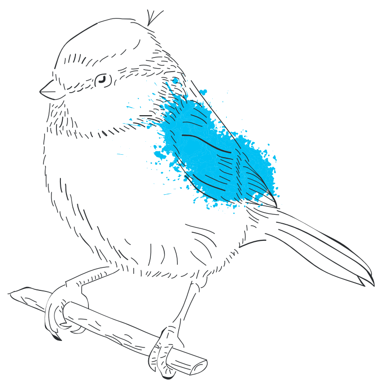
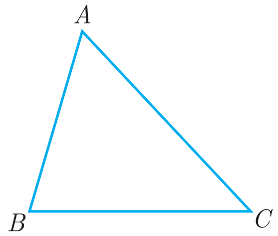
فصل اول

ترسیم‌های هندسی و استدلال



درس صفر مثلث و اجزای مهم آن

سه نقطه‌ی غیر واقع بر یک خط راست مانند A، B و C را در نظر بگیرید. نقاط A، B و C یک مثلث تشکیل می‌دهند. در حقیقت اجتماع سه پاره‌خط AB، BC و CA را مثلث ABC می‌نامیم. هر یک از پاره‌خط‌ها را **ضلع** و هر یک از نقاط را **رأس** می‌گوییم.



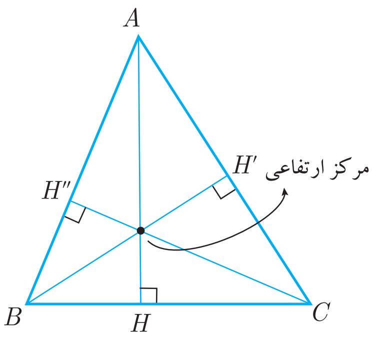
هر مثلث را با نام سه رأس آن می‌خوانیم و آن را با نماد Δ نشان می‌دهیم. مانند $\overset{\Delta}{ABC}$ یا ΔABC.

هر یک از زاویه‌های CAB، CBA و ACB را زاویه‌های مثلث ABC می‌نامیم.

معمولاً اندازه‌ی هر ضلع مثلث را با حرف کوچکی متناظر با حرف رأس مقابل آن، نشان می‌دهیم. به عنوان مثال اندازه‌ی ضلع BC را که مقابل به رأس A است با حرف a، اندازه‌ی ضلع AC را با حرف b و اندازه‌ی ضلع AB را با حرف c نمایش می‌دهیم.

اجزای مهم مثلث

۱- ارتفاع‌های مثلث: ارتفاع مثلث، پاره‌خطی است که از یک‌رأس بگذرد و بر ضلع مقابل به آن رأس عمود باشد و پای عمود روی آن ضلع یا امتداد آن ضلع باشد.

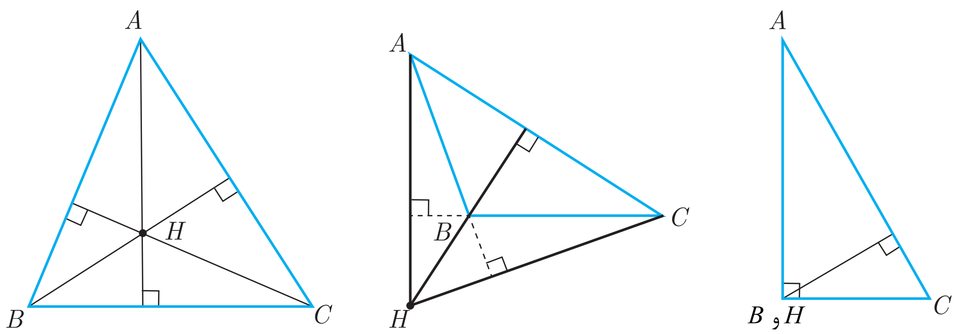


هر مثلث سه ارتفاع دارد مانند ارتفاع‌های AH، BH' و CH'' در مثلث ABC.

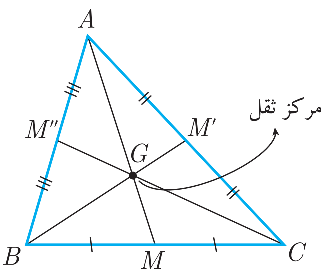
در مثلث ABC اندازه‌ی ارتفاع‌های وارد بر اضلاع BC، CA و AB را به ترتیب با h_a، h_b و h_c نمایش می‌دهیم.

در بخش‌های بعدی ثابت می‌شود که ارتفاع‌های هر مثلث (یا خط‌های شامل سه ارتفاع) از یک نقطه می‌گذرند که آن نقطه را **مرکز ارتفاعی** مثلث گوییم.

تذکر: *اگر مثلث حاده‌الزاویه باشد مرکز ارتفاعی در داخل مثلث قرار دارد، اگر مثلث منفرجه الزاویه باشد دو ارتفاع از مثلث، خارج مثلث قرار می‌گیرند و مرکز ارتفاعی خارج مثلث می‌افتد و اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، اضلاع قائم دو تا از ارتفاع‌ها هستند و مرکز ارتفاعی همان رأس قائم خواهد بود (مرکز ارتفاعی را معمولاً با* H *نشان می‌دهند).*



۲- میانه‌های مثلث: میانه‌ی مثلث پاره‌خطی است که یک رأس مثلث را به وسط ضلع مقابل آن رأس وصل می‌کند.



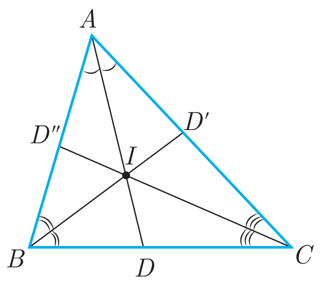
هر مثلث سه میانه دارد مانند میانه‌های AM، BM' و CM'' در مثلث ABC.

در مثلث ABC اندازه‌ی میانه‌های وارد بر اضلاع BC، CA و AB را به ترتیب با m_a، m_b و m_c نمایش می‌دهیم.

در بخش‌های بعدی ثابت می‌شود که میانه‌های هر مثلث در یک نقطه درون مثلث به نام **مرکز ثقل** یکدیگر را قطع می‌کنند.

مرکز ثقل را معمولاً با G نشان می‌دهند.

۳- نیم سازهای داخلی مثلث: نیم‌ساز داخلی هر زاویه‌ی مثلث پاره‌خطی است که آن زاویه را نصف کند و دو انتهای آن بر روی رأس آن زاویه و ضلع مقابل آن رأس باشد.

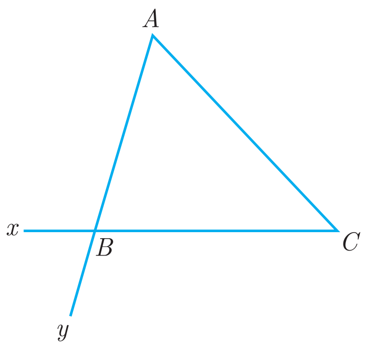


هر مثلث سه نیم‌ساز داخلی دارد مانند نیم‌سازهای AD، BD' و CD'' در مثلث ABC.

در مثلث ABC اندازه‌ی نیم‌سازهای داخلی زوایای A، B و C را به ترتیب با d_a، d_b و d_c نمایش می‌دهیم.

در بخش‌های بعدی ثابت می‌شود که نیم‌سازهای داخلی هر مثلث در یک نقطه درون مثلث یکدیگر را قطع می‌کنند و معمولاً آن را با I نشان می‌دهیم.

زاویه‌ی خارجی

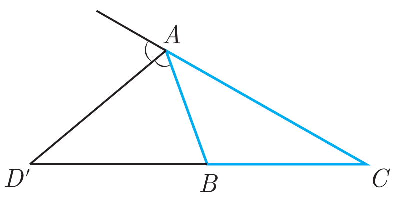


می‌دانیم زاویه‌هایی که درون یک چند ضلعی محدب قرار دارند، زاویه‌های داخلی آن چند ضلعی نامیده می‌شوند.

زاویه‌ای که در هر رأس یک چند ضلعی محدب بین یک ضلع و امتداد ضلع دیگر تشکیل می‌شود **زاویه‌ی خارجی** نامیده می‌شود. مانند زوایای ABx و CBy در مثلث ABC.

بدیهی است که زوایای ABx و CBy هم‌نهشت هستند. بنابراین برای هر رأس، فقط یکی از آن‌ها را در نظر می‌گیریم.

۴- نیم‌سازهای خارجی مثلث: نیم‌ساز خارجی هر زاویه‌ی مثلث، پاره‌خطی است که زاویه‌ی خارجی متناظر با آن زاویه را نصف می‌کند و دو انتهای آن بر روی رأس و امتداد ضلع مقابل آن رأس باشد. (به رأس مورد نظر و نقطه‌ای از امتداد ضلع مقابل آن رأس محدود باشد.) مانند پاره‌خط AD' در شکل.

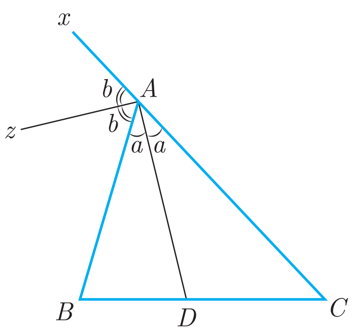


تذکر: *اگر مثلثی متساوی‌الساقین باشد، نیم‌ساز خارجی رأس با قاعده موازی است و با آن قاعده یا امتداد آن برخورد ندارد.*

اندازه‌ی نیم‌سازهای خارجی نظیر سه زاویه‌ی A، B و C از مثلث ABC را به ترتیب با d'_a، d'_b و d'_c نمایش می‌دهیم.

نکته ۱ **در هر چند ضلعی محدب مخصوصاً مثلث، نیم‌سازهای داخلی و خارجی نظیر هر رأس بر هم عمودند.**

اثبات: فرض کنید $B\hat{A}D = C\hat{A}D = a$ و $x\hat{A}z = B\hat{A}z = b$



$$a + a + b + b = 180^\circ \Rightarrow 2a + 2b = 180^\circ$$

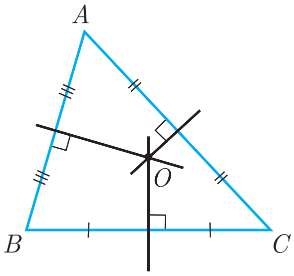
$$\Rightarrow 2(a+b) = 180^\circ \Rightarrow a + b = 90^\circ$$

توجه: *هر گاه در مسئله‌ای نیم‌سازهای داخلی و خارجی نظیر یک رأس با هم مطرح شده باشند، در رسم شکل علامت زاویه‌ی قائمه را بین آن‌ها قرار دهید تا هنگام حل حواستان به آن زاویه‌ی قائمه باشد.*

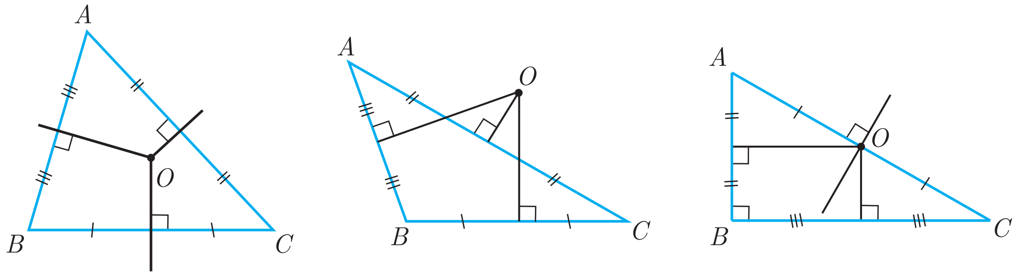
۵- عمودمنصف‌های اضلاع مثلث: عمودمنصف هر ضلع مثلث خطی است که از وسط آن ضلع می‌گذرد و بر آن ضلع عمود است.

هر مثلث سه عمودمنصف دارد مانند شکل:

در درس‌های بعدی ثابت می‌کنیم که عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث از یک نقطه می‌گذرند.



تذکر: در صورتی‌که O محل تلاقی عمودمنصف‌های مثلث باشد، اگر مثلث حاده‌الزاویه باشد، O در داخل مثلث، اگر مثلث منفرجه‌الزاویه باشد، O در خارج مثلث و اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، O در وسط وتر مثلث قرار دارد.



درس اول ترسیم‌های هندسی

یکی از بخش‌های هندسه، رسم کردن خطوط و اشکال هندسی است. این بخش از هندسه کاربردهای زیادی در نقشه‌کشی ساختمان، طراحی صنعتی، معماری و ... دارد. امروزه ترسیم‌های اولیه به‌طور وسیعی در بخش‌های مختلف صنعت استفاده می‌شود ولی آن‌چه بحث رسم را در هندسه جای داده است، تنها کاربردهای آن نیست، بلکه بالا بردن توانایی تحلیل شکل‌های هندسی و رسیدن به بسیاری از نتایج پیچیده‌تر در شکل‌ها است.

خط‌کش، پرگار، گونیا و نقاله مهم‌ترین ابزار برای کشیدن یک شکل دقیق است و رسم خط عمود بر یک خط، رسم عمودمنصف یک پاره‌خط و رسم نیم‌ساز یک زاویه می‌توانند نمونه‌هایی از ترسیم‌های هندسی باشند.

در این بخش به‌طور مقدماتی بعضی از رسم‌های اولیه که به آن‌ها اشاره شد را مرور می‌کنیم و سپس چند مسئله‌ی پیچیده‌تر در رسم مثلث و شکل‌های دیگر را بررسی خواهیم کرد.

فرض کنید از این به بعد فقط دو ابزار در اختیار داریم. **پرگار** که می‌تواند به مرکز هر نقطه‌ی دلخواه و با شعاع دلخواه کمان یا دایره رسم کند. **خط‌کش** که می‌تواند هر دو نقطه‌ی دلخواه را به هم وصل کند. در واقع خط‌کش وسیله‌ای برای رسم پاره‌خط است (البته فرض ما بر این است که وقتی یک پاره‌خط رسم شد تا هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم آن را امتداد دهیم).

بیش‌تر بدانیم

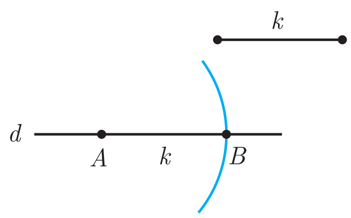
در ترسیم‌های هندسی باید به نکات زیر توجه شود:

۱- تنها وسایل مجاز برای ترسیم، پرگار (برای جدا کردن طول معین) و خط‌کش غیرمدرج (برای رسم کردن خط راست) هستند. این وسایل را **وسایل اقلیدسی** می‌گویند.

۲- از پرگار برای رسم دایره یا کمانی از دایره می‌توان استفاده کرد که یا مرکز و یک نقطه از آن معلوم است و یا مرکز و اندازه‌ی شعاع آن معلوم است.

۳- خط‌کش غیرمدرج از یک لبه‌ی صاف به اندازه‌ی کافی طولانی تشکیل شده است و هیچ‌گونه علامتی برای اندازه‌گیری روی آن وجود ندارد و با آن فقط می‌توان خطی رسم کرد که از دو نقطه‌ی مفروض می‌گذرد و با آن نمی‌توان پاره‌خطی با اندازه‌ی مشخص رسم کرد یا نمی‌توان فاصله‌ی دو نقطه را اندازه گرفت و یا مقایسه‌ی اندازه‌ی دو پاره‌خط با یکدیگر به کمک خط‌کش غیرمدرج امکان‌پذیر نیست. برای جدا کردن پاره‌خطی با اندازه‌ی معلوم از پرگار استفاده می‌شود.

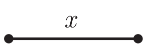
۴- منظور از معلوم بودن پاره‌خط آن است که دو سر پاره‌خط معلوم بوده و می‌توانیم دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی آن باز کنیم و به هیچ‌وجه اندازه‌ی عددی پاره‌خط منظور نیست. (یعنی پاره‌خط با طول معلوم در قسمتی از صفحه رسم شده است و ما آن را می‌بینیم و بدون نیاز به خط‌کش مدرج و تنها با کمک پرگار و خط‌کش غیرمدرج می‌توانیم پاره‌خطی به طول معلوم رسم کنیم.)



۵- منظور از معلوم بودن زاویه، آن است که مکان رأس زاویه و نیز امتداد دو ضلع آن در صفحه مشخص است.

۶- در ترسیم‌های هندسی، واحد طول، همواره یکی از معلومات مسئله است.

به عنوان مثال فرض کنید پاره‌خطی به اندازه‌ی x مطابق شکل داده شده است.



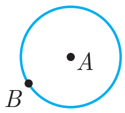
اگر واحد اندازه‌گیری را طوری انتخاب کنیم که $x = ۳$ آن‌گاه $x^۲ = ۹$ در حالی که با انتخاب $x = \frac{۱}{۲}$ داریم $x^۲ = \frac{۱}{۴}$ بنابراین اندازه‌ی واحد در محاسبات تاثیر دارد.

دقت کنید که اندازه‌گیری‌ها را بدون واحدهای متریک فرض کرده‌ایم تا بتوانیم مفهوم اندازه‌ها را به درستی درک کنیم.

۷- برای حل مسئله‌ی ترسیم، ابتدا مسئله را رسم شده فرض می‌کنیم. از شکل فرضی معلومات جدیدی به‌دست می‌آوریم تا رسم شکل ساده‌تر شود. سپس با وسایل اقلیدسی شکل مطلوب را رسم می‌کنیم.

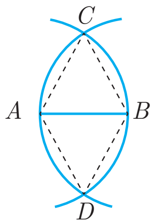
مثال ۱ دو نقطه‌ی متمایز A و B مفروض‌اند. دایره‌ای به مرکز A و گذرنده از B رسم کنید.

حل: کافی است به کمک پرگار دایره‌ای به مرکز A و شعاع AB رسم کنیم (اندازه‌ی پاره‌خط AB همان شعاع است که می‌توانیم دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی آن، باز کنیم).



مثال ۲ دو نقطه‌ی A و B مفروض‌اند. دو دایره به مرکزهای A و B و به شعاع AB رسم کنید. این دو دایره هم‌دیگر را در C و D قطع می‌کنند نوع مثلث ABC و نوع چهارضلعی $ACBD$ را تعیین کنید.

حل: مثلث ABC سه ضلع برابر دارد پس متساوی‌الاضلاع است، چهارضلعی $ACBD$ نیز چهارضلع برابر دارد پس لوزی است.



همان‌طور که در دو مثال قبل دیدید به کمک پرگار می‌توانیم نقاطی را پیدا کنیم که از یک نقطه (همان مرکز دایره) فاصله‌ی معلومی دارند (این فاصله‌ی معلوم همان شعاع دایره است).

دایره مجموعه نقاطی است که فاصله‌ی آن از نقطه‌ی ثابت O به فاصله‌ی معلوم R باشد. یعنی هر نقطه روی دایره فاصله‌اش از O برابر R است و هر نقطه‌ای که فاصله‌اش از O برابر R است روی دایره قرار دارد.

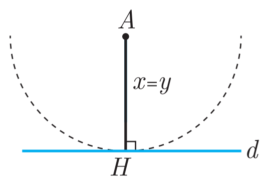
مثال ۳ نقطه‌ی A به فاصله‌ی x از خط d قرار دارد نقاطی از خط d را بیابید که به فاصله‌ی y از نقطه‌ی A باشد. با در نظر گرفتن حالات مختلف x و y روی تعداد جواب‌های مسئله بحث کنید.

حل: سه حالت در نظر می‌گیریم:

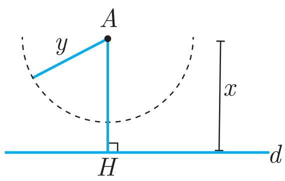
حالت اول: $x = y$ در این‌صورت تنها نقطه‌ی روی خط d که به فاصله‌ی y از نقطه‌ی A قرار دارد پای عمودی است که از A بر خط d رسم می‌شود.

حالت دوم: $x > y$ در این‌صورت اگر کمانی به مرکز A و شعاع y رسم کنیم خط d را قطع نمی‌کند و مسئله جواب ندارد.

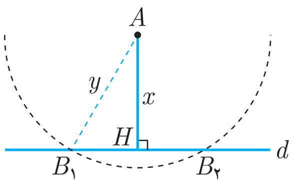
حالت سوم: $x < y$ در این صورت اگر کمانی به مرکز A و شعاع y رسم کنیم خط d را در ۲ نقطه قطع می‌کند و مسئله ۲ جواب دارد.



حالت اول

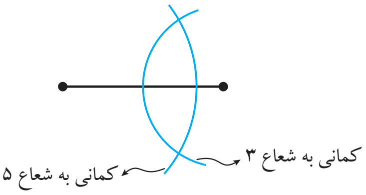


حالت دوم



حالت سوم

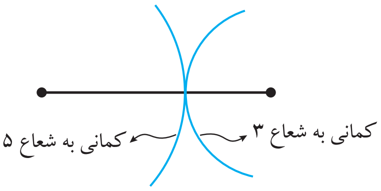
مثال ۴ مثلثی با اضلاع ۳، ۵ و ۶ رسم کنید.



حل: پاره‌خطی به اندازه‌ی ۶ رسم می‌کنیم از یک سر پاره‌خط یک کمان به شعاع ۳ (تمام نقاط روی این کمان دارای این ویژگی مشترک هستند که از مرکز به فاصله‌ی ۳ هستند) و از سر دیگر پاره‌خط کمانی به شعاع ۵ رسم می‌کنیم. این دو کمان در دو نقطه همدیگر را قطع می‌کنند و هر دو نقطه می‌توانند رأس سوم از مثلث باشند.

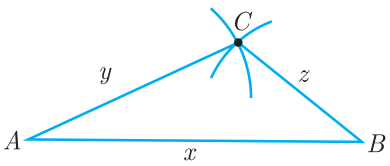
توجه: *چون دو مثلث پدید آمده هم‌نهشت‌اند در شمارش تعداد پاسخ‌ها، آن دو را یک‌بار می‌شماریم.*

مثال ۵ مثلثی با اضلاع ۳، ۵ و ۸ رسم کنید.



حل: پاره‌خطی به اندازه‌ی ۸ رسم می‌کنیم. از یک سر پاره‌خط کمانی به شعاع ۵ و از سر دیگر کمانی به شعاع ۳ رسم می‌کنیم این دو کمان روی پاره‌خط متقاطع‌اند و مثلثی به وجود نمی‌آید.

مثال ۶ پاره‌خط $AB = x$ مفروض است کمانی به مرکز A و شعاع y همچنین کمانی به مرکز B و شعاع z رسم کنید تا همدیگر را در C قطع کنند. اندازه‌ی اضلاع مثلث ABC را بیابید.



حل: اندازه‌ی اضلاع مثلث ABC برابر x، y و z است.

در این مثال‌ها آموختیم که **می‌توان با سه اندازه‌ی داده شده یک مثلث رسم کرد.** البته اندازه‌ها باید طوری باشند که وقتی دو کمان را رسم کردیم، همدیگر را در ۲ نقطه قطع کنند تا مثلث به وجود آید.

نتیجه: *برای این که مثلثی با اندازه‌ی ضلع‌های x، y و z قابل رسم باشد، باید هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر باشد.*

$x < y + z \qquad y < x + z \qquad z < x + y$

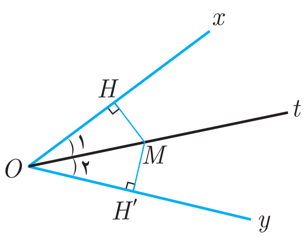
در ترسیم‌های هندسی هدف این است که اطلاعات داده شده را به مسئله‌ای تبدیل کنیم که با دو ابزار معروف قابل ترسیم باشد. مثلاً آموختیم که می‌توان یک مثلث با سه ضلعِ مشخص را رسم کرد.

برخی خواص نیم‌ساز و ترسیم آن

می‌توان نشان داد نقاط روی نیم‌ساز هر زاویه دارای یک ویژگی مشترک هستند که این خصوصیت می‌تواند وسیله‌ای برای رسم نیم‌ساز باشد.

نکته ۱ **اگر نقطه‌ای روی نیم‌ساز یک زاویه قرار داشته باشد از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.**

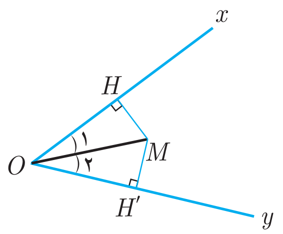
اثبات: فرض کنیم Ot نیم‌ساز زاویه‌ی xOy باشد نقطه‌ی دلخواه M را روی نیم‌ساز Ot انتخاب می‌کنیم. از M عمودهای MH و MH' را بر اضلاع Ox و Oy وارد می‌کنیم، نتیجه می‌گیریم:



$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OM = OM \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(وتر و یک زاویه‌ی تند)}} \overset{\Delta}{OMH} \cong \overset{\Delta}{OMH'}$$

پس $MH = MH'$.

نکته ۲ **اگر نقطه‌ای به فاصله‌ی یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد آن نقطه روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.**



اثبات: فرض کنیم نقطه‌ی M از دو ضلع زاویه‌ی xOy به یک فاصله باشد یعنی اندازه‌ی عمودهای MH و MH' برابر باشند از M به O وصل می‌کنیم داریم:

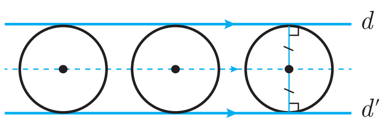
$$\left.\begin{array}{l} OM = OM \\ MH = MH' \\ \hat{H} = \hat{H}' = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(وتر و یک ضلع قائم)}} \overset{\Delta}{OMH} \cong \overset{\Delta}{OMH'}$$

بنابراین $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$، پس OM نیمساز زاویه‌ی xOy است.

از کنار هم قرار دادن دو نکته‌ی بالا نتیجه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

نتیجه: *هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.*

مثال ۷ دو خط موازی d و d' مفروض‌اند. مرکز دایره‌هایی که بر این دو خط مماس می‌شوند چه شکلی را تشکیل می‌دهد؟

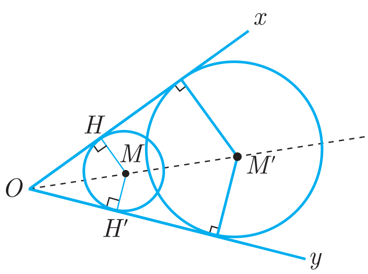


حل: اگر این دایره‌ها را رسم کنیم (در شکل چند دایره را رسم کرده‌ایم)

مرکز این دایره‌ها روی خطِ وسطِ دو خط موازی قرار می‌گیرد که با d و d' موازی است.

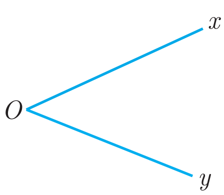
(مجموعه نقاطی از صفحه که از دو خط موازی d و d' به فاصله‌ی یکسان قرار دارند خطی موازی با d و d' و در وسط آن دو است.)

مثال ۸ زاویه‌ی xOy مفروض است. موقعیت مرکز دوایری که بر اضلاع Ox و Oy مماس‌اند را مشخص کنید.



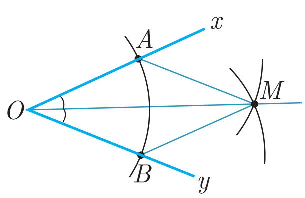
حل: مرکز دایره‌هایی که بر اضلاع Ox و Oy مماس‌اند از دو ضلع Ox و Oy به یک فاصله قرار دارند، بنابراین مرکز این دایره‌ها روی نیمساز زاویه‌ی xOy قرار می‌گیرند.

روش رسم نیمساز



برای رسم نیمساز زاویه‌ی xOy به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

می‌دانیم که نیمساز یک نیم‌خط است که از O می‌گذرد پس اگر یک نقطه‌ی دیگر از نیمساز را پیدا کنیم با وصل کردن آن نقطه به O نیمساز رسم می‌شود.

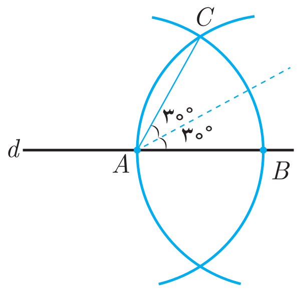


به مرکز O و شعاع دلخواه یک کمان رسم می‌کنیم تا به A و B برسیم. به مرکزهای A و B و با شعاع قبلی کمان رسم می‌کنیم (می‌توان به شعاع دلخواه مساوی یا بیش از نصف اندازه‌ی AB نیز کمان رسم کرد) تا همدیگر را در M قطع کنند.

دو مثلث AOM و BOM به حالت (ض‌ض‌ض) با هم، همنهشت هستند و در نتیجه $A\hat{O}M = B\hat{O}M$ یعنی M روی نیمساز است و امتداد OM نیمساز زاویه‌ی O است.

مثال ۹ خط d مفروض است. خطی رسم کنید که با خط d زاویه‌ی 30° بسازد.

حل: روی خط d دو نقطه‌ی A و B را در نظر می‌گیریم. کمان‌هایی به مرکزهای A و B با شعاع AB رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در C قطع کنند در این صورت مثلث متساوی‌الاضلاع ABC ایجاد می‌شود و $C\hat{A}B = 60^\circ$ پس اگر نیمساز زاویه‌ی CAB را رسم کنیم، زاویه‌ی 30° با خط d می‌سازد.

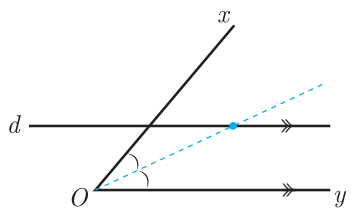


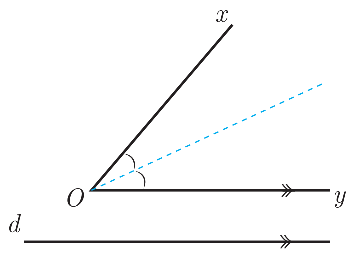
مثال ۱۰ زاویه‌ی xOy و خط d که با Oy موازی است را در نظر بگیرید. چند نقطه روی خط d وجود دارد که از Ox و Oy فاصله‌های برابر داشته باشند؟

حل: نیمساز زاویه‌ی xOy را رسم می‌کنیم، دو حالت ممکن است:

حالت اول: خط d با نیمساز متقاطع است پس مسئله یک جواب دارد.

حالت دوم: خط d نیمساز را قطع نمی‌کند و مسئله جواب ندارد.



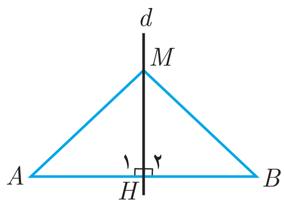


برخی خواص عمودمنصف و ترسیم آن

می‌توان نشان داد نقاط روی عمودمنصف هر پاره‌خط دارای یک ویژگی مشترک هستند که این خصوصیت وسیله‌ای برای رسم عمودمنصف است.

نکته ۳ **اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره‌خط قرار داشته باشد از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.**

اثبات: فرض کنیم d عمودمنصف پاره‌خط AB بوده و M نقطه‌ای دلخواه روی خط d باشد از M به A و B وصل می‌کنیم داریم:

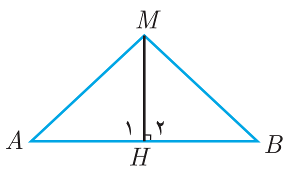


$$\left.\begin{array}{l} MH = MH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ AH = BH \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض‌زض})} \overset{\Delta}{AMH} \cong \overset{\Delta}{BMH}$$

بنابراین $MA = MB$.

نکته ۴ **اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.**

اثبات: فرض کنیم نقطه‌ی M از نقاط A و B به یک فاصله باشد از M عمود MH را بر AB وارد می‌کنیم داریم:



$$\left.\begin{array}{l} MA = MB \\ MH = MH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{وتر و یک ضلع قائم})} \overset{\Delta}{AMH} \cong \overset{\Delta}{BMH}$$

بنابراین $AH = BH$ پس MH عمودمنصف پاره‌خط AB است. در نتیجه M روی عمودمنصف AB قرار دارد.

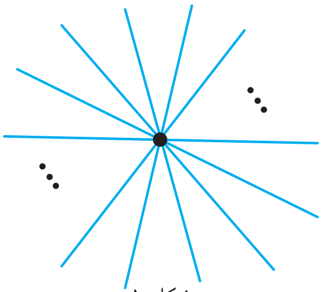
از کنار هم قرار دادن دو نکته‌ی بالا نتیجه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

نتیجه: *هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد روی عمودمنصف آن قرار دارد.*

روش رسم عمودمنصف

ابتدا به موارد زیر توجه می‌کنیم:

۱- نقطه‌ای در صفحه مفروض است بی‌شمار خط متمایز می‌توان رسم کرد که از آن نقطه بگذرد. (شکل ۱)



شکل ۱

۲- دو نقطه‌ی متمایز در صفحه مفروض‌اند. فقط یک خط می‌توان رسم کرد که از آن دو نقطه بگذرد. (شکل ۲)

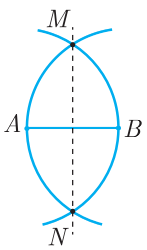
شکل ۲

۳- برای این‌که یک خط به‌طور کامل مشخص شود حداقل ۲ نقطه از آن خط را باید داشته باشیم.

برای رسم عمودمنصف پاره‌خط AB به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

باز هم این‌گونه استدلال می‌کنیم که عمودمنصف یک خط است پس اگر دو نقطه از آن را پیدا کنیم عمودمنصف با وصل کردن آن دو نقطه به هم، رسم می‌شود.

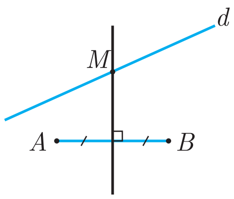
کمانی به مرکز A و شعاع AB و کمان دیگری نیز به مرکز B و شعاع AB رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقاط M و N قطع کنند هر دو نقطه‌ی M و N از نقاط A و B به یک فاصله هستند پس روی عمودمنصف AB قرار دارند پس اگر M را به N وصل کنیم عمودمنصف AB رسم می‌شود.



در روش گفته شده، کمان‌ها را با شعاع AB رسم کردیم ولی می‌توان اندازه‌ی شعاع‌های کمان‌ها را تغییر داد البته به شرطی که همدیگر را در دو نقطه قطع کنند، پس کافی است اندازه‌ی شعاع کمان‌ها از نصف اندازه‌ی پاره‌خط AB بیش‌تر باشد.

مثال ۱۱ خط d و دو نقطه‌ی A و B در یک صفحه قرار دارند روی خط d نقطه‌ای را پیدا کنید که از نقاط A و B به یک فاصله باشد.

حل: عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم نقطه‌ی تلاقی عمودمنصف با خط d را M می‌نامیم نقطه‌ی M جواب این مثال است.

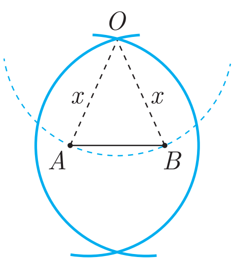


در صورتی که عمودمنصف AB خط d را قطع نکند (یعنی d بر AB عمود باشد.) مسئله جواب ندارد و در صورتی که عمودمنصف AB بر خط d منطبق باشد مسئله بی‌شمار جواب خواهد داشت.

مثال ۱۲ دو نقطه‌ی A و B داده شده‌اند دایره‌ای به شعاع x $(x \geq \frac{AB}{۲})$ رسم کنید که از A و B بگذرد.

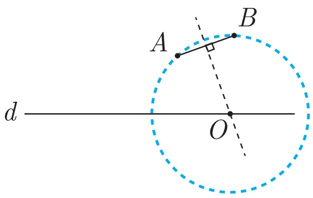
حل: مرکز دایره‌ای که از A و B می‌گذرد حتماً روی عمودمنصف AB قرار دارد و فاصله‌ی A و B از مرکز دایره باید x باشد پس دو کمان به مرکزهای A و B و با شعاع x رسم می‌کنیم تا همدیگر را در O قطع کند نقطه‌ی O مرکز دایره‌ی مفروض است. باید دایره‌ای به مرکز O و شعاع x رسم کنیم.

(در حقیقت O روی عمودمنصف پاره‌خط AB است)



مثال ۱۳ دو نقطه‌ی A و B در یک طرف خط d داده شده‌اند. دایره‌ای گذرنده از A و B رسم کنید که مرکز آن روی خط d باشد.

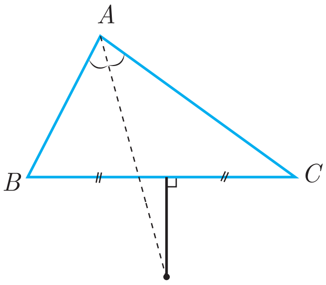
حل: مرکز دایره‌ای که از A و B می‌گذرد حتماً روی عمودمنصف AB قرار دارد یعنی باید عمودمنصف AB رسم شود که روش رسم آن را آموختیم محل برخورد عمودمنصف و خط d را O می‌نامیم دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA جواب است.



در این مثال ممکن است عمودمنصف AB با خط d متقاطع نباشد (موازی باشد) که در این حالت مسئله جواب ندارد (این حالت وقتی اتفاق می‌افتد که AB بر خط d عمود باشد).

نکته ۵ **با استفاده از روش رسم عمودمنصف می‌توانیم وسط هر پاره‌خط را به‌دست آوریم.**

مثال ۱۴ در صفحه‌ی مثلث ABC نقطه‌ای چنان بیابید که از دو ضلع AB و AC به یک فاصله و از رئوس B و C نیز به یک فاصله باشد.



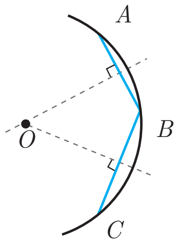
حل: شکل مسئله را با فرض $AB < AC$ رسم می‌کنیم. می‌دانیم نقاطی که از دو ضلع AB و AC به یک فاصله‌اند روی نیمساز زاویه‌ی A قرار دارند و نیز نقاطی که از دو نقطه‌ی B و C به یک فاصله‌اند روی عمودمنصف ضلع BC قرار دارند. پس پاسخ محل تلاقی نیمساز زاویه‌ی A و عمودمنصف ضلع BC است.

اگر این رسم دقیق صورت بگیرد مشاهده خواهیم کرد که محل تلاقی آن‌ها بیرون مثلث است.

به نظر شما در صورتی که $AB = AC$ جواب چگونه است؟

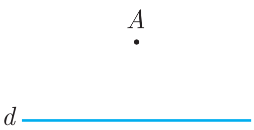
توجه: *منظور از صفحه‌ی مثلث، صفحه‌ای است که مثلث در آن رسم شده است.*

مثال ۱۵ کمانی از یک دایره معلوم است. مرکز آن را بیابید و دایره را رسم کنید.



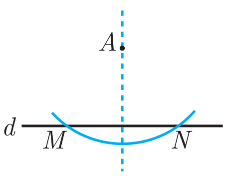
حل: سه نقطه‌ی A، B و C را روی کمان در نظر می‌گیریم. عمودمنصف‌های AB و BC را رسم می‌کنیم. محل تقاطع عمودمنصف‌ها مرکز دایره است (مرکز دایره از نقاط A، B و C به یک فاصله است، در نتیجه روی عمودمنصف AB و BC قرار دارد). حال می‌توانیم به مرکز O و شعاع OA دایره را رسم کنیم.

رسم خط عمود بر یک خط



از گذشته‌ی دور رسم خط عمود بر یک خط و ایجاد زاویه‌ی قائمه کاربردهای زیادی داشته است. ابتدا به مراحل رسم خط عمود بر یک خط توجه می‌کنیم سپس کاربردهای آن‌را بررسی می‌کنیم.

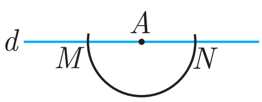
الف) رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای خارج از آن



فرض کنیم خط d و نقطه‌ی A خارج از آن داده شده‌اند. با توجه به روش رسم عمودمنصف، پاره‌خطی روی خط d می‌سازیم که عمودمنصف آن از A بگذرد. سپس عمودمنصف آن را رسم می‌کنیم. ابتدا کمانی به مرکز A رسم می‌کنیم که خط d را قطع کند. (شعاع این کمان باید بیش‌تر از فاصله‌ی A تا d باشد.) این دو نقطه‌ی برخورد را M و N می‌نامیم.

حال عمودمنصف MN را رسم می‌کنیم که از A خواهد گذشت و بر خط d عمود است. البته این ترسیم روش‌های دیگری هم دارد!

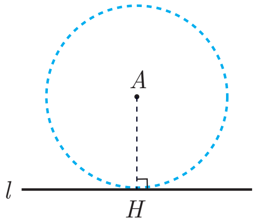
ب) رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای واقع بر آن



اگر نقطه‌ی A روی خط d باشد باز هم می‌توانیم خطی گذرنده از A و عمود بر d رسم کنیم. مراحل رسم، همانند حالتی است که A خارج از خط d باشد:

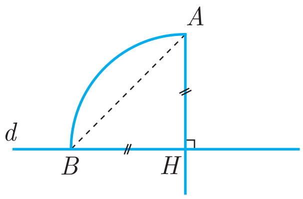
ابتدا کمانی به مرکز A رسم می‌کنیم تا M و N به‌دست آید. سپس عمودمنصف MN را رسم می‌کنیم.

مثال ۱۶ نقطه‌ی A خارج از خط l قرار دارد. دایره‌ای به مرکز A رسم کنید که بر خط l مماس باشد.



حل: اگر دایره بر خط l مماس باشد خط l در نقطه‌ی تماس با دایره، بر شعاع عمود است، پس باید خطی از A عمود بر l رسم کنیم. حال دایره‌ای به مرکز A و شعاع AH رسم می‌کنیم.

مثال ۱۷ خط d و نقطه‌ی A خارج از آن داده شده است. خطی گذرنده از A رسم کنید که با خط d زاویه‌ی 45° بسازد.

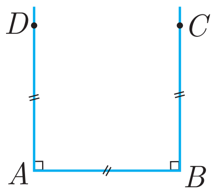


حل: از نقطه‌ی A خطی عمود بر خط d رسم می‌کنیم. پای عمود را H می‌نامیم. کمانی به مرکز H و شعاع AH رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌ای مانند B قطع کند. A را به B وصل می‌کنیم زاویه‌ی ABH برابر 45° است.

کاربردهای رسم خط عمود

یکی از کاربردهای رسم خط عمود رسم ارتفاع است. در مثال‌های زیر از ترسیم خط عمود برای حل مسئله استفاده می‌کنیم.

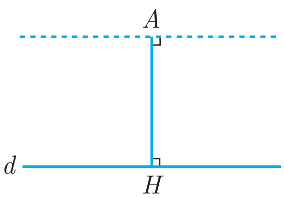
مثال ۱۸ مربعی رسم کنید که پاره‌خط AB یک ضلع آن باشد.



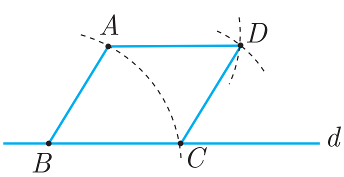
حل: در نقاط A و B خطهایی عمود بر خط AB رسم می‌کنیم سپس روی این عمودها به اندازه‌ی AB جدا می‌کنیم. (برای این کار کمان‌هایی به مرکزهای A و B و با شعاع AB رسم می‌کنیم.) تا نقاط D و C به‌دست آید. $ABCD$ مربع مورد نظر است.

یکی دیگر از کاربردهای رسم خط عمود، رسم مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع زاویه‌ی قائمه‌ی معلوم یا با معلوم بودن اندازه‌ی وتر و اندازه‌ی یک ضلع زاویه‌ی قائمه است.

رسم خط موازی با خط داده شده از یک نقطه غیرواقع بر آن



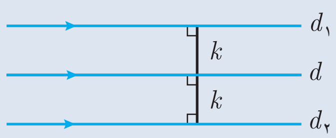
می‌توانیم از این نکته استفاده کنیم که دو خط عمود بر یک خط خودشان با هم موازی‌اند. بنابراین از نقطه‌ی A عمود AH را بر خط d رسم می‌کنیم. (طریقه‌ی این رسم را در قسمت‌های قبل آموختیم.) همچنین خطی عمود بر AH در نقطه‌ی A رسم می‌کنیم. این خط از A می‌گذرد و با خط d موازی است.



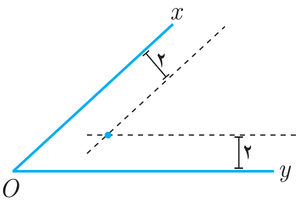
روش دیگر: نقطه‌ی B را روی خط d فرض می‌کنیم و به مرکز B و شعاع AB کمان رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌ی C قطع کند. بدون تغییر شعاع، کمان‌هایی به مراکز A و C رسم می‌کنیم تا همدیگر را در D قطع کنند چهارضلعی $ABCD$ لوزی است پس $AD \parallel BC$ یعنی AD با خط d موازی است.

توضیحات تکمیلی: می‌توانستیم نقطه‌ی C را نیز دلخواه انتخاب کنیم و با رسم ۲ کمان، یکی به مرکز A و شعاع BC و دیگری به مرکز C و شعاع AB، نقطه‌ی D را بیابیم.

نکته ۶ **مجموعه نقاطی از صفحه که از خط مفروض d به فاصله‌ی مشخص k قرار دارند دو خط موازی d و به فاصله‌ی k از آن هستند.**



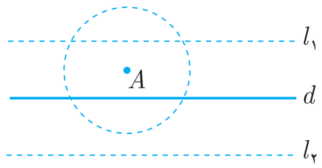
مثال ۱۹ یک زاویه مفروض است. نقطه‌ای بیابید که فاصله‌ی آن از هر دو ضلع زاویه برابر ۲ باشد.



حل: فرض کنیم xOy مانند شکل زاویه‌ی مفروض باشد. خطی موازی با Ox رسم می‌کنیم که فاصله‌اش تا Ox برابر ۲ باشد، سپس خطی موازی با Oy به فاصله‌ی ۲ از آن رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو خط جواب است.

با استفاده از این نقطه می‌توان نیم‌ساز زاویه را رسم کرد، کافی است از آن نقطه به O وصل کنید و از طرف آن نقطه امتداد دهیم.

مثال ۲۰ خط d و نقطه‌ی A خارج آن مفروض‌اند. حداکثر چند نقطه در صفحه می‌توان یافت که از نقطه‌ی A و خط d فاصله‌ای برابر $5cm$ داشته باشند؟

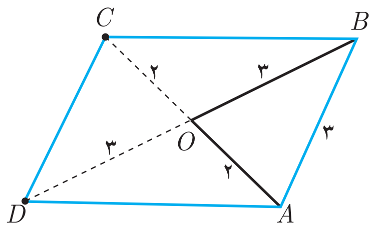


حل: نقاطی از صفحه که از خط d فاصله‌ای برابر $5cm$ داشته باشند دو خط موازی l_1 و l_2 هستند که هر دو با d موازی بوده و از آن فاصله‌ای برابر $5cm$ دارند. همچنین نقاطی که از A فاصله‌ای برابر $5cm$ دارند روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع $5cm$ قرار دارند. پس محل تلاقی این دایره با l_1 و l_2 جواب است. نقطه‌ی A به یکی از دو خط l_1 یا l_2 نزدیک‌تر است. پس حداکثر آن را در دو نقطه قطع می‌کند.

در ادامه‌ی این بخش مثال‌هایی از ترسیم اشکال هندسی را با داشتن اطلاعات متفاوت مطرح می‌کنیم تا با مسائل مختلف رسم بیش‌تر آشنا شوید.

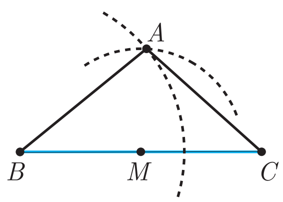
در حل مسائل ترسیم می‌توان از ترسیم‌های مهم گفته شده استفاده کرد.

مثال ۲۱ متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که اندازه‌ی قطرهای آن ۴ و ۶ و اندازه‌ی یک ضلع آن ۳ باشد.



حل: می‌دانیم قطرهای متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگرند پس اگر $ABCD$ متوازی‌الاضلاعی با $AB = 3$، $AC = 4$ و $BD = 6$ باشد و O را محل تقاطع قطرها بنامیم، داریم $OA = 2$ و $OB = 3$ پس مثلث OAB را با معلوم بودن سه ضلع می‌توانیم رسم کنیم. پس از رسم مثلث OAB، پاره‌خط‌های OA و OB را از طرف O به اندازه‌ی خودشان امتداد می‌دهیم تا به C و D برسیم. $ABCD$ متوازی‌الاضلاع مورد نظر است.

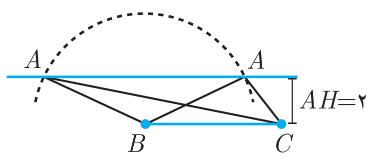
مثال ۲۲ مثلث ABC را با معلومات $AB = 4$، $BC = 6$ و $AM = m_a = \frac{5}{2}$ رسم کنید.



حل: ابتدا ضلع $BC = 6$ را رسم می‌کنیم سپس یک کمان به مرکز B و شعاع $AB = 4$ رسم می‌کنیم. نقطه‌ی M (وسط BC) را به کمک رسم عمودمنصف پیدا می‌کنیم. سپس به مرکز M و شعاع $AM = \frac{5}{2}$ کمان رسم می‌کنیم تا رأس A پیدا شود. A را به B و C وصل می‌کنیم تا مثلث رسم شود.

توجه می‌کنیم که اگر اندازه‌ی AM کم‌تر مساوی ۱ یا بیش‌تر مساوی ۷ باشد دو کمان هم‌دیگر را در دو نقطه قطع نمی‌کنند و مسئله جواب ندارد (باید توجه داشت که با اطلاعات مسئله ممکن است نتوان مثلثی رسم کرد و یا بتوان چند مثلث رسم کرد).

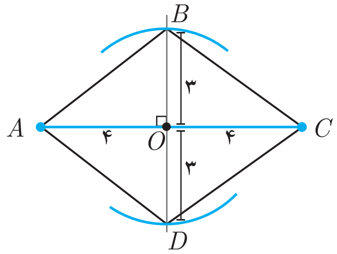
مثال ۲۳ با معلومات $BC = 5$، $AH = h_a = 2$ و $AB = 4$، مثلث را رسم کنید.



حل: ابتدا ضلع $BC = 5$ و خطی موازی با آن به فاصله‌ی $AH = 2$ رسم می‌کنیم. سپس کمانی به مرکز B و شعاع $AB = 4$ رسم می‌کنیم تا خط موازی را در A قطع کند. این مسئله دو جواب متمایز دارد.

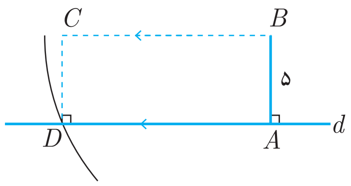
انتشارات خوشخوان

مثال ۲۴ لوزی‌ای رسم کنید که اندازه‌ی قطرهای آن ۶ و ۸ باشد.



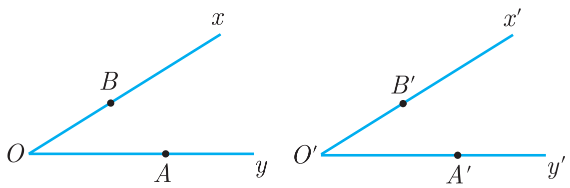
حل: پاره‌خطی به اندازه‌ی ۸ رسم می‌کنیم و عمودمنصف آن‌را نیز رسم می‌کنیم. سپس به مرکز O (وسط AC) و شعاع ۳ کمان رسم می‌کنیم تا عمودمنصف را در ۲ نقطه قطع کند با وصل کردن ۴ نقطه‌ی به وجود آمده لوزی رسم می‌شود (چهارضلعی که قطرهایش عمودمنصف هم باشند لوزی است).

مثال ۲۵ مستطیلی رسم کنید که قطرهای آن به اندازه‌ی ۱۳ و عرض آن به اندازه‌ی ۵ باشد.



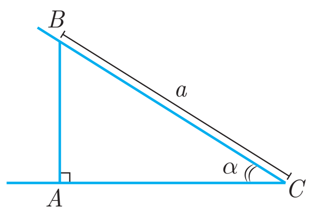
حل: خط دلخواه d را رسم کرده و نقطه‌ی A را روی آن در نظر می‌گیریم. در نقطه‌ی A عمودی بر خط d رسم کرده و روی آن $AB = ۵$ را جدا می‌کنیم. به مرکز B و شعاع $BD = ۱۳$ کمان رسم می‌کنیم تا خط d را در D قطع کند، از B خطی موازی با d و از D خطی عمود بر d رسم می‌کنیم تا C به‌دست آید.

مثال ۲۶ زاویه‌ی xOy را داریم، روی نیم‌خط مفروض $O'y'$ زاویه‌ای برابر با xOy رسم کنید.



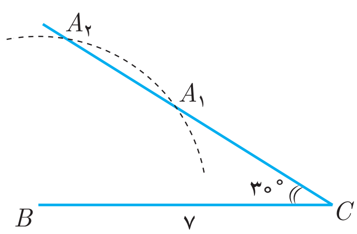
حل: نقاط A و B را روی نیم‌خط‌های Oy و Ox در نظر می‌گیریم، پس اندازه‌های سه ضلع مثلث OAB را داریم. مثلث $O'A'B'$ را با معلوم بودن $O'A' = OA$، $O'B' = OB$ و $A'B' = AB$ رسم می‌کنیم. زاویه‌ی O' با O برابر است.

مثال ۲۷ مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC را با معلومات $BC = a$، $\hat{A} = ۹۰^\circ$ و $\hat{C} = \alpha$ رسم کنید.



حل: ابتدا زاویه‌ی $\hat{C} = \alpha$ را رسم می‌کنیم و روی یک ضلع آن به اندازه‌ی $BC = a$ جدا می‌کنیم تا رأس B به‌دست آید. سپس از رأس B خطی عمود بر ضلع دیگر رسم می‌کنیم تا به A برسیم. این مسئله همواره یک جواب دارد ($۰^\circ < \alpha < ۹۰^\circ$).

مثال ۲۸ مثلث ABC را با معلومات $BC = ۷$، $AB = ۴$ و $\hat{C} = ۳۰^\circ$ رسم کنید.

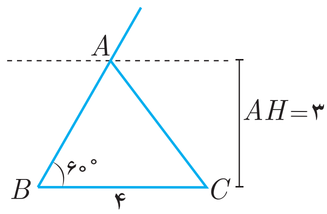


حل: ابتدا ضلع $BC = ۷$ را رسم می‌کنیم و روی رأس C زاویه‌ی ۳۰° را جدا می‌کنیم. سپس کمانی به مرکز B و شعاع $AB = ۴$ رسم می‌کنیم. این کمان ضلع زاویه‌ی ۳۰° را در دو نقطه قطع می‌کند و دو مثلث متمایز به‌دست می‌آید.

توجه کنیم که اگر زاویه‌ی C زاویه‌ی بزرگ‌تر مثلث باشد این مسئله (ترسیم مثلث با معلوم بودن دو ضلع و زاویه‌ی روبه‌رو به یکی از آن‌ها) یک جواب خواهد داشت.

مثال ۲۹ مثلث ABC را با اطلاعات $BC = 4$، $\hat{B} = 60^\circ$ و $AH = 3$ رسم کنید (H پای ارتفاع رسم شده از A است).

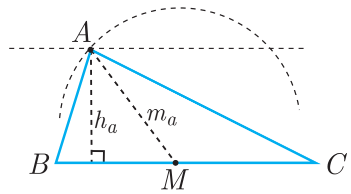
حل: ابتدا پاره‌خط $BC = 4$ را رسم می‌کنیم و در نقطه‌ی B یک زاویه‌ی 60° به وجود می‌آوریم. سپس خطی موازی با BC به فاصله‌ی $AH = 3$ رسم می‌کنیم (دقت کنید که AH همان فاصله‌ی رأس A از ضلع BC است و می‌توان نتیجه گرفت A باید روی خطی موازی با BC به فاصله‌ی ۳ واحد باشد.) محل برخورد این خط با ضلع زاویه‌ی 60° رأس A خواهد بود. پس ABC مثلث مورد نظر است.



مثال ۳۰ مثلث ABC را با معلوم بودن $BC = a$، $AH = h_a$ و $AM = m_a$ رسم کنید (H پای ارتفاع رسم شده از A و M وسط BC است).

حل: ابتدا BC را رسم می‌کنیم. سپس وسط BC را به کمک روش رسم عمودمنصف پیدا می‌کنیم. با معلوم بودن AM می‌توانیم دایره‌ای به مرکز M (وسط BC) و شعاع AM رسم کنیم نقطه‌ی A حتماً روی این دایره قرار دارد.

سپس خطی موازی با BC به فاصله‌ی AH از آن رسم می‌کنیم. نقطه‌ی A باید روی این خط نیز قرار داشته باشد. محل برخورد دایره و خط موازی، رأس A است. کافی است A را به B و C وصل کنیم. در این صورت ABC مثلث مورد نظر است. اگر $m_a \geq h_a$ باشد می‌توان مثلث را رسم کرد، در غیر این صورت هیچ مثلثی با شرایط فوق وجود ندارد.

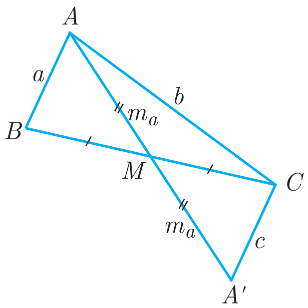


مثال ۳۱ مثلث ABC را طوری رسم کنید که اندازه‌ی اضلاع AB و AC و اندازه‌ی میانه‌ی AM معلوم باشند.

حل: در حل این سؤال از روشی استفاده می‌کنیم که به مثلث کمکی معروف است. در واقع سعی بر این داریم مثلثی پیدا کنیم که با اطلاعات مسئله به راحتی قابل رسم باشد. سپس مثلث اصلی را از روی آن می‌سازیم. فرض کنیم ABC جواب مسئله باشد!!! اگر میانه‌ی AM را به اندازه‌ی خودش امتداد بدهیم به A' می‌رسیم که در مثلث ACA' اندازه‌های هر سه ضلع معلوم است و می‌توانیم آن را رسم کنیم (زیرا دو مثلث ABM و $A'CM$ به حالت (ض‌زض) هم‌نهشت هستند بنابراین $A'C = AB$).

<u>روش رسم:</u> مثلث ACA' را با $AA' = 2m_a$، $AC = b$ و $A'C = c$ رسم می‌کنیم سپس M وسط AA' را مشخص می‌کنیم و CM را از طرف M به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا به B برسیم و از B به A وصل می‌کنیم در این صورت ABC مثلث مطلوب است.

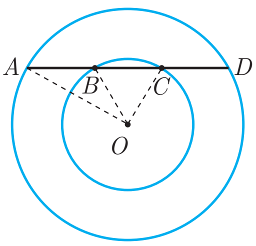
شرط قابل رسم بودن مثلث مورد نظر این است که مثلث کمکی را بتوان رسم کرد. یعنی هر ضلع مثلث کمکی (ACA') از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر باشد.



مثال ۳۲ دو دایره‌ی هم مرکز داده شده‌اند خطی رسم کنید که دایره‌ها روی آن، سه پاره‌خط برابر ایجاد کنند.

حل: فرض کنیم خط مورد نظر مطابق شکل رسم شده باشد. در این صورت در مثلث OAC داریم:

$$OA = R \quad \text{و} \quad OB = OC = r$$



یعنی اندازه‌ی دو ضلع و میانه‌ی وارد بر ضلع سوم از مثلث را داریم و می‌توانیم این مثلث را رسم کنیم (به مثال قبل توجه کنید).

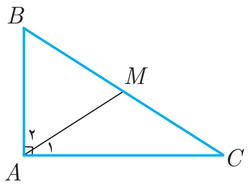
اگر $R > r$ و $3r \geq R$ می‌توان خط مورد نظر را رسم کرد.

مسئله‌ای کاربردی از مثلث قائم‌الزاویه

مسئله ۱ ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه، اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر وتر نصف اندازه‌ی وتر است.

اثبات: مطابق شکل مثلث ABC در رأس A قائمه است. به اندازه‌ی زاویه‌ی C روی زاویه‌ی A جدا می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا وتر مثلث را در M قطع کند. بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1=\hat{C}\\ \hat{A}_1+\hat{A}_2=90^\circ\\ \hat{B}+\hat{C}=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}_2=\hat{B}$$

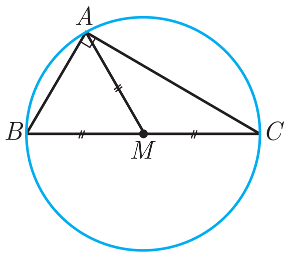


پس مثلث‌های AMC و AMB متساوی‌الساقین هستند.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1=\hat{C}\Rightarrow AM=MC\\ \hat{A}_2=B\Rightarrow AM=MB\end{array}\right\}\Rightarrow AM=\frac{BC}{2}$$

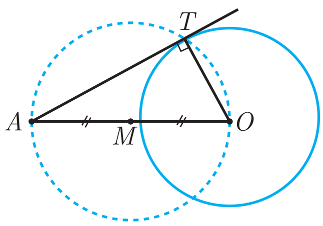
پس AM میانه‌ی مثلث است که نصف وتر نیز است.

نتیجه: اگر AM میانه‌ی وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC باشد، آن‌گاه مثلث‌های AMB و AMC متساوی‌الساقین خواهند بود. بنابراین اگر دایره‌ای به مرکز M و شعاع $\frac{BC}{2}$ رسم کنیم این دایره از سه رأس مثلث می‌گذرد.



مثال ۳۳ نقطه‌ی A خارج از دایره‌ی $C(O,R)$ قرار دارد (دایره‌ای به مرکز O و شعاع R). خطی گذرنده از A رسم کنید که بر این دایره مماس باشد.

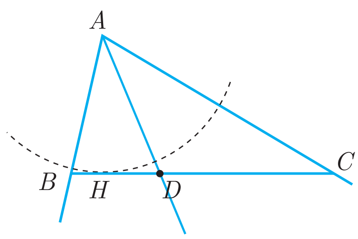
حل: فرض کنیم AT بر دایره مماس باشد در این صورت مثلث ATO در رأس T قائم‌الزاویه است (خط مماس بر دایره همواره عمود بر شعاعی از دایره است که از نقطه‌ی تماس می‌گذرد.) پس دو رأس از مثلث قائم‌الزاویه را داریم و برای پیدا کردن رأس قائمه، به این نکته توجه می‌کنیم که اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر وتر نصف اندازه‌ی وتر است و اگر دایره‌ای به مرکز M (M وسط AO است) و شعاع $\frac{AO}{2}$ رسم کنیم حتماً از T می‌گذرد بنابراین دایره‌ای به مرکز M و شعاع $\frac{AO}{2}$ رسم می‌کنیم تا نقطه‌ی T مشخص شود. توجه دارید که نقطه‌ی دیگری نیز به‌دست می‌آید و نتیجه می‌گیریم از هر نقطه خارج از دایره دو مماس بر یک دایره رسم می‌شود.



مثال ۳۴ مثلث ABC را با معلومات $\hat{A}=\alpha$، $AH=h_a$ و $AD=d_a$ رسم کنید.

حل: ابتدا زاویه‌ی A و نیم‌ساز آن را رسم می‌کنیم و روی آن به اندازه‌ی AD جدا می‌کنیم تا D به‌دست آید.

دایره‌ای به مرکز A و شعاع $AH=h_a$ رسم می‌کنیم و از نقطه‌ی D بر این دایره مماس رسم می‌کنیم. امتداد خط مماس بر دایره، اضلاع زاویه را در B و C قطع می‌کند. دقت کنید که نقطه‌ی تماس دایره با خط مماس همان H پای ارتفاع وارد بر BC است.



مسائل فصل اول- درس اول

۱- چند نقطه در صفحه‌ی دو خط متقاطع d و d' وجود دارد که از آن دو خط به فاصله‌ی $5cm$ باشند؟

۲- دو خط متقاطع d و d' مفروض‌اند و دایره‌ای به مرکز O در صفحه وجود دارد. چند نقطه روی دایره وجود دارد که از دو خط d و d' به یک فاصله باشد؟

۳- دو خط موازی d و d' فاصله‌ای برابر ۴ از یکدیگر دارند. نقاطی از صفحه‌ی دو خط d و d' بیابید که مجموع فاصله‌شان از d و d' برابر ۴ باشد.

۴- نقطه‌ی P خارج از زاویه‌ی xOy قرار دارد. خطی گذرنده از P رسم کنید که Ox و Oy را در B و A قطع کند به‌طوری که $OB = OA$.

۵- مثلث ABC را با معلومات $\hat{A} = \alpha$، $BH = h_b$ و $CH' = h_c$ رسم کنید.

۶- مثلث ABC را طوری رسم کنید که اندازه‌ی اضلاع AB، AC و نیز اندازه‌ی ارتفاع AH معلوم باشد.

۷- مثلث ABC را با معلومات $\hat{B}$، اندازه‌ی AH (ارتفاع) و اندازه‌ی AD (نیم‌ساز) رسم کنید.

۸- از مثلث ABC اندازه‌ی ضلع AB، اندازه‌ی میانه و ارتفاع نظیر ضلع BC معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۹- مربعی رسم کنید که پاره‌خط AC قطر آن باشد.

۱۰- متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که اندازه‌ی اضلاع و یکی از زاویه‌های آن معلوم باشد.

۱۱- از مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازه‌ی وتر و ارتفاع وارد بر وتر معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۱۲- از مثلث ABC اندازه‌های $BC = ۴$ و $AM = m_a = ۳$ معلوم است و می‌دانیم H (پای ارتفاع وارد بر BC) وسط BM است. مثلث را رسم کنید.

۱۳- مثلث ABC را با داشتن ضلع $BC = ۴$، زاویه‌ی $\hat{B} = ۴۵^\circ$ و ارتفاع $CH = ۲\sqrt{۲}$ رسم کنید.

۱۴- مثلث ABC مفروض است. خطی موازی BC رسم کنید که AB و AC را در نقاط M و N قطع کند به‌طوری که $MN = x$ $(BC > x)$.

۱۵- ذوزنقه‌ای رسم کنید که اندازه‌ی قاعده‌های آن $CD = ۹$ و $AB = ۴$ و اندازه‌ی زاویه‌های مجاور به قاعده‌ی آن $\hat{C} = ۶۰^\circ$ و $\hat{D} = ۴۵^\circ$ باشد.

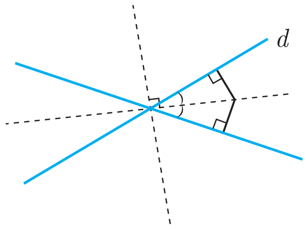
۱۶- مثلث ABC را با معلومات $b + c$، $BC = a$ و $\hat{B} = \alpha$ رسم کنید.

۱۷- مثلث ABC را با معلومات $b + c$، $BC = a$ و $\hat{A} = \alpha$ رسم کنید.

۱۸- از ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقینی اندازه‌ی قاعده‌ها و تفاضل دو زاویه‌ی ذوزنقه داده شده است. ذوزنقه را رسم کنید.

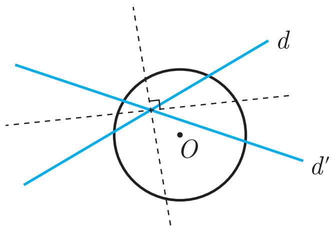
پاسخ مسائل

۱- می‌دانیم هر نقطه‌ای که از دو ضلع زاویه‌ای به یک فاصله باشد روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. دو خط متقاطع d و d' در صفحه چهار زاویه ایجاد می‌کنند. روی نیمسازهای هر کدام از آن زوایا فقط یک نقطه با خاصیت داده شده وجود دارد. پس کلاً ۴ نقطه وجود دارد.

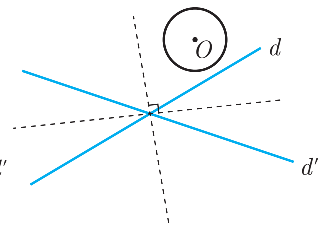


(با رسم خطوط موازی d و d' و به فاصله‌ی ۵ از هر کدام نیز می‌توان مسئله را حل کرد.)

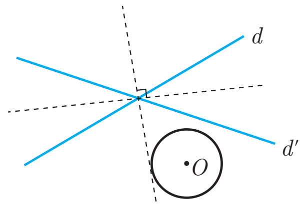
۲- نیمسازهای چهار زاویه‌ی حاصل از تقاطع d و d' را رسم می‌کنیم که دو خط عمود بر هم است. دایره به مرکز O با این نیمسازها می‌تواند صفر تا چهار نقطه‌ی مشترک داشته باشد.



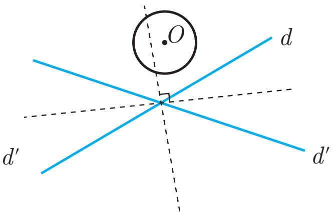
دایره با نیمسازها ۴ نقطه‌ی مشترک دارد.



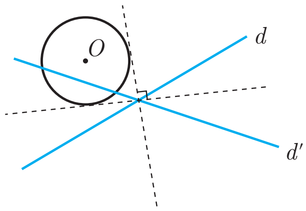
دایره با نیمسازها نقطه‌ی مشترک ندارد.



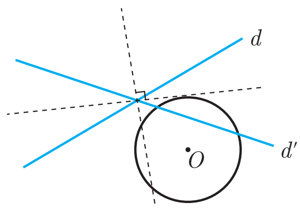
دایره با نیمسازها ۱ نقطه‌ی مشترک دارد.



دایره با نیمسازها ۲ نقطه‌ی مشترک دارد.



دایره با نیمسازها ۲ نقطه‌ی مشترک دارد.

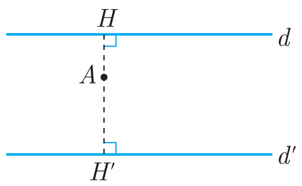


دایره با نیمسازها ۳ نقطه‌ی مشترک دارد.

۳- اگر A نقطه‌ای بین دو خط d و d' باشد داریم:

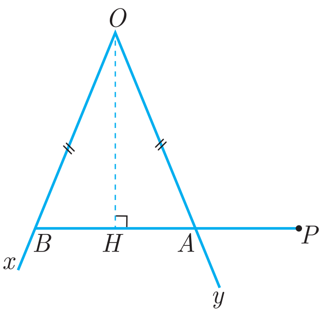
$$AH + AH' = HH' = ۴$$

پس تمام نقاط بین دو خط پاسخ مسئله است. واضح است که نقاط روی هر کدام از دو خط d و d' نیز جواب‌اند. ولی نقاط بیرون دو خط این خاصیت را ندارند.

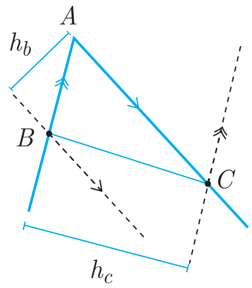


۴- ابتدا فرض کنیم چنین خطی رسم شده باشد بنابراین مثلث OAB متساوی‌الساقین است و نیمساز O بر BA عمود است.

برای پیداکردن نقاط B و A باید از P عمودی بر نیمساز زاویه‌ی xOy رسم کنیم.

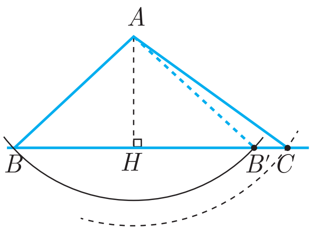


۵- ابتدا زاویه‌ی A را رسم می‌کنیم. خطی موازی با یک ضلع آن به فاصله‌ی h_b رسم می‌کنیم تا رأس B به‌دست آید. همچنین خطی موازی با ضلع دیگر به فاصله‌ی h_c رسم می‌کنیم تا رأس C مشخص شود کافی است B را به C وصل کنیم. در این صورت ABC مثلث مطلوب خواهد بود.

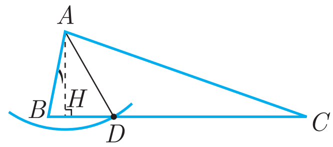


۶- ابتدا خطی رسم می‌کنیم که قرار است ضلع BC بخشی از آن باشد، نقطه‌ی H را روی خط در نظر می‌گیریم و عمودی به اندازه‌ی AH در آن نقطه رسم می‌کنیم تا نقطه‌ی A به‌دست آید. سپس به مرکز A و شعاع‌های AB و AC دو کمان رسم می‌کنیم تا B و C دست آید. A را به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسئله است.

مسئله زمانی جواب دارد که $AC \geq AH$ و $AB \geq AH$ باشد و حداقل یکی از نامساوی‌ها تساوی نباشد. اگر دقیقاً یکی از نامساوی‌ها تساوی باشد مسئله یک جواب دارد و اگر هر دو نامساوی باشند و $AB \neq AC$ باشد مسئله دو جواب دارد و اگر $AB = AC$ یک جواب دارد.

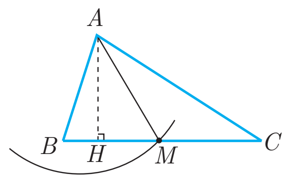


۷- ابتدا فرض کنیم ABC جواب باشد.

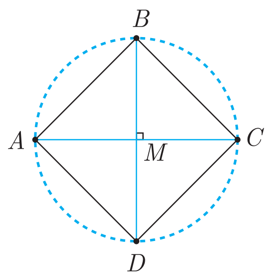


مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH را می‌توان رسم کرد (زیرا دو زاویه H و A_1 و ضلع بین AH در این مثلث معلوم است). پس از رسم این مثلث کمانی به مرکز A و شعاع AD رسم می‌کنیم تا BH یا امتداد آن را در نقطه‌ی D قطع کند. روی AD به اندازه‌ی زاویه‌ی BAD جدا می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا C به‌دست آید. شرط رسم $AD \geq AH$ است (حال بگویید این مسئله چند جواب دارد).

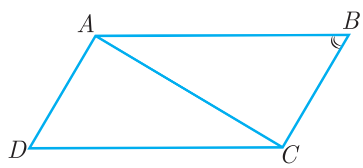
۸- مطابق شکل مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH قابل رسم است. سپس کمانی به مرکز A و شعاع AM رسم می‌کنیم تا M به‌دست آید. BM را به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا به C برسیم (حال بگویید این مسئله چند جواب دارد).



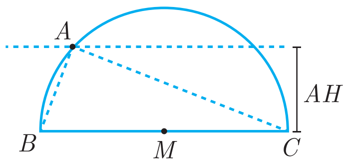
۹- عمودمنصف AC را رسم می‌کنیم. با توجه به این که قطرهای مربع مساوی و عمودمنصف یکدیگر هستند، پس دایره‌ای به مرکز M و شعاع AM رسم می‌کنیم. تا رأس‌های B و D از مربع معلوم شوند. در این صورت $ABCD$ مربع مورد نظر است (چهارضلعی که قطرهایش عمودمنصف هم و برابر باشند مربع است).



۱۰- مطابق شکل مثلث ABC با معلومات دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها قابل رسم است. پس ابتدا مثلث ABC را رسم کرده، سپس از رأس C خطی موازی AB و از رأس A خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در D قطع کنند. $ABCD$ متوازی‌الاضلاع مورد نظر است.

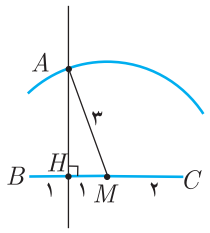


۱۱- ابتدا وتر مثلث را رسم می‌کنیم (BC وتر مثلث است) می‌دانیم که طبق خاصیت میانه در مثلث قائم‌الزاویه، اگر دایره‌ای به قطر BC رسم کنیم از A می‌گذرد. این دایره را رسم می‌کنیم. همچنین خطی موازی با BC به فاصله‌ی AH از آن رسم می‌کنیم تا دایره را در A قطع کند کافی است A را به B و C وصل کنیم.

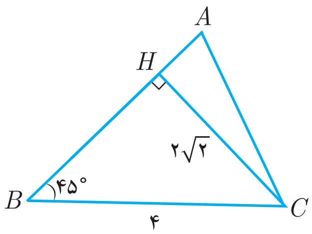


مسئله هنگامی جواب دارد که $AH \leq \frac{BC}{۲}$.

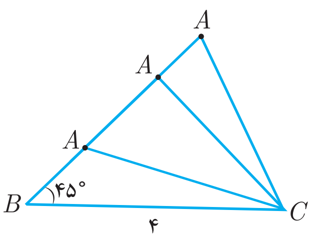
۱۲- ابتدا BC را رسم می‌کنیم و به کمک رسم عمودمنصف نقاط M و H را پیدا می‌کنیم. خطی عمود بر BC در نقطه‌ی H رسم می‌کنیم و کمانی به مرکز M و شعاع $AM = ۳$ رسم می‌کنیم تا رأس A به‌دست آید. باید A را به B و C وصل کنیم تا مثلث رسم شود.



۱۳- فرض کنیم ABC مثلث موردنظر باشد. در این صورت مثلث BHC قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین خواهد بود. پس بنابر رابطه‌ی فیثاغورس $BH = CH = ۲\sqrt{۲}$. به عبارتی داده‌ی $CH = ۲\sqrt{۲}$ یک فرض اضافه است و در هر حالت در این مثلث با این اطلاعات ارتفاع $CH = ۲\sqrt{۲}$ است.

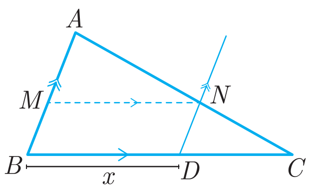


بنابراین اگر این مثلث را بخواهیم رسم کنیم ابتدا ضلع $BC = ۴$ را رسم کرده سپس از رأس B نیم‌خطی ترسیم می‌کنیم تا با پاره‌خط BC زاویه‌ی ۴۵ درجه بسازد. در این صورت هر نقطه روی این نیم‌خط می‌تواند به عنوان رأس A انتخاب شود. به عبارتی این مسئله بی‌شمار جواب دارد.

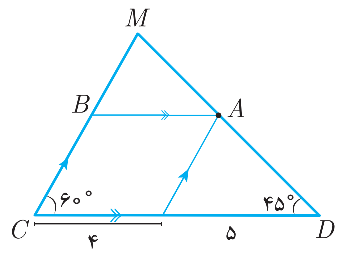


۱۴- روی BC پاره‌خط $BD=x$ را جدا می‌کنیم و از D موازی با AB رسم می‌کنیم تا AC را در N قطع کند. خطی که از N موازی با BC رسم می‌شود AB را در M قطع می‌کند و $BDNM$ متوازی‌الاضلاع است پس:

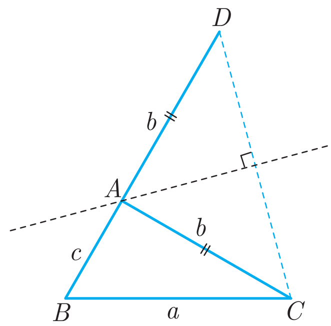
$$MN=BD=x$$



۱۵- ابتدا مثلثی را با داشتن ۹ $=CD$، $\hat{C}=۶۰^\circ$ و $\hat{D}=۴۵^\circ$ رسم می‌کنیم. سپس به روش مسئلهٔ قبل خطی موازی CD رسم می‌کنیم که اندازهٔ آن ۴ $=AB$ باشد. $ABCD$ ذوزنقهٔ مفروض است.



۱۶- دقت کنید که معلوم بودن $AB+AC=c+b$ نیازمند این است که پاره‌خطی به اندازهٔ $AB+AC$ رسم کنیم پس ابتدا فرض کنیم مثلث ABC رسم شده باشد. روی امتداد ضلع BA پاره‌خط AD را به اندازهٔ AC جدا می‌کنیم $(AC=AD)$. بنابراین در مثلث BDC اندازهٔ $BC=a$، $BD=b+c$ و $\hat{B}=\alpha$ معلوم است و می‌توانیم این مثلث را رسم کنیم. پس از رسم این مثلث، عمودمنصف CD را رسم می‌کنیم تا A به‌دست آید.

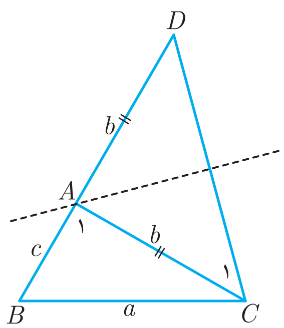


۱۷- فرض کنیم مثلث ABC رسم شده باشد. روی امتداد BA به اندازهٔ $AD=AC$ جدا می‌کنیم. با توجه به ساق‌های برابر در مثلث ADC داریم: $\hat{C}_1=\hat{D}$.

هم‌چنین زاویهٔ A_1 برای مثلث ADC زاویهٔ خارجی است پس:

$$\hat{A}_1=\hat{C}_1+\hat{D}=۲\hat{D}$$

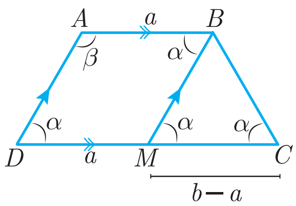
بنابراین، ابتدا باید مثلث BDC را با معلومات $BD=b+c$، $BC=a$ و $\hat{D}=\frac{\hat{A}}{۲}$ رسم کرد. برای این کار ابتدا $BD=b+c$ را رسم می‌کنیم، سپس زاویهٔ $\hat{D}=\frac{\hat{A}}{۲}$ را رسم می‌کنیم و در نهایت به مرکز B و شعاع a کمان رسم می‌کنیم. این کمان ممکن است ضلع زاویهٔ D (ضلع غیر از BD) را در ۲ نقطه قطع کند و ممکن است دو مثلث غیرهم‌نهشت برای BDC به وجود بیاید. پس از رسم مثلث BDC عمودمنصف DC را رسم می‌کنیم تا BD را در A قطع کند. (حال بگویید چند مثلث غیرهم‌نهشت برای ABC به وجود می‌آید؟)



۱۸- فرض کنیم $ABCD$ جواب باشد. اگر از B خطی موازی با AD رسم کنیم داریم:

$$\begin{cases} M\hat{B}C=\beta-\alpha \\ MC=b-a \end{cases}$$

(در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین زوایای مجاور قاعده با هم برابرند و چهارضلعی $ABMD$ متوازی‌الاضلاع است.)



بنابراین مثلث BMC متساوی‌الساقین است و اندازهٔ قاعده و زاویه‌های آن معلوم است و می‌توان آن‌را رسم کرد. پس از رسم مثلث BMC از B خطی موازی با MC و به اندازهٔ $AB=a$ رسم می‌کنیم تا به A برسیم. هم‌چنین CM را از طرف M به اندازهٔ $MD=a$ امتداد می‌دهیم تا D به‌دست آید.

تمرین

۱- نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصله‌ی ۵ سانتی‌متر از نقطه‌ی A قرار دارند.

۲- نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۵ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصله‌ی متغیر a $(۶ \leq a \leq ۷)$ از نقطه‌ی A قرار داشته باشند.

۳- نقاط A و B به فاصله‌ی ۹ سانتی‌متر از هم در صفحه‌ای مفروض قرار دارند. اگر دو نقطه در صفحه وجود داشته باشد به طوری‌که فاصله‌ی آن از A، ۳ سانتی‌متر و از B، x سانتی‌متر باشد. حدود x را بیابید.

۴- نقاط A و B به فاصله‌ی ۸ سانتی‌متر از هم در صفحه‌ای مفروض قرار دارند. اگر هیچ نقطه‌ای در صفحه وجود نداشته باشد به طوری‌که فاصله‌ی آن از A، ۲ سانتی‌متر و از B، x سانتی‌متر باشد. مجموع مقادیر صحیح x کوچک‌تر از ۵۰ را بیابید.

۵- خط l و نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۲ از آن مفروض است. نقاطی را بیابید که از A به فاصله‌ی ۵ و از خط l به فاصله‌ی ۴ باشد. هم‌چنین فاصله‌ی A تا خط l را طوری بیابید که مسئله سه جواب داشته باشد.

۶- ابتدا زاویه‌ای به اندازه‌ی ۴۵° رسم کنید و سپس آن‌را به سه قسمت برابر تقسیم کنید.

۷- نقطه‌ای درون متوازی‌الاضلاع $ABCD$ بیابید که از سه ضلع AB، BC و CD به یک فاصله باشد.

۸- پاره‌خط AB داده شده است. نقطه‌ی M را روی AB طوری بیابید که $MA = ۳MB$.

۹- دایره‌ای به شعاع ۶ مفروض است. نقاطی را بیابید که فاصله‌ی آن‌ها از مرکز دایره ۳ برابر فاصله‌ی آن‌ها از محیط دایره باشد.

۱۰- زاویه‌ی xOy داده شده است. زاویه را به دو قسمت چنان تقسیم کنید که یکی $\frac{۳}{۵}$ دیگری باشد.

۱۱- نقاطی را بیابید که از پاره‌خط AB به اندازه‌ی ۱۲ سانتی‌متر به فاصله‌ی ۱ سانتی‌متر باشند و از وسط AB به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر باشند.

۱۲- دایره‌ای به شعاع ۸ و خطی به فاصله‌ی ۳ از مرکز دایره در نظر بگیرید. چه تعداد نقطه روی دایره وجود دارد که از خط مورد نظر به فاصله‌ی

الف) ۴ باشد؟ ب) ۵ باشد؟

ج) ۱۱ باشد؟ د) ۱۳ باشد؟

هـ) ۶ باشد؟

۱۳- دو خط موازی d و d' از یکدیگر فاصله‌ای برابر ۴ دارند. نقاطی را در صفحه‌ی دو خط d و d' بیابید که مجموع فاصله‌ی هر یک از آن‌ها از دو خط d و d' برابر t باشد. (راهنمایی: یک‌بار $t = ۴$، یک‌بار $t < ۴$ و در نهایت $t > ۴$ را در نظر بگیرید.)

۱۴- متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که اندازه‌ی اضلاع آن ۶ و ۸ و اندازه‌ی یک قطر آن ۹ باشد.

۱۵- لوزی‌ای رسم کنید که اندازه‌ی ضلع‌ها و اندازه‌ی یک قطر آن معلوم باشد.

۱۶- لوزی‌ای رسم کنید که اندازه‌ی ضلع‌ها و فاصله‌ی اضلاع موازی در آن معلوم باشد.

۱۷- مستطیلی رسم کنید که اندازه‌ی یک ضلع و یک قطر آن معلوم باشد.

۱۸- متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که اندازه‌های دو ضلع و یک ارتفاع آن معلوم باشد.

۱۹- مستطیلی رسم کنید که اندازه‌ی یک قطر و فاصله‌ی یک رأس از آن قطر معلوم باشد.

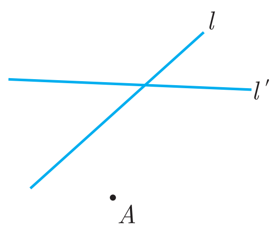
۲۰- از مثلث ABC اگر اندازه‌های BC، AC و $BM = m_b$ معلوم باشد مثلث را رسم کنید.

۲۱- مثلث ABC را با معلومات $AB = c$، $BH = h_b$ و $AM = m_a$ رسم کنید.

۲۲- از مثلث ABC اندازه‌ی BC و ارتفاع‌های $BH = h_b$ و $CH' = h_c$ معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۲۳- دو خط متقاطع l و l' مفروض‌اند. پاره‌خطی به اندازه‌ی ۲ واحد و موازی با خط مفروض d رسم کنید که دو سر آن روی l و l' باشد.

۲۴- دو خط l و l' متقاطع‌اند. خطی گذرنده از A رسم کنید که l و l' را در نقاط B و C قطع کند به طوری که $AB = BC$.



۲۵- سه نقطه‌ی A، B و C روی یک خط قرار ندارند. سه خط موازی گذرنده از این سه نقطه رسم کنید به طوری که فاصله‌ی بین آن‌ها برابر باشد.

۲۶- ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاعی معلوم است، آن‌را رسم کنید.

۲۷- از مثلث متساوی‌الساقینی اندازه‌ی قاعده و اندازه‌ی ارتفاع وارد بر یکی از ساق‌ها معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۲۸- از مثلث متساوی‌الساقینی محیط و اندازه‌ی ارتفاع وارد بر قاعده معلوم است، آن‌را رسم کنید.

۲۹- چند مثلث ABC با داشتن $BC = 8$، $\hat{A} = 90^\circ$ و میانه‌ی $AM = 4$ رسم می‌شود؟

۳۰- ذوزنقه‌ای را با مشخص بودن اندازه‌ی دو قاعده و اندازه‌ی دو ساق آن رسم کنید.

۳۱- از متوازی‌الاضلاعی وسط‌های سه ضلع مفروض‌اند. متوازی‌الاضلاع را رسم کنید.

۳۲- از ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین اندازه‌ی هر یک از دو قاعده و اندازه‌ی قطرها داده شده است، ذوزنقه را رسم کنید.

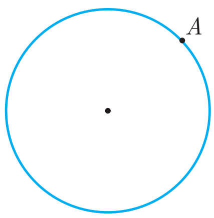
۳۳- از مربع $ABCD$ مجموع اندازه‌ی قطر و ضلع آن مفروض است. آن را رسم کنید.

۳۴- از مربعی تفاضل اندازه‌ی ضلع و قطر آن معلوم است. آن‌را رسم کنید.

۳۵- دو دایره‌ی متخارج $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مفروض‌اند (در بیرون هم هستند و هم‌دیگر را قطع نمی‌کنند). دایره‌ای به شعاع r رسم کنید که بر هر دو دایره مماس باشد.

۳۶- دایره‌ای به مرکز نقطه‌ی مفروض A رسم کنید که از خط مفروض d وتری به اندازه‌ی ۴ جدا کند.

۳۷- مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقینی محاط در دایره‌ی مقابل رسم کنید که نقطه‌ی A رأس قائمه‌ی آن باشد (محاط باشد یعنی رئوس مثلث باید روی دایره باشند).



۳۸- مثلث متساوی‌الاضلاعی در دایره‌ی شکل تمرین قبل محاط کنید که نقطه‌ی A یک رأس آن باشد.

۳۹- در دایره‌ی شکل مقابل یک مثلث قائم‌الزاویه محاط کنید که اضلاع قائم آن از نقاط B و C بگذرد.