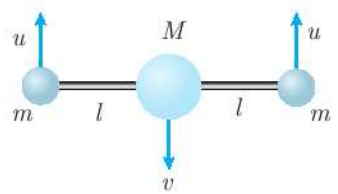
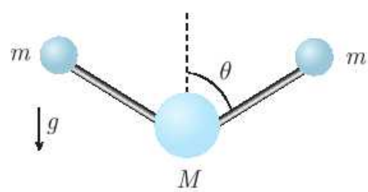
۶.۱ آزمون نهایی المپیاد فیزیک (تابستان ۸٤)

۱ دو جرم m همراه با دو میله‌ی صلب، به یک جسم به جرم M $(M \gg m)$ لولا شده‌اند. این مجموعه را مطابق شکل همراه با سرعت‌های اولیه‌ی u و v که به ترتیب به جرم‌های m و M می‌دهیم در میدان گرانشی یکنواخت g رها می‌کنیم. طول هر یک از دو میله‌ی صلب l است.





الف) زاویه‌ی میله‌ها را نسبت به امتداد قائم، $\theta(t)$، را تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{m}{M}$ به‌دست آورید.
توجه: میله‌ها بدون جرم‌اند و از هر گونه اصطکاک صرف‌نظر کنید.

ب) زمان رسیدن دو جرم m به یکدیگر را تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{m}{M}$ به‌دست آورید.

۲ فرض کنید از سطح صافی ذراتی با سرعت $v_\circ$ در راستای عمودی رو به بالا گسیل می‌شوند. سطح صاف را $y = \circ$ بگیرید. به دلیل گرانش سرعت و چگالی ذرات بر حسب ارتفاع y، که جهت مثبت آن رو به بالا فرض شده است متغیر است. (g در راستای منفی محور y است.)

تعداد ذرات بر واحد حجم در $y = \circ$ را $n_\circ$ (یکنواخت) فرض کنید. فرض کنید ذرات در بالاترین نقطه‌ی مسیرشان به نحوی جذب شده و دیگر به سطح باز نمی‌گردند.

الف) $n(y)$ یعنی تعداد ذرات بر واحد جم را به‌دست آورید.

حال فرض کنید کره‌ای به شعاع R و جرم M در داخل منطقه‌ای که $n(y)$ صفر نیست قرار دهیم. جرم هر یک از ذرات را m بگیرید و برخورد ذرات با کره را کشسان فرض کنید. R را کوچک فرض کنید به طوری که چگالی ذرات در کل نقاط کره ثابت باشد.

ب) شرطی برای تعادل کره به‌دست آورید و ارتفاع تعادل آن را محاسبه کنید.

ج) فرض کنید کره را از وضعیت تعادل به اندازه‌ی δy منحرف کنیم. معادل‌ی دیفرانسیلی برای $\delta y(t)$ تا مرتبه‌ی اول نسبت به δy و $\delta \dot{y}$ به‌دست آورید.

۳ یک پوسته‌ی کروی با چگالی بار سطحی $\sigma = \sigma_\circ \cos\theta$ را در نظر بگیرید. مرکز کره مرکز مختصات، شعاع کره R، و θ زاویه‌ی بردار واصل مرکز به هر نقطه با محور z است. پتانسیل الکتریکی حاصل

از این پوسته را

$$\phi = \begin{cases} -Er\cos\theta & r < R \\ \dfrac{A\cos\theta}{r^{۲}} & r > R \end{cases}$$

بگیرید، که E و A ثابت‌اند و r فاصله تا مرکز است.

الف) E و A را حساب کنید.

ناحیه‌ی بین دو کره به شعاع‌های a و b $(a < b)$ پر از یک دی‌الکتریک با پذیرفتاری χ است. درون کره‌ی به شعاع a و بیرون کره‌ی به شعاع b خالی است. این مجموعه را در یک میدان الکتریکی یکنواخت $E_\circ \hat{z}$ می‌گذاریم (یعنی میدان الکتریکی در نقاط دور از این کره‌ها یکنواخت است). به خاطر این میدان بارهای سطحی $\sigma_a \cos\theta$ روی کره‌ی به شعاع a و $\sigma_b \cos\theta$ روی کره‌ی به شعاع b القا می‌شود. σ_a و σ_b ثابت‌اند.

ب) پتانسیل الکتریکی در ناحیه‌های $r < a$، $a < r < b$ و $r > b$ را بر حسب σ_a، σ_b، a و $E_\circ$ به‌دست آورید.

ج) σ_a و σ_b را حساب کنید و پتانسیل الکتریکی در کل فضا را به‌دست آورید (بر حسب a، b و χ، ...).

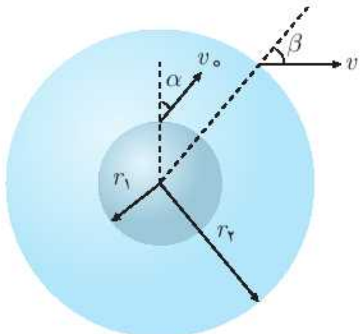
د) فرض کنید $\dfrac{b-a}{a} \ll ۱$. یک ذره‌ی باردار به بار q و جرم m، از بیرون $(r = b)$ وارد دی‌الکتریک می‌شود. اندازه‌ی سرعت ذره هنگام وارد شدن به دی‌الکتریک v و زاویه‌ی بردار سرعت با راستای شعاعی α است. اندازه‌ی سرعت این ذره هنگام خروج از دی‌الکتریک $(r = a)$، تا مرتبه‌ی یک نسبت به $b - a$ چقدر است؟

فرض کنید ذره در نقطه‌ی $\theta = \circ$ وارد دی‌الکتریک می‌شود.

۴ دو استوانه‌ی هم‌محور با شعاع‌های $r_۱$ و $r_۲$ $(r_۲ > r_۱)$ به اختلاف پتانسیل U متصل‌اند. استوانه‌ی داخلی، یک فلز داغ و توپر است که الکترون‌ها از آن با سرعت $v_\circ$ بیرون می‌آیند. استوانه‌ی بیرونی، $r_۲$، یک توری فلزی است که الکترون‌ها به راحتی از آن می‌گذرند.

الف) اگر الکترون از استوانه‌ی داخلی با زاویه‌ی α نسبت به خط شعاعی خارج شود، سرعت v در هنگام خروج الکترون از استوانه‌ی بیرونی و زاویه‌ی آن هنگام خروج از استوانه نسبت به خط شعاعی، β، را به‌دست آورید. (مؤلفه‌ی z سرعت صفر است.)

فرض کنید n الکترون بر واحد زمان در صفحه‌هایی عمود بر محور استوانه از استوانه‌ی داخلی جدا شده و سرعت آن در جهت دلخواهی به طرف بیرون است (جهت خاصی در صفحه‌ی عمود بر محور استوانه مرجع نیست و احتمال خروج الکترون در تمام زوایا در این صفحه یکسان است یعنی احتمال خروج الکترون بین زاویه‌ی α و $\alpha + d\alpha$ به α بستگی ندارد).



ب) تعداد الکترون‌هایی که در زاویه‌ی α تا $\alpha + d\alpha$ از استوانه‌ی داخلی بر واحد زمان خارج می‌شود چند تا است و تعداد الکترون‌هایی که از استوانه‌ی خارجی بر واحد زمان در زاویه‌ی β تا $\beta + d\beta$ بیرون می‌آیند چند تا است؟

حال فرض کنید وقتی الکترون‌ها از استوانه‌ی r_2 خارج می‌شوند تحت نیروی $\vec{F} = \eta \vec{v} \times \hat{z}$ قرار بگیرند، که در آن $\hat{z}$ بردار یکه در راستای محور استوانه‌ها و به سمت داخل صفحه‌ی کاغذ است و η مقدار ثابتی است. در اثر این نیرو الکترون‌ها روی دایره‌ای به شعاع R حرکت می‌کنند. جرم الکترون را m بگیرید.

ج) شعاع R را به‌دست آورید.

د) حداکثر فاصله‌ای که الکترون‌ها می‌توانند از محور استوانه‌ها پیدا کنند چقدر است؟

اکنون فرض کنید استوانه‌ای به شعاع r_3 $(r_3 > r_2 > r_1)$ هم‌محور با استوانه‌های قبلی هم وجود دارد که الکترون‌هایی که به آن می‌رسند آشکار می‌شوند.

ه) ماکزیمم مقدار U چقدر باشد تا هیچ الکترونی توسط آشکارساز روی استوانه‌ی r_3 آشکار نشود؟

و) برای آن‌که تمام الکترون‌های خارج شده از استوانه‌ی r_1 به آشکارساز برسند، حداقل مقدار U چقدر باید باشد؟

ز) فرض کنید $eU \gg \frac{1}{2} m v_0^2$. در این حالت مقدار بار رسیده بر واحد زمان به استوانه‌ی r_3 را به‌دست آورید.

۵ در این مسئله می‌خواهیم با مدلی ساده، بازی دومینو را بررسی کنیم. چیدمان این بازی، تعدادی قطعه‌ی چوبی هم‌شکل (دومینو) است که در فواصل یکسان از هم به صورت عمودی قرار داده

شده‌اند. بازی با حرکت دادن اولین دومینو به سمت دومینوهای دیگر شروع می‌شود و با برخوردهای پیاپی آن‌ها ادامه پیدا می‌کند. ابعاد طولی مورد نیاز، در شکل مشخص شده‌اند. به عنوان مدلی ساده برای بررسی کیفی این بازی، چند فرض ساده می‌کنیم:

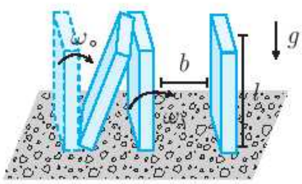
۱) قطعات کاملاً همگن‌اند و ضخامت آن‌ها قابل چشم‌پوشی است.

۲) پای دومینوها هنگام حرکت و برخوردها نمی‌لغزد و بلند نمی‌شود.

۳) هر دومینو تنها یک برخورد انجام می‌دهد و در برخوردهای بعدی نقشی ندارد.

۴) از اصطکاک میان دومینوها در لحظه‌ی برخورد می‌توان چشم‌پوشی کرد.

سرعت زاویه‌ای دومینوی kام درست پس از برخورد دومینوی $k-۱$ام با آن، ω_k است. این دومینو پس از سقوط در میدان گرانشی با دومینوی بعدی برخورد ناکشسان انجام می‌دهد.



الف) کم‌ترین انرژی جنبشی مجموعه‌ی دومینوی kام و $k+۱$ام را درست پس از برخورد به‌دست آورید. $(E^k_{\min})$

ب) فرض کنید انرژی جنبشی این مجموعه پس از برخورد ناکشسان به صورت زیر باشد:

$$E^{(k)} = E^{(k)}_{\min} + \eta^۲ (E^{(k)}_\circ - E^{(k)}_{\min}) \qquad (۱)$$

که در آن η عددی ثابت در بازه‌ی $(۱ , \circ)$ و $E^{(k)}_\circ$ انرژی جنبشی مجموعه‌ی دو دومینو پیش از برخورد است. رابطه‌ی بازگشتی برای سرعت زاویه‌ای دومینوی $k+۱$ام درست پس از برخورد دومینوی kام با آن $(\omega_{k+۱})$ بر حسب ω_k و با حل آن رابطه‌ی صریح برای ω_k بر حسب سرعت زاویه‌ای دومینوی اول $(\omega_\circ)$ و پارامترهای مسئله به‌دست آورید.

ج) رفتار ω_k را در حد $k \to \infty$ حساب کنید.

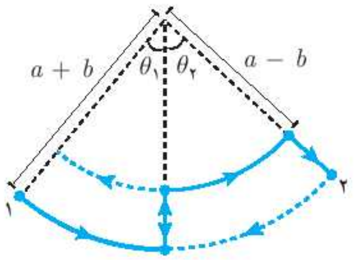
د) سرعت خطی انتشار برخوردها را در حد $k \to \infty$ تا اولین مرتبه‌ی ناصفر از b/l به‌دست آورید. می‌توانید پاسخ خود را با استفاده از معکوس تابع $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{۲}$ بیان کنید.

راهنمایی: پاسخ عمومی معادله‌ی دیفرانسیل زیر:

$$\ddot{x} - \beta^۲ x = \circ \qquad (۲)$$

به صورت $x(t) = Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}$ است که در آن A و B با توجه به شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

۶ یک نفر می‌خواهد تاب‌بازی کند. او با تغییر مکان مرکز جرم خود دامنه‌ی نوسان تاب را زیاد می‌کند. مطابق شکل در نیمی از حرکت فاصله‌ی مرکز جرم او از نقطه‌ی آویز $a+b$ و در نیم دیگر این فاصله $a-b$ است. دامنه‌ی حرکت او در نقطه‌ی ۱ را θ_1 و در نقطه‌ی ۲، θ_2 بگیرید. حرکت او از ۱ به ۲ را یک گام بگیرید. او حرکت خود در گام اول را به چند بخش تقسیم می‌کند:



۱) ابتدا از نقطه‌ی ۱ روی مسیر دایره‌ای با شعاع $a+b$ شروع به حرکت می‌کند.

۲) در پایین‌ترین نقطه از مسیر، فاصله‌اش از نقطه‌ی آویز را به $a-b$ تغییر می‌دهد.

۳) سپس روی دایره‌ای به شعاع $a-b$ حرکت می‌کند.

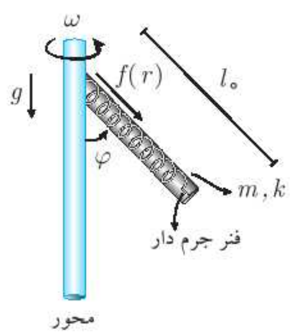
۴) بالاخره در انتها فاصله‌ای را به $a+b$ می‌رساند.

۵) او در گام‌های بعدی مشابه همین کار را ادامه می‌دهد.

الف) با فرض این‌که در ابتدا از زاویه‌ی θ_1 رها شده باشد، θ_2 را بر حسب θ_1، a و b به‌دست آورید.

ب) پس از چند بار تاب خوردن (چند گام) می‌تواند خودش را به بالاترین نقطه برساند و دور کامل بزند.

۷ لوله‌ی صلب بدون جرمی را که فنر جرم‌داری به جرم m و ضریب سختی k و طول آزاد $l_\circ$ در داخل آن قرار دارد، در نظر بگیرید. این لوله از یک انتها به محوری که با سرعت زاویه‌ای ω در حال چرخش است، متصل شده است و می‌تواند آزادانه در صفحه‌ی شامل لوله و محور حرکت کند (شکل ۱). (توجه کنید که فنر فقط در راستای میله می‌تواند تغییر طول بدهد.)



الف) ضریب سختی فنر (k) را بی‌نهایت بگیرید و زاویه‌ی تعادل در این حالت را محاسبه کنید. $(\varphi_\circ)$

در صورت بی‌نهایت نبودن ضریب سختی k زاویه‌ی تعادل (φ) نسبت به حالت قبل تغییر می‌کند. می‌خواهیم این زاویه را به‌دست آوریم. برای این منظور تابع $f(r)$، $(\circ < r < l_\circ)$

را تعریف می‌کنیم که بیان‌گر مکان جزء کوچکی از فنر است که در حالت (الف) در فاصله‌ی r از تکیه‌گاه قرار داشته است.

ب) معادلات لازم را برای جزء کوچکی از فنر در حالت تعادل بنویسید و با توجه به آن‌ها معادله‌ی دیفرانسیلی برای $f(r)$ به‌دست آورید. (این معادله شامل $f(r)$ و مشتقات آن، ثابت‌های مسئله و زاویه‌ی تعادل φ می‌باشد.)

حال فرض می‌کنیم که k بسیار بزرگ است به طوری که $\frac{1}{k}$ بسیار کوچک است.

ج) معادله‌ی دیفرانسیل به‌دست آمده در قسمت (ب) را حل کرده و جواب را تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{1}{k}$ بسط دهید. حال با اعمال شرایط مرزی مناس، تابع $f(r)$ را به طول کامل (همراه با ضرایب) تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{1}{k}$ به‌دست آورید.

د) زاویه‌ی تعادل جدید را تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{1}{k}$ و ثابت‌های مسئله به‌دست آورید.

* جواب معادله‌ی دیفرانسیل ناهمگن $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = b$ (که a و b ثابت‌اند) به صورت $y = A\sin(ax + B) + \frac{b}{a^2}$ است که A و B ضرایب دلخواهی هستند که با توجه به شرایط مرزی مشخص می‌شوند.

$$\langle \delta U\rangle = \frac{mgx_۰^۲}{۴a}(\frac{۲\delta x_۰}{x_۰} - \frac{\delta a}{a})$$

ه) نیروی N دو مؤلفه دارد. در راستای y و x را جداگانه به‌دست آورده و بعد میانگین زمانی می‌گیریم:

$$\left.\begin{aligned} N_y &= N\cos\theta \\ N_x &= N\sin\theta \end{aligned}\right\} \xrightarrow{(۲)} \begin{cases} N_y = m\big(g + \frac{x_۰^۲\omega^۲}{a}(\sin\omega t\cos\omega t)\big) \\ N_x = -mx_۰\sin\omega t \end{cases}$$

$$\langle W_x\rangle = \langle -\int mx_۰\omega^۲\sin\omega t dx_۰\rangle = \langle -\frac{mx_۰^۲}{۲}\omega^۲\sin\omega t\rangle = ۰$$

$$\delta W_y = \delta W_N = \delta\big(m(g + \frac{\omega^۲x_۰^۲}{۲a}(\sin ۲\omega t))y\big)$$

$$= \delta(mg\Delta y) = \frac{mgx_۰^۲\sin^۲\omega t}{a}(\frac{۲\delta x_۰}{x_۰} - \frac{\delta a}{a})$$

$$\Rightarrow \langle \delta W_N\rangle = \frac{mgx_۰^۲}{۲a}(\frac{۲\delta x_۰}{x_۰} - \frac{\delta a}{a})$$

و)

$$\langle \delta W_N\rangle + \langle \delta U\rangle = \delta\langle k\rangle$$

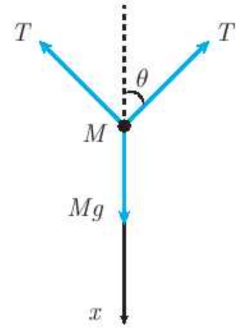
$$(\frac{۲\delta x_۰}{x_۰} - \frac{\delta a}{a})\frac{mgx_۰^۲}{۲a} + (\frac{۲\delta x_۰}{x_۰} - \frac{\delta a}{a})\frac{mgx_۰^۲}{۲a} = \frac{mgx_۰\omega}{۲a}\delta x_۰$$

$$\Rightarrow \frac{x_۰\delta x_۰}{a} = \frac{۳}{۴}\frac{\delta a}{a^۲}x^۲ \Rightarrow \frac{\delta a}{a} = \frac{۴}{۳}\frac{\delta x}{x}$$

$$\ln(\frac{x}{x_۰})^{\frac{۴}{۳}} = \ln(\frac{a}{a_۰}) \Rightarrow \boxed{ax^{-\frac{۴}{۳}} = \text{const}}$$

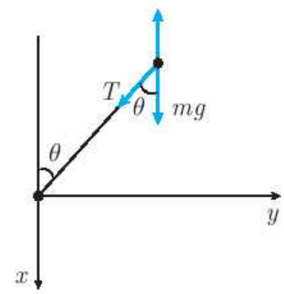
۶.۵ پاسخ آزمون نهایی المپیاد فیزیک (تابستان ۸۴)

۱ الف) با توجه به نیروهای وارد بر جرم M داریم:



$$Mg - ۲T\cos\theta = M\ddot{x}$$

$$\rightarrow \ddot{x} = g - \frac{۲T}{M}\cos\theta \qquad (۱)$$



اکنون حرکت جرم m را در دستگاه جرم M بررسی می‌کنیم:

$$T - m\ddot{x}\cos\theta + mg\cos\theta = ml\dot{\theta}^2$$
$$mg\sin\theta - m\ddot{x}\sin\theta = ml\ddot{\theta}$$

با قرار دادن معادله‌ی (۱) در معادلات به‌دست آمده به معادلات زیر می‌رسیم.

$$T + 2\frac{m}{M}T\cos^2\theta = ml\dot{\theta}^2$$
$$\frac{2m}{M}T\sin\theta\cos\theta = ml\ddot{\theta}$$

با حذف T از دو معادله‌ی بالا به یک معادله‌ی دیفرانسیل برای θ می‌رسیم:

$$\frac{1 + \frac{2m}{M}\cos^2\theta}{\frac{2m}{M}\sin\theta\cos\theta} = \frac{\dot{\theta}^2}{\ddot{\theta}}$$
$$(1 + \frac{2m}{M}\cos^2\theta)\ddot{\theta} = \frac{2m}{M}\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2$$

$\theta = \theta_0 + \delta\theta$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\ddot{\theta}_0 + \delta\ddot{\theta} + \frac{2m}{M}\cos^2\theta_0 . \ddot{\theta}_0 = \frac{2m}{M}\sin\theta_0 \cos\theta_0 \dot{\theta}_0^2$$
$$\ddot{\theta}_0 = 0 \Rightarrow \dot{\theta}_0 = -\frac{u+v}{l} \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{2} - (\frac{u+v}{l})t$$
$$\delta\ddot{\theta} = \frac{m}{M}\sin 2\theta_0 . \dot{\theta}_0^2 \Rightarrow \delta\ddot{\theta} = \frac{m}{M}(-\frac{u+v}{l})^2 \sin(\pi - \frac{2(u+v)}{l}t)$$
$$\delta\ddot{\theta} = \frac{m}{M}(\frac{u+v}{l})^2 \sin\left(2(\frac{u+v}{l})t\right)$$
$$\delta\dot{\theta} - 0 = \frac{m}{M}(\frac{u+v}{l})^2(\frac{-l}{2(u+v)})(\cos\frac{2(u+v)}{l}\Big|_0^t$$
$$\delta\dot{\theta} = \frac{m}{M}\frac{u+v}{2l}(1 - \cos\frac{2(u+v)}{l}t)$$
$$\delta\theta = \frac{m}{M}\frac{u+v}{2l}(t - \frac{l}{2u+2v}\sin\frac{2(u+v)}{l}t)$$
$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{u+v}{l}t + \frac{m}{M}\frac{u+v}{2l}\left(t - \frac{l}{2(u+v)}\sin(\frac{2(u+v)}{l}t)\right)}$$

ب) در زمان رسیدن دو جرم m، $\theta = 0$ است و T را برابر عبارت روبه‌رو تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{m}{M}$ می‌گیریم:

$$T = T_0 + \delta T$$

$$
\begin{aligned}
۰ &= \frac{\pi}{۲} - (\frac{u+v}{l})(T_۰ + \delta T_۰) \\
&+ \frac{m}{M}(\frac{u+v}{۲l}) \left(T_۰ + \delta T_۰ - \frac{l}{۲(u+v)} \sin\left(\frac{۲(u+v)}{l}(T_۰ + \delta T_۰)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
T_۰ = \frac{l\pi}{۲(u+v)}
$$

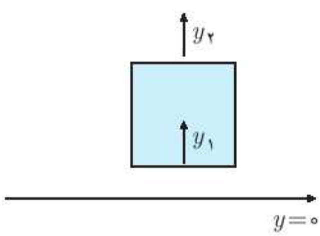
$$
-(\frac{u+v}{l})\delta T_۰ + \frac{m}{M}(\frac{u+v}{۲l})\left(T_۰ - \frac{l}{۲(u+v)}\sin(\frac{۲(u+v)}{l}T_۰)\right) = ۰
$$

$$
\delta T_۰ = \frac{m}{۲M}\left[\frac{l\pi}{۲(u+v)} - \frac{l}{۲(u+v)}\sin\left(\frac{۲(u+v)}{l} \times \frac{l\pi}{۲(u+v)}\right)\right]
$$

$$
\Rightarrow \delta T_۰ = \frac{ml\pi}{۴M(u+v)} \Rightarrow \boxed{T = \frac{l\pi}{۲(u+v)}[۱ + \frac{m}{۲M}]}
$$

۲ الف) با توجه به صورت مسئله مطابق شکل چگالی جریان به صورت زیر است:

$$
\vec{J} = mn_y v_y \hat{y}
$$



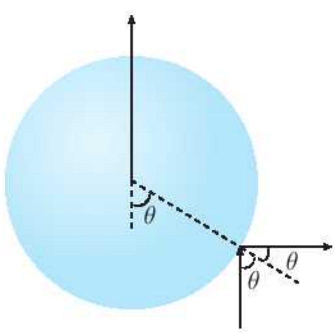
با توجه به شکل و این‌که بر حسب زمان چگالی جرم در هیچ نقطه‌ای تغییر نمی‌کند مطابق معادله‌ی پیوستگی داریم:

$$
\nabla.\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \Rightarrow \nabla.\vec{J} = ۰ \Rightarrow \vec{J} = \text{const}
$$

$$
\Rightarrow \vec{J_۱} = \vec{J_۲}
$$

$$
n_{(y)}v_y = n_۰ v_۰ \Rightarrow \boxed{n_{(y)} = \frac{n_۰}{\sqrt{۱ - \frac{۲gy}{v_۰^۲}}}}
$$

ب) نیروی ناشی از برخورد ذرات به کره را محاسبه می‌نماییم.



$$
dF_y \Delta t = dm\,۲v\cos\theta(\cos\theta)
$$

$$
\Rightarrow dF_y \Delta t = nv\Delta t dA \cos\theta\,۲v\cos^۲\theta m
$$

$$
dF_y = ۲nv^۲\cos^۳\theta(R^۲ d\theta \sin\theta d\varphi\rho)m
$$

$$
\Rightarrow F_y = mn_۰\pi R^۲ v_۰\sqrt{v_۰^۲ - ۲gy}
$$

با توجه به تعادل کره داریم:

$$Mg = mn_0\pi R^2 v_0\sqrt{v_0^2 - 2gy} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2g}\left(v_0^2 - \left(\frac{Mg}{mn_0\pi R^2 v_0}\right)^2\right)}$$

ج) با توجه به نیروهای وارد بر ذره و این‌که $y = y_0 + \delta y$ داریم:

$$m\delta\ddot{y} = -Mg + n_0 m v_0 \pi R^2\sqrt{v_0^2 - 2g(y_0 + \delta y)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta\ddot{y} = \left(\frac{-(n_0 m v_0 \pi R^2)^2}{mM}\right)\delta y}$$

۳ الف) با توجه به شرایط مرزی در نقطه‌ی $r = R$ داریم:

$$\begin{cases}\varphi(R_+) = \varphi(R_-)\\ -\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=R_+} + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=R_0} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\cos\theta\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-ER\cos\theta = \frac{A\cos\theta}{R^2}\\ \left(\frac{2A\cos\theta}{R^3} - E\cos\theta\right) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\cos\theta\end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases}E = \frac{-A}{R^3}\\ -E + \frac{2A}{R^3} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}} \quad , \quad \boxed{A = -\frac{\sigma_0 R^3}{3\epsilon_0}}$$

ب) با توجه به قسمت قبل و با توجه به اصل برهم‌نهی (جمع پتانسیل‌های ناشی از σ_a، σ_b و E_0) برای پتانسیل در کل فضا داریم:

$$V = \begin{cases}-E_0 r\cos\theta - \frac{(\sigma_a + \sigma_b)}{3\epsilon_0} r\cos\theta & r < a\\ -E_0 r\cos\theta - \frac{\sigma_b r}{3\epsilon_0}\cos\theta - \frac{\sigma_a a^3\cos\theta}{3\epsilon_0 r^2} & a \le r < b\\ -E_0 r\cos\theta - \frac{(\sigma_a a^3 + \sigma_b b^3)\cos\theta}{3\epsilon_0} & b \le r\end{cases}$$

ج) پس با توجه به شرایط مرزی در $r = a$ و $r = b$ داریم:

$$\begin{cases}D(b^+) - D(b^-) = 0\\ D(a^+) - D(a^-) = 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-\epsilon_0\frac{\partial V}{\partial r}\Big|_{r=b^+} + \epsilon_0(\chi + 1)\frac{\partial v}{\partial r}\Big|_{r=b^-} = 0\\ -\epsilon_0(\chi + 1)\frac{\partial V}{\partial r}\Big|_{r=a^+} + \epsilon_0\frac{\partial V}{\partial r}\Big|_{r=a^-} = 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\left(E_\circ \cos\theta + \dfrac{۲(\sigma_a a^۳ + \sigma_b b^۳)}{۳\epsilon_\circ b^۳}\cos\theta\right) \\ \quad +(\chi+۱)\left(-E_\circ\cos\theta - \dfrac{\sigma_b}{۳\epsilon_\circ}\cos\theta + \dfrac{۲\sigma_a a^۳}{۳\epsilon_\circ b^۳}\cos\theta\right) = \circ \\ -(\chi+۱)\left(-E_\circ\cos\theta - \dfrac{\sigma_b}{۳\epsilon_\circ}\cos\theta + \dfrac{۲\sigma_a a^۳}{۳\epsilon_\circ a^۳}\cos\theta\right) \\ \quad +\left(-E_\circ\cos\theta - \dfrac{(\sigma_a+\sigma_b)}{۳\epsilon_\circ}\cos\theta\right) = \circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\chi+۱)\left(\dfrac{۲\sigma_a a^۳}{۳\epsilon_\circ b^۳} - \dfrac{\sigma_b}{۳\epsilon_\circ} - E_\circ\right) + E_\circ - \dfrac{۲\sigma_a a^۳}{۳\epsilon_\circ b^۳} - \dfrac{۲\sigma_b}{۳\epsilon_\circ} = \circ \\ (\chi+۱)\left(\dfrac{-۲\sigma_۲}{۳\epsilon_\circ} + \dfrac{\sigma_b}{۳\epsilon_\circ} + E_\circ\right) - E_\circ - \dfrac{\sigma_a}{۳\epsilon_\circ} - \dfrac{\sigma_b}{۳\epsilon_\circ} = \circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{۲\chi a^۳}{b^۳}\sigma_a - (\chi+۳)\sigma_b = ۳\epsilon_\circ E_\circ \chi \\ \sigma_a(\chi+۳) - \sigma_b\chi = ۳\epsilon_\circ E_\circ\chi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \sigma_b = ۳\epsilon_\circ \chi E_\circ \left[\dfrac{\frac{۲\chi a^۳}{b^۳} - (\chi+۳)}{(\chi+۳)^۲ + ۲\chi^۲\frac{a^۳}{b^۳}}\right] \\ \sigma_a = ۹\epsilon_\circ \chi E_\circ \left[\dfrac{۱}{(\chi+۳)^۲ - ۲x^۲\frac{a^۳}{b^۳}}\right] \end{array}}$$

با توجه به مقدارهای به‌دست آمده برای σ_a و σ_b و جایگذاری آن‌ها در V داریم:

$$V = \begin{cases} -E_\circ r\cos\theta\left[۱ + \chi^۲\left(\dfrac{\frac{۲a^۳}{b^۳} - ۱}{(\chi+۳)^۲ - \frac{۲\chi^۲a^۳}{b^۳}}\right)\right] & r < a \\ -E_\circ r\cos\theta\left[۱ + \chi\left(\dfrac{\frac{۲\chi a^۳}{b^۳} - (\chi+۳) + \frac{۳a^۳}{r^۳}}{(\chi+۳)^۲ - \frac{۲\chi^۲a^۳}{b^۳}}\right)\right] & a \le r < b \\ -E_\circ r\cos\theta\left[۱ + \dfrac{\chi}{r^۳}\left(\dfrac{(۲\chi+۳)a^۳ - (\chi+۳)b^۳}{(\chi+۳)^۲ - \frac{۲\chi^۲a^۳}{b^۳}}\right)\right] & b \le r \end{cases}$$

د) با توجه به رابطه‌ی پایستگی انرژی داریم:

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ + qV(b) = \frac{۱}{۲}mv_x^۲ + qV(a)$$
$$\Rightarrow v_x^۲ = v^۲ + \frac{۲q}{m}(V(b) - V(a))$$
$$\Rightarrow v_x^۲ = v^۲ - \frac{۲qE_\circ}{m}\left(b + \frac{\chi}{b^۲}\left(\frac{(۲\chi+۳)a^۳ - (\chi+۳)b^۳}{(\chi+۳)^۲ - \frac{۲\chi^۲a^۳}{b^۳}}\right) - a - a\chi^۲\left(\frac{\frac{۲a^۳}{b^۳} - ۱}{(\chi+۳)^۲ - \frac{۲\chi^۲a^۳}{b^۳}}\right)\right)$$

حال در معادله‌ی بالا $b = a + \delta$ می‌گیریم که در آن δ را در آخر برابر $b - a$ قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned}
v_x^2 &= v^2 - \frac{2qE_\circ}{m}\left(\delta + \frac{\chi(2\chi+3)\frac{a^3}{a^2(1+\frac{\delta}{a})^2} - \chi(\chi+3)(a+\delta) - \frac{2a^6\chi^2}{a^3(1+\frac{\delta}{a})^3} + a\chi^2}{(\chi+3)^2 + \frac{2\chi^2a^3}{a^3(1+\frac{\delta}{a})^3}}\right)\\
&= v^2 - \frac{2qE_\circ}{m}\left(\delta + \frac{\chi(2\chi+3)a(1-\frac{2\delta}{a}) - \chi(\chi+3)a(1+\frac{\delta}{a}) - 2a\chi^2(1-\frac{3\delta}{a}) + a\chi^2}{(\chi+3)^2 - 2\chi^2(1-\frac{3\delta}{a})}\right)\\
&= v^2 - \frac{2qE_\circ}{m}\delta\left(1 - \frac{2(\chi)(2\chi+3) + \chi(\chi+3) - 6\chi^2}{(\chi+3)^2 - 2\chi^2}\right)\\
&= v^2 - \frac{2qE_\circ}{m}\delta\left(1 + \frac{\chi^2 - 9\chi}{(\chi+3)^2 - 2\chi^2}\right)\\
&= v\left(1 - \frac{qE_\circ\delta}{mv^2}\left(\frac{9 - 3\chi}{(\chi+3)^2 - 2\chi^2}\right)\right)\\
\Rightarrow &\boxed{v_x = v\left(1 - \frac{3qE_\circ(b-a)}{mv^2}\left(\frac{3-\chi}{(\chi+3)^2 - 2\chi^2}\right)\right)}
\end{aligned}$$

٤ الف) با توجه به پایستگی انرژی داریم:

$$\frac{1}{2}mv_\circ^2 = \frac{1}{2}mv^2 - eU \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{v_\circ^2 + \frac{2eU}{m}}} \qquad (1)$$

نیرو مرکزگراست بنابراین:

$$r^2\dot{\theta} = \cos t \Rightarrow r_1 v_\circ \sin\alpha = r_2 v \sin\beta \Rightarrow \sin\beta = \frac{r_1 v_\circ}{r_2 v}\sin\alpha \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \boxed{\dot{\beta} = \sin^{-1}\left[\frac{r_1 v_\circ}{r_2\sqrt{v_\circ^2 + \frac{2eU}{m}}}\sin\alpha\right]}$$

ب) با توجه به این‌که احتمال خروج در همه‌ی زاویه‌ها یکسان است پس

$$\boxed{n_\alpha = \frac{d\alpha}{\pi}n}$$

از آن‌جایی که در مسیر حرکت الکترون اضافه نمی‌شود پس تمام الکترون‌هایی که بین زاویه‌ی α و $\alpha + d\alpha$ خارج شده‌اند از زاویه‌ی β و $\beta + d\beta$ بیرون می‌آیند:

$$n_\beta = \frac{d\alpha}{\pi}n \qquad (1)$$

با توجه به قسمت (الف) داریم:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\sqrt{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\frac{v_\circ^2}{v_\circ^2 + \frac{2eU}{m}} - \sin^2\beta}}{\cos\beta} \qquad (2)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \boxed{n_\beta = \frac{n}{\pi}\frac{\cos\beta d\beta}{\sqrt{(\frac{r_۱}{r_۲})^۲\frac{v_۰^۲}{v_۰^۲+\frac{۲eU}{m}} - \sin^۲\beta}}}$$

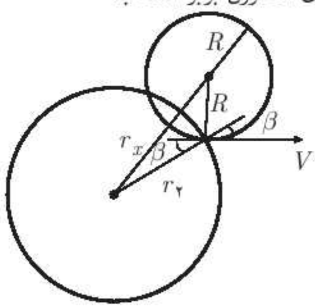
ج) با توجه به قانون دوم نیوتن داریم:

$$F = \frac{mv^۲}{R} \Rightarrow R = \frac{m}{F}v^۲$$

با توجه به قسمت الف و معادله‌ی بالا:

$$\boxed{R = \frac{m}{\eta}(v_۰^۲ + \frac{۲eU}{m})^{\frac{۱}{۲}}}$$

د) با توجه به شکل بیش‌ترین فاصله‌ی الکترون برابر است با:



$$d = R + r_x \qquad (۱)$$

از طرفی با توجه به هندسه‌ی شکل:

$$r_x = \sqrt{R^۲ + r_۲^۲ - ۲r_۲R\cos(\beta + \frac{\pi}{۲})}$$
$$r_x = \sqrt{R^۲ + r_۲^۲ + ۲r_۲R\sin\beta} \qquad (۲)$$
$$(۱),(۲) \Rightarrow d = R + \sqrt{R^۲ + r_۲ + ۲r_۲R\sin\beta}$$

با توجه به قسمت‌های قبل با جایگذاری R در معادله‌ی بالا داریم:

$$\boxed{d = \frac{m}{\eta}(v_۰^۲ + \frac{۲eU}{m})^{\frac{۱}{۲}} + \sqrt{\frac{m^۲}{\eta^۲}(v_۰^۲ + \frac{۲eU}{m}) + r_۲^۲ + \frac{۲m}{\eta}v_۰ r_۱ \sin\alpha}}$$

ه) پس باید شرط زیر برقرار باشد:

$$d_{\max} < r_۳$$

$$\Rightarrow \frac{m}{\eta}(v_0^2+\frac{2eU}{m})^{\frac{1}{2}}+\sqrt{(\frac{m}{\eta})^2(v_0^2+\frac{2eU}{m})+e_2^2+\frac{2m}{\eta}v_0 r_1}<r_3$$

$$\frac{-2mr_3}{\eta}\sqrt{v_0^2+\frac{2eU}{m}}>r_2^2-r_3^2+\frac{2mv_0 r_1}{\eta}$$

$$\frac{2eU}{m}<-v_0^2\left(v_0\frac{r_1}{r_3}-\frac{\eta}{2mr_3}(r_3^2-r_2^2)\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{\max}=\frac{m}{2e}\left[\left(v_0\frac{r_1}{r_3}-\frac{\eta}{2mr_3}(r_3^2-r_2^2)\right)^2-v_0\right]}$$

و) برای آن‌که همه‌ی الکترون‌ها به آشکارساز برسند باید $r_3 < v_{\min}$ باشد.

$$r_3<\frac{m}{\eta}(v_0^2+\frac{2eU}{m})^{\frac{1}{2}}+\sqrt{(\frac{m}{\eta})^2(v_0^2+\frac{2eU}{m})+r_2^2}$$

$$\frac{-2mr_3}{\eta}\sqrt{v_0^2+\frac{2eU}{m}}<r_2^2-r_3^2$$

$$\Rightarrow \boxed{U_{\min}=\frac{m}{2e}\left[\frac{\eta(r_3^2-r_2^2)^2}{2mr_3}-v_0^2\right]}$$

ز) چون در طی مسیر الکترون به مقدار بارها اضافه نمی‌شود بنابراین مقدار بار رسیده بر واحد زمان برابر همان n می‌باشد.

۵ با محاسبه‌ی ω اولیه و استفاده از پایستگی تکانه در راستای x، سرعت هرکدام بعد از برخورد را محاسبه کرده و E را به‌دست می‌آوریم.

الف) انرژی جنبشی دومینوی اول قبل از برخورد:

$$T_{\min}^{(k-1)}=\frac{mg}{2}(l-\sqrt{l^2-b^2})=\frac{1}{2}ml^2\frac{\omega^2}{3}$$

$$\Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{3}{l^2}(l-l^2-b^2)} \quad \text{سرعت زاویه‌ای قبل برخورد}$$

پایستگی تکانه در راستای x: (v' سرعت نقطه‌ی برخورد است.)

$$\left.\begin{aligned} &p_x=p'_x\\ &p'_x=\frac{mv'}{2}+mv'=\frac{mv'}{2}(1+\frac{l}{2\sqrt{l^2-b^2}})\\ &p_x=\frac{ml\omega}{2}\sqrt{1-\frac{b^2}{l^2}}\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow v'=l\omega\sqrt{1-\frac{b^2}{l^2}}(1+\frac{l}{2\sqrt{l^2-b^2}})^{-1} \tag{*}$$

$$E_{\min}=\frac{1}{6}ml^2(\frac{v'^2}{l^2-b^2}+\frac{v'^2}{l^2-b^2})=\frac{1}{3}\frac{ml^2v'^2}{l^2-b^2}$$

با فرض این‌که دومینوی اول بدون سرعت اولیه می‌افتد.

$$\xrightarrow{(*)} \boxed{E_{\min}^{(k)} = \frac{mg}{۳} \times \frac{l-\sqrt{l^۲-b^۲}}{(۱+\frac{l}{۲\sqrt{l^۲-b^۲}})^۲}}$$

ب)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{انرژی} : & I\omega_k'^۲ = I\omega_k^۲ + ۲\Delta E \\ & E^{(k)} = E_{\min}^{(k)} + \eta^۲[E_۰^{(k)} - E_{\min}^{(k)}] \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta E = \eta^۲(\Delta E_۰)$$

این نشان می‌دهد که انرژی کل در هر مرحله ضریبی از مرحله‌ی قبل است. یعنی $\omega^۲$ همچنین ویژگی خواهد داشت.

$$\omega_{k+۱} = \alpha\omega_k' = \alpha\sqrt{\omega_k^۲ + \frac{۲\Delta E}{I}}$$

تعریف می‌کنیم: $u_{k+۱} := \omega_{k+۱}^۲$ و $C := \alpha^۲(\frac{۲\Delta E}{I})$

$$\omega_{k+۱}^۲ = \alpha^۲\omega_k^۲ + \alpha^۲(\frac{۲\Delta E}{I})$$

$$u_{k+۱} = \alpha u_k + c$$

با حل این رابطه‌ی بازگشتی خواهیم داشت:

$$\omega_n^۲ = \frac{c}{۱-\alpha} + \alpha^n\omega_۰^۲ \qquad (*)$$

حال با جایگذاری α بر حسب η داریم:

(چرا $\alpha \neq \eta$؟ اگر در رابطه‌ی $E^{(k)} - E_{\min}^{(k)} = \eta^۲(E_۰^{(k)} - E_{\min}^{(k)})$، $E_{\min}^{(۰)} = E^{(۰)}$ باشند آن‌گاه $E^{(k)} = E_{\min}^{(k)}$ خواهد بود. پس در واقع $\Delta E = \eta^۲\Delta E_۰$. از تشابه این رابطه با $\omega_{k+۱}^۲ = \alpha^۲\omega_k'$ داریم:)

$$\eta^۲ = \alpha^۲\frac{ml^۲}{۶}$$

$$\xrightarrow{(*)}\omega_n^۲ = ۴\eta^۲\Delta E_۰ + \omega_۰^۲(\frac{۶\eta^۲}{ml^۲})^{\frac{n}{۲}} \qquad (۱)$$

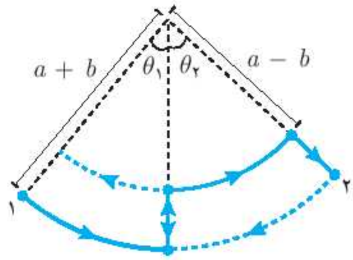
$$\Delta E_۰ = E_{\min}^{(۰)} - \frac{ml^۲\omega^۲}{۶} \qquad (۲)$$

$$\text{و از بخش الف} : \Delta E_۰ = \frac{m}{۳}\left(g.\frac{l-\sqrt{l^۲-b^۲}}{۱+\frac{۱}{۲}\sqrt{۱-\frac{b^۲}{l^۲}}} - \frac{l^۲\omega^۲}{۲}\right) \qquad (۳)$$

از سه رابطه‌ی بالا خواهیم داشت:

$$\omega_n^۲ = \omega_۰^۲(\frac{۶\eta^۲}{ml^۲})^{\frac{n}{۲}} + \frac{۴\eta^۲ m}{۳}\left(g\frac{l-\sqrt{l^۲-b^۲}}{۱+\frac{۱}{۲}\sqrt{۱-\frac{b^۲}{l^۲}}} - \frac{l^۲\omega^۲}{۲}\right)$$

۶ الف) با توجه به شکل زیر و پایستگی انرژی در مسیر ۱ و ۳ و با توجه به شعاعی بودن نیرو در مسیر ۲ و ثابت بودن $r^2\dot{\theta} = \text{const}$ یا $rv = \text{const}$ داریم:



$$\begin{cases} -mg(a+b)\cos\theta_1 = -mg(a+b) + \frac{1}{2}mv_1^2 \\ (a+b)v_1 = (a-b)v_2 \\ -mg(a-b) + \frac{1}{2}mv_2^2 = -mg(a-b)\cos\theta_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a+b)\cos\theta_1 = a+b-\frac{v_1^2}{2g} \\ -(a-b)\cos\theta_2 = -(a-b)+\frac{v_1^2}{2g}(\frac{a+b}{a-b})^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b)^3}{(a-b)^2}\cos\theta_1 - (a-b)\cos\theta_2 = \frac{(a+b)^3}{(a-b)^2} - (a-b)$$

$$\Rightarrow (\frac{a+b}{a-b})^3(\cos\theta_0 - 1) = \cos\theta_2 - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_2 = \cos^{-1}\left[1-(\frac{a+b}{a-b})^3(1-\cos\theta_0)\right]}$$

ب) بنابراین کافی است رابطه‌ای برای θ_n بر حسب θ_1 به‌دست آوریم بنابراین با توجه به رابطه‌ی بین θ_0 و θ_2 می‌توان رابطه‌ای نیز برای θ_2 و θ_3 نوشت با توجه به این‌که در این‌ها زاویه‌ی اولیه‌ی ما θ_2 خواهد بود بنابراین داریم:

$$\begin{cases} (1-\cos\theta_2) = (\frac{a+b}{a-b})^3(1-\cos\theta_1) \\ (1-\cos\theta_3) = (\frac{a+b}{a-b})^3(1-\cos\theta_2) \\ \vdots \\ (1-\cos\theta_n) = (\frac{a+b}{a-b})^3(1-\cos\theta_{n-1}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1-\cos\theta_n) = (\frac{a+b}{a-b})^{3(n-1)}(1-\cos\theta_1)$$

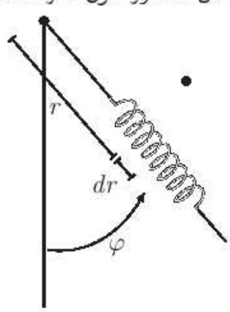
پس اگر بخواهد تاب به $\theta_n = \pi$ برسد داریم:

$$\frac{۲}{۱-\cos\theta_۱} = (\frac{a+b}{a-b})^{۳(n-۱)}$$
$$n = ۱ + \frac{۱}{۳}\log_{(\frac{a+b}{a-b})}(\frac{۲}{۱-\cos\theta_۱})$$

توجه شود که n می‌تواند یک عدد غیرصحیح باشد زیرا لزوماً تاب در π نخواهد بود پس باید از تابع براکت استفاده نمود تا حداقل دور را دریابیم:

$$\boxed{n = ۱ + \left[۱ + \frac{۱}{۳}\log_{(\frac{a+b}{a-b})}(\frac{۲}{۱-\cos\theta_۱})\right]}$$

۷ الف) دستگاه مختصات متصل به جسم چرخان گشتاور حول o را محاسبه می‌کنیم:

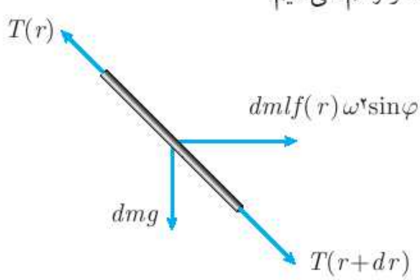


$$d\tau_\omega = dmr\omega^۲ r\cos\varphi\sin\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \tau_\omega = \frac{m\cos\varphi\sin\varphi l_۰^۲\omega^۲}{۳}$$
$$d\tau_g = dmr\sin\varphi g \qquad\qquad \tau_g = mg\frac{l_۰}{۲}\sin\varphi$$

از آن‌جا که در این دستگاه فنر در حال تعادل است داریم:

$$\tau_g = \tau_\omega \Rightarrow g\frac{l_۰\sin\varphi}{۲} = \frac{\cos\varphi\sin\varphi l_۰^۲\omega^۲}{۳}$$
$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{۳g}{۲l_۰\omega^۲} \Rightarrow \varphi = \cos^{-۱}\left(\frac{۳g}{۲l_۰\omega^۲}\right)$$

ب) دیاگرام آزاد را برای جزئی از فنر رسم می‌کنیم:



با نوشتن نیروهای در راستای میله داریم:

$$dT = -dm(g\cos\varphi + f(r)\omega^{۲}\sin^{۲}\varphi) \qquad (۱)$$

این جزء کوچک دارای کشش معادل $\frac{k_{\circ}l_{\circ}}{dr}$ است و کشش در آن نقطه از ضابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$T = \frac{k_{\circ}l_{\circ}}{dr}(df - dr) \Rightarrow T = k_{\circ}l_{\circ}(\frac{df}{dr} - ۱)$$

$$\Rightarrow dT = k_{\circ}l_{\circ}(f''(r))dr \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow k_{\circ}l_{\circ}f''(r)dr = -\frac{m}{l_{\circ}}(g\cos\varphi + f(r)\omega^{۲}\sin^{۲}\varphi)dr$$

$$\boxed{f''(r) + f(r)\frac{\omega^{۲}\sin^{۲}\varphi m_{\circ}}{k_{\circ}l_{\circ}^{۲}} + \frac{g\cos\varphi m_{\circ}}{k_{\circ}l_{\circ}^{۲}} = \circ}$$

ج) با توجه به راهنمایی مسئله داریم:

$$f(r) = A\sin\left(\frac{\omega\sin\varphi}{l_{\circ}}\sqrt{\frac{m}{k}}r + B\right) - \frac{g\cos\varphi}{\omega^{۲}\sin^{۲}\varphi} \qquad (۳)$$

شرایط مرزی مطابق زیر است:

$$\begin{cases} T(l_{\circ}) = \circ \Rightarrow f'(l_{\circ}) - ۱ = \circ \\ f(\circ) = \circ \end{cases}$$

حال با نسبت معادله‌ی ۳ تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{۱}{k}$ داریم:

$$f(r) = A\sin B\left(۱ - \frac{\omega^{۲}\sin^{۲}\varphi}{l_{\circ}^{۲}}\frac{mr^{۲}}{k}\right) + A\cos\beta\left(\frac{\omega\sin\varphi r}{l_{\circ}}\sqrt{\frac{m}{k}}\right) - \frac{g\cos\varphi m_{\circ}}{k_{\circ}l_{\circ}^{۲}}$$

با قرار دادن شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$\frac{A\cos\beta\omega\sin\varphi}{l_{\circ}}\sqrt{\frac{m}{k}} - \frac{A\sin\beta\omega^{۲}\sin^{۲}\varphi}{l_{\circ}}\frac{m}{k} = ۱$$

$$A\sin\beta = \frac{g\cos\varphi}{\omega^{۲}\sin^{۲}\varphi}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(r) = A\cos(B)\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{\omega\sin(\varphi)}{l_{\circ}}r - \frac{mg\cos\varphi}{۲kl_{\circ}^{۲}}r^{۲} \\ \frac{A\cos(B)}{l_{\circ}}\sqrt{\frac{m}{k}}\omega\sin\varphi = ۱ + \frac{mg\cos(\varphi)}{kl_{\circ}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(r) = r(1 + \frac{mg\cos\varphi}{kl_0}) - \frac{mg\cos(\varphi)r^2}{2kl_0^2}}$$

د) با توجه به شرط تعادل و این‌که در این حالت هم گشتاور صفر است:

$$\begin{cases} d\tau\omega = (\frac{m}{l_0}dr)f(r)\cos\varphi f(r)\sin(\varphi)\omega^2 \\ d\tau_g = (\frac{m}{l_0}dr)f(r)\sin\varphi g \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tau_\omega = \frac{m}{l_0}\omega^2\cos\varphi\sin\varphi\int_0^l f^2(r)dr \\ \tau_g = \frac{m}{l_0}\sin\varphi g\int_0^{l_0} f(r)dr \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tau_\omega = \tau_g \Rightarrow \frac{\omega^2}{g}\cos\varphi\int_0^{l_0} f^2(r)dr = \int_0^{l_0} f(r)dr$$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2\cos\varphi}{g}\int_0^{l_0}\left(r^2 + \frac{2mg\cos\varphi r^2}{kl_0} - \frac{mg\cos\varphi r^3}{kl_0^2}\right)dr$$

$$= \int_0^{l_0}\left(r(1 + \frac{mg\cos\varphi}{kl_0}) - \frac{mg\cos\varphi r^2}{2kl_0^2}\right)dr$$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2\cos\varphi}{g}\left(\frac{l_0^2}{3} + \frac{2mgl_0^2\cos\varphi}{3k} - \frac{mg\cos\varphi l_0^2}{4k}\right) = \left(\frac{l_0^2}{2} + \frac{mgl_0\cos\varphi}{3k}\right)$$

حال $\cos(\varphi)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\cos\varphi_0 = \cos(\varphi_0) + \frac{c}{k} \quad , \quad \cos(\varphi_0) = \frac{3g}{2l_0\omega^2}$$

حال با جایگذاری در معادله‌ی بالا داریم:

$$\frac{\omega^2 l^2}{3g}\cos\varphi + \frac{5ml\omega^2}{24k}\cos^2\varphi - \frac{l}{2} - \frac{mg\cos\varphi}{3k}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2 l^2}{3gk}c + \frac{5ml\omega^2}{24k}\frac{8g^2}{4l^2\omega^4} - \frac{mg^2}{2l\omega^2 k} = 0$$

$$\Rightarrow C = \frac{3m\omega^2}{32}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\varphi = \frac{3g}{2l_0\omega^2} + \frac{3m\omega^2}{32k}}$$