]$ را مساوی i قرار بده.

۲ـ به‌ازای i از ۳ تا ۹ کارهای زیر را انجام بده.

۱.۲ـ به‌ازای j از ۱ تا ۵ کارهای زیر را انجام بده.

۱.۱.۲ـ در صورتی که $5 \geq i-j \geq 1$، جای $A[j]$ و $A[i-j]$ را با هم عوض کن.

۳ـ مقدار $A[5]$ را چاپ کن.

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳

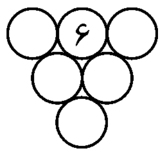
د) ۴ ه) ۵

۱۳. تعدادی از دانش‌آموزان یک مدرسه در یک اردوی یک هفته‌ای شرکت کردند. در هر روز ۳ نفر از دانش‌آموزان مسؤولیت تهیهٔ غذا را برعهده داشتند. پس از پایان اردو معلوم شد که هیچ دو نفر از دانش‌آموزان بیش از یک بار با هم مسؤول تهیهٔ غذا نبوده‌اند. اگر n تعداد دانش‌آموزان شرکت‌کننده در اردو باشد، آنگاه:

الف) $n = ۲۱$ ب) $n = ۷$

ج) $n \geq ۷$ د) $n < ۹$

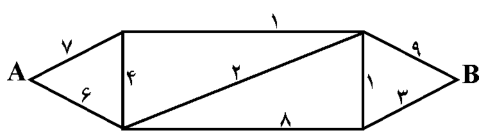
ه) $n \geq ۹$



۱۴. ۶ دایرهٔ مقابل داده شده است: می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۵ را در دایره‌های خالی بنویسیم به‌طوری که عدد نوشته شده در هر دایره تفاضل اعداد نوشته شده در دو دایرهٔ بالایی آن باشد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد.

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۱۵. بین منبع آب A و مصرف‌کنندهٔ B به‌صورت زیر لوله‌کشی شده است: عددی که بر روی هر لوله نوشته شده است، نشان‌دهنده حداکثر ظرفیت انتقال آن لوله (لیتر بر ثانیه) است. مصرف‌کننده حداکثر چند لیتر بر ثانیه آب دریافت خواهد کرد؟



الف) ۱۳ ب) ۷

ج) ۱۲ د) ۴۱

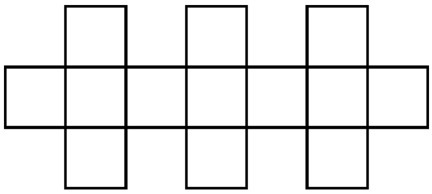
ه) ۱۱

مسأله‌های بله ـ خیر

پاسخ هر یک از مسائل زیر «بله» یا «خیر» است که هر جواب درست یک نمرهٔ مثبت و هر جواب نادرست یک نمرهٔ منفی دارد.

۱۶. در یک صفحهٔ شطرنجی مربع به ضلع ۱۳۷۴ متر آیا می‌توان یک چندضلعی با اضلاع افقی و عمودی که طول هر ضلع آن برحسب متر عدد صحیح باشد رسم کرد که محیط آن ۱۹۹۵ متر شود؟

۱۷. در شکل زیر که از ۴۰ عدد چوب کبریت ساخته شده ۱۳ مربع ۱×۱ دیده می‌شود: آیا می‌توان با برداشتن ۹ چوب کبریت، شکلی ایجاد کرد که در آن هیچ مربعی دیده نشود ؟



۱۸. ۱۱ سنگریزه در اختیار داریم. دو بازیکن با این سنگریزه‌ها این بازی را انجام می‌دهند:

هر بازیکن در نوبت خودش ۱، ۲، ۳ یا ۴ سنگریزه بر می‌دارد. وقتی که سنگریزه‌ها تمام شد، تعداد سنگریزه‌هایی که هر یک از بازیکنان برداشته‌اند را می‌شماریم. هر بازیکن که به تعداد زوجی سنگریزه برداشته بود، برنده است. آیا بازیکن اول می‌تواند طوری بازی کند که حتماً برنده شود؟

۱۹. یک دنبالهٔ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ متنوع نامیده می‌شود، اگر این شرایط برقرار باشند:

- برای هر i $(0 \le i \le n)$، a_i و a_{i+1} متفاوت باشند.
- اگر $n > 1$، دنباله $a_0, a_2, \dots, a_{2[\frac{n}{2}]}$ نیز یک دنبالهٔ متنوع باشد. ($[x]$ یعنی بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی با x)

برای مثال A, B, C, A, D, C یک دنبالهٔ متنوع است.

اگر $a_i \in \{A, B, C\}$، آیا دنبالهٔ متنوع $a_0, a_1, \dots, a_{1374}$ وجود دارد به‌طوری که دنبالهٔ $a_0, a_3, a_6, \dots, a_{1374}$ نیز متنوع باشد؟

۲۰. در یک نقشه شبکهٔ راه‌های منطقه، هر شهر دقیقاً به سه شهر دیگر به‌طور مستقیم جاده دارد. آیا امکان دارد که با بستن یکی از این جاده‌ها ارتباط بعضی از شهرها را با بعضی از شهرهای دیگر قطع کرد؟

۲۱. برای هر عدد صحیح غیرمنفی n، عدد a_{n+1} از a_n براساس قانون زیر به‌دست می‌آید:

اگر آخرین رقم سمت راست عدد a_n از ۵ بیشتر باشد، $a_{n+1} = 9a_n$. در غیر این صورت، رقم سمت راست a_n را کنار می‌گذاریم و ارقام باقیمانده نمایشگر a_{n+1} است. اگر a_{n+1} شامل هیچ رقمی نباشد، کار پایان می‌یابد. آیا به‌ازای هر a_0 دلخواه این فرایند پایان‌پذیر است؟

۲۲. یک نوار داریم که به n خانه تقسیم شده است. خانه‌ها را به ترتیب از ۱ تا n شماره‌گذاری کرده‌ایم. دو عدد مهره در خانه‌های n و $n - 1$ قرار گرفته‌اند. دو بازیکن بازی زیر را انجام می‌دهند:

هر بازیکن در نوبت خود می‌تواند یکی از مهره‌ها (هر کدام) را برداشته و در یک خانهٔ خالی با شمارهٔ کمتر قرار دهد. بازیکنی که آخرین حرکت را انجام دهد برنده است. در صورتی که $n = 9$ باشد آیا نفر اول می‌تواند طوری بازی کند که همیشه برنده باشد؟

۲۳. یک ماتریس $M_{3\times3}$ در نظر بگیرید که درایه‌هایش از علایم $\{=$ و $>$ و $<\}$ باشد. ساختن توابع f و g با خواص زیر مورد نظر است.

- اگر مقدار M_{ij} مساوی $<$ باشد، آنگاه $f(i) < g(j)$.
- اگر مقدار M_{ij} مساوی $>$ باشد، آنگاه $f(i) > g(j)$.
- اگر مقدار M_{ij} مساوی $=$ باشد، آنگاه $f(i) = g(j)$.

ماتریس ۳ × ۳ زیر که مؤلفه‌هایش مشخص شده‌اند تعریف شده است:

$$\begin{bmatrix} < & < & = \\ = & < & > \\ < & < & > \end{bmatrix}$$

آیا برای ماتریس فوق توابع f و g با خواص مورد نظر را می‌توان یافت؟

□ موزاییک‌هایی از انواع زیر وجود دارند:

نوع ۱ نوع ۲

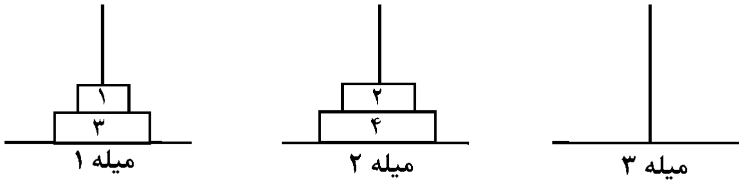
منظور از فرش کردن یک صفحه با موزاییک‌ها پوشاندن تمام خانه‌های صفحه با موزاییک‌هاست، به‌طوری که موزاییک‌ها روی هم قرار نگیرند.

۲۴. آیا با موزاییک‌هایی از نوع ۱ می‌توان یک صفحه شطرنجی ۶ × ۶ را فرش کرد؟

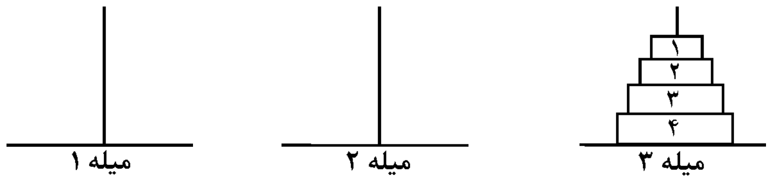
۲۵. آیا با موزاییک‌هایی از نوع ۲ می‌توان یک صفحه شطرنجی ۶ × ۶ را فرش کرد؟

۲۶. آیا با موزاییک‌هایی از نوع ۲ می‌توان یک صفحه شطرنجی ۱۰۰ × ۱۰۰ را فرش کرد؟

□ سه میله با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ و چهار مهرهٔ سوراخدار با شماره‌های ۱ تا ۴ مطابق شکل زیر داده شده است:



می‌خواهیم با حرکت دادن این مهره‌ها و رعایت قواعد زیر کلیهٔ مهره‌ها را به‌صورت زیر بر میلهٔ سوم ببریم:



● در هر حرکت تنها یک مهره حرکت داده شود.

● هیچ‌گاه مهرهٔ با شمارهٔ بزرگتر بر روی مهره با شمارهٔ کوچکتر قرار نگیرد.

۲۷. آیا می‌توان با کمتر از ۱۱ حرکت این کار را انجام داد؟

۲۸. در صورتی که ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ داشته باشیم به‌طوری که مهره‌های ۱، ۳ و ۵ در میلهٔ اول و مهره‌های ۲ و ۴ در میلهٔ دوم باشند، آیا می‌توان با کمتر از ۲۲ حرکت این مسأله را حل کرد؟

۲۹. آرایهٔ a با n عنصر به‌صورت صعودی مرتب شده است. می‌خواهیم ببینیم که آیا عنصر x در آرایهٔ a وجود دارد یا خیر. برای این کار الگوریتم زیر را پیشنهاد می‌کنیم:

۱ ـ i را مساوی با ۱ و j را مساوی با n قرار بده.

۲ ـ k را مساوی با $[\frac{i+j}{۲}]$ قرار بده.

۳ ـ اگر $a_k < x$ ، در این صورت i را مساوی با $k+۱$ قرار بده، در غیر این صورت j را مساوی با $k-۱$ قرار بده.

۴ ـ اگر $a_k = x$ ، در این صورت x در آرایهٔ a وجود دارد؛ به مرحلهٔ «۷» برو.

۵ ـ اگر $i \geq j$ ، در این صورت x در آرایهٔ a وجود ندارد؛ به مرحلهٔ «۷» برو.

۶ ـ برو به مرحلهٔ «۲».

۷ ـ پایان.

آیا این الگوریتم برای تمام مقادیر x درست کار می‌کند؟

۳۰. اگر الگوریتم فوق را به‌صورت زیر تغییر دهیم، پاسخ چیست؟

۱ ـ i را مساوی با ۱ و j را مساوی با n قرار بده.

۲ ـ k را مساوی با $[\frac{i+j}{۲}]$ قرار بده.

۳ ـ اگر $a_k > x$، در این صورت j را مساوی با k قرار بده، در غیر این صورت i را مساوی با $k+۱$ قرار بده.

۴ ـ اگر $i \neq j$، در این صورت به مرحلهٔ «۲» برو.

۵ ـ اگر $a_{[\frac{i+j}{۲}]} = x$، در این صورت x در آرایهٔ a وجود دارد؛ به مرحلهٔ «۷» برو.

۶ ـ در غیر این صورت x در آرایهٔ a وجود ندارد.

۷ - پایان.

پاسخ کلیدی

پنجمین المپیاد کامپیوتر

	الف	ب	ج	د	ه
۱.	○	○	●	○	○
۲.	○	●	○	○	○
۳.	●	○	○	○	○
۴.	○	●	○	○	○
۵.	○	○	●	○	○
۶.	○	○	○	●	○
۷.	○	○	○	●	○
۸.	●	○	○	○	○
۹.	○	○	○	○	●
۱۰.	○	●	○	○	○
۱۱.	○	○	○	●	○
۱۲.	○	○	○	○	●
۱۳.	○	○	●	○	○
۱۴.	○	○	○	○	●
۱۵.	○	●	○	○	○

	بله	خیر
۱۶.	○	●
۱۷.	○	●
۱۸.	●	○
۱۹.	○	●
۲۰.	●	○
۲۱.	●	○
۲۲.	●	○
۲۳.	●	○
۲۴.	○	●
۲۵.	○	●
۲۶.	●	○
۲۷.	○	●
۲۸.	○	●
۲۹.	○	●
۳۰.	○	●

پاسخ تشریحی

پنجمین المپیاد کامپیوتر

۱. بدیهی است که با هر ۵ نقطه یک پنج ضلعی ساخته می‌شود، پس تعداد آنها برابر $\binom{۱۰}{۵}$ یا ۲۵۲ می‌باشد.

۲. تعداد طُرق تقسیم ۴ اتومبیل بین ۴ نفر به‌طوری که X صاحب اتومبیل خود باشد را با $|X|$، تعداد آن طرق به‌طوری که هم X صاحب اتومبیل خود و هم Y صاحب اتومبیل خود باشند را با $|X \cap Y|$، ... نمایش می‌دهیم، بنابراین:

$$
\begin{aligned}
? = |\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D}| &= |M| - |A| - |B| - |C| - |D| \\
&+ |A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap D| \\
&+ |B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D| \\
&- |A \cap B \cap C| - |A \cap B \cap D| \\
&- |A \cap C \cap D| - |B \cap C \cap D| \\
&+ |A \cap B \cap C \cap D| \\
&= ۴! - ۴(۳!) + ۶(۲!) - ۴(۱!) + (۰!) = ۹
\end{aligned}
$$

۳. چون مجموع اعداد از ۱ تا ۹ برابر ۴۵ می‌باشد، بنابراین معلوم است که مجموع اعداد واقع در هر سطر، هر ستون و نیز قطرها برابر ۱۵ می‌باشد. خواهیم داشت:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$$a+e+i=۱۵$$
$$b+e+h=۱۵$$
$$c+e+g=۱۵$$
$$d+e+f=۱۵$$

$$(a+b+c+d+e+f+g+h+i)+۳e=۶۰ \Rightarrow ۴۵+۳e=۶۰ \Rightarrow e=۵$$

$$\left.\begin{array}{l} a+e+i=۱۵ \\ c+e+g=۱۵ \end{array}\right\} \Rightarrow a+i+c+g=۲۰$$

نمونه‌ای از شکل پر شده به‌صورت مقابل می‌باشد:

۸	۳	۴
۱	۵	۹
۶	۷	۲

۴. ***راه حل اول:***

$x=$ سن برادر بزرگتر

$y=$ سن برادر میانی

$z=$ سن برادر کوچکتر

$$x+y+z=۳۶ \qquad (۱)$$

پول سه برادر بعد از مرحلهٔ اول به‌ترتیب برابر با $x+\frac{z}{۴}$، $y+\frac{z}{۴}$ و $\frac{z}{۲}$ خواهد بود.

پول سه برادر بعد از مرحله دوم به‌ترتیب برابر با $\frac{۱۶x+۴y+۵z}{۱۶}$، $\frac{۴y+z}{۸}$ و $\frac{۴y+۹z}{۱۶}$ خواهد بود.

پول سه برادر بعد از مرحلهٔ سوم به‌ترتیب برابر با $\frac{۱۶x+۴y+۵z}{۳۲}$، $\frac{۱۶x+۳۶y+۱۳z}{۶۴}$ و $\frac{۱۶x+۲۰y+۱۴z}{۶۴}$ خواهد بود. پس باید داشته باشیم:

$$\frac{۱۶x+۲۰y+۱۴z}{۶۴}=\frac{۱۶x+۳۶y-۱۳z}{۶۴}=\frac{۱۶x+۴y+۵z}{۳۲} \qquad (۲)$$

با مقایسهٔ رابطه‌های (۲) و رابطهٔ (۱) به جواب x = ۱۹/۵ و y = ۱۰/۵ و z = ۶ خواهیم رسید، پس y = ۱۰/۵ می‌باشد.

راه حل دوم: در پایان پول هر سه برادر با هم برابر شده است پس در پایان مرحلهٔ سوم هر کدام از آنان $\frac{۳۶}{۳}$ یعنی ۱۲ تومان خواهند داشت. قبل از این مرحله (پایان مرحله دوم) بردربزرگتر یقیناً ۲۴ تومان داشته است (چون نصف پولش را برای خودش نگه داشته و نصف پولش را بین دو برادرش تقسیم کرده است.) چون برادر بزرگتر نصف پولش را بین دو برادر دیگر به تساوی تقسیم کرده است پس به هر کدام از آنان ۶ تومان داده است. پس قبل از شروع مرحلهٔ پایانی پول برادر بزرگتر ۲۴ تومان، پول برادر میانی ۶ تومان و پول برادر کوچکتر ۶ تومان بوده است. با همین استدلال در ابتدای مرحلهٔ دوم برادر بزرگتر ۲۱ تومان، برادر میانی ۱۲ تومان و برادر کوچکتر ۳ تومان دارا هستند و بالاخره در ابتدای مرحلهٔ اول برادر بزرگتر ۱۹/۵ تومان، برادر میانی ۱۰/۵ تومان و برادر کوچکتر ۶ تومان پول دارند.

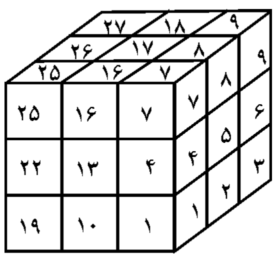
۵. مکعب کوچک را مطابق شکل از ۱ تا ۲۷ شماره‌گذاری می‌کنیم. ۲۷ مجموعهٔ سه‌تایی عبارتند از {(۳ , ۲ , ۱) ، (۶ , ۵ , ۴) ، ... ، (۲۷ , ۲۶ , ۲۵) ، (۹ , ۱۰ , ۱) ، ... ، (۲۷ , ۱۸ , ۹) ، (۷ , ۴ , ۱) ، ... ، (۲۱ , ۲۴ , ۲۷)} (مکعب‌هایی که فقط در یک وجه مشترکند.)

۱۸ مجموعهٔ سه‌تایی عبارتند از {(۹ , ۵ , ۱) ، (۷ , ۳ , ۵) ، (۱۸ , ۱۴ , ۱۰) ، ... ، (۲۷ , ۱۵ , ۳)}

و بالاخره ۴ مجموعهٔ سه‌تایی عبارتند از:

{(۱ , ۱۴ , ۲۷) ، (۱۹ , ۱۴ , ۹) ، (۷ , ۱۴ , ۲۱) ، (۳ , ۱۴ , ۲۵)}

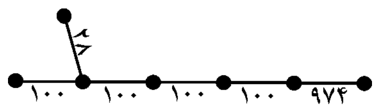
پس روی هم ۴۹ مجموعه سه‌تایی با خاصیت فوق موجود است.



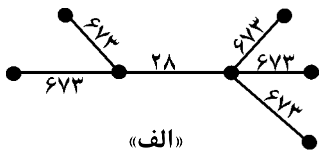
۶. تعداد اعداد بزرگتر از ۵۹۹ با خاصیت مورد نظر برابر با $\binom{۸}{۱}\binom{۹}{۱}\binom{۴}{۱}$ یعنی ۲۸۸ عددمی‌باشد و تعداد اعداد بین ۶۰۰ و ۵۲۹ با خاصیت مورد نظر برابر $\binom{۸}{۱}\binom{۶}{۱}\binom{۱}{۱}$ یعنی ۴۸

عدد می‌باشد که مجموعاً ۳۳۶ عدد می‌شود که اگر عدد ۵۳۰ را از این مجموعه خارج کنیم جواب مورد نظر یعنی ۳۳۵ به‌دست خواهد آمد.

۷. برای گزینه‌های «ب» و «ج» و «هـ» مثال نقضی مانند شکل «الف» و برای گزینهٔ «الف» مثال نقضی مانند شکل «ب» وجود دارد. در ضمن شکل «ب» حداقل جادهٔ ممکن را دارا می‌باشد.



«ب»



«الف»

۸. تعداد حالات ممکن برابر تعداد جواب‌های صحیح معادله زیر است:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \qquad (x_1, x_4 \geq 1 \quad , \quad x_2 \leq 2 \quad , \quad x_3 \geq 2)$$

به این معنی که به نفر iام $(i = 1, 2, 3, 4)$، x_i کتاب برسد.

حالا باید تعداد جواب‌های معادله بالا را بیابیم.

$$x_1 + x_3 + x_4 = 8 - x_2 \qquad (x_1, x_4 > 0 \quad , \quad x_3 > 1 \quad , \quad x_2 = 0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 2)$$

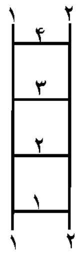
$$\Rightarrow \quad \text{تعداد جواب} = C(8 - c_1 - c_2 - c_3 - 1 \ , \ 3 - 1)$$

$$= C(8 - x_2 - 0 - 0 - 1 - 1 \ , \ 2)$$

$$= C(6 - x_2 \ , \ 2)$$

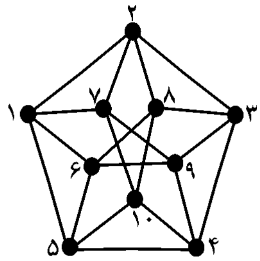
$$= C(6, 2) + C(5, 2) + C(4, 2) = 15 + 10 + 6 = 31$$

۹. نقشه خیابان‌ها شامل ۱۲ خیابان عمودی و ۱۲ خیابان افقی است. بدیهی است که برای رسیدن به گاراژها هر کدام از اتومبیل‌ها سه خیابان عمودی و در مجموع ۱۲ خیابان عمودی را طی می‌کنند. پس تمام ۱۲ خیابان عمودی توسط اتومبیل‌ها طی می‌شود. دو ستون اول را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم اتومبیل شماره ۱ از خیابان افقی شماره i $(1 \leq i \leq 4)$ به سمت راست رفته و یکی از اتومبیل‌های دیگر از خیابان افقی شماره j $(1 \leq j \leq 4)$ به سمت چپ برود. بدیهی است که $i \neq j$ زیرا در غیر این صورت از این خیابان یک ماشین به سمت چپ و یک ماشین به سمت راست رفته است که مخالف فرض است.



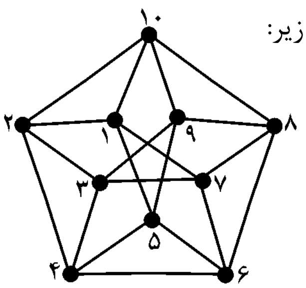
اگر $i > j$، آنگاه در ستون اول خیابان عمودی بین سطر i و j توسط هیچ اتومبیلی طی نمی‌شود و اگر $j > i$، آنگاه در ستون اول خیابان عمودی بین سطر i و j توسط دو اتومبیل طی می‌شود که مخالف فرض است. بدین ترتیب ثابت می‌شود که اتومبیل i فقط به گاراژ i می‌تواند برود.

۱۰. از خانهٔ (۰ , ۰) تا خانهٔ (۱۳۷۴ , ۱۳۷۴) به تعداد ۱۳۷۴ خانه در راستای عمودی و ۱۳۷۴ خانه در راستای افقی و در مجموع ۲۷۴۸ خانه فاصله وجود دارد. در هر حرکت سه خانه توسط اسب طی می‌شود، پس برای رسیدن به خانهٔ مورد نظر حداقل $\frac{۲۷۴۸}{۳}$ یعنی ۹۱۶ حرکت لازم است. با ۹۱۶ حرکت می‌توان به خانهٔ مورد نظر رسید. کافی است یک حرکت در راستای افقی (دو خانه در جهت افقی و یک خانه در جهت عمودی) و یک حرکت در راستای عمودی (دو خانه در جهت عمودی و یک خانه در جهت افقی) انجام داد و این عمل را ۹۱۶ مرتبه متوالیاً تکرار کرد.



۱۱. گزینهٔ «الف» صحیح است. کافی است رأس‌های ۱، ۳ و ۱۰ زرد باشند. رأس‌های ۲ و ۴ سبز باشند. رأس‌های ۵، ۸ و ۹ قرمز باشند. و بالاخره رأس‌های ۶ و ۷ آبی باشند.

گزینهٔ «ب» نیز صحیح است. مطابق شکل زیر:



و بالاخره گزینهٔ «ج» نیز صحیح است. مراحل رسم شکل به طریق زیر می‌باشد:

۱ ⇒ ۷ ⇒ ۳ ⇒ ۹ ⇒ ۵ ⇒ ۱ ⇒ ۱۰ ⇒ ۹ ⇒ ۸ ⇒ ۷ ⇒ ۶ ⇒ ۵ ⇒ ۴ ⇒ ۳ ⇒ ۲ ⇒ ۱۰ ⇒ ۸ ⇒ ۶
⇒ ۴ ⇒ ۲ ⇒ ۱

۱۲. $A[۵] = ۵$

۱۳. مسأله درست کردن هفت مجموعهٔ سه عضوی از اشیاء $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n، می‌باشد به‌طوری که هیچ دو مجموعه‌ای بیش از یک عضو مشترک نداشته باشند. حداقل n می‌تواند ۷ باشد، زیرا اگر n برابر با ۶ باشد از شش عضو متمایز یکی از آنان حداقل در ۴ مجموعه تکرار شده است (زیرا اگر چنین نباشد حداکثر عضوها ۳×۶ یعنی ۱۸ عضو خواهد بود در صورتی که ۷ مجموعه روی هم ۲۱ عضو دارند.) این ۴ مجموعه را $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$ و $A_۴$ و عضو مشترک را $a_۱$ در نظر می‌گیریم. اگر این چهار مجموعه علاوه بر $a_۱$ به‌ترتیب شامل $a_۲$، $a_۴$، $a_۵$ باشند چون در $a_۱$ مشترک هستند پس هیچ دو مجموعه از این ۴ مجموعه غیر از $a_۱$ عضو مشترک دیگری نباید داشته باشند در صورتی که تنها عضو باقیمانده $a_۶$ می‌باشد و ناچاراً عضوهای سوم سه مجموعه از ۴ مجموعه عضوهای تکراری خواهند پذیرفت که تناقض است.

ثابت می‌کنیم اگر $n = ۷$ باشد این کار عملی است. نمونه‌ای از مجموعه‌های مطلوب عبارتند از:

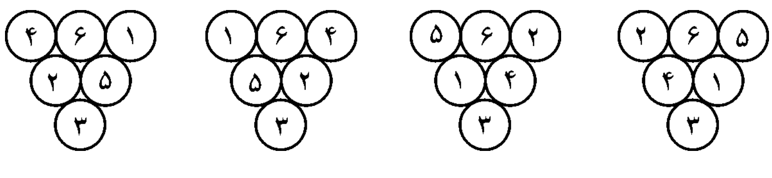
$A_۱ = \{a_۱ , a_۲ , a_۳\}$ $\quad A_۲ = \{a_۱ , a_۴ , a_۵\}$ $\quad A_۳ = \{a_۱ , a_۶ , a_۷\}$

$A_۴ = \{a_۲ , a_۴ , a_۶\}$ $\quad A_۵ = \{a_۲ , a_۵ , a_۷\}$ $\quad A_۶ = \{a_۳ , a_۴ , a_۷\}$

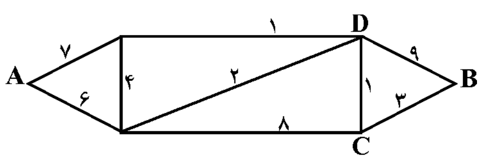
$A_۷ = \{a_۳ , a_۵ , a_۶\}$

پس $n \geq ۷$

۱۴. به ۴ طریق زیر این کار عملی است:



۱۵. با توجه به شکل زیر حداکثر ۴ لیتر آب به نقطهٔ D می‌رسد. پس از لولهٔ DB که ظرفیت آن ۹ لیتر است حداکثر ۴ لیتر در ثانیه آب به مصرف‌کننده B سرازیر می‌شود. از لولهٔ CB نیز که حداکثر ظرفیت آن ۳ لیتر است اگر ۳ لیتر در ثانیه آب به مصرف‌کننده B برسد حداکثر آبی که به مصرف‌کننده خواهد رسید ۷ لیتر در ثانیه می‌باشد.



۱۶. یکی از رأس‌های این ۱۹۹۵ ضلعی را A می‌نامیم. از A حرکت کرده و محیط چندضلعی را طی می‌کنیم تا دوباره به A برگردیم. اگر مسیر حرکت را برداری در نظر بگیریم بدیهی است که مجموع بردارها صفر می‌باشد. درستی مطالب زیر واضح است:

۱. مجموع بردارهای در جهت راست با مجموع بردارهای در جهت چپ قرینه‌اند.

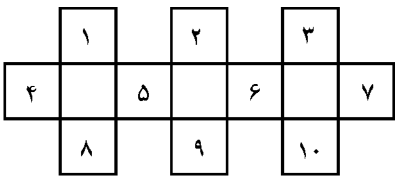
۲. مجموع بردارهای در جهت بالا با مجموع بردارهای در جهت پایین قرینه‌اند.

۳. اگر مجموع اندازه‌های بردارهای در سمت راست، چپ، بالا و پایین به‌ترتیب برابر با a، b، c و d باشند، آنگاه $a = b$ و $c = d$ و همچنین:

$$۱۹۹۵ = a + b + c + d = ۲a + ۲c = ۲(a + c)$$

چون a و c هر دو صحیح‌اند پس تساوی فوق هرگز نمی‌تواند برقرار باشد.

۱۷. برای از بین بردن مربع‌های ۱، ۲، ... و ۱۰ باید حداقل یکی از اضلاع آنها حذف شود. چون این ده مربع هیچ ضلع مشترکی ندارند پس باید حداقل ۱۰ چوب کبریت حذف شود.



۱۸. مراحل بازی به شکل زیر است:

۱. بازیکن اول ۴ سنگریزه بر می‌دارد.

۲. بازیکن دوم i سنگریزه بر می‌دارد.

۳. اگر $i = ۴$ باشد، بازیکن اول ۲ سنگریزهٔ دیگر بر می‌دارد و برنده می‌شود.

اگر $i = ۳$ باشد، بازیکن اول ۴ سنگریزهٔ دیگر بر می‌دارد و برنده می‌شود.

اگر $i = ۲$ باشد، بازیکن اول ۴ سنگریزهٔ دیگر بر می‌دارد و برنده می‌شود.

و اما اگر $i = ۱$ باشد، بازیکن اول ۱ سنگریزهٔ دیگر بر می‌دارد. باز متناسب با اینکه بازیکن دوم در مرحلهٔ بعد چند سنگریزه بردارد، حالات زیر پیش می‌آید:

اگر بازیکن دوم ۱ سنگریزه بردارد، بازیکن اول ۳ سنگریزه برداشته و برنده می‌شود.

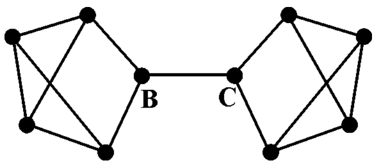
اگر بازیکن دوم ۲ سنگریزه بردارد، بازیکن اول ۳ سنگریزهٔ باقیمانده را برداشته و برنده می‌شود.

اگر بازیکن دوم ۳ سنگریزه بردارد، بازیکن اول ۱ سنگریزه برداشته و برنده می‌شود.

و بالاخره اگر بازیکن دوم ۴ سنگریزه بردارد، بازیکن اول تنها سنگریزهٔ باقیمانده را برداشته و برنده می‌شود.

۱۹. بدون اینکه به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد شود a_0 را A و a_1 را B در نظر می‌گیریم. a_2 نمی‌تواند B باشد (شرط اول)، A نیز نمی‌تواند باشد (زیرا در غیر این صورت a_0 و a_2 متفاوت نمی‌شوند)، پس $a_2 = C$. a_3 نمی‌تواند A باشد (چون ... ،a_3 و a_0 باید متنوع باشد)، C نیز نمی‌تواند باشد (شرط اول)، پس $a_3 = B$. A_4 نمی‌تواند B باشد (شرط اول) C نیز نمی‌تواند باشد (چون a_2 و a_4 طبق شرط دوم باید متنوع باشد) و اما a_4، A نیز نمی‌تواند باشد زیرا در این صورت دنبالهٔ $a_0, a_2, a_4, \ldots$ به‌صورت $A, C, A, \ldots$ در می‌آید که اگر آن را به‌صورت $b_0, b_1, b_2, \ldots$ در نظر بگیریم چون $b_0 = b_2$ می‌شود، پس متنوع نیست.

۲۰. اگر نقشهٔ شبکه به شکل مقابل باشد با بستن مسیر BC ارتباط شهرهای سمت چپ با شهرهای سمت راست قطع خواهد شد.



۲۱. اگر a_0 یکی از اعداد یک رقمی باشد حکم واضح است. حال ثابت می‌کنیم اگر حکم برای اعداد از ۱ تا k برقرار باشد، برای $k+1$ نیز برقرار است. اگر رقم آخر عدد $(k+1)$ کوچکتر یا مساوی با ۵ باشد با کنار گذاشتن آن رقم، عدد حاصل کوچکتر از $(k+1)$ خواهد بود و طبق فرض ادامهٔ فرایند پایان‌پذیر خواهد بود. و اما اگر رقم آخر عدد $(k+1)$ بزرگتر از ۵ باشد در این صورت $9(k+1)$ به یکی از ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ ختم خواهد شد که با کنار گذاشتن این رقم حاصل از $k+1$ کوچکتر خواهد بود و باز بنا به فرض این فرایند پایان‌پذیر خواهد بود.

۲۲. ***لم:*** اولین بازیکنی که یک مهره در یکی از خانه‌های $i(i \leq 4)$ قرار دهد بازنده است.

اثبات: حالات زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. بازیکن x یک مهره در خانهٔ ۱ قرار می‌دهد در این صورت بازیکن y مهرهٔ دیگر را در خانهٔ ۲ قرار داده و برنده می‌شود.

۲. بازیکن x یک مهره در خانهٔ ۲ قرار می‌دهد در این صورت بازیکن y مهرهٔ دیگر را در خانهٔ ۱ قرار داده و برنده می‌شود.

۳. بازیکن x مهرهٔ A را در خانهٔ ۳ قرار می‌دهد. در این صورت بازیکن y مهرهٔ B را در خانهٔ ۴ قرار می‌دهد، حال اگر x یکی از مهره‌ها را در خانهٔ ۱ (یا ۲) قرار دهد، آنگاه y مهرهٔ دیگر را در خانهٔ ۲ (یا ۱) قرار داده و برنده می‌شود.

۴. بازیکن x مهرهٔ A را در خانهٔ ۴ قرار می‌دهد. در این صورت بازیکن y مهرهٔ B را در خانهٔ ۳ قرار می‌دهد و همانند بند ۳ واضح است که y برنده می‌شود.

طریقهٔ بازی: بازیکن اول مهرهٔ موجود در خانهٔ شماره ۹ را در خانهٔ ۷ قرار می‌دهد. بازیکن دوم به دو طریق زیر می‌تواند بازی کند (با توجه به لم واضح است که اگر یکی از مهره‌ها را در یکی از خانه‌های ۱ تا ۴ قرار دهد بازنده می‌شود):

الف) یکی از مهره‌ها را در خانهٔ ۶ قرار می‌دهد. در این صورت بازیکن اول مهرهٔ دیگر را در خانهٔ شماره ۵ قرار می‌دهد اینجاست که بازیکن دوم به ناچار یکی از مهره‌ها را در یکی از خانه‌های ۱ تا ۴ قرار می‌دهد و با توجه به لم، بازنده می‌شود.

ب) یکی از مهره‌ها را در خانهٔ ۵ قرار می‌دهد. در این صورت بازیکن اول مهرهٔ دیگر را در خانهٔ شماره ۶ قرار می‌دهد. سپس بازیکن دوم به ناچار یکی از مهره‌ها را در یکی از خانه‌های ۱ تا ۴ قرار داده و با توجه به لم، بازنده می‌شود.

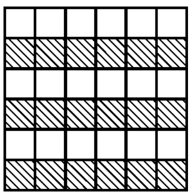
۲۳. با توجه به اطلاعات مسأله می‌توان نتیجه گرفت که:

$g(۲) > f(۲) = g(۱) > f(۳) > f(۱) = g(۳)$

بدیهی است که بی نهایت تابع با شرایط فوق می‌توان در نظر گرفت به‌عنوان مثال:

$f: \{(۱,۲),(۲,۱۰),(۳,۶)\}$

$g: \{(۱,۱۰),(۲,۲۰),(۳,۲)\}$



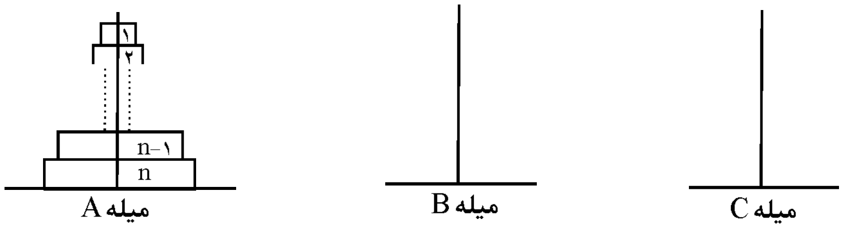
۲۴. صفحه ۶ × ۶ را به شکل مقابل رنگ‌بندی می‌کنیم، معلوم است که هر موزاییکی از نوعِ ۱ یا سه خانهٔ سفید و یک خانهٔ سیاه را پوشانده است و یا سه خانه سیاه و یک خانه سفید را. بنابراین به خاطر مساوی بودن تعداد

خانه‌های سفید و سیاه لازم است تعداد موزاییک‌هایی که سه خانهٔ سفید و یک خانهٔ سیاه را پوشش می‌دهند با تعداد موزاییک‌هایی که سه خانه سیاه و یک خانه سفید را پوشش می‌دهند برابر باشند که چنین امری محال است، چون تعداد کل موزاییک‌ها ۹ عدد می‌باشد.

۲۵. اگر صفحهٔ ۶×۶ را به‌صورت شطرنجی رنگ‌بندی کنیم و مثلِ استدلالِ سؤال قبل عمل کنیم معلوم خواهد شد که فرش‌بندی صفحهٔ ۶ × ۶ با موزاییک‌هایی از نوعِ ۲ نیز غیر ممکن است.

۲۶. چون یک مربع ۴ × ۴ را می‌توان با موزاییک از نوع ۲ فرش کرد پس با کنار هم گذاشتن ۶۲۵ عدد از این مربع‌های ۴ × ۴ می‌توان صفحهٔ شطرنجی ۱۰۰ × ۱۰۰ را به‌دست آورد.

۲۷. اگر n مهره به‌ترتیب شماره در داخل میلهٔ A باشند و دو میلهٔ B و C خالی باشند، آنگاه حداقل با $۲^n - ۱$ حرکت می‌توان مهره‌ها را از A به C منتقل کرد به‌طوری که مهره‌های با شمارهٔ بزرگتر هرگز روی مهره‌های با شمارهٔ کوچکتر قرار نگیرند.



اثبات: فرض می‌کنیم با حداقل $h_{n-۱}$ حرکت بتوان n - ۱ مهره با شرایط مذکور را از A به C منتقل کرد. ابتدا n - ۱ مهره را با $h_{n-۱}$ حرکت از A به B منتقل می‌کنیم. فقط مهرهٔ n در داخل میلهٔ A باقی می‌ماند. با یک حرکت مهرهٔ n را به C منتقل می‌کنیم و با $h_{n-۱}$ حرکت n - ۱ مهرهٔ دیگر را از B به C انتقال می‌دهیم. پس مجموع حرکات برای چنین کاری برابر $h_{n-۱} + ۱ + h_{n-۱}$ یعنی $۲h_{n-۱} + ۱$ خواهد بود. پس:

$$h_n = ۲ h_{n-۱} + ۱ \qquad (۱)$$

می‌دانیم:

$$h_۱ = ۱ , h_۲ = ۳ , h_۳ = ۷ , ...$$

با استفاده از رابطهٔ بازگشتی (۱) معلوم می‌شود که: $h_n = ۲^n - ۱$

برای حل مسأله مورد نظر الگوریتم زیر را پیاده می‌کنیم:

- مهرهٔ ۱ را به میلهٔ ۳ منتقل می‌کنیم (یک حرکت).
- مهرهٔ ۲ را به میلهٔ ۱ منتقل می‌کنیم (یک حرکت).
- مهرهٔ ۱ را به میلهٔ ۱ منتقل می‌کنیم (یک حرکت).
- مهرهٔ ۴ را به میلهٔ ۳ منتقل می‌کنیم (یک حرکت).
- مهرهٔ ۱ تا ۳ را به میلهٔ ۳ منتقل می‌کنیم (با توجه به لم، ۷ حرکت).

پس مجموعاً ۱۱ حرکت می‌شود و با کمتر از این، ممکن نیست.

۲۸. برای حل مسأله الگوریتم زیر را پیاده می‌کنیم:

- مهرهٔ ۲ را به میلهٔ ۳ منتقل می‌کنیم (یک حرکت).
- مهرهٔ ۱ را به میلهٔ ۳ منتقل می‌کنیم (یک حرکت).
- مهرهٔ ۳ را به میلهٔ ۲ منتقل می‌کنیم (یک حرکت).
- مهرهٔ ۱ را به میلهٔ ۱ منتقل می‌کنیم (یک حرکت).
- مهرهٔ ۲ را به میلهٔ ۲ منتقل می‌کنیم (یک حرکت).
- مهرهٔ ۱ را به میلهٔ ۲ منتقل می‌کنیم (یک حرکت).
- مهرهٔ ۵ را به میلهٔ ۳ منتقل می‌کنیم (یک حرکت).
- مهرهٔ ۱ تا ۴ را به میلهٔ ۳ منتقل می‌کنیم (با توجه به لم، ۱۵ حرکت).

پس مجموعاً ۲۲ حرکت می‌شود و با کمتر از این، ممکن نیست.

۲۹. به‌عنوان مثال اگر اعداد ما ۲۰، ۱۰، ۴ و ۲ بوده و $x = ۲۰$ باشد به سادگی قابل بررسی است که این الگوریتم در خروجی خود عدد $x = ۲۰$ را عضوی از آرایه a معرفی نخواهد کرد.

۳۰. اگر آرایه a با همان عناصر مثال قبل فرض شود و $x = ۱۰$ باشد، باز خروجی الگوریتم چنان است که $x = ۱۰$ در آرایهٔ a موجود نیست.