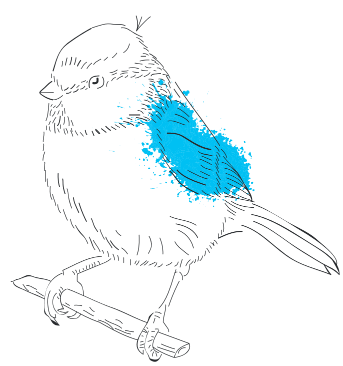
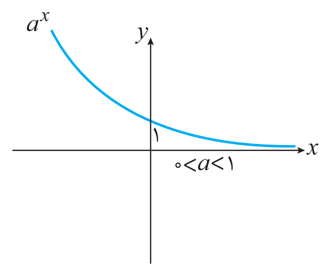
فصل سوم

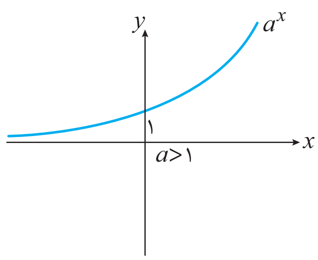
توابع نمایی و لگاریتمی



تعریف هر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=a^x$ را که در آن a عددی مثبت و مخالف ۱ است، یک تابع نمایی می‌نامیم.

نمودار این تابع به یکی از دو صورت زیر است:





تست ۱. به ازای چند مقدار صحیح k، تابع $y=(۵-k^۲)^x$ یک تابع نمایی است؟

۱) ۵ مقدار ۲) ۴ مقدار ۳) ۳ مقدار ۴) ۲ مقدار

پاسخ: ۱ ۲ **۳** ۴

با توجه به تعریف تابع نمایی باید $۵-k^۲$، مثبت و مخالف ۱ باشد.

$$\begin{cases} ۵-k^۲>۰ \Rightarrow k^۲<۵ \\ ۵-k^۲\neq ۱ \Rightarrow k^۲\neq ۴ \end{cases} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=۰,\pm ۱$$

مثال ۱ یک توده معین از باکتری در هر دقیقه، دو برابر می‌شود. اگر در ابتدا ۲۰ باکتری موجود باشد. جرم توده پس از t دقیقه چقدر است؟

پاسخ: چگونگی افزایش تعداد باکتری‌ها به صورت الگوی زیر است:

t برحسب دقیقه	۰	۱	۲	۳	....
تعداد باکتری	۲۰	۲۰×۲	۲۰×۲^۲	۲۰×۲^۳	....

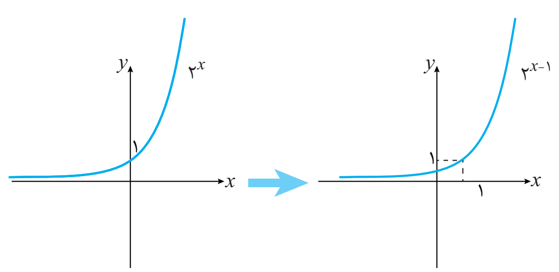
طبق این الگو، پس از t دقیقه، تعداد باکتری‌ها برابر ۲۰×۲^t است، که به صورت تابع $f(t)=۵\times ۲^{t+۲}$ قابل بیان است.

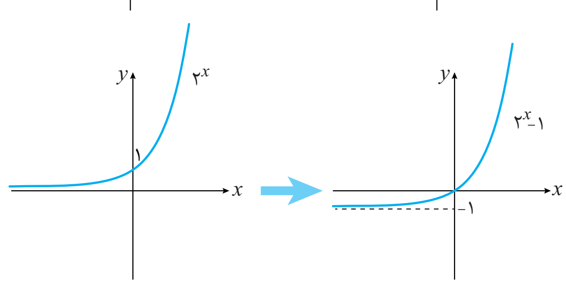
تذکر یک تابع به صورت $y=ka^x$ $(k\neq ۰\,,\ a\neq ۱,\ a>۰)$ رفتار نمایی دارد. مانند $y=۳^{x-۱}$ و $y=\frac{۲}{۵}\times ۳^x$

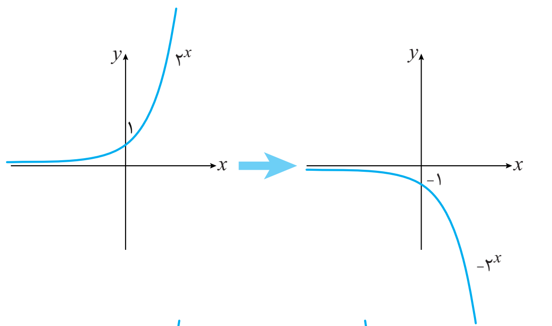
مثال ۲ نمودار توابع زیر را به کمک انتقال رسم کنید.

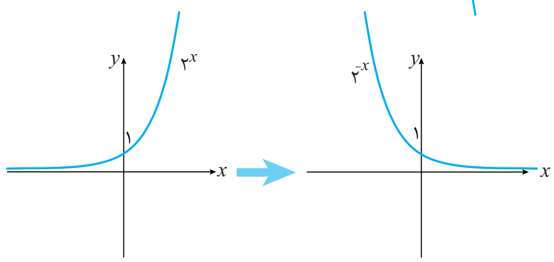
۱) $y=۲^{x-۱}$ ۲) $y=۲^x-۱$ ۳) $y=-۲^x$ ۴) $y=۲^{-x}$

پاسخ: برای رسم $f(x-۱)$، نمودار $f(x)$ را یک واحد به راست منتقل می‌کنیم. برای رسم $f(x)-۱$، نمودار $f(x)$ را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم. برای رسم $-f(x)$، نمودار $f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. برای رسم $f(-x)$، نمودار $f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.









تذکر

الف) برای رسم $y = a^{-x}$ دو گونه می‌توان رفتار کرد.

۱ نمودار $y = (\frac{۱}{a})^x$ را رسم کنیم.

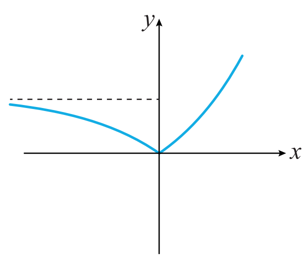
۲ نمودار $y = a^x$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم.

ب) برای رسم $y = a^{x+k}$ دو گونه می‌توان رفتار کرد.

۱ نمودار $y = a^x$ را k واحد به چپ (یا راست) منتقل کنیم.

۲ نمودار $y = a^x$ را به اندازه‌ی ضریب a^k، در جهت محور yها منبسط یا منقبض کنیم.

تست ۲. نمودار کدام تابع زیر به صورت مقابل است؟



۱) $y = ۱ - ۲^{|x|}$

۲) $y = ۱ - ۲^{-x}$

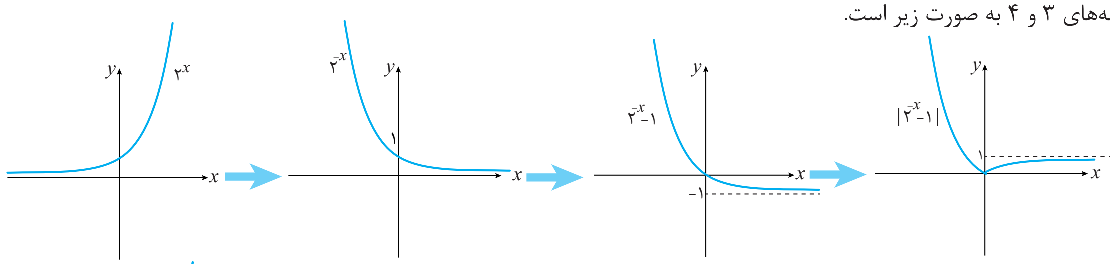
۳) $y = |۲^{-x} - ۱|$

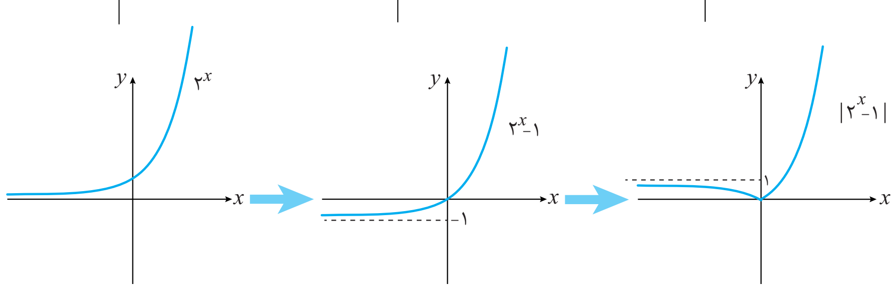
۴) $y = |۲^{x} - ۱|$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ **۴**

رد گزینه‌ی ۱: $x = ۱ \Rightarrow y < ۰$ رد گزینه‌ی ۲: $x = -۱ \Rightarrow y < ۰$

نمودار گزینه‌های ۳ و ۴ به صورت زیر است.





پس گزینه‌ی ۴ صحیح است.

خواص تابع نمایی

اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف ۱ و x و y دو عدد حقیقی دلخواه باشند آن‌گاه:

۱) $a^{۰}=۱$

۲) $a^{-x}=(\frac{۱}{a})^{x}=\frac{۱}{a^{x}}$

۳) $(a^{x})^{y}=a^{xy}=(a^{y})^{x}$

۴) $a^{x}.a^{y}=a^{x+y}$

۵) $\frac{a^{x}}{a^{y}}=a^{x-y}$

۶) $(ab)^{x}=a^{x}b^{x}$

۷) $(\frac{a}{b})^{x}=\frac{a^{x}}{b^{x}}$

۸) $a^{x}>۰$

تست ۳. نمودارهای دو تابع $f(x)=۴^{x}$ و $g(x)=\frac{۳}{۲}+(\frac{۱}{۲})^{۲x}$ در نقطه‌ی A متقاطع‌اند. فاصله‌ی A از مبدأ چقدر است؟

۱) $\sqrt{۱۷}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۱۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$

پاسخ: ۱ **۲** ۳ ۴

برای یافتن نقاط برخورد، معادله‌ی $f(x)=g(x)$ را حل می‌کنیم.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow ۴^{x}=\frac{۳}{۲}+(\frac{۱}{۲})^{۲x}\Rightarrow (۲^{۲})^{x}=\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲^{۲x}}\Rightarrow ۲^{۲x}=\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲^{۲x}}$$

با تغییر متغیر $۲^{۲x}=t$ ، معادله را حل می‌کنیم.

$$t=\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{t}\Rightarrow ۲t^{۲}-۳t-۲=۰\xrightarrow{t>۰}t=۲\Rightarrow ۲^{۲x}=۲\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow f(\frac{۱}{۲})=۲$$

پس نقطه‌ی برخورد، $A(\frac{۱}{۲}\,,\,۲)$ است که فاصله‌ی آن از مبدأ برابر $\sqrt{\frac{۱}{۴}+۴}=\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$ است.

نکته با توجه به نمودار توابع نمایی، گزاره‌های زیر برقرار است:

۱ دامنه‌ی تابع $y=a^{x}$، $\mathbb{R}$ و برد آن اعداد حقیقی مثبت است.

۲ توابع نمایی یک به یک هستند.

۳ در تابع $y=a^{x}$، اگر $a>۱$، با افزایش مقدار x، مقدار y افزایش می‌یابد (گوییم تابع در این حالت صعودی است).

۴ در تابع $y=a^{x}$، اگر $۰<a<۱$، با افزایش مقدار x، مقدار y کاهش می‌یابد (گوییم تابع در این حالت نزولی است).

نتیجه:

۱) $x<y\xleftrightarrow{a>۱}a^{x}<a^{y}$

۲) $x<y\xleftrightarrow{۰<a<۱}a^{x}>a^{y}$

مثال ۳ نامعادله‌ی $(\frac{۱}{۲})^{۱-x^{۲}}<۴^{x+۱}$ را حل کنید.

پاسخ: ابتدا نامعادله را کمی ساده می‌کنیم و سپس آن را حل می‌کنیم.

$$(\frac{۱}{۲})^{۱-x^{۲}}<۴^{x+۱}\Rightarrow (۲^{-۱})^{۱-x^{۲}}<(۲^{۲})^{x+۱}\Rightarrow ۲^{x^{۲}-۱}<۲^{۲x+۲}\Rightarrow x^{۲}-۱<۲x+۲$$

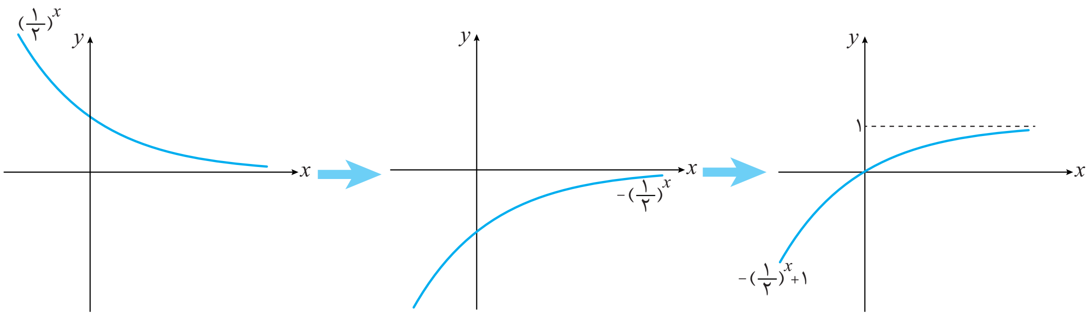
$$\Rightarrow x^{۲}-۲x-۳<۰\Rightarrow -۱<x<۳$$

تست ٤. اگر $f(x)=۱-(\frac{۱}{۲})^{x}$ آن‌گاه دامنه‌ی تابع $f=\sqrt{x\,f(x)}$ کدام است؟

۱) $[۰\,,+\infty)$ ۲) $(-\infty\,,۰]$ ۳) $(-\infty\,,+\infty)$ ۴) $[-۱\,,۱]$

پاسخ: ۱ ۲ **۳** ۴

روش اول: نمودار تابع $f(x)$ را طی مراحل زیر، رسم می‌کنیم.



نمودار تابع $f(x)$ از ناحیه‌ی اول و سوم (و مبدأ) عبور می‌کند. پس داریم:

$$\begin{cases} x \geq ۰ \xrightarrow{\text{ناحیه اول}} f(x) \geq ۰ \Rightarrow x\,f(x) \geq ۰ \\ x < ۰ \xrightarrow{\text{ناحیه سوم}} f(x) < ۰ \Rightarrow x\,f(x) \geq ۰ \end{cases}$$

در واقع تمام اعداد حقیقی عضو دامنه هستند.

روش دوم: با توجه به ویژگی‌های تابع نمایی داریم:

$$g = x\,f(x) = x\left(۱-(\tfrac{۱}{۲})^x\right) = \frac{x(۲^x-۱)}{۲^x}$$

اگر $x>۰$ آن‌گاه $۲^x>۱$ پس حاصل g همواره مثبت است. یعنی کل اعداد مثبت عضو دامنه‌اند.

اگر $x<۰$ آن‌گاه $۲^x<۱$ پس مجدداً حاصل g همواره مثبت است. یعنی کل اعداد منفی عضو دامنه‌اند.

بدیهی است که $x=۰$ نیز عضو دامنه است. بنابراین دامنه برابر $\mathbb{R}$ است.

لگاریتم و تابع لگاریتمی

تابع نمایی $y=a^x$ یک تابع یک به یک و در نتیجه وارون‌پذیر است. وارون تابع نمایی را تابع لگاریتمی می‌نامیم.

تعریف **اگر** $x>۰$ و $a>۰$ و $a\neq۱$ **آن‌گاه**

$$y=\log_a^x \Leftrightarrow x=a^y$$

به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$۲^۳=۸ \Rightarrow \log_۲^۸=۳$$

$$۱۰^{-۲}=۰/۰۱ \Rightarrow \log_{۱۰}^{۰/۰۱}=-۲$$

$$۲^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۲} \Rightarrow \log_۲^{\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۲}$$

تذکر

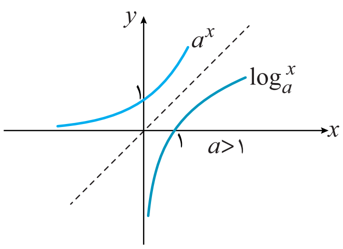
منظور از $\log_b^a$ آن است که b به توان چه عددی برسد تا برابر a گردد. به‌طور مثال منظور از $\log_۲^{۶۴}$ آن است که ۲، به توان چند برسد برابر ۶۴ می‌شود که جواب آن ۶ است پس $\log_۲^{۶۴}=۶$. و یا منظور از $\log_{۱۰}^{۱۰۰}$ آن است که ۱۰، به توان چند برسد برابر ۱۰۰ می‌شود که جواب آن ۲ است پس $\log_{۱۰}^{۱۰۰}=۲$.

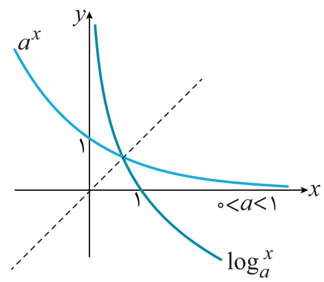
تذکر

لگاریتمی که پایه آن ۱۰ باشد را به صورت $\log x$ نشان می‌دهیم.

نمودار تابع لگاریتمی

نمودار تابع $y=\log_a^x$ و معکوس آن یعنی $y=a^x$ نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم قرینه‌اند. بنابراین نمودار تابع لگاریتمی، به یکی از دو صورت زیر است:





مثال ٤ **نمودار توابع زیر را رسم کنید.**

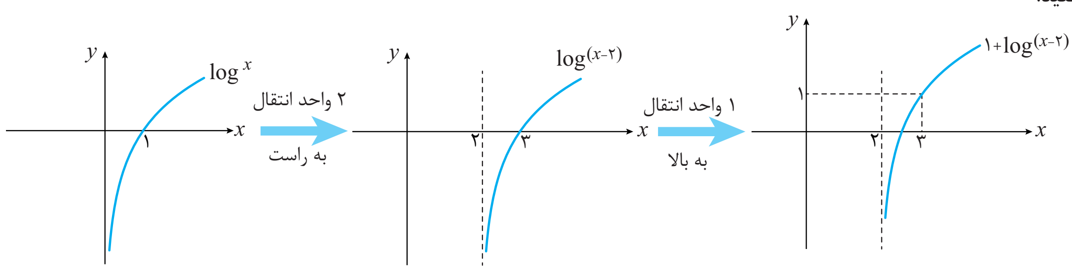
۱) $y=۱+\log(x-۲)$

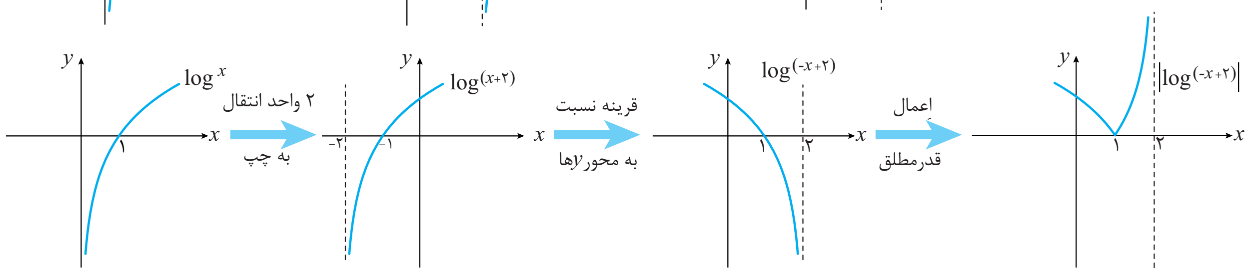
۲) $y=|\log(۲-x)|$

پاسخ: برای رسم نمودار تابع $f(-x)$، کافی است نمودار $f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم.

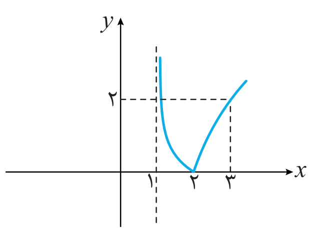
برای رسم نمودار تابع $-f(x)$، کافی است نمودار $f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

به مراحل رسم توجه کنید:





تست ۵. **نمودار تابع $y=a|\log_۲^{(x+b)}|$ به صورت مقابل است. حاصل $a+b$ کدام است؟**



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به نمودار $y=\log_a^x$، به ازای $x=۱$ مقدار y برابر صفر است، پس داریم:

$$\begin{cases} x=۲ \\ y=۰ \end{cases} \Rightarrow ۰=a|\log_۲^{(۲+b)}| \Rightarrow \log_۲^{(۲+b)}=۰ \Rightarrow ۲+b=۱ \Rightarrow b=-۱$$

به ازای $x=۳$ مقدار y برابر ۲ است، پس داریم:

$$\begin{cases} x=۳ \\ y=۲ \end{cases} \Rightarrow ۲=a|\log_۲^{(۳-۱)}| \Rightarrow ۲=a|\log_۲^۲| \Rightarrow ۲=a$$

بنابراین $a+b=۱$ است.

با توجه به نمودار لگاریتم، می‌توانیم به نتایج زیر برسیم:

$۰<a<۱$	$a>۱$
$x_۱<x_۲ \Rightarrow \log_a^{x_۱} > \log_a^{x_۲}$ $۰<x<۱ \Rightarrow \log_a^{x} > ۰$ $x>۱ \Rightarrow \log_a^{x} < ۰$ تابع $y=\log_a^{x}$ یک به یک است.	$x_۱<x_۲ \Rightarrow \log_a^{x_۱} < \log_a^{x_۲}$ $۰<x<۱ \Rightarrow \log_a^{x} < ۰$ $x>۱ \Rightarrow \log_a^{x} > ۰$ تابع $y=\log_a^{x}$ یک به یک است.

نکته اگر $x>۰$ آن‌گاه: $\log_a^{x} < b \Rightarrow \begin{cases} x < a^b & a>۱ \\ x > a^b & ۰<a<۱ \end{cases}$

تست ۶. دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{۱-log(x^۲-۳x)}$ کدام است؟

۱) $[-۲,۰)\cup(۳,۵]$
۲) $[-۲,۰]\cup(۳,۵)$
۳) $[-۲,۳)$
۴) $(۰,۵]$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ **۴**

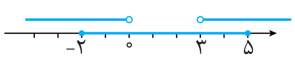
شرط اول آن است که $x^۲-۳x>۰$ باشد پس $x<۰$ یا $x>۳$ است.

شرط دوم آن است که $۱-\log(x^۲-۳x)\geq ۰$ باشد. با توجه به نکته‌ی بالا داریم:

$$۱-\log(x^۲-۳x)\geq ۰ \Rightarrow \log(x^۲-۳x)\leq ۱ \Rightarrow x^۲-۳x\leq ۱۰^۱ \Rightarrow -۲\leq x\leq ۵$$

دامنه برابر اشتراک جواب نامساوی‌های ($x<۰$ یا $x>۳$) با نامساوی‌های $-۲\leq x\leq ۵$ است.

$$D_f=[-۲,۰)\cup(۳,۵]$$



ویژگی‌های لگاریتم

برخی از ویژگی‌های لگاریتم را در جدول زیر مشاهده می‌کنید. دقت کنید در هر کدام از ویژگی‌ها، عبارتی نظیر log_b^{a} زمانی تعریف شده است که $a>۰$، $b>۰$ و $b\neq ۱$ باشد.

۱	$\log_a^{۱}=۰$	۲	$\log_a^{a}=۱$
۳	$\log_a^{bc}=\log_a^{b}+\log_a^{c}$	۴	$\log_a^{\frac{b}{c}}=\log_a^{b}-\log_a^{c}$
۵	$\log_b^{a^n}=n\log_b^{a}$	۶	$\log_{b^m}^{a}=\frac{۱}{m}\log_b^{a}$
۷	$\log_b^{a}=\dfrac{\log_c^{a}}{\log_c^{b}}=\dfrac{\log a}{\log b}$	۸	$a^{\log_a^{b}}=b$
۹	$\log_b^{a}=\dfrac{۱}{\log_a^{b}}$	۱۰	$a^{\log_c^{b}}=b^{\log_c^{a}}$
۱۱	$\log_b^{\frac{۱}{a}}=-\log_b^{a}$		

مثال ۵ **با فرض $a=\log ۲$ و $b=\log ۳$، حاصل عبارات زیر را بیابید.**

۱) $\log ۵$ ۲) $\log ۰/۷۵$ ۳) $\log ۳۶\sqrt{۲}$

پاسخ: به کمک ویژگی‌های لگاریتم، هر یک از عبارات را محاسبه می‌کنیم شماره‌ی ویژگی به کار رفته، در بالای تساوی‌ها نوشته شده است.

$$۱)\ \log ۵=\log\frac{۱۰}{۲}\overset{۴}{=}\log ۱۰-\log ۲\overset{۲}{=}۱-a$$

$$۲)\ \log ۰/۷۵=\log\frac{۷۵}{۱۰۰}=\log\frac{۳}{۴}\overset{۴}{=}\log ۳-\log ۴=\log ۳-\log ۲^۲\overset{۵}{=}\log ۳-۲\log ۲=b-۲a$$

$$۳)\log ۳۶\sqrt{۲}=\log(۳^۲\times ۲^۲)\overset{۳}{=}\log ۳^۲+\log ۲^{\frac{۵}{۲}}\overset{۵}{=}۲\log ۳+\frac{۵}{۲}\log ۲=۲b+\frac{۵}{۲}a$$

تست ۷. **با فرض $a=\log ۳$ و $b=\log ۱۸$ مقدار $\log ۲۴$ کدام است؟**

۱) $۵b-۳a$ ۲) $۳b-۵a$ ۳) $۳b+۵a$ ۴) $۵b+۳a$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا سعی می‌کنیم $\log ۲$ را برحسب a و b به‌دست آوریم:

$$b=\log ۱۸=\log(۳^۲\times ۲)=\log ۳^۲+\log ۲=۲\log ۳+\log ۲=۲a+\log ۲$$

پس $\log ۲=b-۲a$ و حالا $\log ۲۴$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\log ۲۴=\log(۲^۳\times ۳)=\log ۲^۳+\log ۳=۳\log ۲+\log ۳=۳(b-۲a)+a=۳b-۵a$$

تست ۸. **اگر $\log_y^x=۲$ و $\log_z^x=۳$، حاصل $\log_{yz}^x$ کدام است؟**

۱) ۶ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۶}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به رابطه‌ی $\log_b^a=\frac{۱}{\log_a^b}$ داریم:

$$\left.\begin{aligned}\log_y^x=۲\Rightarrow\log_x^y=\frac{۱}{۲}\\ \log_z^x=۳\Rightarrow\log_x^z=\frac{۱}{۳}\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{جمع}}\log_x^y+\log_x^z=\frac{۵}{۶}\Rightarrow\log_x^{yz}=\frac{۵}{۶}$$

بنابراین $\log_{yz}^x=\frac{۶}{۵}$ است.

تست ۹. **اگر $y=\log x$ باشد، حاصل $x^{\log ۲}$ کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۲}y$ ۲) $۲y$ ۳) $y^۲$ ۴) ۲^y

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

$$y=\log x\Rightarrow x=۱۰^y$$

در عبارت $x^{\log ۲}$، به‌جای x، ۱۰^y را جایگزین می‌کنیم:

$$x^{\log ۲}=(۱۰^y)^{\log ۲}=۱۰^{y\log ۲}=۱۰^{\log ۲^y}=۲^y$$

دقت کنید که در تساوی آخر از فرمول $a^{\log_a^b}=b$ استفاده کردیم.

تست ۱۰. در دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_n = \log_{3}^{\frac{2n-1}{2n+1}}$، مجموع چند جمله‌ی اول برابر ۳- است؟

۱) ۱۳   ۲) ۱۴   ۳) ۱۶   ۴) ۱۷

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

n جمله‌ی اول دنباله را می‌نویسیم و باهم جمع می‌کنیم.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \log_3^{\frac{1}{3}} + \log_3^{\frac{3}{5}} + \log_3^{\frac{5}{7}} + \cdots + \log_3^{\frac{2n-1}{2n+1}} =$$

$$= (\log_3^1 - \underbrace{\log_3^3) + (\log_3^3}_{\text{جمع}=0} - \underbrace{\log_3^5) + (\log_3^5}_{\text{جمع}=0} - \underbrace{\log_3^7) + \cdots}_{\text{جمع}=0} + \underbrace{\log_3^{(2n-1)}}_{\text{جمع}=0} - \log_3^{(2n+1)}$$

$$= \log_3^1 - \log_3^{(2n+1)} = -\log_3^{(2n+1)}$$

پس $-3 = -\log_3(2n+1)$ است و از آن‌جا $2n+1 = 3^3$ و در نتیجه $n = 13$ است.

نکته تعداد ارقام عدد طبیعی n برابر $[\log n] + 1$ است.

مثال ۶ با فرض $\log 2 = 0/301$ تعیین کنید که 2^{500} چند رقمی است.

پاسخ:

روش اول: مطابق فرمول بالا داریم:

$$\text{تعداد ارقام} = \left[\log 2^{500}\right] + 1 = [500 \log 2] + 1 = [500 \times 0/301] + 1 = 151$$

روش دوم: این روش همان اساس اثبات فرمولی است که در نکته‌ی بالا بیان کردیم. فرض کنید 2^{500} یک عدد n رقمی باشد پس 2^{500} بین دو عدد 10^{n-1} و 10^n است (مثلاً یک عدد دو رقمی بین 10^1 و 10^2 است).

$$10^{n-1} \le 2^{500} < 10^n \xrightarrow{\text{log می گیریم}} \log 10^{n-1} \le \log 2^{500} < \log 10^n$$

$$\Rightarrow n - 1 \le 500 \log 2 < n$$

$$\Rightarrow n - 1 \le 500 \times 0/301 < n$$

$$\Rightarrow n - 1 \le 150/5 < n$$

تنها عدد طبیعی که در رابطه‌ی بالا صدق می‌کند، $n = 151$ است.

معادلات لگاریتمی

معادلات لگاریتمی، معادلاتی هستند که در یک طرف یا در طرفین تساوی، لگاریتم قرار دارد. به دلیل یک به یک بودن تابع $y = \log_a^x$، برای حل معادلات لگاریتمی، از نکته‌ی زیر استفاده می‌کنیم.

نکته

$$\log_a^x = \log_a^y \Leftrightarrow x = y \quad a > 0\ ,\ a \neq 1$$

در حل معادلات لگاریتمی، حتماً به دامنه‌ی تعریف توجه کنید.

مثال ۷ معادله‌ی $\log_3(x^2 - 1) = 1 + \log_3(x+3)$ را حل کنید.

پاسخ: ابتدا تمام لگاریتم‌ها را به یک طرف تساوی منتقل می‌کنیم:

$$\log_3(x^2 - 1) - \log_3(x+3) = 1 \Rightarrow \log_3 \frac{x^2 - 1}{x+3} = 1 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x+3} = 3^1$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5, -2$$

با آزمایش جواب‌ها در معادله‌ی اولیه، معلوم می‌شود که هر دو جواب قابل قبول است زیرا داخل لگاریتم‌ها منفی نمی‌شود.

تست ۱۱. **اگر** $\log(x-۱)=۳\log ۲-\log(x-۳)$، **حاصل** $\log_۳(x-۲)$ **کدام است؟**

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) -۱　　۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به ویژگی‌های لگاریتم، سمت راست تساوی را ساده می‌کنیم:

$$\log(x-۱)=۳\log ۲-\log(x-۳)=\log ۲^۳-\log(x-۳)=\log\frac{۸}{x-۳}$$

حال با حذف $\log$ از دو طرف تساوی داریم:

$$x-۱=\frac{۸}{x-۳}\Rightarrow x^۲-۴x+۳=۸\Rightarrow (x-۲)^۲=۹$$

از دو طرف تساوی $\log$ در پایه ۳ می‌گیریم:

$$\log_۳^{(x-۲)^۲}=\log_۳^۹\Rightarrow ۲\log_۳^{(x-۲)}=۲\Rightarrow \log_۳^{(x-۲)}=۱$$

تست ۱۲. **ریشه‌ی مثبت معادله‌ی** $x+۲=\log_۲^{(۴^x+۳)}$ **کدام است؟**

۱) ۱　　۲) $\log_۲^۳$　　۳) ۳　　۴) $۲\log_۲^۳$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به تعریف لگاریتم داریم:

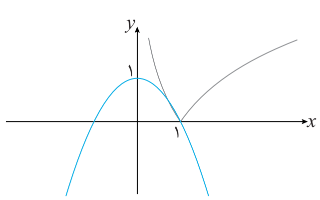
$$\log_۲^{(۴^x+۳)}=x+۲\Rightarrow ۴^x+۳=۲^{x+۲}\Rightarrow (۲^x)^۲+۳=۴\times ۲^x\xrightarrow{t=۲^x}$$

$$t^۲+۳=۴t\Rightarrow t^۲-۴t+۳=۰\Rightarrow\begin{cases}t=۱\Rightarrow ۲^x=۱\Rightarrow x=۰\\ t=۳\Rightarrow ۲^x=۳\Rightarrow x=\log_۲^۳\end{cases}$$

تذکر

برای حل بعضی از معادلات لگاریتمی می‌توانیم از روش هندسی (رسم نمودار) استفاده کنیم.

مثال ۸ **معادله‌ی** $x^۲+|\log_۲^x|=۱$ **چند جواب دارد؟**



پاسخ: ابتدا معادله را به صورت $|\log_۲^x|=۱-x^۲$ می‌نویسیم، سپس دو طرف تساوی را رسم می‌کنیم.

با توجه به شکل، دو تابع یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند پس معادله دو جواب دارد. (جواب‌ها برابر $x=۱$ و $x=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ است که البته از روی نمودار، جواب $x=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$، قابل محاسبه نیست.)

مثال‌های کاربردی

در برخی مدل‌سازی‌ها، مانند محاسبه‌ی شدت زلزله، محاسبه‌ی نیمه عمر عناصر رادیواکتیو و پیش‌بینی تعداد جمعیت یک جامعه به یک معادله‌ی لگاریتمی می‌رسیم. در این قسمت نمونه‌هایی از این مسائل را حل می‌کنیم.

مسأله زلزله

برای اندازه‌گیری بزرگی زمین لرزه از مقیاس ریشتر استفاده می‌کنند که میزان انرژی آزاد شده در زلزله را نشان می‌دهد.

اگر بزرگی زمین لرزه برابر M در مقیاس ریشتر و انرژی آزاد شده برابر E در مقیاس ارگ (Erg) باشد، آن‌گاه رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\log E=۱۱/۸+۱/۵M$$

تست ۱۳. **اگر $E_۱$ انرژی آزاد شده در یک زلزله‌ی ۸ ریشتری و $E_۲$ انرژی آزاد شده در یک زلزله‌ی ۶ ریشتری باشد آن‌گاه $\frac{E_۱}{E_۲}$ کدام است؟**

۱) $۱۰^۲$ ۲) $۱۰^۳$ ۳) $۱۰^۴$ ۴) $۱۰^۵$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به رابطه‌ی بالا داریم:

$$\begin{cases} \log E_۱ = ۱۱/۸ + ۱/۵M_۱ = ۱۱/۸ + ۱/۵ \times ۸ = ۲۳/۸ \\ \log E_۲ = ۱۱/۸ + ۱/۵M_۲ = ۱۱/۸ + ۱/۵ \times ۶ = ۲۰/۸ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log E_۱ - \log E_۲ = ۳ \Rightarrow \log \frac{E_۱}{E_۲} = ۳ \Rightarrow \frac{E_۱}{E_۲} = ۱۰^۳ = ۱۰۰۰$$

تذکر

هر یک ارگ تقریباً $۱۰^{-۷}$ ژول است.

مسأله‌ی نیمه‌ی عمر

مدت زمانی که طول می‌کشد تا جرم یک ماده هسته‌ای نصف شود را نیمه‌ی عمر آن ماده می‌نامند. به طور مثال اگر نیمه‌ی عمر ماده‌ای ۵ سال و جرم اولیه‌ی آن ۱۰۰ میلی‌گرم باشد آن‌گاه بعد از ۵ سال جرم آن ۵۰ میلی‌گرم خواهد بود.

اگر جرم اولیه‌ی ماده‌ای $m_۰$ و نیمه‌ی عمر آن T باشد، آن‌گاه جرم آن پس از مدت زمان t، برابر است با:

$$m(t) = m_۰ \times ۲^{-\frac{t}{T}}$$

تست ۱۴. **از یک جسم فسیل ۲۸/۷ درصد از کربن معمولی آن باقی‌مانده است. اگر نیمه‌ی عمر کربن ۵/۵ قرن باشد، قدمت این جسم فسیلی چند قرن است؟** $(\log ۲/۸۷ = ۰/۴۵۸۲ \,,\ \log ۲ = ۰/۳۰۱)$

۱) ۹/۹ ۲) ۱۰/۸ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه‌ی ۱

اگر $m_۰$ کربن اولیه باشد آن‌گاه $m(t) = \frac{۲۸/۷}{۱۰۰} m_۰$

$$m(t) = m_۰ \times ۲^{\frac{-t}{۵/۵}} \Rightarrow \frac{۲۸/۷}{۱۰۰} m_۰ = m_۰ \times ۲^{\frac{-t}{۵/۵}}$$

$$\Rightarrow ۰/۲۸۷ = ۲^{\frac{-t}{۵/۵}} \xrightarrow{\text{log می‌گیریم}} \log ۰/۲۸۷ = \log ۲^{-\frac{t}{۵/۵}}$$

$$\Rightarrow \log \frac{۲/۸۷}{۱۰} = -\frac{t}{۵/۵} \log ۲ \Rightarrow \log ۲/۸۷ - ۱ = -\frac{t}{۵/۵} \log ۲$$

$$۰/۴۵۸۲ - ۱ = -\frac{t}{۵/۵} \times ۰/۳۰۱ \Rightarrow t = \frac{۵/۵ \times ۰/۵۴۱۸}{۰/۳۰۱} = ۹/۹$$

۱. شخصی ده میلیون تومان پول دارد. این شخص هر ماه، ۱۰ درصد از پول خود را خرج می‌کند، تابعی بنویسید که مقدار پول باقی‌مانده برای او را پس از x ماه برحسب میلیون تومان بیان کنید.

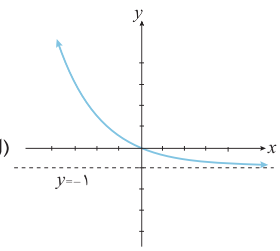
۲. تابع $y=۲^x$ را رسم کنید و به کمک نمودار آن روی محور yها به‌طور تقریبی، نقاطی به عرض‌های $\sqrt[۴]{۸}$ و $۲^{\sqrt{۲}}$ را علامت بزنید.

۳. نمودار توابع $f(x)=۲^x$ ، $g(x)=\sqrt{۲}^x$ و $h(x)=۴^x$ را به صورت تقریبی در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

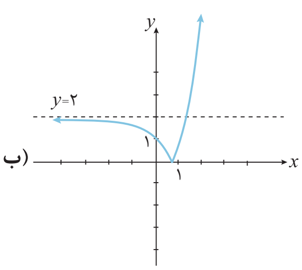
۴. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=(\frac{۱}{۲})^{x-۱}$ ب) $y=|۲^x-۱|$ ج) $y=۲^{|x|}+۱$

۵. در هر مورد، پارامترهای مجهول را به‌دست آورید.

الف)


$y=a(\frac{۱}{۲})^x-b$

ب)


$y=|a^x+b|$

۶. حدود a را طوری تعیین کنید که تابع $y=(\frac{a-۳}{a+۱})^x$ یک تابع نمایی با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ باشد.

۷. معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $۳^{x+۴}-۳^{x+۲}=۸$

ب) $۹^x+۳^x=۹۰$

ج) $۲^{x+۱}+۲^{۴-x}=۱۲$

د) $(\frac{۲}{۳})^x+(\frac{۳}{۲})^x=\frac{۱۳}{۶}$

و) $(\sqrt{۲+\sqrt{۳}})^x+(\sqrt{۲-\sqrt{۳}})^x=۲$

هـ) $۵^x+۱۲^x=۱۳^x$

۸. فاصله‌ی نقاط برخورد نمودار دو تابع $y=۲^{x+۲}-۱۳$ و $y=۴-(\frac{۱}{۲})^{x-۲}$ از هم چقدر است؟

۹. برد توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y=۳^{۴x-۲}-۲$

ب) $y=۱-\sqrt{۳}^{(۲-x)}$

ج) $y=۴^x-۲^{x+۱}$

۱۰. نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $۴^{x^۲}\leq ۲۵۶$

ب) $(۰/۱۲۵)^{۵-x}>۴$

ج) $۴^x+۲^{x+۱}-۸>۰$

د) $\frac{۳^{\sqrt{x}}-۳}{۱-۳^{\sqrt{x}}}\leq ۰$

هـ) $۲^{x-[x]}\leq ۱$

۱۱. دامنه‌ی توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y=\sqrt{۰/۰۶۲۵^x-۴}$

ب) $y=\sqrt{۲^x-۳^x}$

ج) $y=\sqrt{x-\frac{x}{۲^x}}$

۱۲. فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد نمودار وارون تابع $f(x)=۳\times ۲^{۱-۲x}-۲$ با محور طول‌ها از نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم چقدر است؟

۱۳. تابع وارون توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y=۳^{۱-x}+۲$

ب) $y=۳\times(\frac{۱}{۲})^{۲x-۱}+۴$

ج) $y=\sqrt{۲^{۲x}-۳}$

د) $y=\log_{۳}^{۴-۲x}$

هـ) $y=۲\log_{۲}^{x^۳}-۱$

و) $y=(\log_{۲}^{x}-۱)^۳$

۱۴. اگر توابع $y=۳^{-x+a}+b$ و $y=۱+c\log_{d}^{x-۲}$ وارون هم باشند، مقادیر a، b، c و d را به‌دست آورید.

۱۵. دامنه‌ی توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y=3\log_2^{4x-1}$

ب) $y=\log_{0/1}^{3-x^2}+4x-5$

ج) $y=3^{\log\frac{x-1}{x+1}}$

د) $y=\sqrt{1-\log_2^{(x^2-14)}}$

۱۶. توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=\log_{\frac{1}{2}}^{x+2}$　　ب) $y=\log_2^{-x}+1$

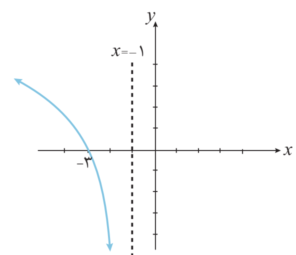
ج) $x-1=(\frac{1}{2})^y$　　د) $y=|\log_2^x|$

ه) $y=log_2^{|x|}$

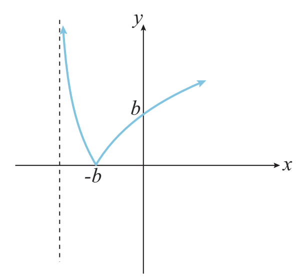
۱۷. توابع $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}^{x}$ و $g(x)=\log_{\frac{1}{3}}^{x}$ را با هم در یک دستگاه مختصات رسم کنید. (رسم دقیق لازم نیست)

۱۸. در هر مورد مقادیر a و b را بیابید.

الف) $y=\log_b^{(a-x)}+a$



ب) $y=|\log_{(a^2+1)}^{(x+a^2+1)}|$



۱۹. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{2\sqrt{2}}$　　ب) $\log_{\frac{1}{32}}^{\frac{1}{16}}$

ج) $\log_{\sqrt{2-\sqrt{3}}}^{2+\sqrt{3}}$　　د) $\log_{3+2\sqrt{2}}^{(\sqrt{2}+1)^{-\frac{2}{5}}}$

ه) $\log_{\sqrt{27}}^{(\log_{\sqrt{3}}^{\sqrt{27}})}$

۲۰. مشخص کنید هر یک از اعداد زیر بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار می‌گیرند.

الف) $\log_3^{700}$　　ب) $\log_{0/1}^{0/012}$　　ج) $\log_{(\frac{1}{3})}^{112}$

۲۱. اگر $\log_b^a=5$، حاصل $\log_{a^2}^{\sqrt{b}}$ را به‌دست آورید.

۲۲. اگر $x=\frac{1+\sqrt{37}}{2}$، حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log_{\sqrt{3}}^{3x^2-3x}$　　ب) $\log_{x^2-9}^{\frac{1+\sqrt{37}}{2}}$

۲۳. ثابت کنید تابع زیر معکوس‌پذیر است و ضابطه‌ی تابع معکوس آن را به‌دست آورید.

$$y=\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$$

۲۴. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log_{\sqrt{2^7}}^{4^3}$

ب) $3^{4+\log_3^4}$

ج) $\log_3^{\frac{7}{11}}-\log_3^{\frac{21}{22}}+\log_{\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

د) $\log_{15}^{16}\times\log_{14}^{15}\times....\times\log_3^4\times\log_2^3$

ه) $\sqrt{25^{log_{\sqrt{5}}^{4}-2}}$

و) $\log_{\sqrt{2}}^{\tan1^\circ}+\log_{\sqrt{2}}^{\tan2^\circ}+\log_{\sqrt{2}}^{\tan3^\circ}+\cdots+\log_{\sqrt{2}}^{\tan89^\circ}$

۲۵. اگر $n\in\mathbb{N}$، توابع $f(x)=\log_3^{x^n}$ و $g(x)=n\log_3^x$ به ازای چه مقادیری از n، باهم مساویند؟

۲۶. اگر $\log_3^x+\log_3^y=2$ و $x^2+y^2=46$ حاصل $\log_4^{(x+y)}$ چند است؟

۲۷. اگر $2^{x-y}\times4^{y+4}=16^5$ و $\log y=2\log\sqrt{3}+\log x$ مقدار $\log_{36}^{(y-x)}$ را به‌دست آورید.

۲۸. اگر $\log_8^{2\sqrt[3]{0/25}}=A$، حاصل $\log_4^{\frac{1-A}{A}}$ را بیابید.

۲۹. اگر $\log_y^x=\frac{2}{5}$ و $y^{\log_x^z}=3^{10}$ مقدار z را بیابید.

۳۰. اگر $\log_5^{16}=a$، حاصل عبارت $\log25^{a+1}-6\log2$ را به‌دست آورید.

۳۱. اگر $\log xy^2=47$ ، $\log x^3z=19$ و $\log y^2z^3=34$ حاصل $\log xyz$ را به‌دست آورید.

۳۲. اگر $\log_{4}^{a+b}-\frac{1}{2}\log_{2}^{a-b}=\log_{2}^{b+3a}-\log_{2}^{9}=1$ مقادیر a و b را بیابید.

۳۳. اگر $7^{a}=245$ و $5^{b}=175$، حاصل عبارت $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}$ را به‌دست آورید.

۳۴. اگر $\log 2=a$ و $\log 3=b$، حاصل عبارات زیر را برحسب a و b بنویسید.

الف) $\log 12$ ب) $\log 15$ ج) $\log_{\sqrt{8}}^{27}$ د) $\log_{\sqrt{75}}^{24}$

۳۵. اگر $\log 4=a$ و $\log 18=b$، حاصل $\log 15$ را برحسب a و b بنویسید.

۳۶. اگر $a^{2}+b^{2}=14ab$ و $a,b>0$، ثابت کنید:

$$\log\frac{a+b}{4}=\frac{\log a+\log b}{2}$$

۳۷. اگر $\log 5=0/699$، تعداد ارقام اعداد 5^{96} و 2^{500} را بیابید.

۳۸. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\log_{3}^{3x-1}=4$

ب) $\log_{x}^{x^{4}-2}=2$

ج) $\log_{2}^{\log_{3}^{(x-1)}}=4$

د) $\log_{5}^{2x-1}+\log_{5}^{3x-5}=1$

ه) $\log(2x-4)-\frac{1}{2}\log(x+1)=\log 2$

و) $3^{\log(2x)}+(2x)^{\log 3}=162$

ز) $(\log_{4}^{x})^{2}-\log_{4}^{x^{5}}+4=0$

ح) $10^{\log x^{2}}=x^{4}$

ط) $x^{\log x-2}=1000$

۳۹. اگر $2\log(x+1)=\log(2x+10)$ حاصل $\log_{\frac{1}{x}}^{x\sqrt{3}}$ را به‌دست آورید.

۴۰. اگر عددی ۷ برابر شده و ۲ واحد به آن اضافه کنیم، لگاریتم آن در مبنای ۲، ۳ واحد اضافه می‌شود آن عدد را بیابید.

۴۱. حدود m را طوری تعیین کنید که معادله‌ی $\log(m-2)-\log x=\log(2m-x)$، دو ریشه‌ی حقیقی داشته باشد.

۴۲. اگر a و b ریشه‌های معادله‌ی $x^{2}-32x+10=0$ باشند، حاصل $\log a+\log b-\log_{2}^{(a+b)}$ را بیابید.

۴۳. اگر $x>\sqrt{2}$، حاصل عبارت زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$A=\log_{x^{2}-1}^{x^{2}+2x+1}+\log_{\sqrt{x^{2}-1}}^{x^{3}-x^{2}-x+1}$$

۴۴. نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $\log_{\frac{1}{2}}^{5x-1}<-\frac{1}{2}$ ب) $\log_{2}^{x^{2}}-3\geq\log_{2}^{2x}$

۴۵. نمودار تابع $y=\log_{4}^{(x-2)}+2$ در بازه‌ی (a,b) از نمودار تابع $y=\log_{2}^{x}$ بالاتر است. حداکثر $b+a$ را به‌دست آورید.

۴۶. برد توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y=3\log_{0/3}^{(4-x)}-2$

ب) $y=\log_{2}^{(x^{2}+4)}$

ج) $y=\log_{2}^{(-x^{2}-2x+1)}+2$

۴۷. اگر شخصی a تومان در یک بانک سرمایه‌گذاری کند، میزان پول به همراه سودش از فرمول $y=a(\frac{2001}{2000})^{x}$ محاسبه می‌شود که در آن، x روزهای گذشته از افتتاح حساب و y میزان پول وی پس از x روز است. این شخص چند روز صبر کند تا پولش دو برابر شود؟

$(\log_{2}^{\frac{2001}{2000}}\simeq 0/00072)$

۴۸. اگر M میزان بزرگی زلزله در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزاد شده در مقیاس ارگ (E) از رابطه‌ی $\log E=11/8+1/5M$ به‌دست می‌آید.

الف) میزان انرژی یک زلزله‌ی چند ریشتری برابر 10^{22} ارگ است؟

ب) انرژی یک زلزله‌ی ۷ ریشتری حدوداً چند برابر انرژی یک زلزله‌ی ۶ ریشتری است؟

۴۹. نیمه‌ی عمر یک عنصر رادیواکتیو ۶ ماه است. اگر جرم اولیه این عنصر ۲۴ گرم باشد، پس از حدود چند ماه جرم این عنصر به ۲ گرم می‌رسد؟

$\log_{3}^{2}\simeq 0/63$

۵۰. جمعیت کشوری در سال ۱۳۰۰، ۲۰ میلیون نفر بوده است. اگر درصد رشد جمعیت این کشور یک درصد در سال بوده باشد، تابعی بنویسید که جمعیت این کشور (y) را برحسب سال‌های گذشته از ۱۳۰۰ (x) بیان کند. درچه سالی جمعیت این کشور به ۳۰ میلیون نفر رسیده است؟

$\log_{1/01}^{2/25}\simeq 81/48$

۵۱. در مبحث شدت صدا، دسی‌بل صدا (D) از رابطه‌ی $D=10\log\frac{I}{I_{0}}$ به‌دست می‌آید که در آن I شدت صداست و $I_{0}=10^{-12}$ است. دسی‌بل صدا با شدت $3/6\times10^{-9}$ چقدر است؟ $(\log 6=0/78)$

پاسخ مسائل حل شده‌ی فصل (۳)

۱. پول این شخص در آخر هر ماه، دنباله‌ی زیر را تشکیل می‌دهد.

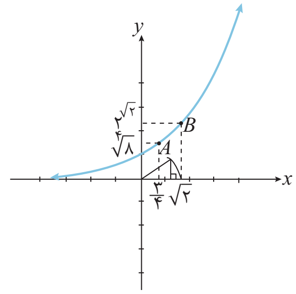
$۱۰\times ۰/۹,۱۰\times ۰/۹^{۲},۱۰\times ۰/۹^{۳},...$

میزان پول وی پس از x ماه: $y=۱۰\times ۰/۹^{x}$

۲. نمودار $y=۲^{x}$ را به کمک جدول زیر رسم می‌کنیم.

x	-۱	۰	۱	۲
y	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴

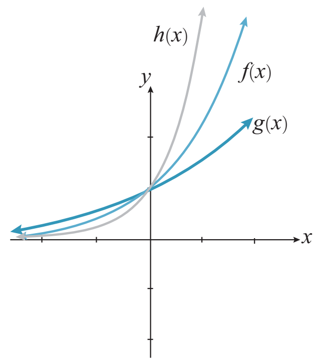
فرض می‌کنیم نقاط A و B به ترتیب با عرض‌های $\sqrt[۴]{۸}$ و $۲^{\sqrt{۲}}$ برروی نمودار هستند.



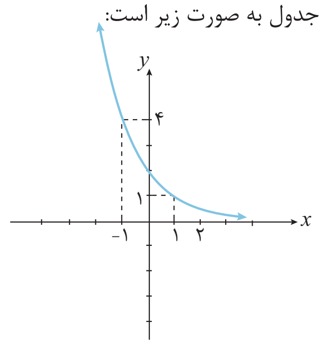
$y_A=\sqrt[۴]{۸}=۲^{\frac{۳}{۴}} \Rightarrow x_A=\frac{۳}{۴}$

$y_B=۲^{\sqrt{۲}} \Rightarrow x_B=\sqrt{۲}$

۳.

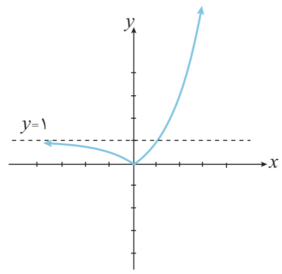


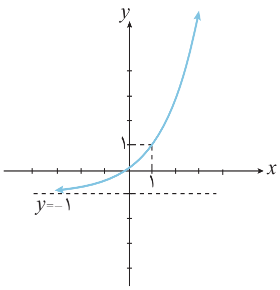
۴. الف) می‌توانیم نمودار تابع $y=(\frac{۱}{۲})^{x}$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم. روش دیگر، استفاده از جدول به صورت زیر است:



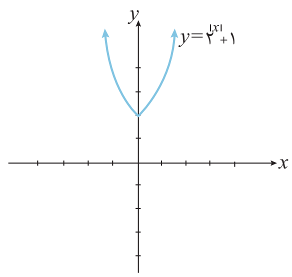
x	-۱	۰	۱	۲
y	۴	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$

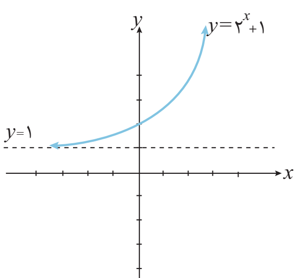
ب) نمودار $y=۲^{x}$ را یک واحد به سمت پایین جابه‌جا می‌کنیم. پس در نمودار حاصل، قسمت‌های زیر محور xها را نسبت به آن محور قرینه می‌کنیم.





ج) ابتدا نمودار $y=۲^{x}+۱$ را رسم می‌کنیم. سپس قسمت‌های سمت چپ محور yها را حذف نموده و قرینه‌ی قسمت‌های سمت راست محور y را (با حذف خود آن قسمت) نسبت به آن محور رسم می‌کنیم.





البته می‌توان تابع دو ضابطه‌ای $y=\begin{cases} ۲^{x}+۱ & x\geq ۰ \\ ۲^{-x}+۱ & x<۰ \end{cases}$ را نیز رسم کرد.

۵. الف) با بزرگ‌تر شدن x، نمودار به سمت خط $y=-۱$ نزدیک می‌شود پس $b=۱$ یعنی $y=a(\frac{۱}{۲})^{x}-۱$ حال نقطه‌ی $(۰,۰)$ را در ضابطه‌ی تابع جاگذاری می‌کنیم.

$۰=a(\frac{۱}{۲})^{۰}-۱ \Rightarrow a-۱=۰ \Rightarrow a=۱$

ب) با کوچک‌تر شدن x، نمودار به سمت خط $y=۲$ نزدیک می‌شود. حال با توجه این‌که b عددی است منفی، $b=-۲$ پس $y=|a^{x}-۲|$ حال نقطه‌ی $(۰,۱)$ را جاگذاری می‌کنیم.

$|a-۲|=۱ \Rightarrow \begin{cases} a-۲=۱ \Rightarrow a=۳ \\ a-۲=-۱ \Rightarrow a=۱ \text{ غ ق ق} \end{cases}$

$a=۱$ قابل قبول نیست چون پایه‌ی تابع نمایی باید مخالف عدد ۱ باشد.

۶. پایه‌ی تابع نمایی باید عددی مثبت و مخالف ۱ باشد.

$\frac{a-۳}{a+۱}\neq ۱ \Rightarrow a-۳\neq a+۱$ همواره برقرار است

$\frac{a-۳}{a+۱}>۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a<-۱$ یا $a>۳$

۷. الف) $۸۱\times ۳^{x}-۹\times ۳^{x}=۸\Rightarrow ۷۲\times ۳^{x}=۸$

$\Rightarrow ۳^{x}=\frac{۱}{۹}\Rightarrow x=-۲$

ب) تعریف می‌کنیم: $۳^{x}=a$

$a^{۲}+a-۹۰=۰\Rightarrow (a-۹)(a+۱۰)=۰$

$a=-۱۰\Rightarrow ۳^{x}=-۱۰$ غ ق ق

$a=۹\Rightarrow ۳^{x}=۹\Rightarrow x=۲$

ج) تعریف می‌کنیم : $۲^{x}=A$، در نتیجه:

$$۲A+\frac{۱۶}{A}=۱۲\xrightarrow{\times \frac{A}{۲}}A^{۲}+۸=۶A$$

$$\Rightarrow A^{۲}-۶A+۸=۰\Rightarrow \begin{cases}A=۲\\ A=۴\end{cases}$$

$۲^{x}=۲\Rightarrow x=۱$

$۲^{x}=۴\Rightarrow x=۲$

د) تعریف می‌کنیم: $(\frac{۲}{۳})^{x}=A$، در نتیجه:

$$A+\frac{۱}{A}=\frac{۱۳}{۶}\xrightarrow{\times ۶A}۶A^{۲}-۱۳A+۶=۰$$

$\Delta=۱۶۹-۴\times ۶\times ۶=۲۵$

$$A=\frac{۱۳\pm ۵}{۱۲}\Rightarrow \begin{cases}A=\frac{۲}{۳}\\ A=\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

$A=\frac{۲}{۳}\Rightarrow (\frac{۲}{۳})^{x}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow x=۱$

$A=\frac{۳}{۲}\Rightarrow (\frac{۲}{۳})^{x}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow x=-۱$

ه) اعداد $۲+\sqrt{۳}$ و $۲-\sqrt{۳}$، معکوس هم هستند.

$(۲+\sqrt{۳})^{x}=A$

$$A+\frac{۱}{A}=۲\xrightarrow{\times A}A^{۲}-۲A+۱=۰$$

$\Rightarrow (A-۱)^{۲}=۰\Rightarrow A=۱\Rightarrow (۲+\sqrt{۳})^{x}=۱\Rightarrow x=۰$

و) $۵^{x}+۱۲^{x}=۱۳^{x}\Rightarrow (\frac{۵}{۱۳})^{x}+(\frac{۱۲}{۱۳})^{x}=۱$

اعداد ۵ ، ۱۲ و ۱۳ اعداد فیثاغورسی هستند. یعنی $x=۲$ یکی از ریشه‌های معادله است. حال در اعداد کوچک‌تر یا بزرگ‌تر از ۲، به دنبال جواب می‌گردیم.

$$x>۲\Rightarrow (\frac{۵}{۱۳})^{x}<(\frac{۵}{۱۳})^{۲}$$

$$+(\frac{۱۲}{۱۳})^{x}<(\frac{۱۲}{۱۳})^{۲}$$

$$\overline{\qquad(\frac{۵}{۱۳})^{x}+(\frac{۱۲}{۱۳})^{x}<۱\qquad}$$

یعنی به ازای x های بزرگ‌تر از ۲، تساوی برقرار نیست.

$$x<۲\Rightarrow (\frac{۵}{۱۳})^{x}>(\frac{۵}{۱۳})^{۲}$$

$$+(\frac{۱۲}{۱۳})^{x}>(\frac{۱۲}{۱۳})^{۲}$$

$$\overline{\qquad(\frac{۵}{۱۳})^{x}+(\frac{۱۲}{۱۳})^{x}>۱\qquad}$$

یعنی به ازای x های کوچک‌تر از ۲ نیز تساوی برقرار نیست. پس $x=۲$ تنها ریشه‌ی معادله است.

۸. برای پیدا کردن نقطه‌ی برخورد باید معادله‌ی $۲^{x+۲}-۱۳=۴-(\frac{۱}{۲})^{x-۲}$ را حل کنیم.

$۲^{x+۲}+(\frac{۱}{۲})^{x-۲}-۱۷=۰\Rightarrow ۲^{x+۲}+۲^{۲-x}-۱۷=۰$

$\xrightarrow{۲^{x}=A}۴A+\frac{۴}{A}-۱۷=۰$

$\xrightarrow{\times A}۴A^{۲}-۱۷A+۴=۰$

$\Delta=۱۷^{۲}-۴\times ۴\times ۴=۲۲۵$

$$A=\frac{۱۷\pm ۱۵}{۸}\Rightarrow \begin{cases}A=۴\\ A=\frac{۱}{۴}\end{cases}$$

$A=۴\Rightarrow ۲^{x}=۴\Rightarrow x=۲$

$A=\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۲^{x}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow x=-۲$

اعداد به‌دست آمده را در یکی از معادله‌ها جاگذاری می‌کنیم تا عرض‌های نقاط نیز به‌دست آیند.

$y=۲^{-۲+۲}-۱۳=-۱۲\qquad y=۲^{۲+۲}-۱۳=۳$

مختصات نقاط برخورد عبارت است از :

$(۲,۳)$ و $(-۲,-۱۲)$

فاصله‌ی دو نقطه $=\sqrt{(۲+۲)^{۲}+(-۱۲-۳)^{۲}}=\sqrt{۲۴۱}$

۹. الف) $۳^{۴x-۲}>۰\Rightarrow ۳^{۴x-۲}-۲>-۲$

$\Rightarrow R=(-۲,+\infty)$

ب) $\sqrt{۳}^{۲-x}>۰\Rightarrow -\sqrt{۳}^{۲-x}<۰$

$\Rightarrow ۱-\sqrt{۳}^{۲-x}<۱\Rightarrow R=(-\infty\ ,\ ۱)$

ج) ضابطه‌ی تابع را بازنویسی می‌کنیم:

$y=(۲^{x})^{۲}-۲(۲^{x})+۱-۱=(۲^{x}-۱)^{۲}-۱$

$\Rightarrow (۲^{x}-۱)^{۲}\geq ۰\Rightarrow (۲^{x}-۱)^{۲}-۱\geq -۱$

$\Rightarrow R=[-۱,+\infty)$

۱۰. الف) $۴^{x^{۲}}\leq ۴^{۴}\xrightarrow{۴>۱}x^{۲}\leq ۴$

$\Rightarrow x\in[-۲\ ,\ ۲]$

ب) $۰/۱۲۵=\frac{۱۲۵}{۱۰۰۰}=\frac{۱}{۸}=۲^{-۳}$

$(۲^{-۳})^{۵-x}>۴\Rightarrow ۲^{-۱۵+۳x}>۲^{۲}\xrightarrow{۲>۱}$

$-۱۵+۳x>۲\Rightarrow ۳x>۱۷\Rightarrow x>\frac{۱۷}{۳}$

ج) $(2^x)^2+2(2^x)-8>0 \xrightarrow{A=2^x}$

$A^2+2A-8>0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} A<-4$ یا $A>2$

$A<-4 \Rightarrow 2^x<-4$ غیرممکن

$A>2 \Rightarrow 2^x>2^1 \Rightarrow x>1$

د) $3^{\sqrt{x}}=A \Rightarrow \frac{A-3}{1-A}<0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$

$1<A\le 3 \Rightarrow 3^0<3^{\sqrt{x}}\le 3^1 \Rightarrow 0<\sqrt{x}\le 1$

$\Rightarrow x\in(0,1]$

هـ) $2^{x-[x]}\le 2^0 \Rightarrow x-[x]\le 0$

از طرفی می‌دانیم $x-[x]\ge 0$ بنابراین این نامساوی و نامساوی فوق لازم است که $x-[x]=0$ و این به ازای $x\in\mathbb{Z}$ برقرار است.

۱۱. الف) $0/0625=\frac{625}{1000}=\frac{1}{16}$

$0/0625^x\ge 4 \Rightarrow (\frac{1}{16})^x\ge 4 \Rightarrow (\frac{1}{4})^{2x}\ge(\frac{1}{4})^{-1}$

$\xrightarrow{\frac{1}{4}<1} 2x\le -1 \Rightarrow x\le -\frac{1}{2} \Rightarrow D=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$

ب) با توجه به مقایسه‌ی نمودارهای توابع $y=2^x$ و $y=3^x$، مشخص است که به ازای x های منفی، مقدار 2^x از 3^x بزرگ‌تر است.

$2^x-3^x\ge 0 \Rightarrow x\le 0 \Rightarrow D=(-\infty,0]$

ج) $x-\frac{x}{2^x}\ge 0 \Rightarrow x(1-\frac{1}{2^x})\ge 0 \Rightarrow$

$\frac{x(2^x-1)}{2^x}\ge 0$

$x=0$ ریشه‌ی عبارت 2^x-1 است.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
2^x-1	$-$	0	$+$
2^x	$+$		$+$
$\frac{x(2^x-1)}{2^x}$	$+$	0	$+$

$\Rightarrow D=\mathbb{R}$

۱۲. نقطه‌ی برخورد نمودار وارون تابع f با محور طول‌ها معادله‌ی نقطه‌ی برخورد نمودار تابع f با محور عرض‌هاست یعنی جایی که $x=0$

$x=0\Rightarrow f(0)=3\times 2^1-2=4$

نقطه‌ی موردنظر $(0,4)$ است.

فاصله‌ی $(0,4)$ از خط $y=x$

$\frac{|4-0|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

۱۳. الف) $3^{1-x}=y-2 \Rightarrow 1-x=\log_3^{y-2}$

$\Rightarrow x=1-\log_3^{y-2} \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{جای } x,y \text{ را عوض}}$

تابع وارون: $y=1-\log_3^{x-2}$

ب) $(\frac{1}{2})^{2x-1}=\frac{y-4}{3} \Rightarrow 2x-1=\log_{(\frac{1}{2})}^{\frac{y-4}{3}}$

$\Rightarrow x=\frac{\log_{(\frac{1}{2})}^{\frac{y-4}{3}}+1}{2} \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{جای } x,y \text{ را عوض}}$

ضابطه‌ی وارون $y=\frac{\log_{(\frac{1}{2})}^{\frac{x-4}{3}}+1}{2}$

ج) برخلاف موارد «الف» و «ب»، برد این تابع کل اعداد حقیقی نیست. ابتدا برد آن را تعیین می‌کنیم: $2^{2x}-3\ge 0 \Rightarrow \sqrt{2^{2x}-3}\ge 0 \Rightarrow y\ge 0$

یعنی دامنه‌ی تابع وارون، بازه‌ی $[0,+\infty)$ است.

$y^2=2^{2x}-3 \Rightarrow 2^{2x}=y^2+3 \Rightarrow 2x=\log_2^{y^2+3}$

$\Rightarrow x=\frac{1}{2}\log_2^{y^2+3} \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{جای } x,y \text{ را عوض}}$

تابع وارون: $y=\frac{1}{2}\log_2^{x^2+3}\ ,\ x\ge 0$

د) $4-2x=3^y \Rightarrow 2x=4-3^y \Rightarrow$

$x=2-\frac{1}{2}\times 3^y \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{جای } x,y \text{ را عوض}}$

ضابطه‌ی وارون: $y=2-\frac{1}{2}\times 3^x$

هـ) $2\log_2^{x^3}=y+1 \Rightarrow \log_2^{x^3}=\frac{y+1}{2}$

$\Rightarrow x^3=2^{\frac{y+1}{2}} \Rightarrow x=\sqrt[3]{2^{\frac{y+1}{2}}} \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{جای } x,y \text{ را عوض}}$

ضابطه‌ی وارون: $y=\sqrt[3]{2^{\frac{x+1}{2}}}$

و) $\log_2^x=\sqrt[3]{y}+1 \Rightarrow x=2^{\sqrt[3]{y}+1} \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{جای } x,y \text{ را عوض}}$

ضابطه‌ی وارون: $y=2^{\sqrt[3]{x}+1}$

۱۴. وارون یکی از توابع مثلاً تابع نمایی را به‌دست می‌آوریم:

$y=3^{-x+a}+b \Rightarrow 3^{-x+a}=y-b \Rightarrow$

$-x+a=\log_3^{y-b} \Rightarrow x=a-\log_3^{y-b}$

ضابطه‌ی وارون: $y=a-\log_3^{x-b}$

با مقایسه‌ی این تابع با تابع $y=1+c\log_d^{x-2}$ می‌فهمیم که:

$a=1,b=2,c=-1,d=3$

۱۵. الف) $4x-1>0 \Rightarrow D=(\frac{1}{4},+\infty)$

ب) $3-x^2>0 \Rightarrow x^2<3 \Rightarrow D=(-\sqrt{3},\sqrt{3})$

ج) $\frac{x-1}{x+1}>0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$

د) $D=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

$1-\log_2^{(x^2-14)} \geq 0 \Rightarrow 1 \geq \log_2^{(x^2-14)}$

$2^1 \geq x^2-14 \Rightarrow x^2 \leq 16 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$

از طرفی باید $x^2-14>0$

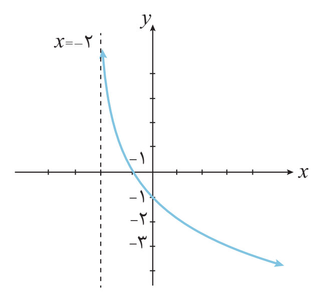
$x^2-14>0 \Rightarrow x^2>14 \Rightarrow \boxed{x>\sqrt{14}}\ (I)$ یا $\boxed{x<-\sqrt{14}}\ (II)$

$(I)\cap(II) \Rightarrow \begin{cases} 4 \geq x > \sqrt{14} \\ -\sqrt{14} > x \geq -4 \end{cases}$

$D=[-4,-\sqrt{14})\cup(\sqrt{14},4]$

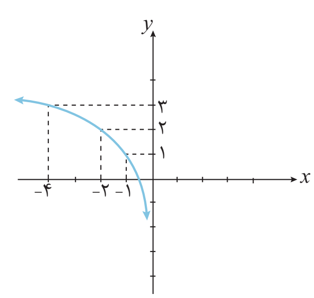
۱۶. الف) $D=(-2,+\infty)$

x	$-\frac{3}{2}$	-1	0	2
y	1	0	-1	-2



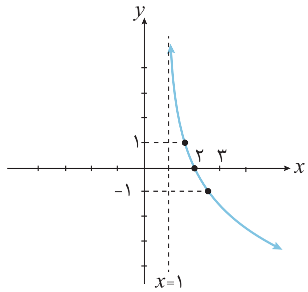
ب) $D=(-\infty,0)$

x	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4
y	0	1	2	3

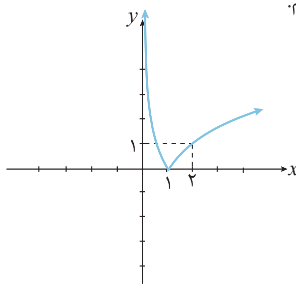


ج) $x-1=(\frac{1}{2})^y \Rightarrow y=\log_{\frac{1}{2}}^{(x-1)} \quad (x>1)$

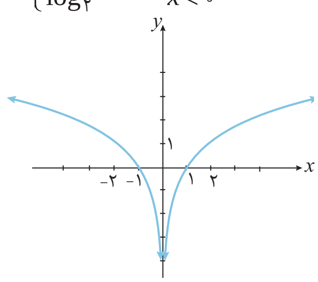
x	$\frac{3}{2}$	2	3
y	1	0	-1



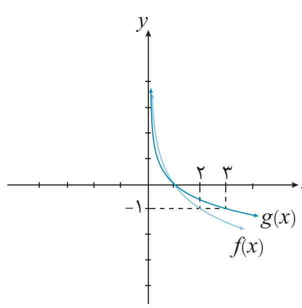
د) کافیست قسمت‌های زیر محور xها در نمودار $y=\log_2^x$ را نسبت به آن محور قرینه کنیم.



ه) کافیست تابع دو ضابطه‌ای $y=\begin{cases} \log_2^x & x>0 \\ \log_2^{-x} & x<0 \end{cases}$ را رسم کنیم.



۱۷.



۱۸. الف) دامنه‌ی تابع برابر $(-\infty,-1)$ است پس عدد ۱-، ریشه‌ی $(a-x)$ است.

$a+1=0 \Rightarrow a=-1$

$y=\log_b^{(-x-1)}-1$

حال مختصات $(-3,0)$ را جاگذاری می‌کنیم:

$0=\log_b^{(-(-3)-1)}-1 \Rightarrow 1=\log_b^2 \Rightarrow \boxed{b=2}$

د) ابتدا نقطه‌ی $(0,b)$ را در معادله قرار می‌دهیم.

$y=|\log_{a^2+1}^{a^2+x+1}| \xrightarrow[x=0]{y=b} b=|\log_{a^2+1}^{a^2+1}|$

می‌دانیم که $\log_M^M$ برابر ۱ است. بنابراین $\boxed{b=1}$

حال نقطه‌ی $(-b,0)$ را داخل معادله قرار می‌دهیم:

$$0=|\log_{a^2+1}^{a^2-b+1}| \Rightarrow (a^2+1)^0=a^2-b+1 \Rightarrow a^2-b+1=1$$

$$\xrightarrow{b=1} a^2=1 \Rightarrow a=\pm1$$

۱۹. الف) $\log_{\frac{\sqrt2}{4}}^{2\sqrt2}=a \Rightarrow (\frac{\sqrt2}{4})^a=2\sqrt2 \Rightarrow$

$$(2^{\frac12-2})^a=2\times2^{\frac12} \Rightarrow 2^{-\frac{3a}{2}}=2^{\frac32} \Rightarrow -\frac{3a}{2}=\frac32$$

$$\Rightarrow a=-1$$

ب) $\log_{\frac{1}{32}}^{\frac{1}{16}}=a \Rightarrow (\frac{1}{32})^a=\frac{1}{16} \Rightarrow 2^{-5a}=2^{-4}$

$$\Rightarrow -5a=-4 \Rightarrow a=\frac45$$

ج) $\frac{1}{2+\sqrt3}=\frac{1}{2+\sqrt3}\times\frac{2-\sqrt3}{2-\sqrt3}=2-\sqrt3$

$$\log_{\sqrt{2-\sqrt3}}^{2+\sqrt3}=a \Rightarrow (\sqrt{2-\sqrt3})^a=2+\sqrt3 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{1}{2+\sqrt3}}^{\,a}=2+\sqrt3 \Rightarrow (2+\sqrt3)^{-\frac a2}=2+\sqrt3$$

$$\Rightarrow a=-2$$

د) $(\sqrt2+1)^2=2+1+2\sqrt2=3+2\sqrt2$

$$\log_{(\sqrt2+1)^2}^{(\sqrt2+1)^{-\frac25}}=a \Rightarrow (\sqrt2+1)^{2a}=(\sqrt2+1)^{-\frac25}$$

$$\Rightarrow 2a=-\frac25 \Rightarrow a=-\frac15$$

هـ) $\log_{\sqrt3}^{\sqrt{27}}=b \Rightarrow \sqrt3^{\,b}=\sqrt{27}$

$$\Rightarrow 3^{\frac b2}=3\sqrt3=3^{\frac32} \Rightarrow b=3$$

$$\log_{\sqrt{27}}^{3}=a \Rightarrow \sqrt{27}^{\,a}=3 \Rightarrow 3^{\frac{3a}{2}}=3^1 \Rightarrow a=\frac23$$

۲۰. الف) $243<700<729 \xrightarrow{\log_3}$

$$\log_3^{243}<\log_3^{700}<\log_3^{729} \Rightarrow 5<\log_3^{700}<6$$

ب) $0/01<0/012<0/1 \xrightarrow{\log_{0/1}}$

$$\log_{0/1}^{0/01}>\log_{0/1}^{0/012}>\log_{0/1}^{0/1} \Rightarrow 2>\log_{0/1}^{0/012}>1$$

ج) $(\frac13)^{-4}=3^4=81$

$$(\frac13)^{-5}=3^5=243$$

$$81<112<243 \Rightarrow (\frac13)^{-4}<112<(\frac13)^{-5} \Rightarrow -5<\log_{\frac13}^{112}<-4$$

۲۱. $\log_b^a=5 \Rightarrow a=b^5 \Rightarrow a^2=b^{10}$

$$\log_{a^2}^{\sqrt b}=\log_{b^{10}}^{\sqrt b}=c \Rightarrow b^{10c}=b^{\frac12} \Rightarrow c=\frac{1}{20}$$

۲۲. $x=\frac{1+\sqrt{37}}{2} \Rightarrow 2x=1+\sqrt{37} \Rightarrow 2x-1=\sqrt{37}$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 4x^2-4x+1=37 \Rightarrow 4x^2-4x=36$$

$$\Rightarrow x^2-x=9 \qquad (I)$$

الف) $\log_{\sqrt3}^{3x^2-3x} \overset{(I)}{=} \log_{\sqrt3}^{3\times9}=\log_{\sqrt3}^{27}=6$

ب) $(I) \Rightarrow x^2-9=x \Rightarrow \log_{x^2-9}^{\frac{1+\sqrt{37}}{2}}=\log_x^x=1$

۲۳. اگر بتوانیم x را برحسب y بنویسیم، تابع معکوس‌پذیر است.

$$y=\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}=\frac{3^x-\frac{1}{3^x}}{3^x+\frac{1}{3^x}}=\frac{\frac{3^{2x}-1}{3^x}}{\frac{3^{2x}+1}{3^x}}$$

$$\Rightarrow y=\frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1} \Rightarrow y\times3^{2x}+y=3^{2x}-1$$

$$\Rightarrow y+1=3^{2x}(1-y) \Rightarrow 3^{2x}=\frac{y+1}{1-y} \Rightarrow 2x=\log_3^{\frac{y+1}{1-y}}$$

$\Rightarrow x=\frac12\log_3^{\frac{y+1}{1-y}} \Rightarrow$ تابع وارون‌پذیر است.

$\xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{جای } y,x \text{ را عوض}}$ ضابطه‌ی وارون : $y=\frac12\log_3^{\frac{x+1}{1-x}}$

۲۴. الف) $\log_{\sqrt2^7}^{4^3}=\frac37\log_{\sqrt2}^{4}=\frac37\times\log_{2^{\frac12}}^{2^2}$

$$=\frac37\times2\times\frac21=\frac{12}{7}$$

ب) $3^{4+\log_3^4}=3^4\times3^{\log_3^4}=3^4\times4^{\log_3^3}$

$$=3^4\times4^1=324$$

ج) $\log_{\sqrt3}^{\frac{\sqrt2}{2}}=\log_{(\sqrt3)^2}^{(\frac{\sqrt2}{2})^2}=\log_3^{\frac12}$

$$\log_3^{\frac{7}{11}}-\log_3^{\frac{21}{22}}+\log_3^{\frac12}=\log_3^{\frac{7}{11}\times\frac{22}{21}\times\frac12}=\log_3^{\frac13}=-1$$

د) $\log_b^a\times\log_c^b=\frac{\log_b^a}{\log_b^c}=\log_c^a$

$$\log_{15}^{16}\times\log_{14}^{15}\times\ldots\times\log_3^4\times\log_2^3=$$

$$\log_{14}^{16}\times\log_{13}^{14}\times\ldots\times\log_2^3=$$

$$\log_{13}^{16}\times\log_{12}^{13}\times\ldots\times\log_2^3=\ldots=$$

$$\log_3^{16}\times\log_2^3=\log_2^{16}=4$$

هـ) $\sqrt{25^{\log_{\sqrt5}^{4}-2}}=\sqrt{\frac{25^{\log_{\sqrt5}^{4}}}{25^2}}=\sqrt{\frac{4^{\log_{\sqrt5}^{25}}}{25^2}}$

$=\sqrt{\frac{4^4}{25^2}}=\frac{4^2}{25}=\frac{16}{25}$

و) $\text{عبارت}=\log_{\sqrt2}^{\tan 1^\circ\times\tan 2^\circ\times\ldots\times\tan 89^\circ}$

$\tan 1^\circ\times\tan 89^\circ=\tan 1^\circ\times\cot 1^\circ=1$

$\tan 2^\circ\times\tan 88^\circ=\tan 2^\circ\times\cot 2^\circ=1$

$\tan 44^\circ\times\tan 46^\circ=\tan 44^\circ\times\cot 44^\circ=1$

$\tan 45^\circ=1$

$\Rightarrow\ \text{عبارت}=\log_{\sqrt2}^{1}=0$

۲۵. $g(x)=n\log_3^{x}$

$x>0\Rightarrow D_g=(0,+\infty)$

$f(x)=\log_3^{x^n}$

اگر n فرد باشد: $x^n>0\Rightarrow x>0\Rightarrow D_f=(0,+\infty)$

اگر n زوج باشد: $x^n>0\Rightarrow x\neq 0\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

یعنی در حالتی که عدد فرد است، D_g و D_f مساویند.

اگر n فرد باشد: $f(x)=\log_3^{x^n}=n\log_3^{x}=g(x)$

۲۶. $\log_3^{x}+\log_3^{y}=2\Rightarrow\log_3^{xy}=2$

$\Rightarrow xy=9\Rightarrow 2xy=18\qquad(I)$

$x^2+y^2=46\xrightarrow{(I)}x^2+y^2+2xy=46+18=64$

$\Rightarrow(x+y)^2=64$

$\log_4^{x+y}=\frac{1}{2}\log_4^{(x+y)^2}=\frac{1}{2}\log_4^{64}=\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{2}$

۲۷. $2^{x-y}\times 4^{y+4}=16^5\Rightarrow 2^{x-y}\times 2^{2y+8}=2^{20}$

$\Rightarrow x-y+2y+8=20\Rightarrow x+y=12\qquad(I)$

$\log y=2\log\sqrt3+\log x=\log 3x$

$\Rightarrow y=3x\qquad(II)$

$\xrightarrow{(I),(II)}\begin{cases}x+y=12\\ y=3x\end{cases}\Rightarrow y=9$ و $x=3$

$\log_{36}^{y-x}=\log_{36}^{6}=\frac{1}{2}$

۲۸. $A=\log_8^{2\sqrt[3]{0/25}}=\log_8^{2\times(\frac{1}{4})^{\frac{1}{3}}}=\log_8^{2\times 2^{-\frac{2}{3}}}$

$=\log_{2^3}^{2^{\frac{1}{3}}}\Rightarrow 2^{3A}=2^{\frac{1}{3}}\Rightarrow A=\frac{1}{9}$

$\frac{1-A}{A}=\frac{1}{A}-1=9-1=8\Rightarrow\log_4^{\frac{1-A}{A}}=\log_4^{8}=\log_{2^2}^{2^3}=\frac{3}{2}$

۲۹. $\log_y^{x}=\frac{2}{5}\Rightarrow\log_x^{y}=\frac{5}{2}\qquad(I)$

$y^{\log_x^{z}}=z^{\log_x^{y}}=3^{10}\xrightarrow{(I)}z^{\frac{5}{2}}=3^{10}$

$\Rightarrow z=(3^{10})^{\frac{2}{5}}=3^4=81$

۳۰. $\log_5^{16}=a\Rightarrow 5^a=16$

$25^{a+1}=25^a\times 25=(5^a)^2\times 25=16^2\times 25$

$\log 25^{a+1}-6\log 2=\log 16^2\times 25-\log 64=$

$\log\frac{16^2\times 25}{64}=\log 100=\log_{10}^{10^2}=2$

۳۱. $\log y^2z^3+\log x^3z+\log xy^2=34+19+47=100$

$\Rightarrow\log x^4y^4z^4=100\Rightarrow 4\log xyz=100$

$\Rightarrow\log xyz=25$

۳۲. $\log_2^{b+3a}-\log_2^{9}=\log_2^{2}\Rightarrow\frac{b+3a}{9}=2$

$b+3a=18\qquad(I)$

$\log_4^{a+b}-\log_4^{a-b}=1\Rightarrow\log_4^{\frac{a+b}{a-b}}=1\Rightarrow$

$a+b=4a-4b\Rightarrow 3a=5b\qquad(II)$

$(I),(II)\Rightarrow\left.\begin{matrix}3a=5b\\ b+3a=18\end{matrix}\right\}\Rightarrow b=3,a=5$

۳۳. $a=\log_7^{245}\Rightarrow a-1=\log_7^{245}-\log_7^{7}=\log_7^{35}$

$\Rightarrow\frac{1}{a-1}=\log_{35}^{7}$

$b=\log_5^{175}\Rightarrow b-1=\log_5^{175}-\log_5^{5}=\log_5^{35}$

$\Rightarrow\frac{1}{b-1}=\log_{35}^{5}$

$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}=\log_{35}^{7}+\log_{35}^{5}=\log_{35}^{35}=1$

۳۴. الف) $\log 12=\log 2^2\times 3=2\log 2+\log 3$

$=2a+b$

ب) $\log 15=\log 5+\log 3$

$=\log 10-\log 2+\log 3=1-a+b$

ج) $\log_{\sqrt8}^{27}=\frac{\log 27}{\log\sqrt8}=\frac{\log 3^3}{\log 2^{\frac{3}{2}}}=\frac{3\log 3}{\frac{3}{2}\log 2}$

$=\frac{3b}{\frac{3}{2}a}=\frac{2b}{a}$

د) $\log_{\sqrt{75}}^{24}=\frac{\log 24}{\log\sqrt{75}}=\frac{\log 2^3+\log 3}{\frac{1}{2}(\log 5^2+\log 3)}=$

$\frac{3\log 2+\log 3}{\frac{1}{2}(2\log 5+\log 3)}=\frac{3a+b}{\frac{1}{2}(2(1-a)+b)}=\frac{6a+2b}{b-2a+2}$