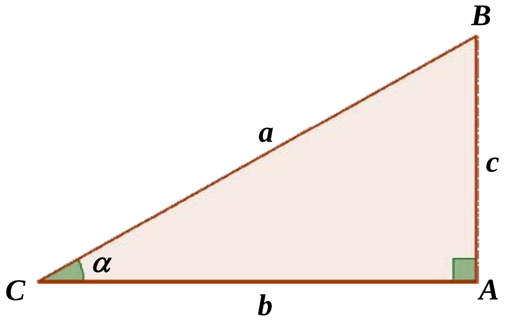
۱–۱– نسبت مثلثاتی سینوس

در مثلث قائم الزاویه‌ی $\overset{\Delta}{ABC}$ $(\hat{A}=۹۰^\circ)$، زاویه‌ی حاده‌ی α را در نظر می‌گیریم. سینوس این زاویه‌ی حاده این‌گونه تعریف می‌شود:



$$\sin(\alpha)=\frac{\text{اندازه‌ی ضلع مقابل به زاویه‌ی } \alpha}{\text{اندازه‌ی وتر}}=\frac{c}{a}$$

از آن‌جا که در مثلث قائم الزاویه، طول وتر از سایر اضلاع بزرگ‌تر است، همواره حاصل تقسیم اندازه‌ی ضلع مقابل به زاویه‌ی α بر اندازه‌ی وتر عددی کوچک‌تر از یک خواهد بود:

$$۰<\alpha<۹۰^\circ \Rightarrow ۰<\sin\alpha<۱$$

اگر $۰<\alpha<۹۰^\circ$ و $\sin\alpha=\frac{m-۳}{۵}$ باشد، m چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

حل)

α زاویه‌ای حاده است : $۰<\sin\alpha<۱$

$$\Rightarrow ۰<\frac{m-۳}{۵}<۱ \text{ (ضرب طرفین در ۵) } \Rightarrow ۰<m-۳<۵ \text{ (جمع طرفین با ۳) }$$

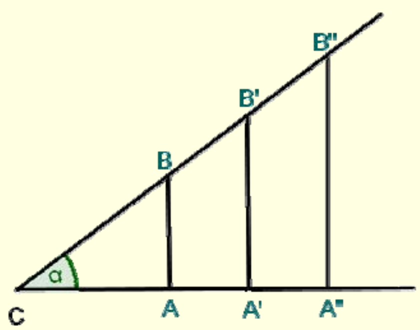
$$\Rightarrow ۳<m<۸ \text{ (مشخص کردن اعداد صحیح) } \Rightarrow m=۴,۵,۶,۷$$

بنابراین ۴ مقدار صحیح وجود دارد.

در مورد زاویه‌ی مشخص و حاده‌ی α می‌توان گفت $\sin\alpha$ نیز عددی مشخص است. یعنی در مثلث‌های قائم الزاویه‌ی متفاوت که یک زاویه‌ی حاده‌ی α دارند، نسبت اندازه‌ی ضلع مقابلِ α به اندازه‌ی وتر، عددی ثابت است.

به شکل زیر توجه کنید:

طبق قضیه‌ی تالس می‌توان گفت که در مثلث‌های ABC و $A'B'C$ و $A''B''C$ اضلاع باهم متناسب می‌باشند و حاصل نسبت اندازه‌ی ضلع مقابلِ α بر اندازه‌ی وتر در هر سه مثلث باهم برابر است.



$$\sin\alpha=\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C}=\frac{A''B''}{B''C}$$

۴ دقیقه

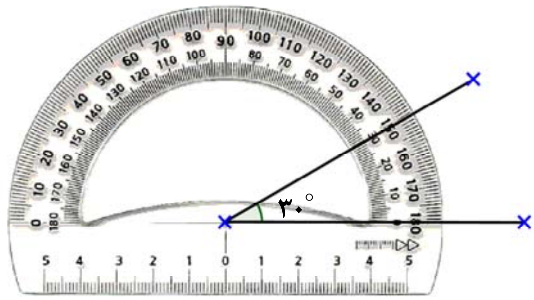
مثال هر یک از مثلث‌های قائم الزاویه‌ی زیر را رسم کرده و مقدار $\sin 30°$ را در آن‌ها حساب کنید.

الف) $\hat{A} = ۹۰°$ و $\hat{C} = ۳۰°$ و $BC = ۴cm$

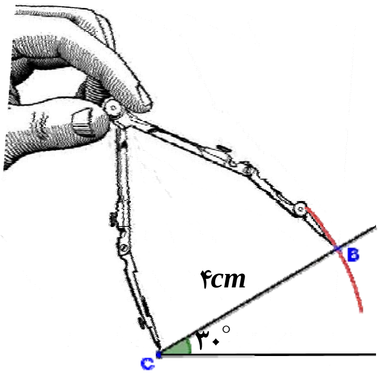
ب) $\hat{A} = ۹۰°$ و $\hat{C} = ۳۰°$ و $BC = ۳cm$

حل الف)

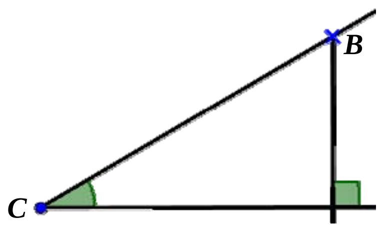
۱ رسم زاویه‌ی $\hat{C} = ۳۰°$ به کمک نقاله



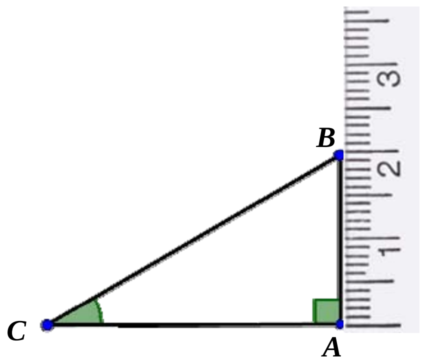
۲ مشخص کردن ضلع BC به کمک پرگار



۳ رسم عمود از B به کمک گونیا



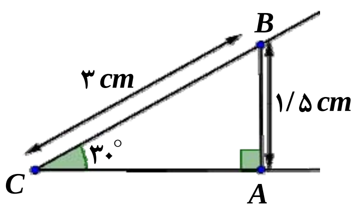
۴ اندازه‌گیری ضلع AB به کمک خط‌کش



۵ محاسبه‌ی $\sin ۳۰°$: $\sin ۳۰° = \frac{AB}{BC} = \frac{۲}{۴}$

حل ب)

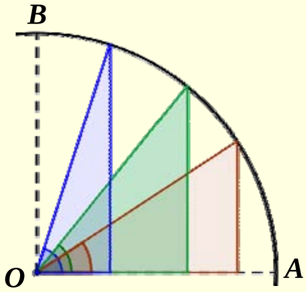
اگر قسمت الف را تکرار کنیم، مثلث ABC این گونه رسم می‌شود:



$$\sin ۳۰° = \frac{AB}{BC} = \frac{۱/۵}{۳} = \frac{۱}{۲}$$

تذکر

هرچه زاویه‌ی α از صفر تا ۹۰ درجه بزرگ‌تر گردد، مقدار $\sin\alpha$ نیز بزرگ‌تر می‌شود. همان‌طور که در دایره‌ی روبه‌رو مشخص شده، در تمامی مثلث‌های قائم‌الزاویه، طول وتر یکسان است و با زیاد شدن زاویه‌ی α، اندازه‌ی ضلع مقابل بزرگ‌تر می‌شود و در نتیجه مقدار $\sin\alpha$ بیشتر می‌شود.



شبیه سازی
کد: ۱۰۲

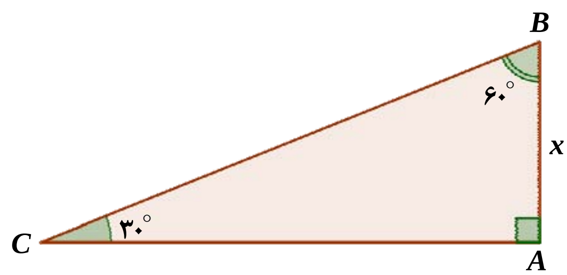
مثال

سینوس زوایای ۳۰° ، ۶۰° و ۴۵° را به روش هندسی به دست آورده و با هم مقایسه کنید.

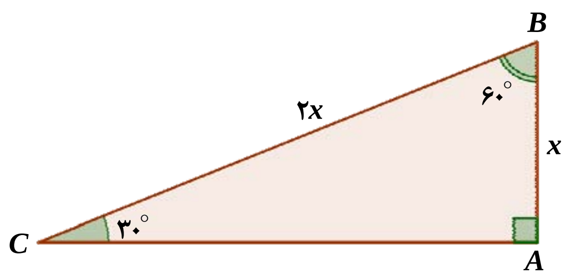
۴ دقیقه

حل)

۱ رسم مثلث قائم الزاویه‌ای با زاویه‌ی ۳۰°



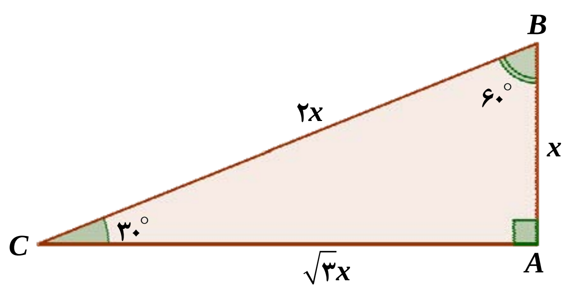
۲ در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌روی زاویه‌ی ۳۰° نصف وتر است.



به کمک رابطه‌ی فیثاغورث طول ضلع AC را برحسب x به دست می‌آوریم:

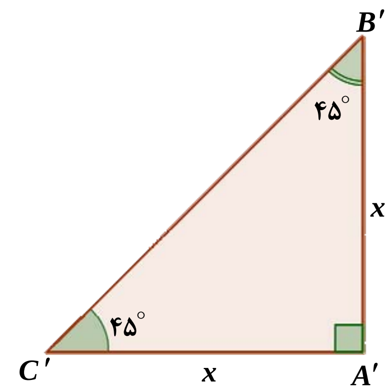
$$(۲x)^۲ = x^۲ + (AC)^۲ \Rightarrow ۴x^۲ = x^۲ + (AC)^۲ \Rightarrow (AC)^۲ = ۳x^۲ \Rightarrow AC = \sqrt{۳}x$$

۳ محاسبه‌ی $\sin ۳۰^\circ$ و $\sin ۶۰^\circ$



$$\sin ۳۰^\circ = \frac{x}{۲x} = \frac{۱}{۲} \quad \text{و} \quad \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}x}{۲x} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۱ رسم مثلث قائم الزاویه با زاویه‌ی ۴۵°

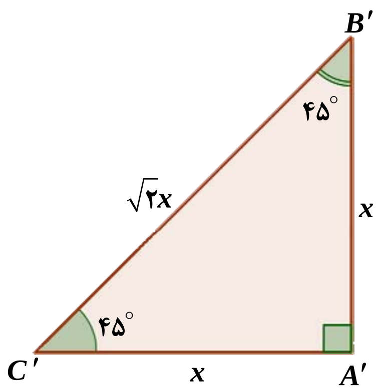


۲ به کمک رابطه‌ی فیثاغورث طول وتر را برحسب x می‌یابیم:

$$(BC)^۲ = x^۲ + x^۲$$
$$\Rightarrow (BC)^۲ = ۲x^۲ \Rightarrow BC = \sqrt{۲}x$$

۳ محاسبه‌ی $\sin ۴۵^\circ$

$$\sin ۴۵^\circ = \frac{x}{\sqrt{۲}x} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} \Rightarrow \sin ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$



پس مقایسه‌ی $\sin ۳۰^\circ$، $\sin ۴۵^\circ$ و $\sin ۶۰^\circ$ به این ترتیب خواهد بود:

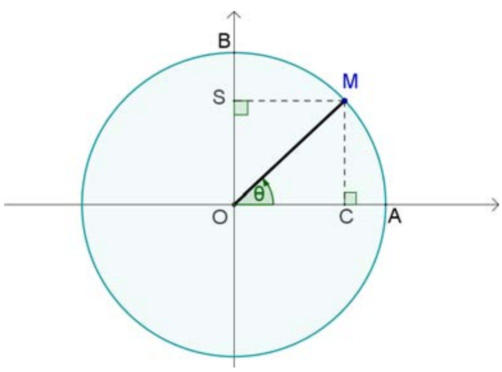
$$\frac{۱}{۲} < \frac{\sqrt{۲}}{۲} < \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \sin ۳۰^\circ < \sin ۴۵^\circ < \sin ۶۰^\circ$$

مثال

دایره‌ی روبه‌رو که به شعاع ۱ رسم شده است، معروف به دایره‌ی مثلثاتی است.

مقدار $\sin\theta$ برابر با طول کدام پاره‌خط است؟

(θ زاویه‌ی دلخواه است.)



۲ دقیقه

حل)

از نقطه‌ی M به دو پاره‌خط OA و OB عمود رسم می‌کنیم. در مثلث قائم الزاویه‌ی $\overset{\Delta}{OMC}$، مقدار $\sin\theta$ را حساب می‌کنیم:

$$\sin\theta = \frac{MC}{OM} = \frac{MC}{۱} = MC$$

در مستطیل $OSMC$،طول MC با طول OS برابر است.

$$\Rightarrow \sin\theta = OS$$

تذکر

همان‌طور که در دایره‌ی مثلثاتی مشخص است با افزایش زاویه‌ی θ، طول OS یعنی $\sin\theta$ بیشتر می‌شود. همچنین اگر θ به صفر نزدیک شود، سینوس آن به صفر و اگر به ۹۰° نزدیک شود، سینوس آن به عدد یک نزدیک می‌شود. پس داریم : $\sin ۹۰^\circ = ۱ \quad , \quad \sin ۰^\circ = ۰$.

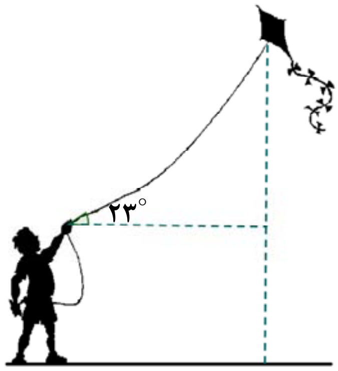
شبیه سازی

کد: ۱۰۳

مثال (۳ دقیقه)

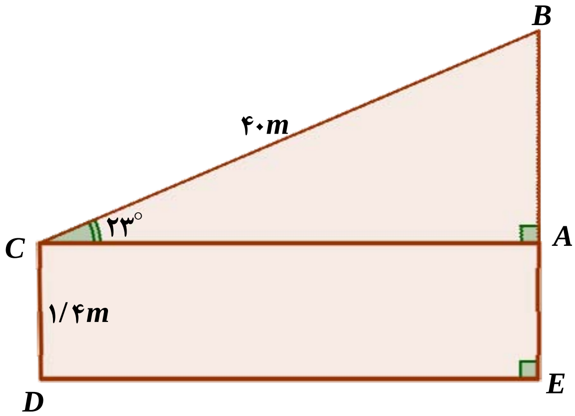
شخصی که دارای قد ۱ متر و ۴۰ سانتی‌متر است، بادبادکی به هوا فرستاده است. در لحظه‌ای که ۴۰ متر از نخ را رها کرده است، زاویه‌ی بین راستای نخ و سطح زمین ۲۳° می‌باشد. ارتفاع بادبادک از سطح زمین چقدر است؟

(فرض کنید نخ در امتداد مستقیم قرار دارد و $\sin ۲۳^\circ = ۰/۳۹$است.)



حل)

همان‌طور که در شکل روبه‌رو مشخص است برای محاسبه‌ی ارتفاع بادبادک از زمین باید ابتدا اندازه‌ی ضلع AB را محاسبه و سپس آن را با اندازه‌ی AE جمع کنیم :



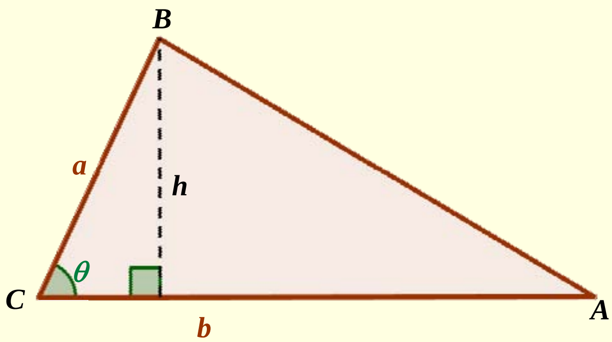
$$\sin ۲۳^\circ = \frac{AB}{BC} \text{(جاگذاری)} \Rightarrow ۰/۳۹ = \frac{AB}{۴۰} \Rightarrow AB = ۱۵/۶m$$

$$\Rightarrow BE = AB + AE \Rightarrow BE = ۱۵/۶ + ۱/۴ = ۱۷m$$

نکته

مساحت یک مثلث دلخواه با دو ضلع a و b که زاویه‌ی بین آن‌ها θ می‌باشد، از رابطه‌ی $S = \frac{۱}{۲}ab\sin\theta$ به دست می‌آید.

اثبات :



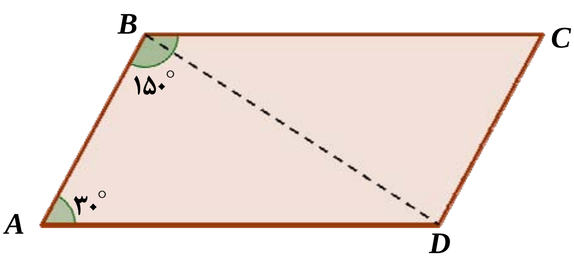
$$\sin\theta = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a\sin\theta$$

$$S = \frac{۱}{۲}b \times h \text{ (جاگذاری)} \Rightarrow S = \frac{۱}{۲}b \times a\sin\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \frac{۱}{۲}ab\sin\theta}$$

مثال (۳ دقیقه)

مساحت متوازی الاضلاعی را که اندازه‌ی دو ضلع مجاور آن ۵ و ۸ و زاویه‌ی بین این دو ضلع ۱۵۰° می‌باشد، به‌دست آورید.



حل)

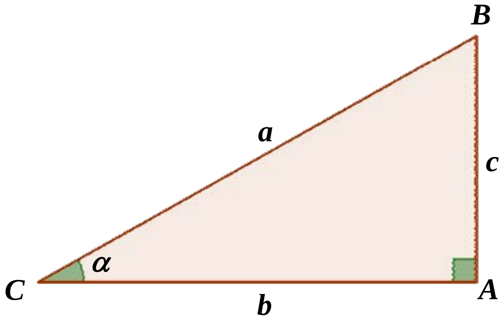
در شکل مقابل زاویه‌ی A مکمل زاویه‌ی B است. پس داریم:

$$S_{ABD} = \frac{۱}{۲}AB.AD\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۵ \times \frac{۱}{۲} = ۱۰$$

پس مساحت متوازی الاضلاع دو برابر مساحت مثلث و برابر ۲۰ می‌باشد.

۱–۲– نسبت مثلثاتی کسینوس

در مثلث قائم الزاویه‌ی $\overset{\Delta}{ABC}$ ($\hat{A} = ۹۰^\circ$)، کسینوس زاویه‌ی حاده‌ی α این گونه تعریف می‌شود:



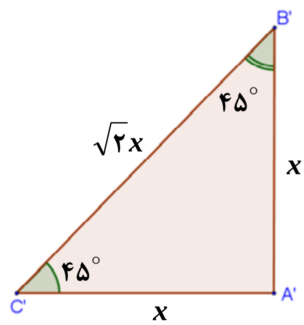
$$\cos\alpha = \frac{\text{اندازه‌ی ضلع مجاور به زاویه‌ی } \alpha}{\text{اندازه‌ی وتر}} = \frac{b}{a}$$

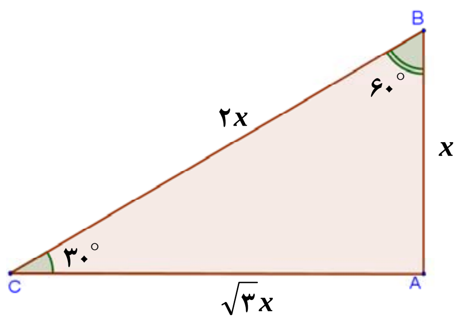
از آن‌جا که طول وتر از سایر اضلاع بزرگ‌تر است، حاصل تقسیم اندازه‌ی ضلع مجاور زاویه‌ی α بر اندازه‌ی وتر عددی کوچکتر از یک است:

$$\boxed{۰^\circ < \alpha < ۹۰^\circ \Rightarrow ۰ < \cos\alpha < ۱}$$

تذکر: در مورد زاویه‌ی مشخص و حاده‌ی α می‌توان گفت $\cos\alpha$ عددی ثابت است که فقط به α بستگی دارد.

مثال: به کمک دو شکل زیر، $\cos ۳۰^\circ$، $\cos ۴۵^\circ$ و $\cos ۶۰^\circ$ را محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید:





حل)

$$\overset{\Delta}{ABC}: \begin{cases} \cos ۳۰^\circ = \dfrac{\text{اندازه‌ی ضلع مجاور}}{\text{اندازه‌ی وتر}} = \dfrac{\sqrt{۳}x}{۲x} = \dfrac{\sqrt{۳}}{۲} \\[2ex] \cos ۶۰^\circ = \dfrac{\text{اندازه‌ی ضلع مجاور}}{\text{اندازه‌ی وتر}} = \dfrac{x}{۲x} = \dfrac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{A'B'C'}: \cos ۴۵^\circ = \frac{x}{\sqrt{۲}x} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

پس مقایسه‌ی $\cos ۳۰^\circ$ ، $\cos ۴۵^\circ$ و $\cos ۶۰^\circ$ به این ترتیب خواهد بود:

$$\cos ۳۰^\circ > \cos ۴۵^\circ > \cos ۶۰^\circ$$

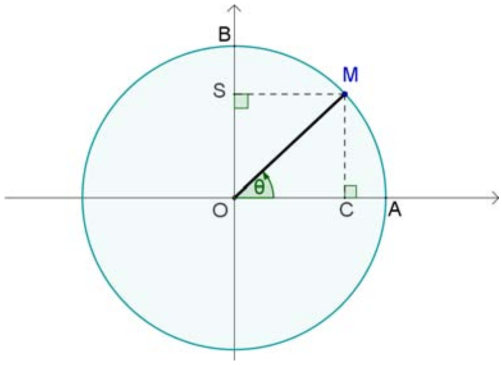
مثال

۳ دقیقه

دایره‌ی روبرو به شعاع ۱ رسم شده است.

الف) مقدار $\cos\theta$ برابر با طول کدام پاره‌خط است؟

ب) با افزایش θ از صفر تا ۹۰°، مقدار $\cos\theta$ چگونه تغییر می‌کند؟



حل)

$$\overset{\Delta}{OMC} : \cos\theta = \frac{OC}{OM} = \frac{OC}{۱} \Rightarrow \cos\theta = OC$$

در شکل مشخص است که با افزایش θ، طول پاره‌خط OC کاهش می‌یابد. وقتی θ در حدود صفر است، کسینوس آن تقریباً یک است و هنگامی که θ به ۹۰° می‌رسد، کسینوس آن کاهش یافته و تقریباً صفر است.

نکته

با افزایش زاویه‌ی θ از صفر تا ۹۰°، سینوس و کسینوس آن به شکل مقابل تغییر می‌کنند:

θ	۰°	۱°	$\cdots$	۸۹°	۹۰°
$\sin\theta$	۰		↗		۱
$\cos\theta$	۱		↘		۰

شبیه سازی

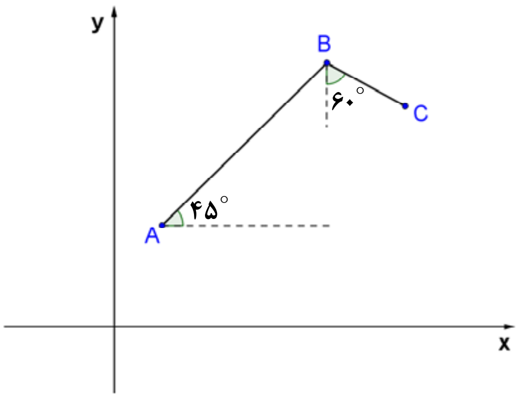
کد: ۱۰۴

مثال

۵ دقیقه

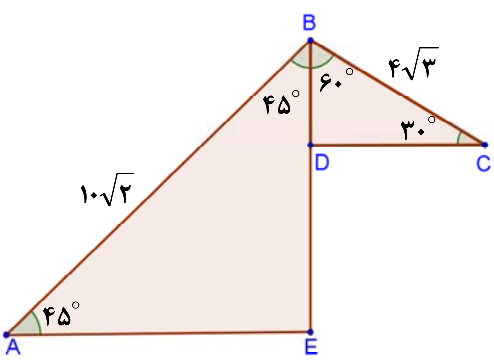
متحرکی از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B و سپس به نقطه‌ی C تغییر مکان داده است. این متحرک در راستای افقی چند کیلومتر جابجا شده است؟

($AB = ۱۰\sqrt{۲}\, km$ و $BC = ۴\sqrt{۳}\, km$)



حل)

هدف در این مسأله به دست آوردن طول AE و DC است:



$$\cos A = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AE = AB\cos A \quad \text{(جاگذاری)}$$

$$\Rightarrow AE = ۱۰\sqrt{۲} \times \cos ۴۵^\circ = ۱۰\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۱۰\, km$$

$$\cos C = \frac{DC}{BC} \Rightarrow DC = BC\cos C \quad \text{(جاگذاری)}$$

$$\Rightarrow DC = ۴\sqrt{۳} \times \cos ۳۰^\circ = ۴\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶\, km$$

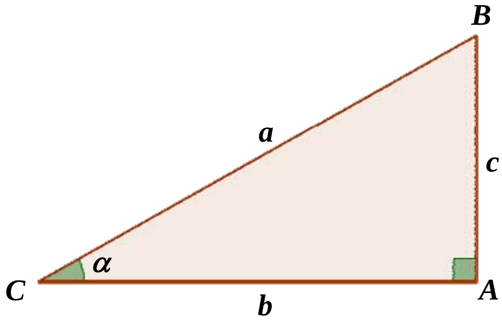
جواب نهایی $۱۰ + ۶ = ۱۶\, km$ می‌باشد.

۱–۳– نسبت‌های مثلثاتی تانژانت و کتانژانت

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $\overset{\Delta}{ABC}$ ($\hat{A} = ۹۰^\circ$)، زاویه‌ی حاده‌ی α را در نظر می‌گیریم. تانژانت و کتانژانت این زاویه این گونه تعریف می‌شود:

$$\tan\alpha = \frac{\text{اندازه‌ی ضلع مقابل}}{\text{اندازه‌ی ضلع مجاور}} = \frac{c}{b}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{اندازه‌ی ضلع مجاور}}{\text{اندازه‌ی ضلع مقابل}} = \frac{b}{c}$$



چون تانژانت و کتانژانت زاویه‌ی α، عکس یکدیگر می‌باشند، بیشتر از $\tan\alpha$ استفاده می‌شود و کتانژانت را بر حسب تانژانت بیان می‌کنند:

$$\boxed{\cot\alpha = \frac{۱}{\tan\alpha}}$$

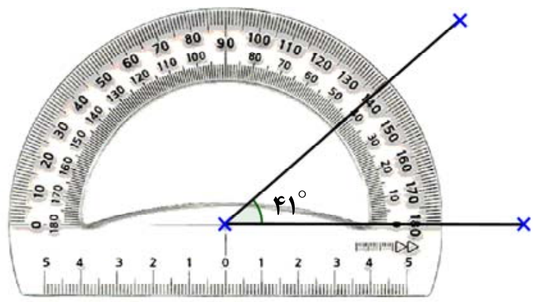
مثال

الف– به طور تقریبی $\tan ۴۱^\circ$ را محاسبه کنید.

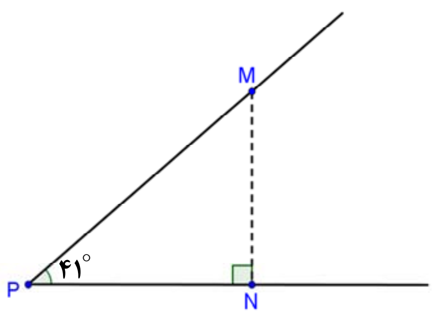
ب– زاویه‌ی حاده‌ای را مشخص کنید که تانژانت آن $\frac{۲}{۳}$ باشد.

حل الف)

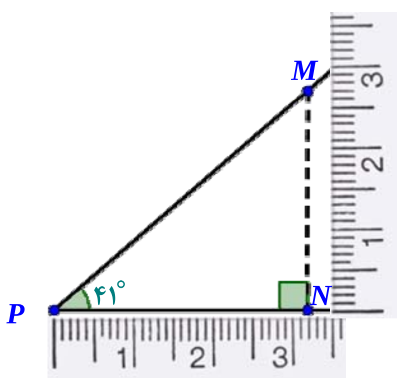
۱ رسم زاویه ۴۱° به کمک نقاله



۲ رسم عمود از نقطه‌ی دلخواه M



۳ اندازه‌گیری ضلع مقابل و مجاور



به طور تقریبی $MN = ۲/۸$ و $PN = ۳/۲$ اندازه‌گیری شده‌اند.

پس داریم:

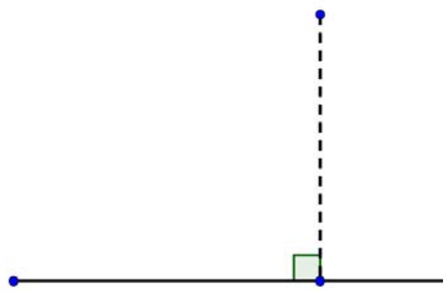
$$\tan ۴۱^\circ = \frac{MN}{PN}$$

$$\Rightarrow \tan ۴۱^\circ \simeq \frac{۲/۸}{۳/۲} \simeq ۰/۹$$

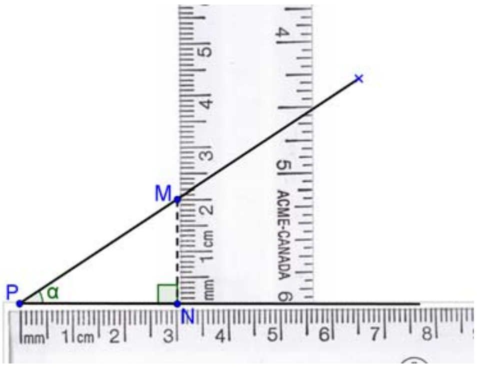
حل ب)

۱ رسم یک زاویه‌ی قائمه

۲ مشخص کردن اضلاع آن به طول‌های ۲ و ۳



$\tan\alpha = \frac{۲}{۳}$

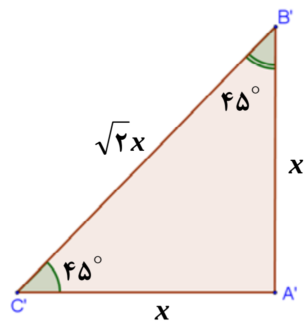


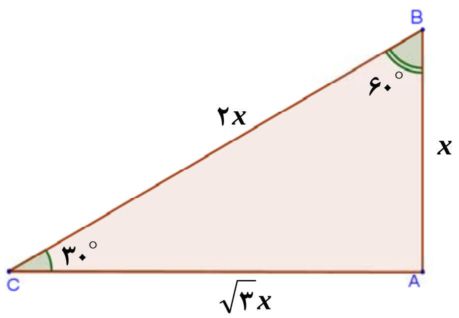
زاویه α را به کمک نقاله اندازه‌گیری می‌کنیم. جواب به طور تقریبی $۳۳/۶^\circ$ می‌باشد.

تانژانت و کتانژانت زوایای ۳۰°، ۴۵° و ۶۰° را از طریق هندسی به دست آورده و با هم مقایسه کنید.

حل)

از دو مثلث قائم الزاویه‌ی زیر کمک می‌گیریم:





$$\begin{cases} \tan ۴۵^\circ = \frac{x}{x} = ۱ \\ \cot ۴۵^\circ = \frac{۱}{۱} = ۱ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}x}{x} = \sqrt{۳} \\ \cot ۶۰^\circ = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan ۳۰^\circ = \frac{x}{\sqrt{۳}x} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \\ \cot ۳۰^\circ = \frac{۱}{\tan ۳۰^\circ} = \frac{۱}{\frac{۱}{\sqrt{۳}}} = \sqrt{۳} \end{cases}$$

پس مقایسه‌ی بین این نسبت‌ها این‌گونه خواهد شد:

$$\tan ۳۰^\circ < \tan ۴۵^\circ < \tan ۶۰^\circ$$

$$\cot ۳۰^\circ > \cot ۴۵^\circ > \cot ۶۰^\circ$$

تذکر

به کمک اغلب ماشین حساب‌ها، می‌توان نسبت‌های مثلثاتی سینوس، کسینوس و تانژانت را محاسبه کرد. فقط باید دقت داشت که ابتدا ماشین حساب در وضعیت درجه قرار گیرد. زیرا واحدهای دیگری نیز برای تعیین زاویه استفاده می‌شود. برای نمونه داریم:

$$\sin ۳۰^\circ = ۰/۵ \,,\, \sin ۴۳^\circ \simeq ۰/۶۸ \,,\, \sin ۸۸^\circ \simeq ۰/۹۹$$

$$\cos ۳۰^\circ = ۰/۸۶ \,,\, \cos ۴۳^\circ \simeq ۰/۷۳ \,,\, \cos ۸۸^\circ \simeq ۰/۰۳$$

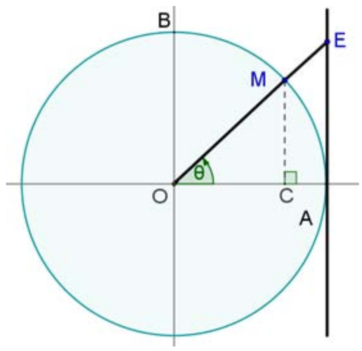
$$\tan ۳۰^\circ \simeq ۰/۵۷ \,,\, \tan ۴۳^\circ \simeq ۰/۹۳ \,,\, \tan ۸۸^\circ \simeq ۲۸/۶۳$$

شبیه سازی
کد: ۱۰۵

مثال

۳ دقیقه

دایره‌ی روبرو به شعاع ۱ رسم شده است. (دایره مثلثاتی)



الف) مقدار $\tan\theta$ برابر با طول کدام پاره‌خط است؟

ب) با افزایش θ از صفر تا ۹۰°، $\tan\theta$ چگونه تغییر می‌کند؟

ج) در مورد $\tan ۰^\circ$ و $\tan ۹۰^\circ$ چه نظری دارید؟

حل الف)

$$\overset{\Delta}{OAE} : \tan\theta = \frac{AE}{OA} = \frac{AE}{۱} \Rightarrow \tan\theta = AE$$

حل ب)

در شکل مشخص است که با افزایش θ از صفر تا ۹۰°، طول AE افزایش می‌یابد.

حل ج)

ابتدا که $\theta = ۰$ است، طول پاره‌خط AE صفر است، یعنی $\tan ۰^\circ = ۰$ و همین‌طور که زاویه بزرگتر می‌شود و به ۹۰ درجه نزدیک تر می‌شود، $\tan\theta$ افزایش پیدا می‌کند. اما دقیقاً در زاویه‌ی ۹۰°، امتداد OM، خط AE را قطع نمی‌کند و به همین دلیل $\tan ۹۰^\circ$ تعریف نشده می‌باشد.

شبیه سازی
کد: ۱۰۶

توجه:

از آن‌جا که مقدار $\tan\theta$ وقتی θ نزدیک ۹۰° است، عدد بزرگی است، $\tan ۹۰^\circ$ را بی‌نهایت نیز می‌خوانند و باعلامت ∞ نشان می‌دهند. توجه کنید:

$$\tan ۸۰^\circ \simeq ۵/۷ \;,\; \tan ۸۷^\circ \simeq ۱۹/۱ \;,\; \tan ۸۹/۸^\circ \simeq ۲۸۶/۵ \;,\; \tan ۹۰^\circ = \infty$$ (تعریف نشده)

یادگیری مقادیر نسبت‌های مثلثاتی ۰°، ۳۰°، ۴۵°، ۶۰° و ۹۰° الزامی است. پیشنهاد می کنیم جدول مثلثاتی روبرو را به طور دقیق یاد بگیرید.

دومطلب زیر به یادگیری این جدول کمک می کند:

۱- یادگیری دو ردیف سینوس و تانژانت کافی است. می توان کسینوس و کتانژانت را از روی این دو به دست آورد.

۲- مقادیر سینوس و تانژانت هر دو در حال افزایش می‌باشند.

α	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°
$\sin\alpha$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱
$\cos\alpha$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
$\tan\alpha$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف نشده
$\cot\alpha$	تعریف نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰

مثال

حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

۳ دقیقه

$$۱)\ \sin ۶۰^\circ - ۲\sin ۳۰^\circ + \tan ۳۰^\circ \tan ۶۰^\circ \qquad ۲)\ \frac{۲\tan ۴۵^\circ}{۱+۲\cos ۶۰^\circ}$$

حل)

می‌توانیم بدون استفاده از جدول جاگذاری کنیم:

$$۱)\ \frac{\sqrt{۳}}{۲}-(۲\times\frac{۱}{۲})+(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times\sqrt{۳})=\frac{\sqrt{۳}}{۲}-۱+۱=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$۲)\ \frac{۲\times۱}{۱+(۲\times\frac{۱}{۲})}=\frac{۲}{۱+۱}=\frac{۲}{۲}=۱$$

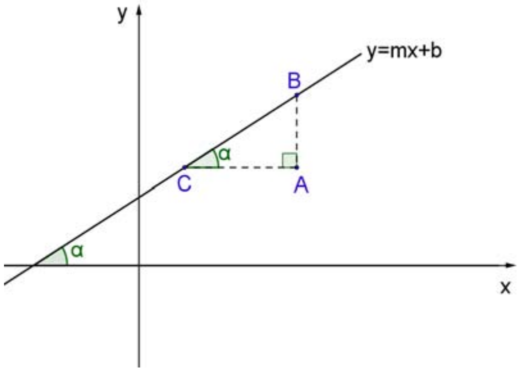
ابو جعفر محمد بن موسی خوارزمی

خوارزمی متولد۷۸۰ میلادی در خوارزم و مؤلف کتاب‌های متعدد در ریاضیات و نجوم است. شهرت علمی خوارزمی مربوط به کارهایی است که در ریاضیات مخصوصاً در رشته‌ی جبر انجام داده است. به موجب تلاش‌های این دانشمند اصطلاح الگوریتم که لاتین شده‌ی نام وی است به زبان ریاضی افزوده شد. او در کتاب «حساب‌الهند» دستگاه شمارش هندی را توضیح داده است. این کتاب یکی از آثاری بود که آشنایی اروپای غربی را با دستگاه مکانی اعشاری موجب شد. کتاب دیگری از خوارزمی که مغرب زمین از طریق ترجمه‌ی لاتین با آن آشنا شد و متن عربی آن موجود است، کتاب «حساب الجبر و المقابله» می‌باشد. او موفق به اندازه‌گیری یک درجه از قوس نصف‌النهار شد. خدمت شایان دیگر خوارزمی به جهان علم این است که وی حساب هندی را در دنیای متمدن انتشار داد و اروپائیان را با استعمال صفر برای نشان دادن مرتبه‌ی خالی آشنا ساخت. برای نشان دادن مرتبه‌ی خالی آشنا ساخت. خوارزمی در سایر رشته‌های علوم و مخصوصاً نجوم هم کارهای جالب و سودمندی انجام داد و نقشه‌های جغرافیایی بطلمیوس را اصلاح کرد. خوارزمی در حدود سال ۸۴۸ میلادی درگذشت.

۱–۴– رابطه‌ی بین شیب خط و تانژانت

خط روبرو به معادله $y = mx + b$ را در نظر بگیرید. m شیب این خط است که نشان دهنده‌ی نسبت میزان افزایش ارتفاع به اندازه‌ی جابه‌جایی در راستای افقی است:

$$m = \frac{AB}{AC}$$



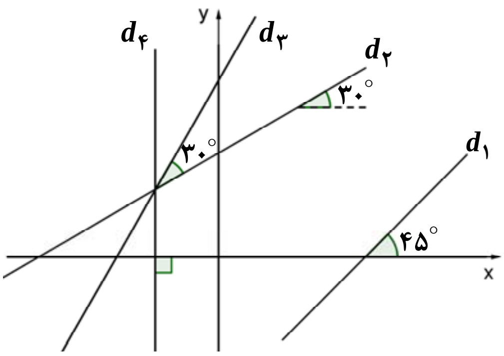
از طرفی در مثلث ABC، این نسبت همان $\tan\alpha$ می‌باشد. پس می‌توان گفت:

$$m = \tan\alpha = \frac{AB}{AC}$$ (α زاویه‌ی خط با جهت مثبت محور طول‌ها می‌باشد.)

مثال

در شکل مقابل شیب هر یک از خطوط $d_۱$ تا $d_۴$ را تعیین کنید.

۳ دقیقه



حل)

زاویه‌ی $d_۱$ با جهت مثبت محور طول ها : $\alpha = ۴۵^\circ \Rightarrow m_۱ = \tan ۴۵^\circ = ۱$

زاویه‌ی $d_۲$ با جهت مثبت محور طول ها : $\alpha = ۳۰^\circ \Rightarrow m_۲ = \tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

زاویه‌ی $d_۳$ با جهت مثبت محور طول ها : $\alpha = ۳۰ + ۳۰ = ۶۰^\circ \Rightarrow m_۳ = \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$

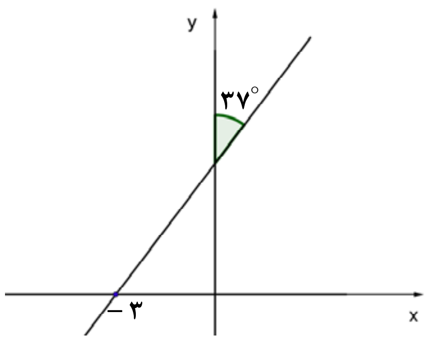
زاویه‌ی $d_۴$ با جهت مثبت محور طول ها : $\alpha = ۹۰^\circ \Rightarrow m_۴ = \tan ۹۰^\circ = \infty$ (تعریف نشده)

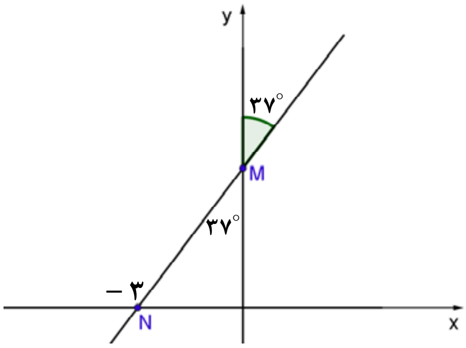
مثال

خط روبرو از نقطه $A(۶,a)$ می‌گذرد. مقدار a را به دست آورید.

$(\tan ۳۷^\circ = \frac{۳}{۴}$ و $\tan ۵۳^\circ = \frac{۴}{۳})$

۳ دقیقه





حل)

این خط از نقطه‌ی $(-۳,۰)$ می‌گذرد، کافی است شیب خط را به دست آوریم و معادله‌ی خط را مشخص کنیم:

$$\hat{M}+\hat{N}=۹۰^\circ \Rightarrow ۳۷^\circ+\hat{N}=۹۰^\circ \Rightarrow \hat{N}=۵۳^\circ$$

$$m=\tan N=\tan ۵۳^\circ=\frac{۴}{۳}$$

معادله‌ی خط:

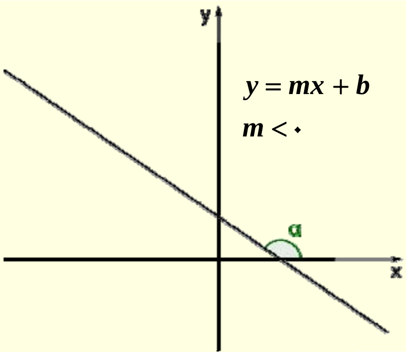
$$y-y_۰=m(x-x_۰)\Rightarrow y-۰=\frac{۴}{۳}(x+۳)\Rightarrow y=\frac{۴}{۳}x+۴$$

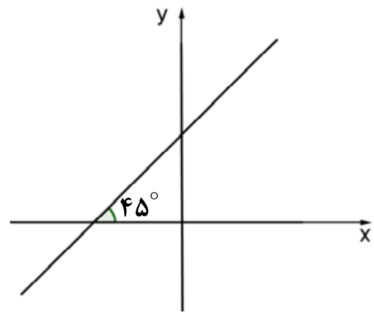
طول نقطه‌ی A را در معادله‌ی خط جاگذاری می‌کنیم تا عرض آن یعنی a به دست آید:

$$y=(\frac{۴}{۳}\times ۶)+۴\Rightarrow y=۸+۴=۱۲\Rightarrow a=۱۲$$

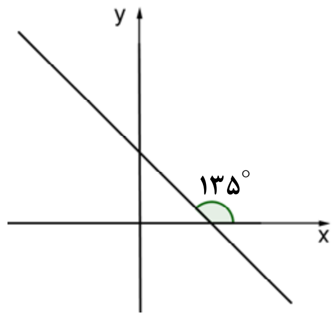
حتی در مواردی که شیب خط منفی باشد نیز رابطه‌ی $m=\tan(\alpha)$ صحیح است. در این صورت زاویه‌ی خط با جهت مثبت محور طول‌ها (α) منفرجه می‌باشد. در فصل بعدی خواهیم دید که تانژانت زاویه منفرجه عددی منفی است.

به نمونه‌های زیر توجه کنید:

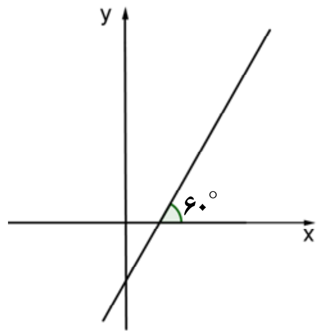




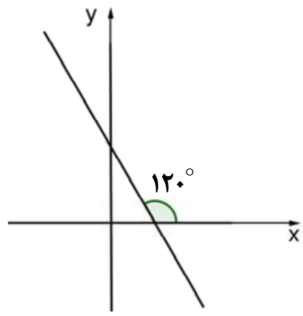
$$m=\tan ۴۵^\circ=۱$$



$$m=\tan ۱۳۵^\circ=-\tan ۴۵^\circ=-۱$$



$$m=\tan ۶۰^\circ=\sqrt{۳}$$



$$m=\tan ۱۲۰^\circ=-\tan ۶۰^\circ=-\sqrt{۳}$$

شبیه سازی

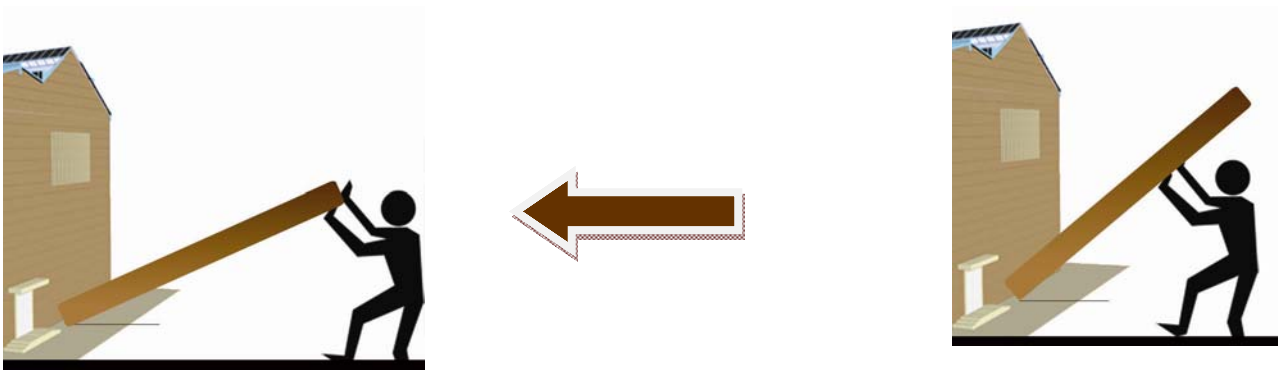
کد: ۱۰۷

۱–۵– چند مسأله‌ی کاربردی

مثال

۵ دقیقه

فردی با قد یک متر و پنجاه سانتی‌متر الواری به طول $۳۹۰cm$ را که یک سر آن به دیوار تکیه داده شده است ، با زاویه‌ی ۴۵ درجه بلند کرده است. فرد از دیوار دور می‌شود تا جایی که سر دیگر الوار تا قد او پایین بیاید. او چقدر از دیوار دور شده است؟

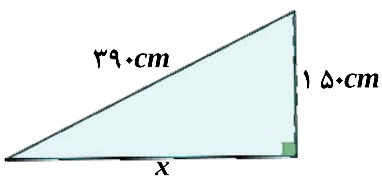


حل)

در حالت اول:

$$\tan ۴۵^\circ = \frac{\text{طول قد فرد}}{\text{فاصله‌ی فرد از دیوار}} = \frac{۱۵۰cm}{\text{فاصله‌ی فرد از دیوار}} \quad \text{فاصله‌ی فرد از دیوار} = ۱۵۰cm$$

در حالت دوم:



$x =$ فاصله فرد از دیوار

فیثاغورث : $x^۲ + ۱۵۰^۲ = ۳۹۰^۲ \Rightarrow x^۲ = ۱۲۹۶۰۰ \Rightarrow x = ۳۶۰cm$

پس مقدار جابجایی فرد برابر با $(۳۶۰ - ۱۵۰ = ۲۱۰cm)$ می‌باشد.

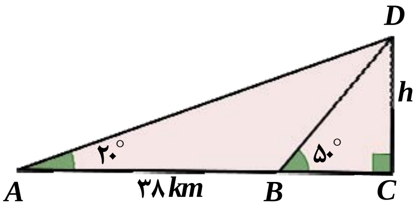
مثال

۵ دقیقه

دو پدافند A و B که در فاصله‌ی ۳۸ کیلومتری از هم قرار دارند، یک هواپیمای جنگنده را با زاویه‌های ۲۰° و ۵۰° نسبت به افق مورد شلیک قرار می‌دهند. ارتفاع پرواز این جنگنده چند کیلومتر است؟

حل)

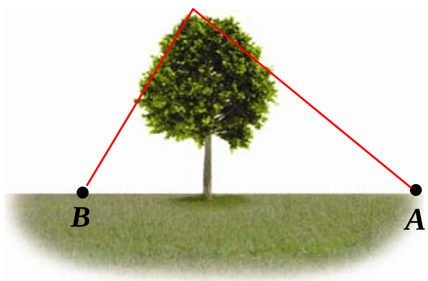
هدف در این مسأله به دست آوردن h است.



$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ADC}: \tan ۲۰^\circ = \dfrac{h}{AC} \Rightarrow AC = \dfrac{h}{\tan ۲۰^\circ} \\ \overset{\Delta}{BDC}: \tan ۵۰^\circ = \dfrac{h}{BC} \Rightarrow BC = \dfrac{h}{\tan ۵۰^\circ} \end{cases}$$ (جاگذاری) $$\Rightarrow AB = AC - BC \Rightarrow ۳۸km = \frac{h}{\tan ۲۰^\circ} - \frac{h}{\tan ۵۰^\circ}$$

$$\Rightarrow ۳۸ = h\left(\frac{۱}{\tan ۲۰^\circ} - \frac{۱}{\tan ۵۰^\circ}\right)$$ (به کمک ماشین حساب) $$\Rightarrow ۳۸ = h \times ۱/۹ \Rightarrow h = \frac{۳۸}{۱/۹} = ۲۰cm$$

ارتفاع جنگنده از سطح زمین $۲۰km$ است.

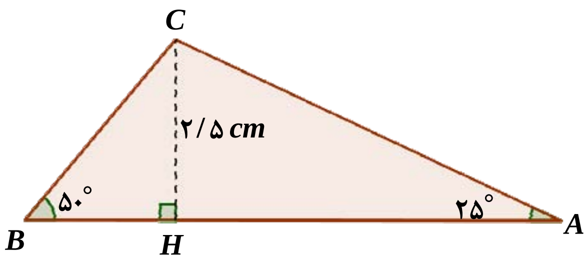


مثال در شکل مقابل درختی به ارتفاع $۲/۵$ متر ازنقطه‌ی A با زاویه‌ی ۲۵° و از نقطه‌ی B با زاویه‌ی ۵۰° دیده می‌شود. فاصله‌ی دو نقطه از یکدیگر چقدر است؟

($\tan ۵۰^\circ = ۱/۱۹$ و $\tan ۲۵^\circ = ۰/۴۷$)

حل)

برای به دست آوردن AB ، کافی‌است در دو مثلث ACH و BCH اضلاع AH و BH را به دست آورده و با هم جمع کنیم:



$$\begin{cases} \overset{\Delta}{AHC}: \tan ۲۵^\circ = \dfrac{CH}{AH} \Rightarrow ۰/۴۷ = \dfrac{۲/۵}{AH} \Rightarrow AH = ۵/۳۲m \\ \overset{\Delta}{BHC}: \tan ۵۰^\circ = \dfrac{CH}{BH} \Rightarrow ۱/۱۹ = \dfrac{۲/۵}{BH} \Rightarrow BH = ۲/۱۰m \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB = AH + BH = ۵/۳۲ + ۲/۱۰ = ۷/۴۲m$$

پس فاصله‌ی دو نقطه از هم $۷/۴۲m$ است.

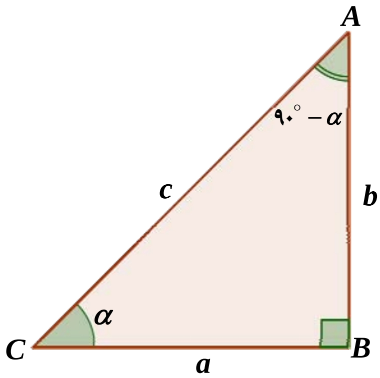
۱–۶– نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم

دو زاویه را که مجموع آن‌ها ۹۰° باشد، متمم گویند. مانند ۳۰° و ۶۰° یا ۱۵° و ۷۵°.

در حالت کلی دو زاویه‌ی α و $۹۰^\circ - \alpha$ متمم هستند. در مورد این زوایا می‌توان گفت که سینوس یکی برابر با کسینوس دیگری و تانژانت یکی برابر با کتانژانت دیگری است. توجه کنید:

$$\tan(۹۰-\alpha)=\frac{a}{b}=\cot(\alpha)$$
$$\cot(۹۰-\alpha)=\frac{b}{a}=\tan(\alpha)$$

$$\sin(۹۰-\alpha)=\frac{a}{c}=\cos(\alpha)$$
$$\cos(۹۰-\alpha)=\frac{b}{c}=\sin(\alpha)$$



به عنوان نمونه داریم:

$$\sin ۷۵^\circ=\sin(۹۰^\circ-۱۵^\circ)=\cos(۱۵^\circ)$$
$$\cot ۶۰^\circ=\cot(۹۰^\circ-۳۰^\circ)=\tan(۳۰^\circ)$$
$$\cos ۱۰^\circ=\cos(۹۰^\circ-۸۰^\circ)=\sin(۸۰^\circ)$$

درستی این روابط را با ماشین حساب بررسی کنید.

حاصل عبارت $A=\tan ۲۰^\circ\times\tan ۴۵^\circ\times\tan ۷۰^\circ$ را به دست آورید.

حل)

$$\tan ۷۰^\circ=\tan(۹۰^\circ-۲۰^\circ)=\cot ۲۰^\circ$$
$$\Rightarrow \tan ۲۰^\circ\times\tan ۷۰^\circ=\tan ۲۰^\circ\times\cot ۲۰^\circ=\tan ۲۰^\circ\times\frac{۱}{\tan ۲۰^\circ}=۱$$
$$A=\tan ۲۰^\circ\times\tan ۴۵^\circ\times\tan ۷۰^\circ=(\tan ۲۰^\circ\times\tan ۷۰^\circ)\times\tan ۴۵^\circ=۱\times۱=۱$$

سه عدد $\sin ۲۰^\circ$، $\cos ۱۰^\circ$ و $\tan ۸۰^\circ$ را باهم مقایسه کنید.

حل)

در زوایای حاده، زاویه‌ی بزرگ‌تر سینوس بزرگ‌تری دارد.

$$\begin{cases}\cos ۱۰^\circ=\cos(۹۰-۸۰^\circ)=\sin ۸۰^\circ\\ \sin ۸۰^\circ>\sin ۲۰^\circ\end{cases}\Rightarrow \cos ۱۰^\circ>\sin ۲۰^\circ$$

حال $\tan ۸۰^\circ$ را با $\sin ۸۰^\circ$ مقایسه می‌کنیم:

$\tan ۸۰^\circ$ از $\tan ۴۵^\circ=۱$ بزرگ‌تر است، در صورتی که $\sin ۸۰^\circ$ از یک کوچک‌تر است، پس $\tan ۸۰^\circ>\sin ۸۰^\circ$ خواهد بود. پس داریم:

$$\tan ۸۰^\circ>\sin ۸۰^\circ>\sin ۲۰^\circ$$
$$\tan ۸۰^\circ>\cos ۱۰^\circ>\sin ۲۰^\circ$$

۱–۷– روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

به مثال زیر توجه کنید:

مثال

در محاسبه‌ی $۲\sin\alpha$، $\sin(۲\alpha)$، $\sin(\alpha^{۲})$ و $\sin^{۲}\alpha$ چه تفاوتی وجود دارد؟ با یک مثال عددی تفاوت را نشان دهید.

۳ دقیقه

حل)

در محاسبه‌ی $۲\sin\alpha$: ابتدا $\sin\alpha$ محاسبه شده و حاصل در ۲ ضرب می‌شود.

در محاسبه‌ی $\sin(۲\alpha)$: ابتدا ۲α محاسبه شده و سپس سینوس آن به دست می‌آید.

در محاسبه‌ی $\sin(\alpha^{۲})$: ابتدا $\alpha^{۲}$ محاسبه شده و سپس سینوس آن به دست می‌آید.

در محاسبه‌ی $\sin^{۲}(\alpha)$: ابتدا $\sin\alpha$ محاسبه شده و سپس مربع آن به دست می‌آید.

به عنوان مثال عددی $\alpha = ۹^\circ$ را بررسی می‌کنیم:

$$۲\sin\alpha = ۲\sin ۹^\circ \simeq ۰/۳۱۲ \quad \text{و} \quad \sin ۲\alpha = \sin ۱۸^\circ \simeq ۰/۳۰۹$$

$$\sin\alpha^{۲} = \sin ۸۱^\circ \simeq ۰/۹۸۸ \quad \text{و} \quad \sin^{۲}\alpha = (\sin ۹^\circ) \simeq ۰/۰۲۴$$

بین نسبتهای مثلثاتی روابطی وجود دارد که در این بخش با چند رابطه‌ی معروف و کاربرد آنها در حل مسائل آشنا می‌شویم:

۱) $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	۲) $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
۳) $\tan\alpha.\cot\alpha = ۱$	۴) $\sin^{۲}\alpha + \cos^{۲}\alpha = ۱$
۵) $۱+\tan^{۲}\alpha = \dfrac{۱}{\cos^{۲}\alpha}$	۶) $۱+\cot^{۲}\alpha = \dfrac{۱}{\sin^{۲}\alpha}$

اثبات رابطه‌ی (۱) :

$$\tan\alpha = \frac{\text{اندازه‌ی ضلع مقابلِ } \alpha}{\text{اندازه‌ی ضلع مجاورِ } \alpha} \xrightarrow{\text{(صورت و مخرج تقسیم بر اندازه‌ی وتر)}} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\dfrac{\text{اندازه‌ی ضلع مقابل}}{\text{اندازه‌ی وتر}}}{\dfrac{\text{اندازه‌ی ضلع مجاور}}{\text{اندازه‌ی وتر}}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

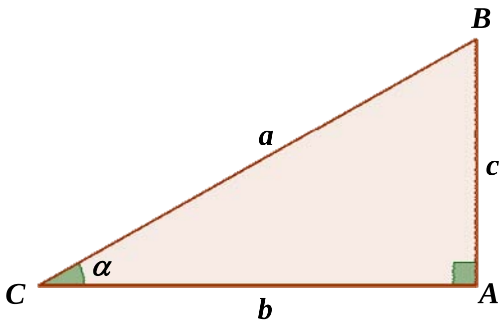
به راحتی می‌توان رابطه‌ی (۲) را نیز به همین ترتیب اثبات کرد.

اثبات رابطه‌ی (۳):

$$\tan\alpha.\cot\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \times \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = ۱$$

اثبات رابطه‌ی (۴):

به مثلث قائم الزاویه‌ی روبرو توجه کنید:



$$\sin\alpha=\frac{c}{a} \quad \text{و} \quad \cos\alpha=\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=\left(\frac{c}{a}\right)^{۲}+\left(\frac{b}{a}\right)^{۲}=\frac{c^{۲}}{a^{۲}}+\frac{b^{۲}}{a^{۲}}=\frac{b^{۲}+c^{۲}}{a^{۲}}\ (\text{فیثاغورث}) \Rightarrow \sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=\frac{a^{۲}}{a^{۲}}=۱$$

به نمونه‌های زیر توجه کنید:

$$\sin ۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \cos ۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \sin^{۲} ۴۵^\circ+\cos^{۲} ۴۵^\circ=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱$$

$$\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}, \cos ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \sin^{۲} ۳۰^\circ+\cos^{۲} ۳۰^\circ=\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}=۱$$

اثبات رابطه‌ی (۵):

$$۱+\tan^{۲}\alpha=۱+\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^{۲}=۱+\frac{\sin^{۲}\alpha}{\cos^{۲}\alpha}=\frac{\cos^{۲}\alpha+\sin^{۲}\alpha}{\cos^{۲}\alpha}=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}$$

رابطه‌ی (۶) نیز به همین ترتیب قابل اثبات است.

با فرض $\tan\theta=۵$، حاصل عددی $A=\frac{۳\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta-۴\cos\theta}$ را به دست آورید.

حل)

(روش اول)

$$\tan\theta=۵ \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=۵ \Rightarrow \sin\theta=۵\cos\theta \ (\text{جاگذاری در } A)$$

$$\Rightarrow A=\frac{۳(۵\cos\theta)-\cos\theta}{۵\cos\theta-۴\cos\theta}=\frac{۱۵\cos\theta-\cos\theta}{\cos\theta}=\frac{۱۴\cos\theta}{\cos\theta}=۱۴$$

(روش دوم)

صورت و مخرج کسر را بر $\cos\theta$ تقسیم می‌کنیم:

$$A=\frac{\frac{۳\sin\theta-\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta-۴\cos\theta}{\cos\theta}}=\frac{۳\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-۴\frac{\cos\theta}{\cos\theta}}=\frac{۳\tan\theta-۱}{\tan\theta-۴}=\frac{(۳\times ۵)-۱}{۵-۴}=۱۴$$

عبارت‌های زیر را به صورت مربع یک عبارت مثلثاتی بنویسید.

۱) $\tan^{۲}\alpha+\cot^{۲}\alpha-۲$

۲) $(۱+\tan\alpha)^{۲}+(۱+\cot\alpha)^{۲}+۱$

حل ۱)

$$\tan^2\alpha+\cot^2\alpha-2=(\tan\alpha)^2+(\cot\alpha)^2-2\times\tan\alpha\times\cot\alpha \ \text{(اتحاد مربع دو جمله‌ای)} =(\tan\alpha-\cot\alpha)^2$$

حل ۲)

$$(1+\tan\alpha)^2+(1+\cot\alpha)^2+1=1+2\tan\alpha+\tan^2\alpha+1+2\cot\alpha+\cot^2\alpha+1$$

$$=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+1+2\tan\alpha+2\cot\alpha+2$$

$$=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+1+2(\tan\alpha\times1)+2(\cot\alpha\times1)+2(\tan\alpha\times\cot\alpha)\ \text{(اتحاد مربع سه جمله‌ای)}$$

$$=(\tan\alpha+\cot\alpha+1)^2$$

مثال (۵ دقیقه)

اگر سینوس زاویه‌ی حاده‌ی θ برابر با $\frac{2}{5}$ باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را محاسبه کنید.

حل)

$$\begin{cases}\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\\ \sin\theta=\frac{2}{5}\end{cases}\Rightarrow \frac{4}{25}+\cos^2\theta=1$$

$$\Rightarrow\cos^2\theta=\frac{21}{25}\Rightarrow\cos\theta=\frac{\sqrt{21}}{5}\ \text{ یا }\ \cos\theta=\frac{-\sqrt{21}}{5}\ \text{(غیرقابل قبول)}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{21}}{5}}=\frac{2}{\sqrt{21}}\times\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{21}}=\frac{2\sqrt{21}}{21}$$

$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{\sqrt{21}}{5}}{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{21}}{2}$$

مثال (۳ دقیقه)

اگر $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$ باشد، مقدار عبارت $\sin\theta\cos\theta$ چقدر است؟

حل)

طرفین فرض را به توان ۲ می‌رسانیم تا عبارت $\sin\theta\cos\theta$ ظاهر شود:

$$\Rightarrow(\sin\theta-\cos\theta)^2=\frac{1}{9}\Rightarrow\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}\Rightarrow2\sin\theta\cos\theta=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}\Rightarrow\sin\theta\cos\theta=\frac{\frac{8}{9}}{2}=\frac{4}{9}$$

مثال (۵ دقیقه)

حاصل عبارات زیر را به ساده‌ترین صورت درآورید.

۱) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$

۲) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$

حل ۱)

از اتحاد فرعی $a^{۲}+b^{۲}=(a+b)^{۲}-۲ab$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin^{۴}\alpha+\cos^{۴}\alpha=(\sin^{۲}\alpha)^{۲}+(\cos^{۲}\alpha)^{۲}=((\sin\alpha)^{۲}+(\cos\alpha)^{۲})^{۲}-۲(\sin^{۲}\alpha)(\cos^{۲}\alpha)=۱-۲\sin^{۲}\alpha\cos^{۲}\alpha$$

حل ۲)

از اتحاد فرعی $a^{۳}+b^{۳}=(a+b)^{۳}-۳ab(a+b)$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin^{۶}\alpha+\cos^{۶}\alpha=(\sin^{۲}\alpha)^{۳}+(\cos^{۲}\alpha)^{۳}=(\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha)^{۳}-۳\sin^{۲}\alpha\cos^{۲}\alpha(\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha)$$

$$=۱-۳\sin^{۲}\alpha\cos^{۲}\alpha$$

مثال — ۳ دقیقه

درستی رابطه‌ی $\frac{۲}{\sin^{۲}\theta}-\frac{۱}{\sin^{۴}\theta}=۱-\cot^{۴}\theta$ را اثبات کنید.

حل)

از سمت چپ شروع به ساده کردن می‌کنیم تا به سمت راست برسیم:

سمت چپ: $\frac{۲}{\sin^{۲}\theta}-\frac{۱}{\sin^{۴}\theta}=\frac{۱}{\sin^{۲}\theta}(۲-\frac{۱}{\sin^{۲}\theta})=(۱+\cot^{۲}\theta)(۲-(۱+\cot^{۲}\theta))$

$=(۱+\cot^{۲}\theta)(۱-\cot^{۲}\theta)=۱-\cot^{۴}\theta$: سمت راست

مثال — ۳ دقیقه

زاویه‌ی حاده‌ی θ در رابطه‌ی $۵\sin^{۲}\theta+۲\cos^{۲}\theta+۲\sin\theta\cos\theta=۵$ صدق می‌کند. $\tan\theta$ چقدر است؟

حل)

طرفین رابطه را بر $\cos^{۲}\theta$ تقسیم می‌کنیم:

$$۵\frac{\sin^{۲}\theta}{\cos^{۲}\theta}+\frac{۲\cos^{۲}\theta}{\cos^{۲}\theta}+۲\frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos^{۲}\theta}=\frac{۵}{\cos^{۲}\theta}$$

$$\Rightarrow ۵\tan^{۲}\theta+۲+۲\tan\theta=۵(۱+\tan^{۲}\theta)\Rightarrow ۲+۲\tan\theta=۵\Rightarrow\tan\theta=\frac{۳}{۲}$$

مثال — ۳ دقیقه

اگر $\tan\beta=۳$ باشد، حاصل $\frac{\sin\beta}{۲۰\cos^{۳}\beta-\sin\beta}$ را به دست آورید.

حل)

صورت و مخرج کسر را بر $\cos^{۳}\beta$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\frac{\sin\beta}{\cos^{۳}\beta}}{۲۰\frac{\cos^{۳}\beta}{\cos^{۳}\beta}-\frac{\sin\beta}{\cos^{۳}\beta}}=\frac{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\times\frac{۱}{\cos^{۲}\beta}}{۲۰-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\times\frac{۱}{\cos^{۲}\beta}}=\frac{\tan\beta(۱+\tan^{۲}\beta)}{۲۰-\tan\beta(۱+\tan^{۲}\beta)}\ (\text{جاگذاری})$$

$$=\frac{۳\times۱۰}{۲۰-(۳\times۱۰)}=\frac{۳۰}{۲۰-۳۰}=\frac{۳۰}{-۱۰}=-۳$$