مقدمات و یادآوری

دانش‌آموزان ممتاز معمولاً مفاهیم و قوانین مجموعه‌ها را به سادگی درک می‌کنند. برای یادآوری مفاهیم مجموعه‌ها که در سال‌های گذشته مطرح شده، تعدادی مثال حل می‌کنیم و سپس مفاهیم کتاب درسی را مطرح کرده و در هر مورد به حل مثال‌های مربوط می‌پردازیم.

مثال ۱ مجموعه‌ی A را با اعضا و مجموعه‌ی B را با نمادهای ریاضی نمایش دهید.

$$A = \{x^۲ | x = \frac{y}{۲}, ۳y \in \mathbb{N}, x \leq ۱\} \qquad B = \{۳, ۶, ۱۲, ۲۴, \cdots\}$$

حل.

برای یافتن اعضای A، باید yهای مورد نظر را بنویسیم. $y : \frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}, ۱, \frac{۴}{۳}, \frac{۵}{۳}, \cdots$

حال xها را از روی yها با شرط $x \leq ۱$ تشکیل می‌دهیم. $x : \frac{۱}{۶}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۵}{۶}, ۱$

$$A = \{\frac{۱}{۳۶}, \frac{۱}{۹}, \frac{۱}{۴}, \frac{۴}{۹}, \frac{۲۵}{۳۶}, ۱\}$$

برای نوشتن مجموعه‌ی B توجه کنید که اگر اعضای مجموعه را بر ۳ تقسیم کنیم، اعداد حاصل، توانی از ۲ هستند.

$$B = \{۳ \times ۱, ۳ \times ۲, ۳ \times ۴, \cdots\} = \{۳ \times ۲^x | x \in \mathbb{W}\}$$ [۱]

مثال ۲ تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{۱, \{۱\}, \varnothing\}$ را بنویسید.

حل. زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی A عبارتند از:

زیرمجموعه‌ها: $\{\ \}, \{۱\}, \{\{۱\}\}, \{\varnothing\}, \{۱, \{۱\}\}, \{۱, \varnothing\}, \{\{۱\}, \varnothing\}, \{۱, \{۱\}, \varnothing\}$

لازم به یادآوری است که یک مجموعه‌ی n عضوی، ۲^n زیرمجموعه دارد. اثبات این موضوع را در فصل‌های بعدی خواهید دید. همان‌طور که در مثال بالا مشاهده کردید مجموعه‌ی سه عضوی A دارای ۸ زیرمجموعه است.

تذکر

دقت شود که مجموعه‌ی $\varnothing$ برابر تهی است و عضوی ندارد در حالی که مجموعه‌ی $\{\varnothing\}$ مجموعه‌ای است با یک عضو و عضو آن مجموعه‌ای تهی است. برای یک تمثیل ساده می‌توان مجموعه‌ی تهی را با یک جعبه‌ی خالی که چیزی در آن نیست و یک مجموعه مثل $\{\varnothing\}$ را می‌توان به عنوان جعبه‌ای که داخل آن یک جعبه‌ی خالی است تشبیه کرد. بدیهی است که جعبه‌ای حاوی یک جعبه‌ی خالی، دیگر خالی نیست.

مثال ۳ اگر به اعضای مجموعه‌ی A، دو عضو اضافه شود، به تعداد زیرمجموعه‌هایش ۴۸ واحد افزوده می‌شود. تعداد اعضای مجموعه‌ی A چندتاست؟

حل. اگر مجموعه‌ی A دارای n عضو باشد، آنگاه ۲^n زیرمجموعه خواهد داشت. بنابراین:

(تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی A) + ۴۸ = (تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی جدید که $n + ۲$ عضو دارد)

$$۲^{n+۲} = ۲^n + ۴۸ \Rightarrow ۲^{n+۲} - ۲^n = ۴۸ \Rightarrow ۲^n(۲^۲ - ۱) = ۴۸ \Rightarrow n = ۴$$

۱) برای مجموعه‌ی B می‌توان فرمول‌های دیگری یافت. در واقع جواب نوشته شده یکی از جواب‌هاست. دلیل این موضوع را در بخش الگو و دنباله خواهید دید.

مثال ٤ اگر $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ و $B = \{c, d, g\}$ باشند تعداد مجموعه‌هایی مانند X را بیابید که در رابطه‌ی $(A \cap B) \subseteq X \subseteq (A \cup B)$ صدق می‌کنند.

حل. مجموعه‌های $A \cup B$ و $A \cap B$ را تشکیل می‌دهیم.

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}, \qquad A \cap B = \{c, d\}$$

مجموعه‌ی X حتماً باید اعضای c و d را داشته باشد و نیز می‌تواند از اعضای $\{a, b, e, f, g\}$ عضو داشته باشد. یعنی تعداد Xهای متفاوت، همان تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی ۵ عضوی است.

$$\text{X تعداد مجموعه‌های} = ۲^۵ = ۳۲$$

مثال ۵ مجموعه‌ی $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ چند زیرمجموعه دارد که حتماً شامل a و c باشد ولی شامل h, b نباشد؟

حل. زیرمجموعه‌ی مورد نظر به صورت روبه‌رو است. $\{a, c, \{d, e, f, g\}$ اعضای زیرمجموعه‌ای از$\}$

اعضای b و h را انتخاب نمی‌کنیم پس مجموعه‌ی مورد نظر شامل a و c است و اعضای d، e، f و g نیز می‌توانند عضو آن باشند یا نباشند. پس عضوهای زیرمجموعه‌ای دلخواه از $\{d, e, f, g\}$ را به همراه a و c در یک مجموعه قرار می‌دهیم.

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = ۲^۴ = ۱۶$$

مثال ۶ مقدار a را طوری به دست آورید که مجموعه‌های $A = \{a^۲ + ۲, a + ۲\}$ و $B = \{۳, ۱\}$ با هم برابر باشند.

حل. $a^۲ \geq ۰ \Rightarrow a^۲ + ۲ \geq ۲$

پس $a^۲ + ۲$ نمی‌تواند با ۱ برابر باشد:

$$a^۲ + ۲ = ۳ \Rightarrow a^۲ = ۱ \Rightarrow a = ۱ \text{ یا } a = -۱$$

$a = ۱$ غیر قابل قبول است چون با جایگذاری $a = ۱$، هر دو عضو مجموعه‌ی A برابر ۳ خواهند شد.

مثال ۷ اگر $A \subseteq B$، عبارت $[(A \cap B) \cup B] - [(A \cup B) \cap A]$ را تا حد امکان ساده کنید.

حل. اگر $A \subseteq B$ باشد می‌توان نتیجه گرفت: $A \cup B = B \;,\; A \cap B = A$

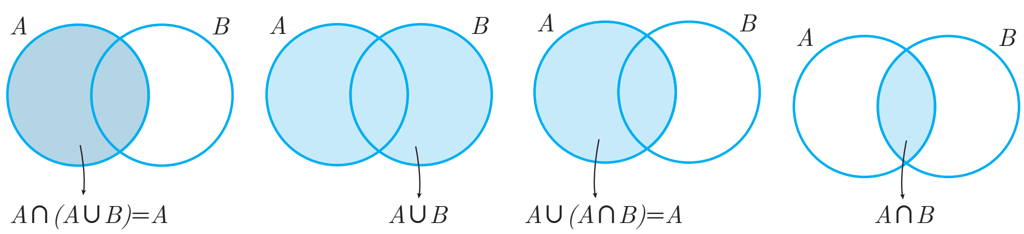
$$[(A \cap B) \cup B] - [(A \cup B) \cap A] = (A \cup B) - (B \cap A) = B - A$$

نکته ۱

به ازای هر دو مجموعه‌ی دلخواه A و B می‌توان نوشت:

$$(A \cup B) \cap A = A \,, \qquad (A \cap B) \cup A = A$$

دو رابطه‌ی فوق به قانون جذب در مجموعه‌ها معروف هستند. می‌توان درستی این روابط را به کمک نمودار ون تحقیق کرد.



اثبات قانون جذب:

چون $(A \cap B)$ زیرمجموعه‌ی A است، پس اجتماع آن دو، برابر مجموعه‌ی بزرگ‌تر یعنی A است.

$$(A \cap B) \subseteq A \Rightarrow (A \cap B) \cup A = A$$

چون A زیرمجموعه‌ی $(A \cup B)$ است، پس اشتراک آن دو، برابر مجموعه‌ی کوچک‌تر یعنی A است.

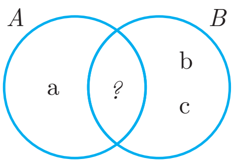
$$A \subseteq (A \cup B) \Rightarrow (A \cup B) \cap A = A$$

بنابر قانون جذب می‌توان مثال ۷ را حتی بدون در نظر گرفتن فرض مثال، حل کرد.

$$[(A \cap B) \cup B)] - [(A \cup B) \cap A] = B - A$$

مثال ۸ اگر $A - B = \{a\}$ و $B - A = \{b, c\}$ باشد مجموعه‌ی $(A \cup B) - (A \cap B)$ را تشکیل دهید.

حل. می‌توان به کمک نمودار ون مسئله را بهتر درک کرد.

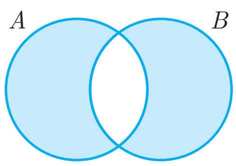


با کمی دقت می‌توان متوجه شد که $(A \cup B) - (A \cap B)$ در واقع اجتماع مجموعه‌های $(A - B)$ و $(B - A)$ است.

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A) = \{a, b, c\}$$

بیشتر بدانیم ۱

اجتماع مجموعه‌های $(A - B)$ و $(B - A)$ را اصطلاحاً تفاضل متقارن مجموعه‌های A و B می‌نامند و آن را با نماد $A \Delta B$ نمایش می‌دهند.[1]



$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

به راحتی و با کمک نمودار ون می‌توان تساوی روبه‌رو را نتیجه گرفت: $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

عمل تفاضل متقارن برای یافتن اعضایی است که از دو مجموعه‌ی A و B، تنها در یکی عضویت دارند نه هر دو. به عنوان مثال اگر A مجموعه‌ی اعداد بخش‌پذیر بر ۳ و B مجموعه‌ی اعداد بخش‌پذیر بر ۵ باشد مجموعه‌ی $A \Delta B$ مجموعه‌ی اعدادی است که تنها بر ۳ یا تنها بر ۵ بخش‌پذیرند.

$$A = \{۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵, ۱۸, ۲۱, \cdots\} \qquad B = \{۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰, ۲۵, ۳۰, \cdots\}$$

$$A \Delta B = \{۳, ۵, ۶, ۹, ۱۰, ۱۲, ۱۸, ۲۰, ۲۱, \cdots\}$$

مثال ۹ اگر $A_i = \{x \mid i \le x \le i^۲ + ۱\}$ حاصل $A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_{۱۰۰}$ را با نمادهای ریاضی بنویسید.

حل. در این نوع نگارش، i اصطلاحاً اندیس A است. می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} A_۱ = \{x \mid ۱ \le x \le ۲\} \\ A_۲ = \{x \mid ۲ \le x \le ۵\} \\ A_۳ = \{x \mid ۳ \le x \le ۱۰\} \\ \vdots \\ A_{۱۰۰} = \{x \mid ۱۰۰ \le x \le ۱۰۰۰۱\} \end{array}\right\} \Rightarrow A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_{۱۰۰} = \{x \mid ۱ \le x \le ۱۰۰۰۱\}$$

۱) علامت Δ را دلتا می‌نامند.

نکته ۲ برای انجام عمل اجتماع یا اشتراک تعداد زیادی مجموعه، آن‌ها را با نام یکسان و اندیس نام‌گذاری می‌کنیم و به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \ , \qquad \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

مثال ۱۰ اگر A_i مجموعه‌ی شمارنده‌های طبیعی عدد $2i$ باشد حاصل عبارت $\bigcap_{i=1}^{10} A_{2i}$ را تا حد امکان ساده کنید.

حل. با جاگذاری i از ۱ تا ۱۰ می‌توان نوشت:

$$\bigcap_{i=1}^{10} A_{2i} = A_2 \cap A_4 \cap \cdots \cap A_{20}$$

$$= \left(\text{مجموعه‌ی شمارنده‌های طبیعی } 4\right) \cap \left(\text{مجموعه‌ی شمارنده‌های طبیعی } 8\right) \cap \cdots \cap \left(\text{مجموعه‌ی شمارنده‌های طبیعی } 40\right)$$

$$= \text{مجموعه‌ی شمارنده‌های طبیعی } 4$$

$$= \{1, 2, 4\}$$

بازه

به محدوده‌ای از اعداد حقیقی که بین دو عدد حقیقی مشخص هستند یا از یک عدد حقیقی مشخص بزرگ‌تر یا از آن کوچک‌تر هستند، یک بازه از اعداد حقیقی می‌گوییم.

انواع بازه در نمایش‌های مختلف

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	نوع بازه	بازه
a b	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$	باز[1]	(a, b)
a b	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$	نیم‌باز	$(a, b]$
a b	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$	نیم‌باز	$[a, b)$
a b	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$	بسته	$[a, b]$
a	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x\}$	باز	$(a, +\infty)$
a	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x\}$	نیم‌باز	$[a, +\infty)$
a	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < a\}$	باز	$(-\infty, a)$
a	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$	نیم‌باز	$(-\infty, a]$

اجتماع، اشتراک و تفاضل بازه‌ها

همانند سایر مجموعه‌ها، می‌توان اعمال مجموعه‌ای را بر روی بازه‌ها نیز انجام داد.

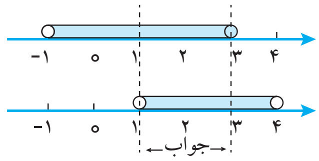
مثال ۱۱ حاصل عبارت‌های زیر را تا حد امکان ساده کنید.

(الف) $(-1, 3] \cap (1, 4)$ (ب) $(-2, 4] - (-6, 4)$ (ج) $(-1, 4) \cup [4, +\infty)$

حل. معمولاً ساده کردن عبارت‌های شامل بازه‌ها کار ساده‌ای است امّا در صورت نیاز می‌توان عملیات را در نمایش هندسی بازه‌ها (نمایش روی محور اعداد) انجام داد.

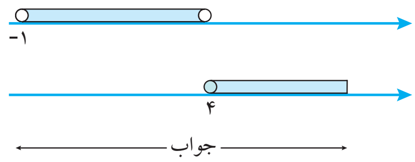
۱) در ریاضی (a, b) می‌تواند به معنای اعداد حقیقی بین a و b باشد. همچنین می‌تواند معادل نقطه‌ای با طول a و عرض b باشد و نیز می‌تواند به معنی بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک اعداد طبیعی a و b باشد. نحوه‌ی برداشت از نماد (a, b) به مبحث مورد نظر بستگی دارد.

(الف) $(-۱,۳]\cap(۱,۴)=(۱,۳]$



(ب) تنها عضو $(-۲,۴]$ که عضو $(-۶,۴)$ نیست، عدد ۴ است. $(-۲,۴]-(-۶,۴)=\{۴\}$

(ج) $(-۱,۴)\cup[۴,+\infty)=(-۱,+\infty)$



مثال ۱۲ اگر $A_i=(i,۲i)$ و i عدد طبیعی باشد حاصل عبارت $\bigcup\limits_{i=۱}^{۱۰۰}A_i$ را به دست آورید.

حل. $A_۱=(۱,۲)\ ,\ A_۲=(۲,۴)\ ,\ A_۳=(۳,۶)\ ,\ \cdots\ ,\ A_{۹۹}=(۹۹,۱۹۸)\ ,\ A_{۱۰۰}=(۱۰۰,۲۰۰)$

اجتماع بازه‌های فوق، شامل تمام اعداد بازه‌ی $(۱,۲۰۰)$ به جز عدد ۲ است. $\bigcup\limits_{i=۱}^{۱۰۰}A_i=(۱,۲۰۰)-\{۲\}$

مثال ۱۳ اگر $A_i=(-۲i-۱,i^۲)$ و i عدد طبیعی باشد حاصل عبارت $\bigcap\limits_{i=۱}^{۲۰}A_i$ را به دست آورید.

حل. با جاگذاری iها، بازه‌های $A_۱$ و $A_۲$ و ... را تشکیل می‌دهیم.

$$A_۱=(-۳,۱),A_۲=(-۵,۴),A_۳=(-۷,۹),\cdots,A_{۲۰}=(-۴۱,۴۰۰)$$

$A_۱$ زیرمجموعه‌ی تمام بازه‌های $A_۲$ تا $A_{۲۰}$ است. پس اشتراک بازه‌ها همان $A_۱$ است. $\bigcap\limits_{i=۱}^{۲۰}A_i=(-۳,۱)$

مثال ۱۴ عدد طبیعی n را طوری بیابید که بازه‌ی $\left[\frac{n-۱}{n},\frac{n+۱}{n}\right]$ شامل سه عدد حسابی باشد.

حل. می‌دانیم $\frac{n+۱}{n}=۱+\frac{۱}{n}>۱$ و $\frac{n-۱}{n}=۱-\frac{۱}{n}<۱$ یعنی بازه‌ی مورد نظر حتماً شامل عدد ۱ است.

از طرفی چون $n\in\mathbb{N}$ پس عدد $\frac{۱}{n}$ حداکثر برابر ۱ است و این به ازای $n=۱$ اتفاق می‌افتد و تنها در همین شرایط است که بازه می‌تواند شامل اعدادی حسابی غیر از عدد ۱ باشد.

$$n=۱\ \Rightarrow\ \left[\frac{n-۱}{n},\frac{n+۱}{n}\right]=[۰,۲]$$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

اگر تعداداعضای مجموعه‌ای برابر یک عدد حسابی باشد، مجموعه را متناهی (با پایان) و در غیر این صورت آن را نامتناهی می‌نامیم. به عنوان مثال مجموعه‌ی اعداد طبیعی ۴۰۰ رقمی، مجموعه‌ی تمام اجرام آسمانی و مجموعه‌ی تمام انسان‌ها، مثال‌هایی از مجموعه‌ی متناهی و مجموعه‌ی اعداد طبیعی، مجموعه‌ی $(۱,۲)$ و مجموعه‌ی اعداد گنگ بین $۱۰^{-۶}$ و $۱۰^{-۵}$، مثال‌هایی از مجموعه‌های نامتناهی هستند.

مثال ۱۵ مشخص کنید کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی و کدام یک نامتناهی هستند. (با ذکر دلیل)

(الف) مجموعه‌ی اعداد حقیقی کوچک‌تر از ۲ و بزرگ‌تر از -۳

(ب) مجموعه‌ی اعداد اوّل به صورت $۲n+۳$ $(n\in\mathbb{N})$

(ج) مجموعه‌ی اعداد اوّل که یک واحد از مربع یک عدد صحیح کوچک‌ترند.

(د) $A = \left\{ \frac{n^۲}{n+۴} | n \in \mathbb{N}, \frac{n^۲}{n+۴} \in \mathbb{N} \right\}$

(هـ) مجموعه‌ی اعداد گنگ بین $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$

حل. (الف) مجموعه‌ی مورد نظر همان بازه‌ی $(-۳, ۲)$ است که شامل بی‌شمار عدد حقیقی است پس نامتناهی است.

(ب) اعداد اوّل به جز عدد ۲ همه فرد هستند. در بین اعداد فرد، به جز عدد ۳ می‌توان همه را به صورت مجموع یک عدد زوج طبیعی با ۳ نوشت پس مجموعه‌ی مورد نظر همان اعداد اوّل به استثنای اعداد ۲ و ۳ است. بنابراین نامتناهی است.

(ج) اگر x عضو مجموعه‌ی مورد نظر باشد می‌توان نوشت: $x = a^۲ - ۱$

$$x = (a-۱)(a+۱)$$

عدد x عددی است اوّل پس نمی‌تواند حاصل‌ضرب دو عدد دیگر باشد مگر این‌که $(a-۱)$ برابر ۱ باشد.

$$a - ۱ = ۱ \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow x = ۳$$

بنابراین مجموعه‌ی فوق تک عضوی و متناهی است.

(د) عدد $\frac{n^۲}{n+۴}$ عددی است طبیعی پس باید $n^۲$ بر $n+۴$ بخش‌پذیر باشد. می‌توان نوشت:

$$\frac{n^۲}{n+۴} = \frac{n^۲ - ۱۶ + ۱۶}{n+۴} = (\underbrace{n-۴}_{\text{صحیح}} + \frac{۱۶}{n+۴})$$

برای این که حاصل طبیعی باشد، باید $(n+۴)$ از مقسوم‌علیه‌های ۱۶ باشد و تعداد n های مورد نظر محدود است پس مجموعه متناهی است. $n = ۴\ ,\ ۱۲$

(هـ) میانگین هر دو عدد، عددی است بین آن دو یعنی $\sqrt{۲} < \frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{۲} < \sqrt{۳}$. به همین ترتیب می‌توان بی‌شمار عدد گنگ دیگر مثلاً بین $\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{۲}$ و $\sqrt{۲}$ و یا بین $\sqrt{۳}$ و $\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{۲}$ نوشت پس مجموعه نامتناهی است.

نکته ۳

اگر $a < b$، آن‌گاه نامساوی مقابل با شرط $(c, d > ۰)$ برقرار است: $a < \frac{ac+bd}{c+d} < b$

اثبات:

$$a < b \xrightarrow[\times c]{c>۰} ac < bc \xrightarrow[+bd]{} ac + bd < bc + bd$$

$$\Rightarrow \frac{ac+bd}{c+d} < b \qquad (I)$$

$$a < b \xrightarrow[\times d]{d>۰} ad < bd \xrightarrow[+ac]{} ac + ad < ac + bd$$

$$\Rightarrow a < \frac{ac+bd}{c+d} \qquad (II)$$

$(I)\ ,\ (II) \Rightarrow$ حکم برقرار است.

به کمک نکته‌ی فوق و با انتخاب c و d مناسب می‌توان بین هر دو عدد متمایز، بی‌شمار عدد گنگ و بی‌شمار عدد گویا نوشت.

مثال ۱۶ بین اعداد $\frac{۷}{۵}$ و $\sqrt{۲}$، یک عدد گنگ بنویسید.

حل. با انتخاب ضریب ۱ و ۲ می‌توان برای عدد مورد نظر به مثالی مناسب دست یافت.

$$\frac{۷}{۵} < \frac{۲\sqrt{۲} + \frac{۷}{۵}}{۳} < \sqrt{۲}$$

مجموعه‌ی مرجع و مجموعه‌ی متمم

مثال ۱۷ مجموعه‌ی $A=\left\{\frac{۳n-۵}{n+۱}\middle| n\in\mathbb{N}\right\}$ را در نظر بگیرید. آیا این مجموعه عضوی دارد که برابر ۲ باشد؟ آیا عضوی دارد که برابر ۴ باشد؟

حل. $\frac{۳n-۵}{n+۱}$ را برابر ۲ و ۴ قرار می‌دهیم. اگر n به دست آمده عدد طبیعی باشد، پاسخ مسئله است.

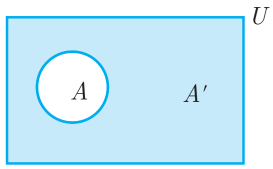
$$\frac{۳n-۵}{n+۱}=۲ \Rightarrow ۳n-۵=۲n+۲ \Rightarrow n=۷ \qquad \text{قابل قبول}$$
$$\frac{۳n-۵}{n+۱}=۴ \Rightarrow ۳n-۵=۴n+۴ \Rightarrow n=-۹ \qquad \text{غیر قابل قبول}$$

همان گونه که در مثال بالا دیده می‌شود در مبحث مجموعه‌ها، همانطور که از عضویت در یک مجموعه صحبت می‌شود، ممکن است عدم عضویت در مجموعه‌ای مورد نظر باشد یعنی مجموعه‌ای که شامل اعضایی باشد که در مجموعه‌ی ما عضویت ندارند.

تعریف **مجموعه‌ی مرجع.** در هر مبحث از مجموعه‌ها، می‌توان مجموعه‌ای در نظر گرفت که تمام مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه‌ی آن باشند. این مجموعه را مجموعه‌ی مرجع می‌نامیم و آن را با U یا M نمایش می‌دهیم یعنی برای هر مجموعه A داریم: $A\subseteq U$

تعریف **مجموعه‌ی متمم.** متمم هر مجموعه مثل A که آن را با A' نمایش می‌دهیم، عبارت است از مجموعه‌ی اعضایی که عضو A نیستند و عضو U هستند. به عبارت دیگر $A'=U-A$

بدیهی است اگر U مشخص نباشد، صحبت از A' بی‌معنی است.



به عنوان مثال، اگر دانش‌آموزان کلاس شما مجموعه‌ی A را تشکیل دهند و مجموعه‌ی مرجع را دانش‌آموزان کل دبیرستان در نظر بگیریم، A' برابر است با مجموعه‌ی تمام دانش‌آموزان دبیرستانتان که هم‌کلاس شما نیستند و اگر مرجع را کل دانش‌آموزان استان شما در نظر بگیریم، مجموعه‌ی A' بسیار بزرگ‌تر خواهد بود.

مثال ۱۸ در هر مورد با توجه به مجموعه‌ی مرجع، A' را تشکیل دهید.

(الف) $A=\{۴^n | n\in\mathbb{N}, n<۸\}$ $\qquad U=\{۲^n | n\in\mathbb{W}, n<۱۵\}$

(ب) $A=(-\infty,۲)\cup[۴,+\infty)$ $\qquad U=\mathbb{R}$

(ج) $A=\{n^۲+n | n\in\mathbb{N}, n^۲+n\in\mathbb{P}\}$ $\qquad U=\mathbb{N}$ $\qquad$ ($\mathbb{P}$ مجموعه‌ی اعداد اول است)

(د) $A=\{ab | a,b\in\mathbb{Q}\}$ $\qquad U=\mathbb{Q}$

حل. (الف) مجموعه‌های A و U را به کمک اعضا نمایش می‌دهیم.

$$A=\{۴,۴^۲,\cdots,۴^۷\}=\{۲^۲,۲^۴,۲^۶,\cdots,۲^{۱۴}\}$$
$$U=\{۲^۰,۲^۱,۲^۲,\cdots,۲^{۱۴}\}$$
$$\Rightarrow A'=\{۱,۲,۲^۳,۲^۵,۲^۷,۲^۹,۲^{۱۱},۲^{۱۳}\}$$

(ب) مجموعه‌ی A شامل اعداد بازه‌ی $[۲,۴)$ نیست و مجموعه‌ی مرجع، مجموعه‌ی اعداد حقیقی است یعنی A' همان بازه‌ی $[۲,۴)$ است. $\qquad A'=[۲,۴)$

(ج) اعضای A را می‌توان به صورت $n(n+۱)$ نوشت. حاصل‌ضرب دو عدد متوالی نمی‌تواند عددی اوّل باشد مگر این که $n=۱$. در نتیجه:

$$A=\{۲\} \Rightarrow A'=\mathbb{N}-\{۲\}=\{۱,۳,۴,۵,\cdots\}$$

(د) مجموعه‌ی A شامل حاصل‌ضرب‌های مختلف اعداد گویاست و اگر a را برابر ۱ انتخاب کنیم، b هر عدد گویایی می‌تواند باشد پس مجموعه‌ی A همان مجموعه‌ی اعداد گویاست. $A' = U - A = Q - Q = \varnothing$

مثال ۱۹ اگر $A = \{2x+1 | x \in \mathbb{N}, x < 5\}$ و $B = \{x | x^2 \geq 4, x \in \mathbb{Z}\}$ و $M = \mathbb{Z}$، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

(الف) $B - A'$ (ب) $A - B$

حل. مجموعه‌های A و A' و B را با اعضایشان نمایش می‌دهیم.

$$A = \{3, 5, 7, 9\}$$

$$A' = \{\cdots, -1, 0, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 11, \cdots\}$$

$$B = \{\cdots, -3, -2, 2, 3, \cdots\}$$

(الف) $B - A' = \{3, 5, 7, 9\}$ (ب) $A - B = \varnothing$

مثال ۲۰ اگر $A_i = \mathbb{R} - (-i, i)$ و $U = \mathbb{R}$، حاصل عبارت زیر را به صورت بازه‌ای بنویسید.

$$\bigcap_{i=1}^{100000} A'_i = ?$$

حل. A_i شامل اعداد بازه‌ی $[-i, i]$ نیست بنابراین می‌توان A'_iها را به صورت زیر تشکیل داد:

$$A'_1 = [-1, 1]\ ,\ A'_2 = [-2, 2]\ ,\ \cdots\ ,\ A'_{100000} = [-100000, 100000]$$

A'_1 زیرمجموعه‌ی سایر مجموعه‌هاست. پس اشتراکشان همان A'_1 است.

$$\bigcap_{i=1}^{100000} A'_i = [-1, 1]$$

چند رابطه‌ی کاربردی:. با توجه به تعاریف اولیه‌ی اجتماع، اشتراک و تفاضل و همچنین مجموعه‌های مرجع و متمم می‌توان روابط ساده‌ی زیر را نوشت. تحقیق در مورد درستی این تساوی‌ها به راحتی و به کمک نمودار ون ممکن است.

۱) $(A')' = A$	۲) $M' = \varnothing$	۳) $\varnothing' = M$
۴) $A \cup M = M$	۵) $A \cap M = A$	۶) $A \cup A' = M$
۷) $A \cap A' = \varnothing$	۸) $A - A' = A$	

و با توجه به تفاضل دو مجموعه به رابطه‌ی زیر توجه ویژه داشته باشید:

۹) $A - B = A \cap B'$

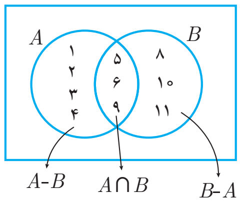
مثال ۲۱ حاصل عبارت $(A \cap M) - (A' - A)$ را به دست آورید.

حل. $(A \cap M) - (A' - A) = A - A' = A$

مثال ۲۲ اگر $A \cap B' = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B \cap A' = \{8, 10, 11\}$ و $A \cap B = \{5, 6, 9\}$، مجموعه‌های A و B را با اعضایشان نمایش دهید.

حل. دقت کنید که مجموعه‌ی مرجع داده نشده و این مسئله بدون در نظر گرفتن مجموعه‌ی مرجع، جواب ثابت دارد. می‌توانیم از روابط $A \cap B' = A - B$ و $B \cap A' = B - A$ استفاده کنیم و مسئله را به کمک نمودار ون بهتر درک کنیم.

با توجه به نمودار ون داریم:

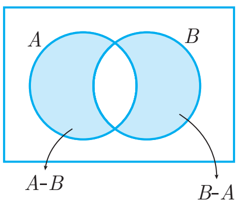


$$A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۹\}$$

$$B = \{۵, ۶, ۹, ۸, ۱۰, ۱۱\}$$

همان گونه که می‌بینیم به کمک نمودار ون می‌توان به تساوی‌هایی مثل $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ دست یافت.

مثال ۲۳ اگر $A \cap B' = B \cap A'$ حاصل عبارت $[(A \cup B) - (A \cap B)] - A$ را به دست آورید.



حل. همان گونه که از نمودار ون مشخص است، در حالت کلی مجموعه‌های $(A - B)$ و $(B - A)$ اشتراکی ندارند. حال که دو مجموعه‌ی بدون هیچ عضو اشتراکی با هم برابرند پس هر دو تهی هستند.

$$\left.\begin{array}{l} A - B = \varnothing \Rightarrow A \subseteq B \\ B - A = \varnothing \Rightarrow B \subseteq A \end{array}\right\} \Rightarrow A = B$$

$$[(A \cup B) - (A \cap B)] - A = [(A \cup A) - (A \cap A)] - A = (A - A) - A = \varnothing - A = \varnothing$$

بیشتر بدانیم ۲

جبرمجموعه ها.

همان گونه که در بحث عبارت‌های جبری، از اتحادهای مفید و کاربردی برای حل مسائل دشوار یا حل سریع‌تر مسائل استفاده می‌شود، در مبحث مجموعه‌ها نیز روابطی کاربردی وجود دارد که حل مسائل را ساده می‌کند. در این بخش به صورت اجمالی به معرفی و اثبات روابط به کمک نمودار ون یا به کمک روابط از پیش اثبات شده می‌پردازیم.

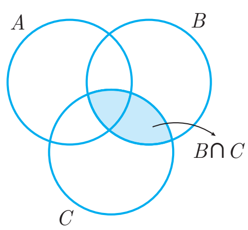
قوانین (خواص) جبر مجموعه‌ها

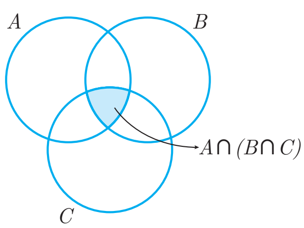
۱) $\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$ خاصیت جابه‌جایی

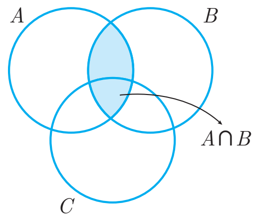
می‌توان به راحتی به کمک نمودار ون، خاصیت جابه‌جایی را ثابت کرد. در واقع در اعمال اجتماع و اشتراک دو مجموعه، ترتیب مجموعه‌ها هیچ اهمیتی ندارد. در حالت کلی‌تر اگر تعداد مجموعه‌ها از ۲ به ۳ یا بیشتر افزایش یابد نیز روابط مشابهی به دست می‌آید. در حالتی که تعداد مجموعه‌ها ۳ تا باشد، خاصیت شرکت‌پذیری حاصل می‌شود.

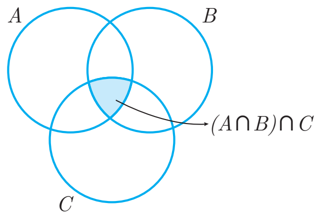
۲) $\begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{cases}$ خاصیت شرکت‌پذیری (انجمنی)

اثبات شرکت‌پذیری عمل اشتراک









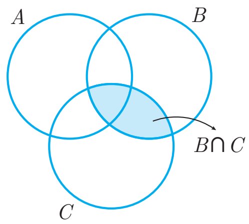
توجه شود که در خاصیت شرکت‌پذیری فقط عمل اجتماع یا اشتراک وجود دارد نه هر دو با هم. اگر هر دو عمل در ارتباط سه مجموعه وجود داشته باشد خاصیت پخشی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

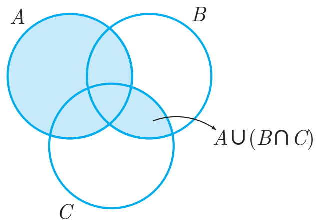
خاصیت پخشی (توزیع‌پذیری)

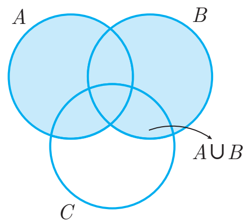
$$۳)\ \begin{cases} A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\end{cases}$$

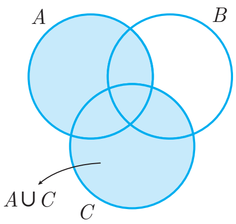
این خاصیت همانند پخش عمل ضرب در جمع یا منهای عبارت‌های جبری است.

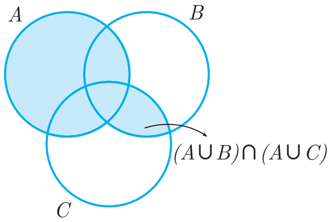
اثبات خاصیت پخشی اجتماع نسبت به اشتراک











مثال ۲۴ به کمک قانون پخشی، عبارت‌های زیر را بسط دهید.

(الف) $A\cup(B\cap C\cap D)$　　(ب) $(A\cup B)\cap(C\cup D)$

حل. (الف) قانون پخشی محدودیتی در تعداد مجموعه‌ها ندارد.

$$A\cup(B\cap C\cap D)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(A\cup D)$$

(ب) در سوالات از این دست $(A\cup B)$ را به شکل یک مجموعه می‌بینیم و در عبارت دوم پخش می‌کنیم.

$$\begin{aligned}(A\cup B)\cap(C\cup D)&=[(A\cup B)\cap C]\cup[(A\cup B)\cap D]\\&=[(A\cap C)\cup(B\cap C)]\cup[(A\cap D)\cup(B\cap D)]\\&=(A\cap C)\cup(B\cap C)\cup(A\cap D)\cup(B\cap D)\end{aligned}$$

مثال ۲۵ حاصل عبارت زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$[(A\cup B')\cap(A\cup B)]\cup(A'\cap B)$$

حل. ابتدا عبارت داخل [ ] را ساده می‌کنیم. «$A\cup$» در هر دو پرانتز مشترک است. می‌توانیم از عکس قانون پخشی استفاده کنیم. (مشابه فاکتورگیری

در عبارات جبری)

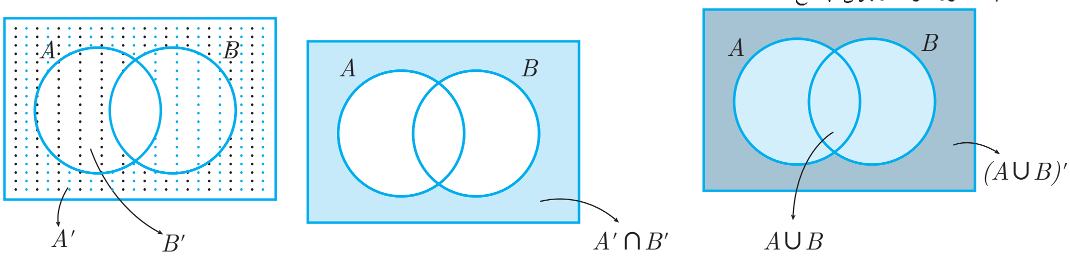
$$(\underline{A \cup} B') \cap (\underline{A \cup} B) = A \cup (B' \cap B) = A \cup \varnothing = A$$

کل عبارت را می‌توان به صورت $A \cup (A' \cap B)$ نوشت.

$$A \cup (A' \cap B) \underset{\text{پخشی}}{=} \underbrace{(A \cup A')}_{M} \cap (A \cup B) = M \cap (A \cup B) = A \cup B$$

۴) $\begin{cases} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{cases}$ قانون دمورگان

اثبات قانون دمورگان برای اجتماع



مثال ۲۶ ثابت کنید $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$ (به کمک جبر مجموعه‌ها)

حل. عبارت $(A \cap B)$ را یک مجموعه در نظر می‌گیریم و از دمورگان برای دو مجموعه استفاده می‌کنیم.

$$[(A \cap B) \cap C]' \underset{\text{دمورگان}}{=} (A \cap B)' \cup C' \underset{\text{دمورگان}}{=} (A' \cup B') \cup C' = A' \cup B' \cup C'$$

نکته ٤

قانون دمورگان برای هر تعداد مجموعه قابل تعمیم است یعنی:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)' = \bigcap_{i=1}^{n} A_i'$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)' = \bigcup_{i=1}^{n} A_i'$$

مثال ۲۷ حاصل را به‌دست آورید:

$$[(C' \cap B) \cup A]'$$

حل.

$$[(C' \cap B) \cup A]' \underset{\text{دمورگان}}{=} (C' \cap B)' \cap A' \overset{\text{دمورگان}}{=} (C \cup B') \cap A' \overset{\text{پخشی}}{=} (C \cap A') \cup (B' \cap A')$$

۵) $\begin{cases} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{cases}$ قانون جذب

از روابط مفید در جبر مجموعه‌ها، قانون جذب است که می‌توان آن را به کمک نمودار ون و نیز به کمک سایر قوانین جبر مجموعه‌ها اثبات کرد. پیش‌تر این قانون را به کمک مفاهیم اولیه اثبات کردیم. اثبات زیر نیز به کمک جبر مجموعه‌هاست و دیدن آن خالی از لطف نیست.

$A \cup (A \cap B) = (A \cap M) \cup (A \cap B) \underset{\text{عکس پخشی}}{=} A \cap (B \cup M) = A \cap M = A$ اثبات اجتماع به اشتراک

$A \cap (A \cup B) = (A \cup \varnothing) \cap (A \cup B) \underset{\text{عکس پخشی}}{=} A \cup (B \cap \varnothing) = A \cup \varnothing = A$ اثبات اشتراک به اجتماع

مثال ۲۸ حاصل را تا حد امکان ساده کنید.

$$(A \cup B \cup C) \cap [((C - B) \cup (B - A)) \cup A \cup B \cup C]$$

حل. برخلاف ظاهر پیچیده و ترسناک سوال، فرم $(\square \cup \bigcirc) \cap \square$ دیده می‌شود و می‌دانیم که جواب همان $\square$ است.

$$(A \cup B \cup C) \cap [((C - B) \cup (B - A)) \cup A \cup B \cup C] \underset{\text{جذب}}{=} A \cup B \cup C$$

مثال ۲۹ درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

(الف) $A - (A \cap B) = A - B$

(ب) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

(ج) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

حل.

(الف) $A - (A \cap B) = A \cap (A \cap B)' \underset{\text{دمورگان}}{=} A \cap (A' \cup B') \underset{\text{پخشی}}{=} (\underbrace{A \cap A'}_{\varnothing}) \cup (A \cap B')$

$= \varnothing \cup (A - B) = A - B$

(ب) $(A - B) - C = (A \cap B') \cap C' \underset{\text{شرکت‌پذیری}}{=} A \cap (B' \cap C')$

$\underset{\text{عکس دمورگان}}{=} A \cap (B \cup C)' = A - (B \cup C)$

(ج) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cap B') \cup (B \cap A') \underset{\text{پخشی}}{=} [(A \cap B') \cup B] \cap [(A \cap B') \cup A']$

$\underset{\text{پخشی}}{=} \Big[(A \cup B) \cap (\underbrace{B \cup B'}_{M})\Big] \cap \Big[(\underbrace{A \cup A'}_{M}) \cap (B' \cup A')\Big]$

$= [(A \cup B) \cap M] \cap [M \cap (B' \cup A')] = (A \cup B) \cap (B \cap A)' = (A \cup B) - (A \cap B)$

مثال ۳۰ حاصل را تا حد امکان ساده کنید.

(الف) $A - [A' - (A - B)]$

(ب) $[A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')]$

حل.

(الف) $A - [A' - (A - B)] = A - [A' - (A \cap B')] = A - [A' \cap (A \cap B')']$

$\underset{\text{دمورگان}}{=} A - \Big[\underbrace{A' \cap (A' \cup B)}_{\text{جذب}}\Big] = A - A' = A$

(ب) $[A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')] \underset{\text{پخشی}}{=} \Big[(\underbrace{A \cap A'}_{\varnothing}) \cup (A \cap B)\Big] \cup \Big[(B \cap A') \cup (\underbrace{B \cap B'}_{\varnothing})\Big]$

$= (A \cap B) \cup (B \cap A') \underset{\text{عکس پخشی}}{=} B \cap (\underbrace{A \cup A'}_{M}) = B \cap M = B$

مثال ۳۱ ثابت کنید اگر $A \cup B = A \cup C$ و $A \cap B = A \cap C$، می‌توان نتیجه گرفت $B = C$

حل.

$$B \underset{\text{عکس جذب}}{=} B \cup (A \cap B) \underset{\text{فرض}}{=} B \cup (A \cap C) \underset{\text{پخشی}}{=} (B \cup A) \cap (B \cup C)$$

$$\underset{\text{فرض}}{=} (A\underline{\cup C}) \cap (B\underline{\cup C}) \underset{\text{عکس پخشی}}{=} (A \cap B)\underline{\cup C} \underset{\text{فرض}}{=} (A \cap C) \cup C \underset{\text{عکس جذب}}{=} C$$

همان گونه که در این چند مثال دیدیم، جبر مجموعه‌ها ابزاری قوی در درک مفاهیم مجموعه‌هاست.

- با توجه به این که در کتاب درسی اشاره‌ی مستقیمی به این مبحث نشده به همین حد اکتفا می‌کنیم.

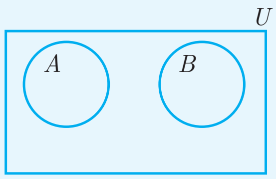
دو مجموعه‌ی جدا از هم

به دو مجموعه‌ی A و B که عضو مشترک نداشته باشند، دو مجموعه‌ی جدا از هم یا مجزا گویند.

A و B از هم مجزا هستند. $\Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$

به عنوان مثال مجموعه‌ی اعداد زوج و مجموعه‌ی اعداد فرد، جدا از همند یا مجموعه‌ی اعدادی که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۳ برابر ۱ است و مجموعه‌ی اعداد مضرب ۳ جدا از همند.

نکته ۵ اگر A و B دو مجموعه‌ی مجزا باشند یعنی $n(A \cap B) = 0$ در نتیجه هر یک زیرمجموعه‌ی متمم دیگری است.



$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \subseteq B',\ B \subseteq A'$$

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \cap B' = A,\ A \cup B' = B',\ \cdots$$

مثال ۳۲ اگر A و B و C دوبه‌دو از هم مجزا باشند، حاصل عبارت زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$(C - B) \cap (A \cup (B - C))$$

حل. روش اول: B و C از هم جدا هستند پس $C - B = C$ و $B - C = B$ یعنی می‌توان عبارت فوق را به صورت زیر نوشت.

$$(C - B) \cap (A \cup (B - C)) = C \cap (A \cup B) = \varnothing$$

چون C از A و نیز از B جدا است پس C هیچ اشتراکی با $(A \cup B)$ ندارد و حاصل تهی شده است.

روش دوم: در روش دوم نیز عبارت را تا $C \cap (A \cup B)$ ساده می‌کنیم. حال می‌توان از خاصیت پخشی اشتراک نسبت به اجتماع استفاده کرد.

$$C \cap (A \cup B) \underset{\text{پخشی}}{=} (C \cap A) \cup (C \cap B) \underset{\substack{\text{A و C مجزا هستند} \\ \text{B و C مجزا هستند}}}{=} \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$$

مثال ۳۳ اگر مجموعه‌های A و $(B \cap C)$ جدا از هم باشند، حاصل عبارت زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$(A \cup B' \cup C') \cup (A \cap B \cap C) \cap B'$$

حل. مجموعه‌های A و $B \cap C$ از هم جدا هستند یعنی $A \cap (B \cap C) = \varnothing$ پس عبارت وسط $(A \cap B \cap C)$ برابر تهی است.

حال توجه کنید که بر اساس نکته‌ی گفته شده چون A و $(B \cap C)$ از هم جدا هستند پس $A \subseteq (B \cap C)'$ حال می‌توان نوشت:

$$A \subseteq (B \cap C)' \Rightarrow A \cup (B \cap C)' = (B \cap C)' \underset{\text{دمورگان}}{\Rightarrow} A \cup B' \cup C' = B' \cup C'$$

بنابراین می‌توان عبارت اصلی را به صورت زیر نوشت:

$$(B' \cup C') \cup \varnothing \cap B'$$

دقت کنید که به علّت تقدم عملیات، ابتدا باید $(B' \cup C')$ را با $\varnothing$ اجتماع کنیم و در غیر این صورت به جواب درست نخواهیم رسید.

$$\text{عبارت} = (B' \cup C') \cap B' \underset{\text{جذب}}{=} B'$$

روابط بین تعداد اعضاء مجموعه‌ها (۱)

نکته ۶

در مبحث مجموعه‌ها هر جا صحبت از «و» شود بحث از اشتراک و هر جا صحبت از «یا» شود بحث از اجتماع دو مجموعه است.

مثال ۳۴

۴ مجموعه‌ی زیر را تشکیل دهید و ارتباطشان را بررسی کنید.

$A =$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۲۵ که بر ۴ بخش‌پذیرند.

$B =$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۲۵ که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۳، برابر ۲ است.

$C =$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۲۵ که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۳، برابر ۲ است و بر ۴ بخش‌پذیرند.

$D =$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۲۵ که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۳، برابر ۲ است یا بر ۴ بخش‌پذیرند.

حل. ۴ مجموعه را تشکیل می‌دهیم.

$$A = \{۴, ۸, ۱۲, ۱۶, ۲۰, ۲۴\}$$

$$B = \{۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ۲۰, ۲۳\}$$

$$C = \{۸, ۲۰\} \qquad D = \{۲, ۴, ۵, ۸, ۱۱, ۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۷, ۲۰, ۲۳, ۲۴\}$$

همان گونه که مشخص است، $C = A \cap B$ و $D = A \cup B$. یعنی اعضای مجموعه‌ی C همزمان هر دو شرط را برآورده می‌سازند ولی اعضای مجموعه‌ی D حداقل یکی از شرط‌های عضویت در A و B را دارا هستند.

تذکر

باید دقت شود مفهوم «یا»ی ریاضی با «یا»ی مورد استفاده در گفتگوی روزمره لزوماً یکسان نیست. مثلاً وقتی مدیر شما، در کلاس حاضر شده و اعلام می‌کند علی در زنگ تفریح اول و یا در زنگ تفریح دوم پیش مدیر برود قطعاً انتظار او این است که او دقیقاً در یکی از دو زنگ اول و یا دوم پیش مدیر برود و اگر هر دو زنگ تفریح علی پیش مدیر برود اطاعت امر نشده است این «یا» ی محاوره است ولی وقتی در زبان ریاضی از «یا» استفاده می‌کنیم، ممکن است هر دوی اتفاقات با هم رخ دهند. به عنوان مثال اگر $(x-2)(y-3) = 0$ باشد آن‌گاه $x = 2$ یا $y = 3$ خواهد بود و این به آن معناست که یا $x = 2$ است، یا $y = 3$ است، یا هردو.

مثال ۳۵

چند عدد بین ۳۰ و ۸۰ داریم که حداقل بر یکی از اعداد ۴ یا ۹ بخش‌پذیر باشند؟ این تعداد، چه ارتباطی با تعداد مضارب ۴ بین ۳۰ و ۸۰ و نیز تعداد مضارب ۹ بین ۳۰ و ۸۰ دارد؟

حل. فرض کنید A مجموعه‌ی مضارب ۴ بین ۳۰ و ۸۰ و B مجموعه‌ی مضارب ۹ بین ۳۰ و ۸۰ باشد. در این صورت مجموعه‌ی مورد نظر مسئله، همان $A \cup B$ است.

$$A = \{۳۲, ۳۶, ۴۰, ۴۴, ۴۸, ۵۲, ۵۶, ۶۰, ۶۴, ۶۸, ۷۲, ۷۶\}$$

$$B = \{۳۶, ۴۵, ۵۴, ۶۳, ۷۲\}$$

$$A \cup B = \{۳۲, ۳۶, ۴۰, ۴۴, ۴۵, ۴۸, ۵۲, ۵۴, ۵۶, ۶۰, ۶۳, ۶۴, ۶۸, ۷۲, ۷۶\}$$

$$n(A) = ۱۲ \qquad n(B) = ۵ \qquad n(A \cup B) = ۱۵$$

در واقع، اعضای مجموعه‌های A و B با هم شمرده می‌شوند ولی دو عضو ۳۶ و ۷۲ که اعضای مشترک هستند، دو بار شمرده می‌شوند و باید از مجموع کم شوند یعنی:

$$n(A \cup B) = ۱۲ + ۵ - ۲ = ۱۵$$

[۱] رابطه‌ی زیر بین تعداد اعضای مجموعه‌های متناهی A و B و اشتراک و اجتماعشان برقرار است.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

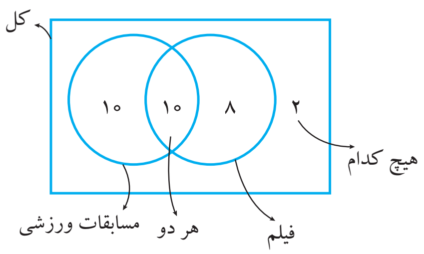
مثال ۳۶ درکلاسی با ۳۰ دانش‌آموز، ۲۰ نفر از دانش‌آموزان به مسابقات ورزشی و ۱۸ نفر به تماشای فیلم علاقه دارند. اگر ۱۰ نفر از دانش‌آموزان هم به فیلم و هم به مسابقات ورزشی علاقه داشته باشند، چند نفر از دانش‌آموزان کلاس نه به فیلم و نه به مسابقات ورزشی علاقه‌مندند؟

حل. روش اول: فرض کنید A مجموعه‌ی دانش‌آموزان علاقه‌مند به مسابقات ورزشی و B مجموعه‌ی دانش‌آموزان علاقه‌مند به فیلم باشد. در این صورت $n(A) = ۲۰$ و $n(B) = ۱۸$ و $n(A \cap B) = ۱۰$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۲۰ + ۱۸ - ۱۰ = ۲۸$$

یعنی ۲۸ نفر به فیلم یا مسابقات ورزشی علاقه‌مندند. پس از ۳۰ نفر ۲ نفر به هیچ کدام علاقه ندارند.

روش دوم: در برخی موارد می‌توان به کمک نمودار ون، مسائل را به سادگی حل کرد.



روش سوم (روش نادرست): می‌توان نتیجه گرفت که تمام دانش‌آموزان یا به دو مورد علاقه‌مندند یا هیچ کدام! یعنی می‌توان تعداد کل را منهای تعداد افراد علاقه‌مند به دو رشته کرد و تعداد افراد بی‌علاقه به هر دو رشته را به دست آورد! $۳۰ - ۱۰ = ۲۰$

نکته ۷ برای به دست آوردن تعداد اعضایی که نه عضو A و نه عضو B هستند باید تعداد اعضای مجموعه‌ی مرجع را منهای تعداد اعضای $(A \cup B)$ کنیم.

$$n(A' \cap B') \underset{\text{دمورگان}}{=} n\left((A \cup B)'\right) = n(U) - n(A \cup B)$$

مثال ۳۷ مجموع تعداد اعضای A و B، ۵ برابر تعداد اعضای مشترکشان است. تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه چند برابر تعداد اعضای مشترکشان است؟

حل.

فرض مسئله $\qquad n(A) + n(B) = ۵ \times n(A \cap B)$

اصل شمول و عدم شمول $\qquad n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

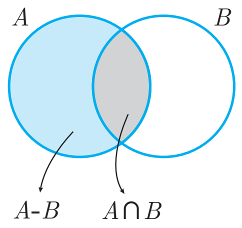
۱) اصل شمول و عدم شمول

$$= ۵n(A \cap B) - n(A \cap B) = ۴ \times n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)} = ۴$$

مثال ۳۸ مجموعه‌ی A، دارای ۲۰ عضو می‌باشد. تعداد عضوهای مجموعه‌ی B عددی است بین ۵ و ۱۰. مجموع تعداد اعضای $(A - B)$ و $(A \cap B)$ چقدر است؟

حل. تعداد اعضای مجموعه‌ی B نامشخص است. رسم نمودار ون می‌تواند کارگشا باشد.



با توجه به شکل می‌توان فهمید:

$$n(A - B) + n(A \cap B) = n(A)$$

$$\Rightarrow n(A - B) + n(A \cap B) = ۲۰$$

مثال ۳۹ از ۲۷ دانش‌آموز یک کلاس که هر یک حداقل به یکی از دروس ریاضی، فیزیک یا شیمی علاقه‌مندند، ۱۲ نفر به فیزیک، ۱۴ نفر به ریاضی، ۱۵ نفر به شیمی، ۵ نفر به ریاضی و فیزیک، ۶ نفر به ریاضی و شیمی و ۵ نفر به فیزیک و شیمی علاقه‌مندند.

(الف) چند نفر به هر ۳ درس علاقه‌مندند؟

(ب) چند نفر به ۲ درس علاقه‌مندند؟

حل. در این مسئله ۳ مجموعه باید در نظر گرفته شوند. چون هنوز رابطه‌ای برای ۳ مجموعه نداریم، رسم شکل می‌تواند کارگشا باشد.

A = مجموعه‌ی دانش‌آموزان علاقه‌مند به ریاضی　$n(A) = ۱۴$　$n(A \cap B) = ۵$

B = مجموعه‌ی دانش‌آموزان علاقه‌مند به فیزیک　$n(B) = ۱۲$　$n(A \cap C) = ۶$

C = مجموعه‌ی دانش‌آموزان علاقه‌مند به شیمی　$n(C) = ۱۵$　$n(B \cap C) = ۵$

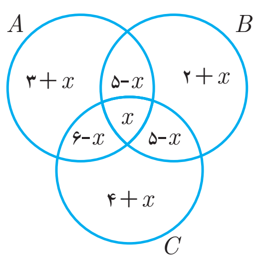
$n(A \cap B \cap C) = x$

تعداد دانش‌آموزانی که صرفاً به ریاضی و فیزیک علاقه‌مندند $= n(A \cap B) - x = ۵ - x$

تعداد دانش‌آموزانی که صرفاً به ریاضی و شیمی علاقه‌مندند $= n(A \cap C) - x = ۶ - x$

تعداد دانش‌آموزانی که صرفاً به فیزیک و شیمی علاقه‌مندند $= n(B \cap C) - x = ۵ - x$

دقت کنید که به عنوان مثال از تفاضل عدد ۱۴ و مجموع اعداد $(۵ - x)$ و x و $(۶ - x)$ عدد $۳ + x$ به دست آمده است.



$$\begin{aligned}(۳ + x) &+ (۵ - x) + x \\ &+ (۶ - x) + (۲ + x) \\ &+ (۵ - x) + (۴ + x) = ۲۷ \\ \Rightarrow x &= ۲\end{aligned}$$

(الف) ۲ نفر به هر ۳ درس علاقه‌مندند.

(ب) تعداد افرادی که صرفاً به دو درس علاقه‌مندند عبارتست‌از

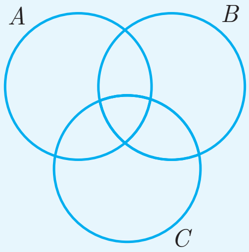
$$(۵ - x) + (۶ - x) + (۵ - x)$$

تعداد علاقه‌مندان فقط به ۲ درس $= ۱۶ - ۳x = ۱۶ - ۶ = ۱۰$

نکته ۸

برای سه مجموعه‌ی A و B و C و با توجه به نمودار ون می‌توان اصل شمول و عدم شمول را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C)\\ &\quad - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)\\ &\quad + n(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$



در واقع با جمع زدن اعضای A و B و C، اعضای $A \cap B$ و $A \cap C$ و $B \cap C$ دو بار شمرده می‌شوند و باید کم شوند ولی با کم کردن $A \cap B$ و $A \cap C$ و $B \cap C$ اعضای $A \cap B \cap C$ بیش از حد کم می‌شوند که باید مجدد اضافه شوند. البته توجه شود که ما با یک اصل سروکار داریم و نیاز به اثبات ندارد! ولی با روشی که در مثال ۳۴ استفاده شد، می‌توان این رابطه را اثبات کرد.

حال قسمت الف مثال ۳۹ را به کمک فرمول اخیر حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned}&n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)\\ &\Rightarrow ۲۷ = ۱۴ + ۱۲ + ۱۵ - ۵ - ۶ - ۵ + n(A \cap B \cap C)\\ &\Rightarrow n(A \cap B \cap C) = ۲ \Rightarrow \text{۲ نفر به هر ۳ درس علاقه‌مندند}\end{aligned}$$

روابط بین تعداد اعضای مجموعه‌ها (۲)

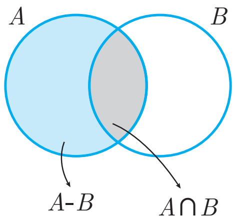
بیشتر بدانیم ۳

مشابه اصل شمول و عدم شمول که برای اجتماع و اشتراک و خود مجموعه‌ها بیان شد، می‌توان روابطی برای مجموعه‌هایی نظیر $A - B$، $A \Delta B$، $A' \cup B'$، $A' \cap B'$ و . . . نوشت. در این بخش به معرفی اجمالی این روابط به کمک نمودار ون می‌پردازیم. درک این روابط و به کارگیری مناسب آن‌ها می‌تواند در حل بسیاری از سوالات احتمال که در فصل هشتم مطرح می‌شوند، کمک کند.

تفاضل دو مجموعه

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

از این رابطه در حل مثال ۳۸ این بخش استفاده کردیم. برای درک بهتر تساوی، به شکل مقابل توجه کنید.



اجتماع متمم‌های دو مجموعه

$$n(A' \cup B') = n(U) - n(A \cap B)$$

برای درک این تساوی می‌توان همانند مورد قبل از نمودار ون استفاده کرد. همچنین می‌توان از قواعد جبر مجموعه‌ها برای اثبات آن بهره برد.

$$\begin{aligned}n(A' \cup B') &\underset{\text{دمورگان}}{=} n((A \cap B)') = n(U - (A \cap B)) = n(U) - n(U \cap (A \cap B))\\ &= n(U) - n(A \cap B)\end{aligned}$$

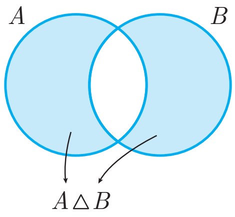
اشتراک متمم‌های دو مجموعه

$$n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B)$$

$$\begin{aligned}n(A' \cap B') &\underset{\text{دمورگان}}{=} n((A \cup B)') = n(U - (A \cup B)) = n(U) - n(U \cap (A \cup B))\\ &= n(U) - n(A \cup B)\end{aligned}$$

البته احتمالاً شما ترجیح می‌دهید از نمودار ون استفاده کنید!

تفاضل متقارن



$$n(A\Delta B) = n(A\cup B) - n(A\cap B)$$
$$= n(A) + n(B) - ۲n(A\cap B)$$

درک درستی تساوی به راحتی به کمک نمودار ون ممکن است.

مثال ۴۰

چند عدد ۳ رقمی داریم که

الف) بر ۵ یا ۷ بخش‌پذیر باشد؟

ب) فقط بر ۵ یا فقط بر ۷ بخش‌پذیر باشد؟

ج) نه بر ۵ و نه ۷ بخش‌پذیر باشد؟

د) همزمان بر ۵ و ۷ بخش‌پذیر نباشد؟

ه) بر ۵ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۷ بخش‌پذیر نباشد؟

حل. مجموعه‌ی مرجع اعداد ۳ رقمی است. $n(U) = ۹۹۹ - ۱۰۰ + ۱ = ۹۰۰$

مجموعه‌ی اعداد ۳ رقمی بخش‌پذیر بر ۵ را A و مجموعه‌ی اعداد ۳ رقمی بخش‌پذیر بر ۷ را B می‌نامیم. کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین اعداد ۳ رقمی عضو A عبارتند از ۱۰۰ و ۹۹۵. کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین اعداد ۳ رقمی عضو B عبارتند از ۱۰۵ و ۹۹۴.

$$n(A) = \frac{۹۹۵ - ۱۰۰}{۵} + ۱ = ۱۸۰$$
$$n(B) = \frac{۹۹۴ - ۱۰۵}{۷} + ۱ = ۱۲۸$$
تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۳۵ $= n(A\cap B) = \frac{۹۸۰ - ۱۰۵}{۳۵} + ۱ = ۲۶$

الف) چون از یا استفاده کرده باید $n(A\cup B)$ را به دست آوریم.

$$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B) = ۱۸۰ + ۱۲۸ - ۲۶ = ۲۸۲$$

ب) فقط بر ۵ یا فقط بر ۷ معادل «یای فارسی یا همان تفاضل متقارن است.

$$n(A\Delta B) = n(A\cup B) - n(A\cap B) = ۲۸۲ - ۲۶ = ۲۵۶$$

ج) نه بر ۵ و نه بر ۷ بخش‌پذیر باشد معادل $A'\cap B'$ است.

$$n(A'\cap B') = n(U) - n(A\cup B) = ۹۰۰ - ۲۸۲ = ۶۱۸$$

د) همزمان بر ۵ و ۷ بخش‌پذیر نباشد معادل $A'\cup B'$ است.

$$n(A'\cup B') = n(U) - n(A\cap B) = ۹۰۰ - ۲۶ = ۸۷۴$$

ه) بر ۵ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۷ نه. این معادل $A - B$ است.

$$n(A - B) = n(A) - n(A\cap B) = ۱۸۰ - ۲۶ = ۱۵۴$$

۱ مجموعه‌ی A را به کمک اعضا و مجموعه‌ی B را به کمک نمادهای ریاضی نمایش دهید. (یک نمایش برای B کافیست)

$$A=\{x^2y \mid x,y\in\mathbb{N},\ 2x+y\leq 5\}$$

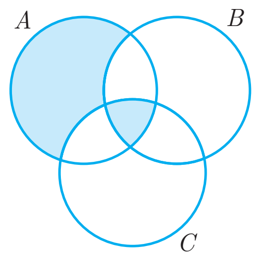
$$B=\{0,7,26,63,\cdots\}$$

۲ اگر تعداد اعضای مجموعه‌ای دو برابر شود، ۲۴۰ واحد به تعداد زیرمجموعه‌های آن افزوده می‌شود. مجموعه‌ی اوّل چند عضو یست؟

۳ مجموعه‌ی $A=\left\{\frac{y}{x} \mid x,y\in\mathbb{N},\ x\leq y\leq 4\right\}$ چند زیرمجموعه دارد؟

۴ اگر مجموعه‌های $A=\{-c^2+4, 1-\sqrt{c}\}$ و $B=\{a^2+b^2+4, d\}$ برابر باشند، حاصل $a+2b+3c+4d$ را به دست آورید.

۵ برای نمایش ون زیر یک عبارت مجموعه‌ای مثال بزنید.



۶ حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

(الف) $(0,+\infty)-((0,2]\cup(5,+\infty))$

(ب) $\mathbb{R}-(\mathbb{R}\cap(-1,+\infty))$

۷ اگر $A_i=[\sqrt{i}, i)$، حاصل عبارت زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$\bigcup_{i=2}^{1395} A_i$$

۸ مقدار a را طوری به دست آورید که عدد ۱۰ دقیقاً در وسط بازه‌ی $(a+3, 3a+1)$ قرار گیرد.

۹ متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را با دلیل مشخص کنید.

(الف) مجموعه‌ی مضارب ۴ به صورت $n^2+n+121$ $(n\in\mathbb{N})$

(ب) مجموعه‌ی اعداد اوّل که بیش از ۱۰۰ رقم دارند.

(ج) مجموعه‌ی اعداد گویای بین 10^{-6} و 10^{-5}

(د) مجموعه‌ی نقاط داخل یک مثلث مشخص

۱۰ اگر $A_i=(-i,i+1)$ و $U=\mathbb{R}$، حاصل عبارت زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$A'_1\cap A'_2\cap\cdots\cap A'_{1395}$$

۱۱ حاصل را تا حد امکان ساده کنید. (M مجموعه مرجع است)

(الف) $[(A'-A)'\cap M]\cup A'$

(ب) $[(B-C)\cup(C-B)\cup A]\cap A$

(ج) $(A\cap B\cap C)\cup(A'\cap C)\cup(B'\cap C)$

۱۲ درستی تساوی‌های زیر را به کمک جبر مجموعه‌ها اثبات کنید.

(الف) $A'-B=B'-A$

(ب) $(A-B)-C=(A-C)\cap(B'-C)$

(ج) $(A\cup B)-(B\cup C)=(A-B)-C$

(د) $(A\Delta B)'=A'\Delta B$

۱۳ اگر $A\subseteq B\subseteq C$ حاصل را تا حد امکان ساده کنید.

$$[(A\cap B')\cup(B\cap C')\cup(C\cap A')]\cup(A'\cup B'\cup C')'$$

۱۴ اگر مجموعه‌ی C ازمجموعه‌های A' و $(A-B)$ مجزا باشد حاصل عبارت $(A\cap C)-B$ را بیابید.

۱۵ اگر C و B' مجزا باشند، همچنین B و A' نیز مجزا باشند، راجع به A و B و C چه می‌توان گفت؟

۱۶ اگر $n(A-B)=10$ و $n(B-A)=8$ و $n(B)=14$ آنگاه $n(A\cup B)$ چند است؟

۱۷ تعداد اعضای مجموعه‌ی B دو برابر تعداد اعضای مجموعه‌ی A است. اگر $n(A\cup B)=30$ و $n(A\cap B)=6$، تعداد زیرمجموعه‌های B چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های A است؟

۱۸ در یک کلاس ۲۶ نفره، تمام دانش‌آموزان حداقل به یکی از دروس ریاضی، فیزیک یا شیمی علاقه‌مندند. اگر تعداد علاقه‌مندان دروس ریاضی، فیزیک و شیمی به ترتیب ۱۸ و ۱۳ و ۷ نفر باشد و هیچ کسی همزمان به دروس شیمی و فیزیک علاقه‌مند نباشد و نیز تعداد کسانی که به ریاضی و فیزیک علاقه‌مندند دو برابر تعداد کسانی باشد که به ریاضی و شیمی علاقه‌مندند، مشخص کنید چند نفر فقط به یک درس علاقه‌مندند؟

۱ (x,y)های مورد نظر عبارتند از $(۱,۱)$ و $(۱,۲)$ و $(۱,۳)$ و $(۲,۱)$

$$A=\{۱^۲\times ۱, ۱^۲\times ۲, ۱^۲\times ۳, ۲^۲\times ۱\}=\{۱,۲,۳,۴\}$$

اگر اعضای مجموعه‌ی B را با عدد ۱ جمع کنیم، حاصل مکعب کامل خواهد شد. پس اعضا به صورت $n^۳-۱$ هستند.

$$B=\{n^۳-۱ | n\in\mathbb{N}\}$$

۲ تعداد اعضای مجموعه را از n به ۲n می‌رسانیم. تعداد زیرمجموعه‌ها از ۲^n به $۲^{۲n}$ افزایش می‌یابد.

$$۲^{۲n}=۲^n+۲۴۰ \Rightarrow ۲^{۲n}-۲^n-۲۴۰=۰$$

قرار می‌دهیم $۲^n=A$

$$A^۲-A-۲۴۰=۰ \Rightarrow (A-۱۶)(A+۱۵)=۰$$

$A=-۱۵$　غ‌ق‌ق

$$A=۱۶ \Rightarrow ۲^n=۱۶ \Rightarrow n=۴$$

۳ (x,y)های مورد نظر عبارتند از $(۱,۱)$ و $(۱,۲)$ و $(۲,۲)$ و $(۱,۳)$ و $(۲,۳)$ و $(۳,۳)$ و $(۱,۴)$ و $(۲,۴)$ و $(۳,۴)$ و $(۴,۴)$

$$A=\left\{\frac{۱}{۱},\frac{۲}{۱},\frac{۲}{۲},\frac{۳}{۱},\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۳},\frac{۴}{۱},\frac{۴}{۲},\frac{۴}{۳},\frac{۴}{۴}\right\}=\left\{۱,۲,۳,\frac{۳}{۲},۴,\frac{۴}{۳}\right\}$$

مجموعه‌ی A، ۶۴ زیرمجموعه دارد.

۴

$$a^۲+b^۲\geq ۰ \overset{+۴}{\Rightarrow} a^۲+b^۲+۴\geq ۴$$

$$-\sqrt{c}\leq ۰ \Rightarrow ۱-\sqrt{c}\leq ۱$$

عبارات $a^۲+b^۲+۴$ و $۱-\sqrt{c}$ نمی‌توانند با هم برابر باشند پس $a^۲+b^۲+۴=-c^۲+۴$ و $۱-\sqrt{c}=d$

از طرفی $a^۲+b^۲+۴$ حداقل برابر ۴ است در حالی که $-c^۲+۴$ حداکثر برابر ۴ می‌باشد پس تنها حالت برابری این دو آن است که هر ۲ برابر ۴ باشند.

$$a^۲+b^۲+۴=-c^۲+۴=۴ \Rightarrow a=b=c=۰$$

$$۱-\sqrt{c}=d \Rightarrow d=۱$$

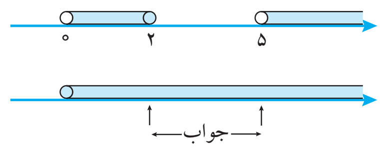
$$a+۲b+۳c+۴d=۴$$

۵ هاشور بزرگ قسمت‌هایی از A است که عضو B یا C نیستند یعنی $A-(B\cup C)$ و هاشور کوچک اشتراک سه مجموعه است.

$$\text{عبارت مورد نظر}=[A-(B\cup C)]\cup(A\cap B\cap C)$$

۶

(الف)



$$(۰,+\infty)-((۰,۲]\cup(۵,+\infty))=(۲,۵]$$

(ب) $$\mathbb{R}-\underbrace{(\mathbb{R}\cap(-۱,+\infty))}_{(-۱,+\infty)}=$$

$$\mathbb{R}-(-۱,+\infty)=(-\infty,-۱]$$

۷

$$A_۲=[\sqrt{۲},۲)$$

$$A_۳=[\sqrt{۳},۳)$$

$$\vdots$$

$$A_{۱۳۹۵}=[\sqrt{۱۳۹۵},۱۳۹۵)$$

$$A_۲\cup A_۳\cup\cdots\cup A_{۱۳۹۵}=[\sqrt{۲},۱۳۹۵)$$

۸ عدد وسط بازه (مرکز بازه)، میانگین اعداد ابتدا و انتهای آن است.

$$\frac{a+۳+۳a+۱}{۲}=۱۰ \Rightarrow ۲a+۲=۱۰ \Rightarrow a=۴$$

۹

(الف) می‌توان عبارت مورد نظر را به صورت $n(n+۱)+۱۲۱$ نوشت. $n(n+۱)$ یعنی حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی همواره زوج است و جمع آن با ۱۲۱ عددیست فرد. پس نمی‌تواند مضرب ۴ باشد. مجموعه‌ی مورد نظر تهی و متناهی است.

(ب) مجموعه‌ی اعداد اول نامتناهی است و چون اعداد اوّل با ۱۰۰ رقم یا کمتر محدود هستند پس تعداد اعداد اوّل با بیش از ۱۰۰ رقم بی‌شمار است و مجموعه نامتناهی است.

(ج) مجموعه‌ی اعداد گویای بین هر دو عدد دلخواه، همواره نامتناهی است.

(د) تعداد نقاط داخل مثلث مشخص بی‌شمار است و مجموعه نامتناهی است.