۱

مروری بر قوانین نیرو و حرکت

۱-۱ دستگاه‌های مختصات

برای توصیف مکان و حرکت یک جسم در فضا به یک دستگاه مختصات نیاز داریم. ترکیبی از بردارهای مستقل از هم که بتوانیم هر بردار دلخواهی را به صورت جمع این بردارهای مستقل تعریف کنیم را یک دستگاه مختصات می‌نامیم. معمولا دستگاه هایی که این بردارهای مستقل در آنها عمود برهم باشند بسیار ساده تر هستند و به دستگاه‌های مختصات متعامد معروفند. باز هم برای سادگی این بردارها، بدون بعد و با طول یک در نظر گرفته می‌شوند و آنها را بردار یکه می‌نامیم.

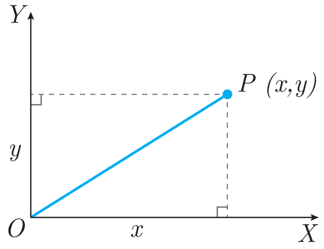
هر بردار دلخواهی در این دستگاه مختصات را به صورت ضرایبی از این بردارهای یکه‌ی مستقل تعریف می‌کنیم و ضرایب مربوطه را مؤلفه‌های بردار فوق در هر یک از راستاهای مستقل دستگاه تعریف می‌کنیم. طول بردارهای یکه همواره ثابت بوده و برابر یک است ولی در برخی از دستگاه‌ها جهت آنها تغییر می‌کند.

هر دستگاه مختصات بر اساس تقارن‌های موجود در مسأله تعریف می‌شود. البته انتخاب دستگاه مختصات کاملا اختیاری و بر عهده‌ی استفاده‌کننده است؛ ولی انتخاب دستگاهی که تقارن‌های مسأله را حفظ کند می‌تواند حل مسأله را بسیار ساده کند؛ مثلا حرکت دایره‌ای در دستگاه مختصات قطبی بسیار ساده‌تر توصیف می‌شود چرا که یکی از مؤلفه‌ها که شعاع حرکت است همواره ثابت است و حل مسأله به تحلیل و بررسی فقط یک بعد تقلیل پیدا می‌کند.

در این بخش برخی از معروف ترین دستگاه‌های مختصات متعامد را معرفی کرده و به چگونگی توصیف حرکت در آن ها می‌پردازیم.

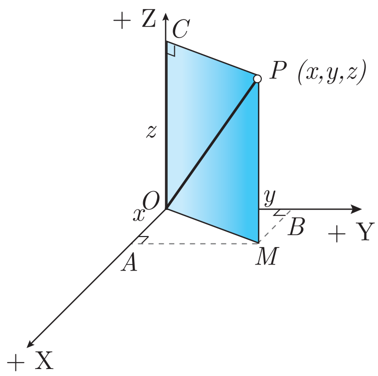
۱. دستگاه مختصات دکارتی

شکل (۱ـ۱) یک دستگاه مختصات دو بعدی را نشان می‌دهد. دستگاه مختصات دکارتی بردارهای یکه عمود برهم و ساکن دارد و معمولا بهترین دستگاه برای تحلیل سیستم‌های ساکن است. این دستگاه از دو محور عمود بر هم که یکدیگر را در نقطه O قطع می‌کنند تشکیل شده است. مکان هر نقطه در این دستگاه به وسیله مختصات (x, y) توصیف می‌شود که با رسم خطوطی موازی محورهای مختصات از نقطه مورد نظر به محورهای X و Y به دست می‌آیند.



شکل ۱-۱

شکل (۱ـ۲) یک دستگاه مختصات دکارتی سه بعدی را نشان می‌دهد. محورهای X و Y در یک صفحه و عمود بر هم هستند و محور Z عمود بر این صفحه است. مکان هر نقطه دراین دستگاه به وسیله مختصات (x, y, z) توصیف می‌شود. برای نمایش مختصات نقطه دلخواه P، به موازات محور Z خطی رسم می‌کنیم تا صفحه XY را در نقطه M قطع کند. سپس از نقطه M به موازات محورهای X و Y نیز خطوطی رسم می‌کنیم تا این دو محور را قطع کرده و مؤلفه‌های x و y نقطه P را مشخص کنند. با ترسیم خطی به موازات خط OM و مشخص کردن محل برخورد آن با محور Z مؤلفه z نقطه P به‌دست می‌آید.



شکل ۱-۲

در دستگاه مختصات دکارتی می‌توانیم اندازه OP را به‌دست آوریم:

$$OP^{2} = OM^{2} + OC^{2} = (OA^{2} + OB^{2}) + OC^{2} \qquad (۱-۱)$$

$$OP^{2} = x^{2} + y^{2} + z^{2}$$

در این دستگاه مؤلفه‌ها همگی بعد طول دارند.

شکل (۱ـ۲) یک دستگاه مخصات راستگرد را نشان می‌دهد، یعنی اگر دست راست خود را در امتداد محور X قرار دهید و انگشتان خود را به سمت محور Y جمع کنید، انگشت شست جهت محور Z را نشان می‌دهد.

مکان ذره P را می‌توان به وسیله بردار مکان r مشخص کرد. ابتدای این بردار مبدأ مختصات و انتهای آن روی ذره P قرار دارد. می‌توانیم بردار مکان $\mathbf{r}$ را بر حسب بردارهای یکه به صورت زیر بنویسیم:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\hat{\mathbf{i}} + y(t)\,\hat{\mathbf{j}} + z(t)\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱-۲)$$

مؤلفه‌های بردار مکان ($\mathbf{r}$) می‌توانند هر کدام تابعی از یک کمیت مستقل باشند. در رابطه بالا t یک پارامتر مستقل است که مؤلفه‌های بردار بر حسب آن بیان می‌شوند.

برای مثال ممکن است x, y, z را بر حسب پارامتر زمان گزارش دهیم.

از آنجایی که سرعت و شتاب یک ذره به ترتیب مشتق اول و دوم مکان آن هستند، بنابراین :

$$\mathbf{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy(t)}{dt}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{dy(t)}{dt}\,\hat{\mathbf{k}} = v_x(t)\,\hat{\mathbf{i}} + v_y(t)\,\hat{\mathbf{j}} + v_z(t)\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱-۳)$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{dv_x(t)}{dt}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y(t)}{dt}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z(t)}{dt}\,\hat{\mathbf{k}} = a_x(t)\,\hat{\mathbf{i}} + a_y(t)\,\hat{\mathbf{j}} + a_z(t)\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱-۴)$$

معادلات بالا چگونگی حرکت یک ذره در سه بعد را در دستگاه مختصات دکارتی بیان می‌کند.

مثال ۱-۱ بررسی حرکت دایروی

فرض کنید بردار موقعیت یک ذره با رابطه زیر نشان داده شده باشد:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} b \sin \omega t + \mathbf{j} b \cos \omega t$$

که ω مقداری ثابت است. حرکت ذره را تحلیل کنید.

پاسخ: بردار مکان مؤلفه z ندارد، پس حرکت محدود به صفحه $x - y$ و به صورت دوبعدی است.

فاصله ذره از مبدأ در هر زمان دلخواه t عبارتست از:

$$|\mathbf{r}| = r = (b^۲ \sin^۲ \omega t + b^۲ \cos^۲ \omega t)^{۱/۲} = b$$

همان‌طورکه مشاهده می‌کنید فاصله ذره از مبدأ ثابت است، پس مسیر حرکت دایره‌ای است به شعاع b که مرکز آن روی مرکز مختصات قرار دارد. اگر از بردار مکان بر حسب زمان مشتق بگیریم، بردار سرعت به‌دست می‌آید.

$$\mathbf{v} = \frac{d\,\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} b\omega \cos \omega t - \mathbf{j} b\omega \sin \omega t$$

اندازه بردار سرعت عبارت است از:

$$v = |\mathbf{v}| = (b^2\omega^2 \cos^2 \omega t + b^2\omega^2 \sin^2 \omega t)^{1/2} = b\omega$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، ذره مسیر خود را با سرعت ثابت می‌پیماید.
شتاب برابر است با:

$$\mathbf{a} = \frac{d\,\mathbf{v}}{dt} = -\,\mathbf{i}b\omega^2 \sin\omega t - \,\mathbf{j}b\omega^2 \cos\omega t$$

اگر بردار سرعت و شتاب را در یکدیگر ضرب داخلی کنیم، حاصل صفر می‌شود، یعنی این دو بردار بر یکدیگر عمودند.

$$\mathbf{v}.\,\mathbf{a} = (b\omega \cos\omega t)(-b\omega^2 \sin\omega t) + (-b\omega \sin\omega t)(-b\omega^2 \cos\omega t) = 0$$

با مقایسه دو بردار شتاب و مکان به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$\mathbf{a} = -\omega^2\,\mathbf{r}$$

علامت منفی نشان‌دهنده این موضوع است که a و r جهت‌های معکوس دارند، یعنی a همیشه به سمت مرکز دایره است و v بر دایره مماس است.

یکی از مزایای دستگاه‌های متعامد این است که تغییرات بردارهایی که طول یکسان دارند همواره عمود بر خود بردار است؛ مثلاً در مثال قبل دیدیم که آهنگ تغییرات بردار مکان (سرعت) که اندازه آن ثابت بود، بر بردار مکان عمود بود. این مطلب را می‌توانیم به این صورت نیز نشان دهیم که ضرب داخلی بردار مکان در خودش برابر است با

$$\vec{r}.\vec{r} = (r_x\,\hat{\mathbf{i}} + r_y\,\hat{\mathbf{j}} + r_z\,\hat{\mathbf{k}}).(r_x\,\hat{\mathbf{i}} + r_y\,\hat{\mathbf{j}} + r_z\,\hat{\mathbf{k}}) = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = r^2$$

که مقداری ثابت است و در نتیجه مشتق آن برابر صفر است.

$$\frac{d}{dt}(r^2) = 0$$

از طرفی می‌توانیم مشتق کمیت بالا را به‌صورت زیر حساب کنیم

$$\frac{d}{dt}(r^2) = \frac{d}{dt}(\,\vec{\mathbf{r}}.\,\vec{\mathbf{r}}) = 2\vec{r}.\frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

از آنجا که ضرب داخلی دو بردار فقط هنگامی برابر صفر است که دو بردار بر هم عمود باشند، بنابراین

$$\vec{r} \perp \frac{d\vec{r}}{dt}$$

۲. دستگاه مختصات قطبی

انتخاب دستگاه مختصات مناسب در حل مسأله بسیار مهم است. برای توصیف حرکت جسمی بر روی مسیرهای دایره‌ای یا شبه دایره ای کار با دستگاه مختصات دکارتی مشکل است.

به شکل (۱ـ۳) توجه کنید. مختصات دکارتی نقطه P عبارتست از x, y. نقطه P در فاصله r از مبدأ قرار دارد و خط OP با محور X زاویه θ می‌سازد. مکان نقطه P را می‌توان به صورت (r, θ) نمایش داد که مختصات قطبی نامیده می‌شود؛ که در آن r طول بردار و θ زاویه آن از محور x است.

رابطه بین (x, y) و (r, θ) عبارتست از:

$$x = r\cos\theta \qquad , \qquad y = r\sin\theta$$

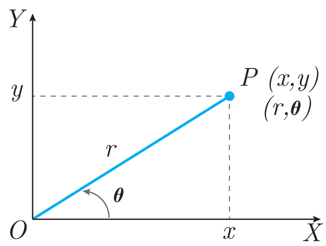
هم‌چنین برای تبدیل مختصات (r, θ) به (x, y) می‌توان مانند زیر نوشت:

$$x = r\cos\theta \qquad , \qquad y = r\sin\theta$$

یا برعکس

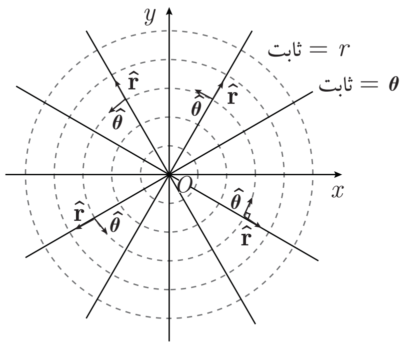
$$r = \sqrt{x^۲ + y^۲} \qquad , \qquad \theta = \tan^{-۱}\frac{y}{x}$$

مقادیر r و θ می‌توانند هر مقداری بین صفر تا بی نهایت را اختیار کنند. ولی مقدار θ را می‌توان همواره به صورت مضرب صحیحی از ۲π به علاوه مقداری بین صفر و ۲π نوشت. در بسیاری از موارد که خود زاویه اهمیتی نداشته و ما از تصویر بردار r در جهات مختلف استفاده می‌کنیم، از جمله مضرب صحیحی از ۲π صرف‌نظر می‌کنیم.



شکل ۱-۳

در شکل (۱ـ۴) نمودارهای r ثابت که دایره هایی با شعاع r و مرکز دستگاه مختصات هستند و هم‌چنین نمودارهای θ ثابت که خطوط مستقیمی هستند که از مرکز مختصات می‌گذرند، نمایش داده شده است.



شکل ۱-۴

اکنون دو بردار یکه $\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ را در مختصات قطبی تعریف می‌کنیم که بر یکدیگر عمود‌ند و در جهت افزایش r و θ هستند. بنابر این $\hat{r}$ از نقطه P به طرف افزایش فاصله شعاعی و $\hat{\theta}$ در جهتی است که اگر θ افزایش یابد P به آن سمت حرکت می‌کند. با توجه به شکل (۱ـ۵) و (۱ـ۶) می‌توان نوشت:

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{i}}\cos\theta + \hat{\mathbf{j}}\sin\theta \qquad (۱-۵)$$

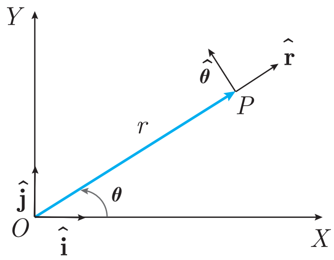
$$\hat{\theta} = -\hat{\mathbf{i}}\sin\theta + \hat{\mathbf{j}}\cos\theta \qquad (۱-۶)$$

با مشتق‌گیری از معادلات بالا بر حسب θ داریم:

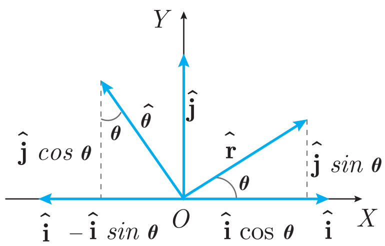
$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} = -\hat{\mathbf{i}}\sin\theta + \hat{\mathbf{j}}\cos\theta = \hat{\theta}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{\mathbf{i}}\cos\theta - \hat{\mathbf{j}}\sin\theta = -\hat{\mathbf{r}}$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} = \hat{\theta} \quad , \quad \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{\mathbf{r}} \qquad (۱-۷)$$



شکل ۱-۵



شکل ۱-۶

بردار مکان r در مختصات قطبی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{r} = r\hat{r} \tag{۱-۸}$$

بدین ترتیب سرعت عبارتست از

$$\mathbf{v} = \frac{d\,\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\,\hat{\mathbf{r}}) = \frac{dr}{dt}\,\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\,\hat{\mathbf{r}}}{dt}$$

با استفاده از معادله (۱ـ۷) می‌توان نوشت:

$$\frac{d\,\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d\,\hat{\mathbf{r}}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \hat{\theta}\dot{\theta}$$

و در نتیجه

$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \tag{۱-۹}$$

سرعت در امتداد $\hat{r}$ را سرعت شعاعی نامیده و با v_r نمایش می‌دهیم و هم‌چنین سرعت در امتداد $\hat{\theta}$ را سرعت مماسی نامیده و با v_θ نمایش می‌دهیم:

$$v_r = \dot{r} \quad , \quad v_\theta = r\dot{\theta} \tag{۱-۱۰}$$

شتاب ذره برابر است با

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d\,\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{d\dot{r}}{dt}\,\hat{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}}\frac{d\,\hat{\mathbf{r}}}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} \\ &= \ddot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\dot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot{\theta}(-\,\hat{\mathbf{r}})\dot{\theta}\end{aligned}$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^{۲})\,\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + ۲\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{۱-۱۱}$$

دو مؤلفه شتاب عبارتند از شتاب شعاعی و شتاب مماسی که عبارتند از

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^{۲} \tag{۱-۱۲}$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + ۲\dot{r}\dot{\theta} \tag{۱-۱۳}$$

مثال ۱-۲ حرکت دایره‌ای تحت تأثیر نیروی گرانش

ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیروی گرانش جرم مرکزی M در حال حرکت در مسیری به شعاع r است. سرعت و دوره تناوب این ذره چقدر است؟

پاسخ: نیروی گرانش فقط در راستای شعاعی به ذره وارد می‌شود و در راستای مماسی نیرویی ندارد. هم‌چنین توجه داشته باشید که اگر r ثابت باشد، آنگاه $\dot{r} = \ddot{r} = ۰$ (طبق معادله (۱ـ۱۲)). در نتیجه شتاب شعاعی برابر با

$$a_r = -r\dot{\theta}^۲ = -r(\frac{v_\theta}{r})^۲ = -\frac{v_\theta^۲}{r}$$

چون سرعت به مسیر مماس است (طبق مثال ۱ـ۱)، پس در راستای شعاعی مؤلفه‌ای ندارد در نتیجه $v = v_\theta$. حال با نوشتن معادله نیرو سرعت را به‌دست می‌آوریم

$$-\frac{GM}{r^۲} = -\frac{v^۲}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

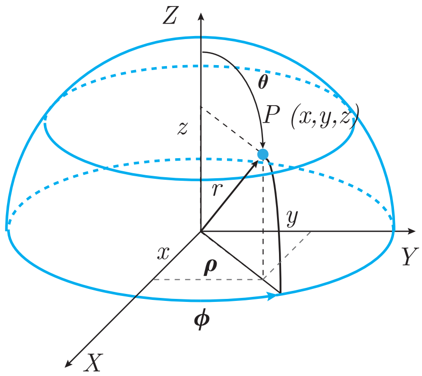
برای محاسبه دوره تناوب، با توجه به این‌که سرعت ذره ثابت است، پس طول مسیر برابر با حاصل‌ضرب دوره تناوب در سرعت ذره است

$$T = \frac{۲\pi r}{v} = \sqrt{\frac{۴\pi^۲ r^۳}{GM}}$$

که این همان قانون سوم کپلر برای مسیرهای دایره‌ای است.

۳. دستگاه مختصات کروی

نقطه P را طبق شکل (۱ـ۷) در فاصله r از مبدأ مختصات در نظر بگیرید. مختصات دکارتی این نقطه (x, y, z) و مختصات کروی آن (r, θ, φ) است.



شکل ۱-۷

همان‌طورکه در شکل ملاحظه می‌کنید θ زاویه ای است که بردار مکان ذره با محور Z می‌سازد و از صفر تا π تغییر می‌کند. زاویه φ زاویه‌ای است که تصویر بردار r در صفحه $X - Y$ یعنی بردار ρ با محور X می‌سازد. این زاویه از صفر تا ۲π تغییر می‌کند و به صورت پادساعتگرد افزایش می‌یابد.

برای پیدا کردن رابطه بین دستگاه مختصات دکارتی و کروی، ابتدا بردار ρ را که تصویر بردار مکان در صفحه $X-Y$ است می‌یابیم و سپس مؤلفه x و y را بر حسب این بردار می‌نویسیم.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho} &= r\sin\theta \\ x &= \rho\cos\varphi = r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi = r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \tag{۱۴-۱}$$

رابطه‌های تبدیل دستگاه مختصات دکارتی به قطبی نیز از روی شکل و یا روابط بالا قابل استخراج است.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} \\ \tan\theta &= \frac{\rho}{z} = \frac{\sqrt{x^۲+y^۲}}{z} \\ \tan\varphi &= \frac{y}{x} \end{aligned} \tag{۱۵-۱}$$

برای محاسبه روابط مربوط به سرعت و شتاب در مختصات کروی مانند مختصات قطبی ابتدا بردارهای یکه دستگاه مختصات کروی را بر حسب بردارهای یکه دستگاه مختصات دکارتی می‌نویسیم و سپس مشتق‌های آن ها را محاسبه می‌کنیم و در روابط اصلی قرار می‌دهیم. (به تمرین ۳ مراجعه کنید.)

مثال ۱-۳ فاصله نقاط روی کره زمین

مختصات جغرافیایی شهر بندرعباس $(۲۷^\circ\,\mathrm{N}, ۵۶^\circ\,\mathrm{E})$ و مختصات جغرافیایی شهر جاکارتا $(۶^\circ\,\mathrm{S}, ۱۰۷^\circ\,\mathrm{E})$ است. در صورتیکه که یک کشتی بتواند از بندرعباس به سمت جاکارتا یک مسیر مستقیم را طی کند، باید چه مسافتی را بپیماید؟ شعاع زمین را $۶۴۰۰\ \mathrm{km}$ در نظر بگیرید.

پاسخ: ابتدا باید طول و عرض‌های جغرافیایی فوق را به زوایای θ و φ تبدیل کنیم. چون مبدأ عرض جغرافیایی استوا است پس θ بندرعباس و θ جاکارتا عبارتند از:

$$\begin{aligned} \theta_b &= ۹۰^\circ - ۲۷^\circ = ۶۳^\circ \\ \theta_j &= ۹۰^\circ + ۶^\circ = ۹۶^\circ \end{aligned}$$

و طول‌های جغرافیایی احتیاج به تبدیل ندارند.

بردارهای مکان این دو شهر عبارتند از:

$$\vec{r}_b = R\cos\theta_b\cos\varphi_b\,\hat{\mathbf{i}} + R\cos\theta_b\sin\varphi_b\,\hat{\mathbf{j}} + R\sin\theta_b\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{r}_j = R\cos\theta_j \cos\varphi_j\, \hat{\mathbf{i}} + R\cos\theta_j \sin\varphi_j\, \hat{\mathbf{j}} + R\sin\theta_j\, \hat{\mathbf{k}}$$

برای به‌دست آوردن زاویه بین این دو شهر از مرکز زمین می‌توانیم بردارهایشان را در هم ضرب داخلی کنیم.

$$\begin{aligned}
\vec{r}_b.\vec{r}_j &= |\vec{r}_b||\vec{r}_j|\cos(\vec{r}_b, \vec{r}_j)\\
&= R^۲(\cos\theta_b\cos\varphi_b\cos\theta_j\cos\varphi_j + \cos\theta_b\sin\varphi_b\cos\theta_j\sin\varphi_j\\
&\quad + \sin\theta_b\sin\theta_j) = R^۲(\cos\theta_b\cos\theta_j\cos(\varphi_b-\varphi_j) + \sin\theta_b\sin\theta_j)\\
(\vec{r}_b, \vec{r}_j) &= \gamma = \cos^{-۱}(\cos\theta_b\cos\theta_j\cos(\varphi_b-\varphi_j) + \sin\theta_b\sin\theta_j)\\
&= ۳۱/۱^\circ = ۰/۵۴\,\mathrm{rad}\\
s &= R\gamma = ۶۴۰۰ \times ۰/۵۴ = ۳۴۷۴\,\mathrm{km}
\end{aligned}$$

۱-۲ کار، انرژی پتانسیل، قانون پایستگی انرژی

در بسیاری از موارد نیروی وارد به ذره تابعی از مکان ذره یا فاصله بین ذرات است.
مانند نیروی گرانش، نیروی کولنی، نیروی فنر، نیروهای بین مولکولی و بسیاری دیگر از برهم‌کنش‌های موجود در طبیعت.

دینامیک دانشی است که می‌تواند بر اساس داشتن نیروهای وارد بر ذرات و شرایط اولیه آن وضعیت آینده ذرات را محاسبه کند. قانون دوم نیوتون شتاب را به ما می‌دهد و با انتگرال‌گیری از آن می‌توان سرعت و سپس مکان را به‌دست آورد. اما این امر وقتی ساده‌تر می‌شود که نیرو تابعی از زمان باشد. در اینجا صرفاً با حل یک معادله دیفرانسیل روبه‌رو هستیم که البته گاهی ممکن است بسیار پیچیده شود. از این رو به معرفی کمیت هایی می‌پردازیم تا حل مسأله را ساده‌تر کنند.

برای سادگی حرکت را یک بعدی و در راستای x در نظر می‌گیریم. برای حرکت در سه بعد کافی است معادلات حرکت را در هر یک از بعد ها به صورت جداگانه بنویسیم و یا در مواردی که نیرو فقط به صورت شعاعی است (مانند نیروی گرانش) کافی است از مختصات قطبی استفاده کرده و معادلات را فقط در راستای شعاعی بنویسیم.

سرعت برابر است با مشتق مکان بر حسب زمان

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{۱-۱۶}$$

هم‌چنین شتاب عبارتست از مشتق سرعت بر حسب زمان و یا مشتق دوم مکان بر حسب زمان .

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{۱-۱۷}$$

با تقسیم دو معادله بالا بر هم و حذف dt معادله مستقل از زمان به‌دست می‌آید:

$$vdv = adx \tag{۱-۱۸}$$

معادله دیفرانسیلی که حرکت مستقیم‌الخط یک جسم تحت اثر نیروی وابسته مکان را توصیف می‌کند عبارتست از

$$F(x) = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{۱-۱۹}$$

با جایگذاری a از معادله (۱ـ۱۸) داریم:

$$F(x) = mv\frac{dv}{dx} \tag{۱-۲۰}$$

سمت راست معادله بالا را می‌توانیم به شکل زیر بازنویسی کنیم

$$F(x) = \frac{d}{dx}(\frac{1}{2}mv^2) \tag{۱-۲۱}$$

اگر عبارت داخل پرانتز را انرژی جنبشی بنامیم و آن را با K نمایش دهیم، داریم

$$F(x) = \frac{dK}{dx} \Rightarrow K(x_b) - K(x_a) = \int_{x_a}^{x_b} F(x)dx \tag{۱-۲۲}$$

انتگرال سمت راست معادله بالا طبق تعریف کار انجام شده توسط نیروی F بر روی ذره است، وقتی که ذره از x_a تا x_b حرکت کند که آن را با W نشان می‌دهیم.

$$W = \int_{x_a}^{x_b} F(x)dx = K_b - K_a = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 \tag{۱-۲۳}$$

رابطه بالا را قضیه کار ـ انرژی می‌نامند. توجه داشته باشید که مسیر حرکت ذره از x_a تا x_b در مقدار W تأثیری ندارد و این کمیت فقط به فاصله نقاط اولیه و انتهایی مسیر وابسته است.

انرژی پتانسیل را به عنوان کاری که توسط نیروی پایستار در جابه جایی ذره از نقطه x_b تا یک نقطه مرجع مانند x_c تعریف می‌کنیم.

$$U(x_b) - U(x_c) = \int_{x_b}^{x_c} F(x)dx = -\int_{x_c}^{x_b} F(x)dx \tag{۱-۲۴}$$

مقدار انرژی پتانسیل در نقطه مرجع C کاملا دلخواه است. برای مثال در معادله بالا $U(x_c)$ را می‌توانیم هر عدد دلخواهی بگیریم. ولی برای سادگی می‌توانیم این نقطه را جایی بگیریم که مقدار $U(x_c)$ صفر باشد.

در حد $\Delta x \to ۰$ می‌توانیم معادله (۱ـ۲۴) را به شکل زیر بنویسیم

$$dU = -F(x)dx \;\Rightarrow\; F(x) = -\frac{dU}{dx} \tag{۱-۲۵}$$

باید به این نکته توجه کرد که تعریف تابعی به عنوان تابع انرژی پتانسیل مانند آنچه در معادله (۱ـ۲۵) وجود دارد، فقط برای نیروهای پایستار امکان پذیر است. طبق تعریف نیروی پایستار نیرویی است که کار انجام شده توسط آن از نقطه A به نقطه B مستقل ازمسیر حرکت ذره باشد. البته نیرو هایی که تابعی از مسیر هستند و فقط به یک بعد محدود می‌شوند (مانند نیروی فنر که فقط در راستای x است) همگی پایستارند.

با توجه به معادله (۱ـ۲۴) کار انجام شده در رفتن از x_a تا x_b برابر است با

$$\begin{aligned} W = \int_{x_a}^{x_b} F(x)dx &= \int_{x_a}^{x_c} F(x)dx - \int_{x_b}^{x_c} F(x)dx \\ &= \Big(U(x_a) - U(x_c)\Big) - \Big(U(x_b) - U(x_c)\Big) \\ &= -U(x_b) + U(x_a) \end{aligned} \tag{۱-۲۶}$$

با مساوی قرار دادن معادله (۱ـ۲۶) و (۱ـ۲۳) به قانون پایستگی انرژی دست می‌یابیم

$$K_a + U(x_a) = K_b + U(x_b) = E = \text{ثابت} \tag{۱-۲۷}$$

این معادله بیان می‌کند که اگر ذره‌ای تحت اثر یک نیروی پایستار حرکت کند، مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل آن که طبق تعریف آن را انرژی مکانیکی می‌نامیم، ثابت می‌ماند.

با قرار دادن $K = \frac{۱}{۲}mv^۲$ در معادله (۱ـ۲۷) می‌توانیم سرعت لحظه ای ذره را بر حسب انرژی مکانیکی و انرژی پتانسیل آن به‌دست آوریم

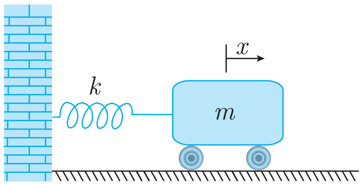
$$v = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{۲}{m}[E - U(x)]} \tag{۱-۲۸}$$

حال با انتگرال‌گیری از معادله اخیر می‌توانیم زمان را به صورت تابعی از مکان به‌دست آوریم

$$t - t_۰ = \int \frac{\pm dx}{\sqrt{\frac{۲}{m}[E - U(x)]}} \tag{۱-۲۹}$$

با توجه به معادله بالا حرکت فقط به بازه ای از x محدود است که در آن $E - U(x)$ مثبت باشد. در فصل ۶ از این موضوع استفاده زیادی خواهد شد.

مثال ۱-٤ معادله حرکت هماهنگ ساده



وزنه‌ای به جرم m در حالت افقی به یک سر فنری متصل شده و سر دیگر فنر ثابت است. این وزنه روی سطح بدون اصطکاکی قرار دارد. معادله مکان وزنه را به‌دست آورید.

پاسخ: نیروی وارد به ذره یک نیروی بازگرداننده خطی و تابعی از مکان است

$$F(x) = -kx \qquad (۱-۳۰)$$

ابتدا انرژی پتانسیل ذره را به‌دست می‌آوریم، نقطه مرجع را در مبدأ یعنی $x = ۰$ فرض می‌کنیم و مقدار انرژی پتانسیل در این نقطه را صفر میگیریم

$$U(x) - ۰ = -\int_۰^x F(x)dx = -\int_۰^x (-kx)dx$$
$$U(x) = \frac{۱}{۲}kx^۲$$

در اینجا می‌توانیم از ثابت بودن انرژی مکانیکی ذره به روش زیر مطمئن شویم، از معادله (۱ـ۲۰) داریم

$$mvdv = -kxdx$$

که با انتگرال‌گیری از دو طرف داریم

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ = -\frac{۱}{۲}kx^۲ + \text{ثابت}$$
$$\frac{۱}{۲}mv^۲ + \frac{۱}{۲}kx^۲ = E = \text{انرژی مکانیکی}$$

حال با استفاده از معادله (۱ـ۲۹) تابعیت مکان بر حسب زمان را به‌دست می‌آوریم

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{(۲/m)(E - \frac{۱}{۲}kx^۲)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{۲E}{m}(۱ - \frac{k}{۲E}x^۲)}} \qquad (۱-۳۱)$$

برای حل انتگرال بالا از جایگذاری زیر استفاده می‌کنیم

$$\sqrt{\frac{k}{۲E}}x = \sin\theta \;\Rightarrow\; \sqrt{\frac{k}{۲E}}dx = \cos\theta d\theta \qquad (۱-۳۲)$$

در نتیجه معادله (۱ـ۳۱) به شکل زیر درمی‌آید

$$t = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sqrt{\frac{2E}{k}}\cos\theta d\theta}{\sqrt{\frac{2E}{m}(1-\sin^2\theta)}} = \sqrt{\frac{m}{k}}\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \sqrt{\frac{m}{k}}(\theta-\theta_0)$$

از معادله بالا نتیجه می‌گیریم

$$\theta = \sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta_0$$

حال عبارت بالا را در (۱ـ۳۲) قرار می‌دهیم

$$\sqrt{\frac{k}{2E}}x = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta_0\right)$$

می‌توانیم معادله بالا را به شکل ساده تر زیر خلاصه کنیم

$$x = A\sin(\omega t + \theta_0) \qquad (۳۳\text{-}۱)$$

که در آن $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ است.

همان‌طورکه مشاهده می‌کنید، عبارت بالا به شکل سینوسی است و نشان می‌دهد که ذره حول نقطه تعادل در نوسان است. بیشترین انحراف ذره از نقطه تعادل را دامنه نوسان می‌نامند و با A نشان می‌دهند. هم‌چنین دوره تناوب نوسان ها با توجه به این‌که دوره تناوب تابع سینوس برابر 2π است به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\omega t + \theta_0 = \omega(t+T) + \theta_0 = \omega t + \theta_0 + 2\pi \qquad (۳۴\text{-}۱)$$
$$\Rightarrow \ T = \frac{2\pi}{\omega}$$

از این رو ω را سرعت زاویه‌ای می‌نامند.

برای به‌دست آوردن مقادیر θ_0 و A در معادله (۱ـ۳۳) باید شرایط اولیه مسأله را جایگذاری کنیم. برای مثال اگر بدانیم در $t = 0$ جسم در $x = 0$ قرار داشته است و در این لحظه با سرعت v_0 رها شده است، آنگاه

$$x = A\sin(\omega t + \theta_0) \xrightarrow{t=0} 0 = A\sin(0 + \theta_0)$$
$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \theta_0) \xrightarrow{t=0} v_0 = A\omega\cos(0 + \theta_0)$$

در نتیجه

$$\tan\theta_0 = 0 \ \Rightarrow \ \theta_0 = 0$$
$$A = \frac{v_0}{\omega}$$

مثال ۱-۵ سقوط آزاد در میدان نیروی گرانش

دنباله داری به جرم m در فاصله d از خورشید قرار دارد. اگر دنباله دار در یک لحظه به حالت سکون برسد و پس از آن به سمت خورشید سقوط کند، چه مدت طول می‌کشد تا به مرکز خورشید برسد؟

پاسخ: نیروی وارد بر جرم m نیروی گرانش است که فقط به فاصله از مرکز نیرو بستگی دارد. چون ذره بدون سرعت اولیه رها شده، پس مسیر آن یک خط مستقیم در امتداد مرکز نیرو است.

چون نیروی گرانش یک نیروی پایستار است، می‌توانیم برای آن تابع انرژی پتانسیل به‌دست بیاوریم (در فصل بعد به صورت مفصل درباره انرژی پتانسیل گرانشی بحث خواهیم کرد)، نقطه مرجع را در بی‌نهایت فرض می‌کنیم و مقدار انرژی پتانسیل در این نقطه را صفر می‌گیریم

$$U(x) - \circ = -\int_{\infty}^{x} F(x)dx = -\int_{\infty}^{x}\left(-\frac{GMm}{r^{۲}}\right)dx$$

$$U(x) = -\frac{GMx}{r} \qquad (۱\text{-}۳۵)$$

قانون پایستگی انرژی را برای جرم m در لحظه رها شدن در فاصله d و بار دیگر در فاصله دلخواه x از مرکز نیرو می‌توان نوشت

$$-\frac{GMm}{d} = \frac{۱}{۲}mv^{۲} - \frac{GMm}{x}$$

در نتیجه سرعت ذره در فاصله x از مرکز نیرو برابر است با

$$v = \pm\sqrt{۲GM\left(\frac{۱}{x} - \frac{۱}{d}\right)} = \pm\sqrt{\frac{۲GM}{d}}.\sqrt{\frac{d-x}{x}} \qquad (۱\text{-}۳۶)$$

توجه داشته باشید که ذره در اثر سقوط آزاد، در حال نزدیک شدن به مرکز نیرو است پس تغییرات شعاع نسبت به زمان منفی است و علامت سرعت باید منفی باشد. با جایگذاری صورت دیفرانسیلی سرعت داریم

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{۲GM}{d}}.\sqrt{\frac{d-x}{x}}$$

با مرتب کردن معادله بالا به نحوی که سمت راست فقط متغیر مکان و سمت چپ فقط متغیر زمان وجود داشته باشد، داریم

$$\sqrt{\frac{۲MG}{d}}dt = -\sqrt{\frac{x}{d-x}}dx$$

حال از طرفین معادله بالا انتگرال می‌گیریم، برای قرار دادن حدود انتگرال توجه داشته باشید که در $t = ۰$ ذره در فاصله d و در $t = T$ که مجهول مسأله است، ذره در فاصله صفر از مبدأ قرار دارد.

$$\sqrt{\frac{۲GM}{d}} \int_۰^T dt = -\int_d^۰ \sqrt{\frac{x}{d-x}}dx = \int_۰^d \sqrt{\frac{x}{d-x}}dx \qquad (۱\text{-}۳۷)$$

برای حل انتگرال سمت راست از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم

$$x = d\sin^۲\theta \;\Rightarrow\; dx = ۲d\sin\theta\cos\theta d\theta$$

برای تغییر حدود انتگرال کافی است از رابطه بالا θ متناظر با $x = ۰$ و $x = d$ را به‌دست آوریم و در انتگرال قرار دهیم. برای $x = ۰$، $\theta = ۰$ و برای $x = d$ ، $\theta = \pi/۲$ است. در نتیجه معادله (۱ـ۳۷) به شکل زیر در می‌آید

$$\sqrt{\frac{۲GM}{d}}T = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{\frac{d\sin^۲\theta}{d - d\sin^۲\theta}} \times ۲d\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$\sqrt{\frac{GM}{۲d^۳}}T = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{\frac{\sin^۲\theta}{۱-\sin^۲\theta}}.\sin\theta\cos\theta d\theta = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sin^۲\theta d\theta \qquad (۱\text{-}۳۸)$$

درنهایت انتگرال سمت راست را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی دو برابر زاویه حل می‌کنیم

$$\int \sin^۲\theta d\theta = \int \frac{۱-\cos ۲\theta}{۲}d\theta = \frac{\theta}{۲} - \frac{\sin ۲\theta}{۴}$$

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sin^۲\theta d\theta = \left(\frac{\frac{\pi}{۲}}{۲} - \frac{\sin\pi}{۴}\right) - \left(\frac{۰}{۲} - \frac{\sin ۰}{۴}\right) = \frac{\pi}{۴}$$

زمان سقوط آزاد را به‌دست می‌آوریم

$$\sqrt{\frac{GM}{۲d^۳}}T = \frac{\pi}{۴}$$

$$T = \pi\sqrt{\frac{d^۳}{۸GM}}$$

که این مقدار در حالتی که دنباله دار از فاصله ۱ واحد نجومی (شعاع مدار زمین) رها شود تقریبا برابر است با ۶۴٫۶ روز.

مثال ۱-۶ حرکت ماهواره در جو زمین در حضور مقاومت هوا

ماهواره‌ای به جرم m در مداری دایروی در جو زمین حرکت می‌کند، به دلیل سرعتی که ماهواره دارد، نیروی ضعیف و ثابتی به ماهواره وارد می‌شود و باعث کاهش سرعت ماهواره می‌شود. ماهواره به آهستگی به صورت مارپیچ به طرف زمین حرکت می‌کند. از آنجا که نیروی اصطکاک ضعیف است، تغییر شعاع به آهستگی صورت می‌گیرد. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که در هر لحظه ماهواره عملا در مداری دایروی به شعاع متوسط r قرار دارد. مقدار نیروی اصطکاک را برابر با f فرض کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

(الف) انرژی مکانیکی کل ماهواره را به صورت تابعی از شعاع مدار ماهواره محاسبه کنید.

(ب) تغییر تقریبی شعاع را در هر دوره گردش ماهواره پیدا کنید.

(ج) تغییر تقریبی انرژی جنبشی ماهواره را در هر دوره پیدا کنید.

پاسخ:

محاسبه انرژی مکانیکی:

طبق تعریف انرژی مکانیکی برابر است با مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل. تابع انرژی پتانسیل برای نیروی گرانش را در معادله (۱ـ۳۵) به‌دست آوردیم. حال باید تابع انرژی جنبشی را محاسبه کنیم. برای این کار از نتیجه مثال (۱ـ۲) استفاده می‌کنیم. در آن مثال سرعت یک جسم که در مداری دایروی به شعاع r در حال گردش به دور جرم مرکزی M است را به صورت زیر به‌دست آوردیم

$$v^{۲} = \frac{GM}{r}$$

در نتیجه انرژی جنبشی ماهواره برابر است با

$$K = \frac{۱}{۲}mv^{۲} = \frac{GMm}{۲r}$$

برای محاسبه انرژی مکانیکی باید انرژی جنبشی و پتانسیل را با هم جمع کنیم

$$E = K + U = \frac{GMm}{۲r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{۲r}$$

طبق رابطه (۱ـ۲۲) و (۱ـ۲۳) کار انجام شده روی جرم m در جابه جایی بین دو نقطه با تغییر انرژی جنبشی آن در حین این حرکت برابر است. هم‌چنین کار انجام شده روی ماهواره را در حین حرکتش به دو قسمت کار نیروی پایستار و کار نیروی ناپایستار تقسیم می‌کنیم.

$$W = \Delta K \ \Rightarrow\ W_{\text{پایستار}} + W_{\text{ناپایستار}} = \Delta K$$

کار نیروی پایستار کاری است که توسط نیروی گرانش در اثر کم شدن شعاع مدار ماهواره روی آن انجام می‌شود و طبق معادله (۱ـ۲۴) برابر با تغییرات انرژی پتانسیل ماهواره است.

$$W_{\text{پایستار}} = \Delta U$$

اما کار نیروی ناپایستار، کاری است که توسط نیروی اصطکاک روی ماهواره انجام می‌شود و برابر است با

$$W_{\text{ناپایستار}} = W_f = \Delta K + \Delta U = \Delta E = E_۲ - E_۱$$

پس اگر بتوانیم کار نیروی اصطکاک را به کمک انتگرال‌گیری به‌دست آوریم می‌توانیم آن را با تغییرات انرژی مکانیکی برابر قرار دهیم و به این ترتیب تغییرات شعاع مدار را به‌دست آوریم.

کار نیروی اصطکاک در یک دوره تناوب برابر است با

$$W_f = \int \vec{F}.d\vec{s} = \int -f\,ds = -f(۲\pi r)$$

توجه داشته باشید که نیروی اصطکاک در جهت خلاف سرعت به ماهواره وارد می‌شود و چون سرعت به مسیر مماس است، در نتیجه نیروی اصطکاک نیز مماس بر مسیر و در جهت خلاف حرکت است. علامت منفی در انتگرال بالا بیانگر خلاف جهت بودن نیرو و جهت حرکت است. اما ds بیانگر مسیر طی شده است و چون ما کار نیروی ناپایستار را در یک دوره تناوب ماهواره به‌دست آوردیم به همین دلیل مسیر طی شده برابر با محیط مدار دایره ای به شعاع r است.

تغییر شعاع در هر دور گردش:

حال کافی است مقدار کار نیروی ناپایستار را برابر با تغییرات انرژی مکانیکی قرار دهیم

$$\begin{aligned}
W_f = E_۲ - E_۱ \;\Rightarrow\; -۲\pi r f &= \frac{-GMm}{۲r_۲} - \frac{-GMm}{۲r_۱} \\
&= -\frac{GMm}{۲}\left(\frac{r_۱ - r_۲}{r_۲ r_۱}\right) = \frac{GMm\Delta r}{۲r_۲ r_۱} \\
\Delta r &= -\frac{۴\pi r r_۱ r_۲ f}{GMm}
\end{aligned}$$

همان‌گونه که مشاهده می‌کنید علامت Δr منفی است و نشان دهنده کاهش فاصله ماهواره به مرور زمان است.

اگر r را فاصله میانگین ماهواره در یک دوره تناوب فرض کنیم، شعاع اولیه و ثانویه ماهواره را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$r_۱ = \bar{r} - \frac{\Delta r}{۲} \qquad , \qquad r_۲ = \bar{r} + \frac{\Delta r}{۲}$$

حال اگر تغییرات شعاع را آنقدر کوچک فرض کنیم که بتوان از توان دوم آن صرف‌نظر کرد داریم

$$r r_۱ r_۲ = r^۳ - \frac{r}{۴}\Delta r^۲ \cong r^۳$$

و در نهایت

$$\Delta r = -\frac{۴\pi r^۳ f}{GMm}$$

تغییر انرژی جنبشی ماهواره:

برای محاسبه تغییرات انرژی جنبشی می‌توانیم از رابطه ای که در بالا به‌دست آوردیم استفاده کنیم

$$\Delta K = W_f - \Delta U = -۲\pi r f - \left(\frac{-GMm}{r_۲} - \frac{-GMm}{r_۱}\right)$$
$$\Delta K = ۲\pi r f - GMm\frac{\Delta r}{r_۲ r_۱}$$

با قرار دادن Δr در رابطه بالا داریم

$$\Delta K = -۲\pi r f - \frac{GMm}{r_۲ r_۱}\left(-\frac{۴\pi r r_۱ r_۲ f}{GMm}\right) = ۲\pi r f$$

جالب است که تغییرات انرژی جنبشی ماهواره مثبت است، یعنی ماهواره همچنان که در جو سقوط می‌کند دچار افزایش سرعت می‌شود. یعنی انرژی گرانشی آزاد شده ناشی از نیروی پایستارگرانش بیش از انرژی اتلافی توسط اصطکاک است.

۱-۳ گشتاور، تکانه زاویه‌ای، چرخش

گشتار و تکانه زاویه‌ای

ذره‌ای به جرم m را در صفحه $x - y$ تصور کنید. فرض کنید یک تک نیروی F در این صفحه به این ذره وارد شود و مکان این ذره نسبت به مبدأ مختصات برابر r باشد (شکل (۱ـ۸)). گشتاور τ وارد به ذره نسبت به مبدأ مختصات، کمیتی برداری است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

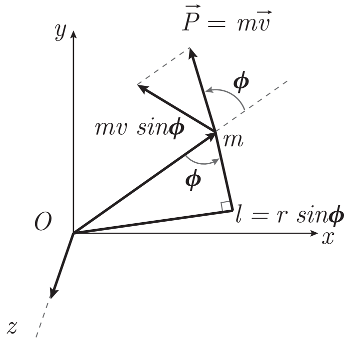
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (۱-۳۹)$$

چون گشتاور حاصل‌ضرب خارجی بردار مکان ذره در نیروی F است، پس اندازه آن را می‌توانیم به صورت زیر به دست آوریم

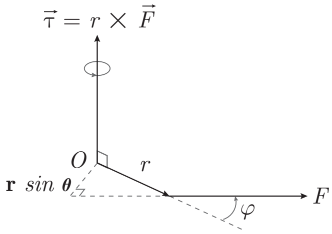
$$\tau = rF_\perp = r_\perp F = rF\sin\varphi \qquad (۱-۴۰)$$

شکل (۱ـ۹) ذره‌ای با تکانه خطی $\vec{p} = m\vec{v}$ را نشان می‌دهد که در صفحه $x-y$ در حال حرکت است. اگر بردار مکان این ذره r باشد، تکانه زاویه‌ای این ذره را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \qquad (۴۱\text{-}۱)$$



شکل ۱-۹



شکل ۱-۸

هم‌چنین اندازه تکانه زاویه‌ای با توجه به تعریف آن عبارتست از

$$l = rp_{\perp} = r_{\perp}p = mrv_{\perp} = mr_{\perp}v = mrv\sin\varphi \qquad (۴۲\text{-}۱)$$

برای رسیدن به یک نتیجه مهم از معادله (۱ـ۴۱) که تعریف تکانه زاویه ای است نسبت به زمان مشتق می‌گیریم

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}\right) \qquad (۴۳\text{-}۱)$$

در معادله بالا $\frac{d\vec{v}}{dt}$ برابر با شتاب ذره (a) و $\frac{d\vec{r}}{dt}$ برابر با سرعت ذره است. بنابراین می‌توان معادله (۱ـ۴۳) را به صورت زیر نوشت

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{a} + \vec{v} \times \vec{v})$$

از آنجا که ضرب خارجی هر بردار در خودش صفر است، داریم

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{a}) = \vec{r} \times m\vec{a}$$