۱

آشنایی با چندجمله‌ای‌ها و معادله‌ی درجه‌ی اول

چندجمله‌ای‌ها از زمان‌های بسیار دور به کار گرفته شده‌اند. شکل فعلی چندجمله‌ای از قرن ۱۵ به وجود آمد. در قرون پیشین معادلات به‌صورت تشریحی نوشته می‌شدند که نمونه‌ی آن‌ها در کارهای دانشمندان ایرانی مانند خوارزمی و نوشته‌های چینی دیده شده است.

به هنگام بحث درباره‌ی چندجمله‌ای‌ها، سؤالات متعددی پیش می‌آید. آیا عدد صفر چندجمله‌ای است؟ در این‌صورت، درجه‌ی آن چند است؟ آیا $\frac{x(x^{۲}-۱)}{x^{۲}-۱}$ چندجمله‌ای است؟ این عبارت پس از ساده‌سازی به‌صورت x است، اما به ازای همه مقادیر x تعریف نشده است.

بروز این سؤالات، نشان‌دهنده‌ی وجود کم‌دقتی در تعاریف و مفاهیم است. اگر همه‌ی مفاهیم به درستی تعریف شده باشند، کافی است به تعاریف مراجعه شود تا معلوم شود چه چیزی در تعریف صدق می‌کند یا نمی‌کند. البته بروز برخی کم‌دقتی‌ها اجتناب‌ناپذیر است، زیرا سطح برخی از مطالب، ممکن است بالاتر از آن باشد تا بتوان آن‌ها را با دقت کامل در سطح دبیرستان مطرح کرد. بحث چندجمله‌ای‌ها نیز اندکی پیچیدگی دارد ولی سعی داریم در این کتاب با دقت کافی آن‌ها را مطرح سازیم.

۱-۱ آشنایی مقدماتی

سال‌هاست که می‌دانید در ریاضیات برای نشان دادن یک متغیر از نمادهایی که غالباً حروف لاتین و انگلیسی است، استفاده می‌شود و به عبارت ایجاد شده یک عبارت جبری گفته می‌شود. در این فصل با عبارت‌هایی که از جمع و تفریق تک‌جمله‌ای‌ها[1] ساخته شده باشد سر و کار داریم و به مجموع حداقل دو

۱) به هر عبارتی که به‌صورت حاصل‌ضرب یک عدد خقیقی در توان صحیح نامنفی یک یا چند متغیر نوشته شود، یک

یک‌جمله‌ای «چندجمله‌ای» می‌گوییم به طور مثال، $x^2 + 2x + 1$ یک سه جمله‌ای است که بیش‌ترین توان متغیر آن، ۲ است. به بیش‌ترین توان متغیر در یک عبارت جبری درجه چندجمله‌ای می‌گوییم.

مثال ۱-۱ درجه چند جمله‌ای‌های زیر را مشخص کنید.

۱) $\sqrt{3}x^4 - \frac{6}{5}x^2 - 7$ ۲) $5x^6 - 4x^5 + \frac{3}{7}x^2 - 5$

حل: ۱) سه‌جمله‌ای درجه‌ی ۴ با ضرایب حقیقی

۲) چهارجمله‌ای درجه‌ی ۶ با ضرایب گویا

فرم کلی یک چندجمله‌ای غیرصفر را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد[1]: $(n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0)$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

اکنون می‌توانیم به جای x هر عدد حقیقی قرار دهیم و مقدار چندجمله‌ای را به ازای آن عدد به‌دست آوریم.

مثال ۱-۲ مقدارهای خواسته شده را به‌دست آورید.

۱) $f(x) = 9x^2 - 30x + 25 \;;\; f(0)\,,\; f(1)\,,\; f(\frac{5}{3})$

۲) $g(x) = (3x-5)^2 \;;\; g(0)\,,\; g(1)\,,\; g(\frac{5}{3})$

حل:

$$f(0) = 25$$

$$f(1) = 9 \times 1^2 - 30 \times 1 + 25 = 4$$

$$f(\frac{5}{3}) = 9 \times \frac{25}{9} - 30 \times \frac{5}{3} + 25 = 25 - 50 + 25 = 0$$

$$g(0) = (-5)^2 = 25$$

$$g(1) = (3 \times 1 - 5)^2 = (-2)^2 = 4$$

$$g(\frac{5}{3}) = (3 \times \frac{5}{3} - 5)^2 = (5-5)^2 = 0$$

برای اختصار، جمع، تفریق، ضرب و تقسیم چندجمله‌ای‌ها را فقط با یک مثال بیان می‌کنیم.

مثال ۱-۳ حاصل عبارت‌های خواسته شده را به‌دست آورید.

$$P(x) = x^2 - 3x + 2 \qquad Q(x) = x - 1$$

۱) $P(x) + Q(x)$ ۲) $P(x) - Q(x)$

۳) $P(x).Q(x)$ ۴) $\frac{P(x)}{Q(x)}$

چند جمله‌ای گویند. دقت کنید که توان حروف نباید منفی باشد.

۱) دقت کنید که شماره‌ها در ضرایب (مانند a_1، a_2، ... و a_n) فقط برای نام‌گذاری است.

حل:

۱) $P(x)+Q(x)=(x^2-3x+2)+(x-1)=x^2+(-3+1)x+(2-1)$
$$=x^2-2x+1$$

۲) $P(x)-Q(x)=(x^2-3x+2)-(x-1)=x^2+(-3-1)x+(2-(-1))$
$$=x^2-4x+3$$

۳) $P(x).Q(x)=Q(x).P(x)=(x-1)(x^2-3x+2)$
$$x^3-3x^2+2x-x^2+3x-2=x^3-4x^2+5x-2$$

۴)
$$\begin{array}{c|l} x^2-3x+2 & x-1 \\ \cline{2-2} -(x^2-x) & x-2 \\ \cline{1-1} -2x+2 & \\ -(-2x+2) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$
$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^2-3x+2}{(x-1)}=(x-2)$$

مثال ۱-٤ اگر چندجمله‌ای $P(x)$ از درجه‌ی m و چندجمله‌ای $Q(x)$ از درجه‌ی n باشد و $m>n$ ، درجه‌ی عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

۱) $P(9)$

۲) $P(x)+Q(x)$

۳) $P(x)-Q(x)$

۴) $P(x).Q(x)$

۵) خارج قسمتِ $\frac{P(x)}{Q(x)}$

۶) $P(5x)$

۷) $P(x^2)$

۸) $P(Q(x))$

حل: ابتدا با توجه به اطلاعات مسئله فرم کلی $P(x)$ و $Q(x)$ را می‌نویسیم:

$$P(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$$
$$Q(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_2x^2+b_1x+b_0$$

۱. می‌دانیم که $P(۹) \in \mathbb{R}$ یعنی $P(۹)$ یک عدد ثابت است و متغیری در آن وجود ندارد. پس از درجه‌ی صفر است. به عبارت دیگر هر عدد را می‌توان یک چندجمله‌ای درجه‌ی صفر تعریف کرد.[۱]

۲. مشخص است که این عبارت از درجه‌ی m است (درجه‌ی بیش‌تر) با این حال می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
P(x)+Q(x) &= [(a_m x^m + a_{m-۱}x^{m-۱} + \cdots + a_{n+۱}x^{n+۱}) \\
&\quad + (a_n x^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + \cdots + a_۱ x + a_۰)] \\
&\quad + [b_n x^n + b_{n-۱}x^{n-۱} + \cdots + b_۲ x^۲ + b_۱ x + b_۰] \\
&= a_m x^m + \cdots + a_{n+۱}x^{n+۱} + (a_n+b_n)x^n + (a_{n-۱}+b_{n-۱})x^{n-۱} \\
&\quad + \cdots + (a_۲+b_۲)x^۲ + (a_۱+b_۱)x + (a_۰+b_۰)
\end{aligned}$$

۳. مانند روش قبل بررسی کنید. جواب همان m است.

٤. درجه‌ی $P(x).Q(x)$ را باید از حاصل‌ضرب جملات اول (جملات با بیش‌ترین درجه) به‌دست آورد.

$$P(x).Q(x) = (a_m x^m + \cdots)(b_n x^n + \cdots) = a_m b_n x^{(m+n)} + \cdots$$

بنابراین جواب $m+n$ است.

۵. جواب $(m-n)$ است.

۶. در این مورد باید به جای x عبارت $۵x$ را جایگذاری کنید. در این صورت ضرایب تغییر می‌کنند ولی درجه‌ی عبارت تغییر نخواهد کرد.

۷. باید در $P(x)$، به جای x قرار دهیم $x^۲$، در این‌صورت:

$$\begin{aligned}
P(x^۲) &= a_m (x^۲)^m + a_{m-۱}(x^۲)^{m-۱} + \cdots + a_۰ \\
&= a_m x^{۲m} + a_{m-۱}x^{۲m-۲} + \cdots + a_۰
\end{aligned}$$

بنابراین جواب $۲m$ است.

۸. به جای متغیر x در $P(x)$ باید $Q(x)$ را قرار دهیم:

$$P(Q(x)) = a_m (b_n x^n + \cdots + b_۰)^m + a_{m-۱}(b_n x^n + \cdots + b_۰)^{m-۱} + \cdots + a_۰$$

اکنون با استفاده از قاعده‌ی $(x^n)^m = x^{nm}$ می‌فهمیم که $P(Q(x))$ از درجه‌ی mn است.

---

۱) گاهی می‌نویسند: $P(x) = ۵ = ۵ \times ۱ = ۵ \times x^۰$. ولی باید توجه کرد که $۰^۰$ تعریف نشده است، یعنی برابر هیچ عددی نیست. پس اگر بخواهیم دقیق باشیم $۵x^۰$ به ازای $x = ۰$ برابر ۵ نیست.

مفهوم اتحاد

به تساوی‌های زیر دقت کنید:

۱) $x + ۵ = ۲x + ۱۰$

این تساوی فقط به ازای $x = -۵$ برقرار است.

۲) $(x - ۱)(x - ۲)(x - ۳)\cdots(x - ۱۰۰) = ۰$

این تساوی فقط به ازای اعضای مجموعه‌ی $\{x \in \mathbb{N} |\ x \leq ۱۰۰\}$ برقرار است.

۳) $۲[x] + ۱ = ۵$

این تساوی فقط به ازای اعضای $\{x \in \mathbb{R} | ۲ \leq x < ۳\}$ برقرار است. (منظور از [.] جزء صحیح عدد است. به‌طور مثال، $[۲/۴] = ۲$ و $[-۱/۸] = -۲$).

۴) $۲(x - ۵) = ۲x - ۱۰$

این تساوی به ازای تمام اعداد برقرار است.

۵) $\dfrac{۲(x - ۵)}{x - ۱} = \dfrac{۲x - ۱۰}{x - ۱}$

این تساوی به ازای تمام اعدادی که می‌توان در عبارت قرار داد برقرار است.[۱]

به تساوی‌هایی که به ازای هر مقدار حقیقی عضو دامنه برقرار هستند، **اتحاد** می‌گوییم.

مانند تساوی‌های شماره‌ی ۴ و ۵ که گاهی آن را با علامت $\equiv$ نشان می‌دهیم.

دقت کنید که معادله می‌تواند؛ صفر، یک یا بیش‌تر و یا حتی تعداد نامتناهی جواب داشته باشد (تساوی ۳). به سادگی می‌توانید استدلال کنید که شرط لازم و کافی برای این‌که یک چندجمله‌ای متحد با صفر باشد این است که تمام ضرایب آن صفر باشد:

$$a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \cdots + a_۲ x^۲ + a_۱ x + a_۰ \equiv ۰$$

$$\Leftrightarrow \ a_n = a_{n-۱} = \cdots = a_۱ = a_۰ = ۰$$

مثال ۱-۵ مقادیر a، b و c را طوری تعیین کنید که اتحاد زیر برقرار باشد:

$$(a - ۱)x^۵ + (b + a - ۱)x^۳ + ۴x^۲ - ۲d + b - ۲a$$
$$\equiv ۴x^۳ + (۲c - ۶)x^۲ + ۲d - ۲a$$

اتحاد صورت کامل‌تر تساوی است، پس تمام قضایای تساوی در اتحاد برقرار است (ولی عکس این جمله درست نیست)، پس می‌نویسیم:

$$(a - ۱)x^۵ + (b + a - ۵)x^۳ + (۱۰ - ۲c)x^۲ + (b - ۴d) \equiv ۰$$

۱) توجه کنید که نمی‌توان $x = ۱$ را قرار داد. زیرا به ازای این مقدار طرفین نامساوی بی‌معنی و تعریف نشده خواهند بود. در قسمت دامنه‌ی توابع به این موضوع کاملاً پرداخته‌ایم.

اکنون با توجه به این‌که این چندجمله‌ای متحد با صفر است، نتیجه می‌گیریم:

$$a-۱=۰ \Rightarrow a=۱$$

$$b+a-۵=۰ \Rightarrow b=۵-a=۴$$

$$۱۰-۲c=۰ \Rightarrow c=۵$$

$$b-۴d=۰ \Rightarrow ۴d=۴ \Rightarrow d=۱$$

با روش حل مثال بالا، می‌توان به سادگی قضیه‌ی زیر را اثبات کرد.

قضیه

شرط لازم و کافی برای این‌که دو چندجمله‌ای متحد باشند این است که از یک درجه باشند و تمام ضرایب آن‌ها برابر باشند.

$$a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۱x+a_۰$$
$$\equiv b_nx^n+b_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+b_۱x+b_۰$$
$$\Leftrightarrow a_n=b_n, a_{n-۱}=b_{n-۱},\cdots,a_۱=b_۱\ ,\ a_۰=b_۰$$

مثال ۶-۱ اگر $g(x)\equiv x^۲$، $p(x)\equiv ax^n+bx^۲$ و $p(p(x))\equiv p(g(x))$ آن‌گاه مقدار $a+b$ را بیابید. $(n\geq ۲)$

می‌دانیم که $p(p(x))$ از درجه‌ی $n^۲$ و $p(g(x))$ از درجه‌ی $۲(n)$ است. پس با توجه به قضیه‌ی قبل باید درجه‌ی آن‌ها برابر باشد.

$$n^۲=۲n \Rightarrow n=۰ \text{ یا } n=۲$$

واضح است که $n=۰$ در فرض مسئله $(n\geq ۲)$ صدق نمی‌کند. با قرار دادن $n=۲$ داریم:

$$p(x)=ax^۲+bx^۲=(a+b)x^۲$$
$$\Rightarrow \begin{cases} p(p(x))=(a+b)((a+b)x^۲)^۲=(a+b)^۳x^۴ \\ p(g(x))=(a+b)(x^۲)^۲=(a+b)x^۴ \end{cases}$$

برای متحد بودن این دو چندجمله‌ای، باید:

$$(a+b)^۳=(a+b) \Rightarrow a+b=۰,۱,-۱$$

اکنون یکی از پرکاربردترین قضیه‌های ابتدایی جبر را بیان می‌کنیم.

قضیه

$$\forall\, P(x), (Q(x) \not\equiv \circ)\ \exists!\, M(x), R(x): P(x) \equiv Q(x)M(x) + R(x)$$

$$\deg(Q(x)) > \deg(R(x))$$

در تقسیم هر چندجمله‌ای به نام $P(x)$ به هر چندجمله‌ای دیگری به نام $Q(x)$، (با این شرط که $Q(x) \not\equiv \circ$)، چندجمله‌ای‌های منحصربه‌فردی به نام‌های $M(x)$ و $R(x)$ وجود دارند که:

$P(x) \equiv Q(x)M(x) + R(x)$ و درجه‌ی $R(x)$ حتماً کم‌تر از درجه‌ی $Q(x)$ است

در قضیه‌ی بالا اگر $P(x)$ از درجه‌ی m و $Q(x)$ از درجه‌ی n باشد، $M(x)$ از درجه‌ی $(m-n)$ و $R(x)$ از درجه‌ی کم‌تر از n (۰ یا ۱ یا ۲ و ...یا $n-۲$ یا $n-۱$) خواهد بود.

مثال ۱-۷ باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ را بر $Q(x) = x - ۱$ به‌دست آورید.

$$P(x) = x^{۱۰۰} + ۲x^{۹۹} + ۳x^{۹۸} + \cdots + ۹۹x^{۲} + ۱۰۰x + ۱۰۱$$

حل: چون $Q(x)$ از درجه‌ی ۱ است پس $R(x)$ حتماً از درجه‌ی صفر است یعنی حتماً عدد است. طبق قضیه‌ی تقسیم داریم:

$$P(x) \equiv Q(x)M(x) + R(x) \ \Rightarrow\ P(۱) = \underbrace{Q(۱)M(۱)}_{\circ} + R(۱)$$

در واقع در این اتحاد، عددی را قرار دادیم که $Q(x)$ برابر صفر شود و $Q(x).M(x)$ از تساوی حذف شود تا به سادگی $R(x)$ را (که در این‌جا عدد است و آن را با r نشان می‌دهیم) به‌دست آوریم:

$$P(۱) = ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + ۹۹ + ۱۰۰ + ۱۰۱ = \frac{۱۰۲ \times ۱۰۱}{۲} = ۵۱ \times ۱۰۱ = r$$

مثال ۱-۸ اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $u(x)$ بر x و $(x+۱)$ به ترتیب برابر ۴ و ۲− و باقی‌مانده‌ی تقسیم $v(x)$ بر x و $(x+۱)$ به ترتیب برابر ۳− و ۲ شود. باقی‌مانده‌ی تقسیم $u(x)v(x)$ را بر $x(x+۱)$ به‌دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} u(x) = xM_1(x) + 4 \\ u(x) = (x+1)M_2(x) - 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} u(0) = 4 \\ u(-1) = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} v(x) = xN_1(x) - 3 \\ v(x) = (x+1)N_2(x) + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v(0) = -3 \\ v(-1) = 2 \end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم که خارج‌قسمت تقسیم جدید، یعنی $x(x+1) = x^2 + x$، از درجه‌ی ۲ است. پس باقی‌مانده یا درجه‌ی ۱ است و یا صفر. باقی‌مانده را درجه یک در نظر گرفته و ادامه می‌دهیم.
(اگر باقی‌مانده درجه صفر باشد نگرانی وجود ندارد زیرا $a = 0$ به‌دست خواهد آمد.)

$$u(x)v(x) = [x(x+1)]S(x) + (R(x) = ax + b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(0)v(0) = [0 \times 1]S(0) + (R(0) = a \times 0 + b) \\ u(-1)v(-1) = [-1 \times \underbrace{(-1+1)}_{0}]S(-1) + (R(-1) = -a + b) \end{cases}$$

با جایگذاری مقادیر به‌دست آمده، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 4 \times -3 = b \\ -2 \times 2 = -a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -12 \\ a = -8 \end{cases}$$

پس باقی‌مانده برابر است با:

$$R(x) = -8x - 12$$

✓ **نکته ۱.** به سادگی از قضیه‌ی تقسیم نتیجه می‌شود که اگر $P(a) = 0$ (a را ریشه‌ی $P(x)$ می‌نامیم) آن‌گاه $(x-a)$ از عامل‌های $P(x)$ است:

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow P(x) = (x-a)G(x)$$

✓ **نکته ۲.** اگر $P(x)$ درجه‌ی n باشد آن‌گاه حداکثر بر n عبارت درجه یک بخش‌پذیر است و به عبارت دیگر حداکثر n ریشه خواهد داشت.

مثال ۱-۹ $(x+۲)$ و $(x+۱)$ و $(x-۱)$ عامل‌های $A(x)=x^۳+ax^۲+bx+c$ هستند. a، b و c را به‌دست آورید.

حل: با توجه به نکات قبل $A(x)$ حداکثر ۳ عامل می‌تواند داشته باشد. پس تمام عوامل $A(x)$ را شناخته‌ایم:

$$A(x)=(x-۱)(x+۱)(x+۲)$$

عبارت دیگری نمی‌تواند در این ۳ عامل ضرب شود تا $A(x)$ را بسازد زیرا در آن صورت درجه‌ی عبارت سمت راست از ۳ بیش‌تر خواهد شد:

$$\begin{array}{l} A(۱)=۱+a+b+c=۰ \\ A(-۱)=-۱+a-b+c=۰ \end{array} \Rightarrow A(۱)=A(-۱) \Rightarrow a+c=۰ \Rightarrow b=-۱$$

$$A(-۲)=-۸+۴a-۲b+c=۰$$

با جایگذاری نتایج به‌دست آمده در تساوی سوم، خواهیم داشت: $a=-c=۲$.

مثال ۱-۱۰ آیا چندجمله‌ای $p(x)$ از درجه‌ی ۲ با ضرایب صحیح وجود دارد به‌طوری که:

$$p(۱۰)=۵$$
$$p(-۹)=-۵$$

حل: نشان می‌دهیم که غیرممکن است هر سه‌تای a، b و c صحیح باشند:

$$p(x)=ax^۲+bx+c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p(۱۰)=a\times(۱۰)^۲+b(۱۰)+c=۵ \\ p(-۹)=a(-۹)^۲+b(-۹)+c=-۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow p(۱۰)-p(-۹)=a(۱۰^۲-(-۹)^۲)+b(۱۰-(-۹))=۵-(-۵)=۱۰$$

$$\Rightarrow a\times ۱۹+b\times ۱۹=۱۹(a+b)=۱۰$$

$$\Rightarrow a+b=\frac{۱۰}{۱۹}$$

پس قطعاً حداقل یکی از a و b صحیح نیست، زیرا در غیر این صورت $(a+b)\in\mathbb{Z}$.

✓ **نکته ۳.** اگر $p(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد، برای هر دو عدد صحیح مانند m و n، $p(m)-p(n)$ بر $m-n$ بخش‌پذیر است. به عبارت ریاضی:
اگر ضرایب $p(x)$ صحیح باشد:

$$\forall\, m,n \in \mathbb{Z}\ \exists!\, q \in \mathbb{Z}\ :\ p(m)-p(n)=(m-n)q$$

مثال ۱-۱۱ اگر چندجمله‌ای $ax^{۳}+bx+c$ بر $x^{۲}+tx+۱$ بخش‌پذیر باشد آن‌گاه ثابت کنید $a^{۲}-c^{۲}=ab$، $(a\neq ۰)$.

حل: **روش اول:** طبق قضیه‌ی تقسیم داریم: $ax^{۳}+bx+c \equiv (x^{۲}+tx+۱)M(x)+۰$
می‌خواهیم کاری عجیب انجام دهیم. اگر قرار دهیم $x^{۲}+tx+۱=۰$، خواهیم داشت $x^{۲}=-tx-۱$.
اکنون در اتحاد بالا، تساوی به‌دست آمده را جایگذاری می‌کنیم:

$$ax\times x^{۲}+bx+c\equiv (x^{۲}+tx+۱)M(x)$$
$$\Rightarrow ax\times(-tx-۱)+bx+c\equiv(-tx-۱+tx+۱)M(x)\equiv ۰$$
$$\Rightarrow\ -atx^{۲}-ax+bx+c\equiv -at(-tx-۱)-ax+bx+c\equiv ۰$$
$$\Rightarrow\ +at^{۲}x+at-ax+bx+c\equiv(at^{۲}-a+b)x+(at+c)\equiv ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} at+c=۰ \ \Rightarrow\ t=-\dfrac{c}{a} \\ at^{۲}-a+b=۰ \end{cases}$$

$t=-\dfrac{c}{a}$ را در تساوی دوم جایگذاری می‌کنیم:

$$a(-\frac{c}{a})^{۲}-a+b=۰ \ \Rightarrow\ \frac{c^{۲}}{a}-a+b=۰$$
$$\xrightarrow{\times a} c^{۲}-a^{۲}+ab=۰\ \Rightarrow\ a^{۲}-c^{۲}=ab$$

همان طور که مشاهده می‌کنید گاهی لازم است به جای x یا توانی از x (مانند $x^{۲}$) مقدار عددی و یا جبری را قرار داد تا مسئله حل شود. برای پیدا کردن تسلط کافی در این تکنیک، در موارد زیر، باقی‌مانده‌ی $P(x)$ بر $Q(x)$ را به‌دست آورید.

۱) $P(x)=۵x^{۲}+۳x^{۴}+x^{۳}+x-۷\ ,\ \ Q(x)=x^{۲}+۱$

۲) $P(x)=x^{۳}-۸x+۴\ ,\ \ Q(x)=x^{۲}-۳x+\dfrac{۱}{۳}$

روش دوم: با روش تقسیم چندجمله‌ای‌ها بر هم، باقی‌مانده و خارج‌قسمت را بر حسب a، b و t به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{c|l}
ax^3+bx+c & x^2+tx+1 \\ \cline{2-2}
-(ax^3+atx^2+ax) & ax-at \\ \cline{1-1}
-atx^2+x(b-a)+c & \\
-(-atx^2-at^2x-at) & \\ \cline{1-1}
x(at^2+b-a)+(at+c) &
\end{array}$$

برای این‌که باقی‌مانده صفر باشد باید داشته باشیم $at+c=0$ و $at^2+b-a=0$ که از این‌جا به بعد همان روش قبلی را انجام می‌دهیم.

۱-۲ چندجمله‌ای‌های درجه یک – معادلات و نمودار آن‌ها

دوجمله‌ای درجه اول $p(x)=2x+6$ را در نظر بگیرید. این چندجمله‌ای فقط به ازای یک مقدار برابر ۱۰ است:

$$p(x)=2x+6=10 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$$

قضیه

در حالت کلی اگر $a\neq 0$، آن‌گاه معادله‌ی $ax+b=k$ حتماً یک جواب دارد:

$$ax=k-b \Rightarrow x=\frac{k-b}{a}$$

مثال ۱-۱۲ معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\dfrac{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

۲) $\dfrac{7+\frac{1}{x^3+4}}{\frac{1}{x^3+4}-6}=\dfrac{-36}{29}$

۳) $94x^3(x-1)+x(x^2-x)=0$

۴) $\dfrac{6x-4}{6}=-(1-x)$

۵) $\dfrac{6x-4}{6}=-(\dfrac{2}{3}-x)$

حل:

۱. طرفین وسطین می‌کنیم:

$$\sqrt{۲}\sqrt{x}+\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{x}}=\sqrt{۳}\sqrt{x}-\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{x}}$$
$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})}{\sqrt{x}}=(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})\sqrt{x} \Rightarrow (\sqrt{x})^{۲}=x=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}$$

۲. تغییر پارامتر می‌دهیم:

$$\frac{۱}{x^{۳}+۴}=a \Rightarrow \frac{۷+a}{a-۶}=\frac{-۳۶}{۲۹}$$
$$۲۰۳+۲۹a=-۳۶a+۲۱۶ \Rightarrow ۶۵a=۱۳$$
$$\Rightarrow a=\frac{۱}{x^{۳}+۴}=\frac{۱۳}{۶۵}=\frac{۱}{۵}$$
$$\Rightarrow x^{۳}+۴=۵ \Rightarrow x^{۳}=۱ \Rightarrow x=۱$$

۳. فاکتورگیری می‌کنیم:

$$۹۴x^{۳}(x-۱)+x(x(x-۱))=۰ \Rightarrow x^{۲}(x-۱)(۹۴x+۱)=۰$$

اکنون حاصل‌ضرب ۳ چندجمله‌ای صفر شده است. پس هر کدام از آن‌ها که صفر باشند معادله جواب دارد:

$$\begin{cases} x^{۲}=۰ & \Rightarrow x=۰ \\ x-۱=۰ & \Rightarrow x=۱ \\ ۹۴x+۱=۰ & \Rightarrow x=-\frac{۱}{۹۴} \end{cases}$$

۴. طرفین وسطین می‌کنیم:

$$۶x-۴=۶x-۶ \Rightarrow -۴=-۶$$

وقتی x از طرفین معادله حذف می‌شود در واقع در معادله تأثیر ندارد و هر مقداری داشته باشد به نتیجه‌ی $-۴=-۶$ خواهیم رسید که مطمئن هستیم نتیجه‌ی غلطی است. پس این معادله هیچ جوابی ندارد.

۵. طرفین وسطین می‌کنیم:

$$۶x-۴=۶x-۴ \Rightarrow -۴=-۴$$

در این مورد هم x در معادله تأثیری ندارد و هر چه باشد به تساوی درست و قابل قبول $-۴ = -۴$ می‌رسیم. پس به ازای تمام مقادیر x این معادله جواب دارد، یعنی این تساوی یک اتحاد است.

مثال ۱-۱۳ در دستگاه مختصات:

۱. نمودار سن پدرتان را بر حسب سن خودتان رسم کرده و یک رابطه‌ی جبری درجه‌ی اول بین متغیرهای x و y بنویسید.

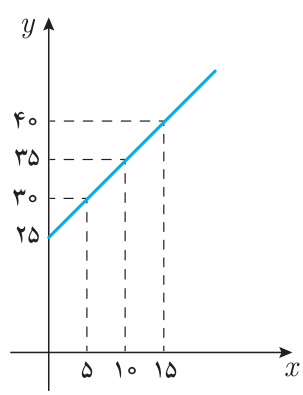
۲. نمودار مجموع سن پدرتان و برادرتان را بر حسب سن خودتان رسم کرده و یک رابطه‌ی جبری درجه اول بین متغیرهای x و y بنویسید. (فرض کنید برادرتان از شما بزرگ‌تر است.)

۳. درکدام نمودار میزان تغییرات هر دو محور برابر است؟ یعنی درکدام نمودار اگر ۱ واحد به x اضافه شود به y نیز ۱ واحد اضافه می‌شود؟ در نمودار دوم نسبت تغییرات عرض (متغیر وابسته ـ تابع ـ y) به تغییرات طول (متغیر مستقل ـ x) چند است؟

حل:

۱. فرض می‌کنیم پدر از شما ۲۵ سال بزرگ‌تر باشد:

سن شما : x
سن پدر : y
$\Rightarrow y = x + ۲۵$



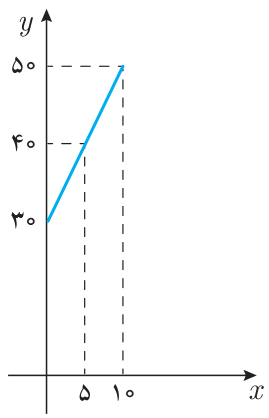
با نقطه‌گذاری نمودار را رسم می‌کنیم. واضح است که اگر یک واحد به x (سن شما) اضافه شود به y (سن پدرتان) هم یک واحد اضافه می‌شود:

$$\frac{\text{تغییرات متغیر وابسته}}{\text{تغییرات متغیر مستقل}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = ۱$$

۲. فرض می‌کنیم برادر از شما ۵ سال بزرگ‌تر باشد:

سن شما : x
سن برادر : $x + ۵$
سن پدر : $x + ۲۵$
مجموع سن پدر و برادر : y

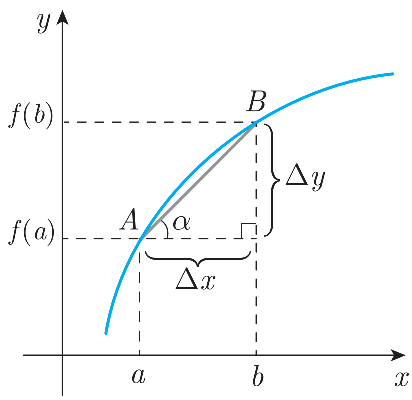
$$\Rightarrow y = (x + ۲۵) + (x + ۵) = ۲x + ۳۰$$



این بار اگر ۱ واحد به x (سن شما) اضافه شود به y (مجموع سن پدر و برادر) ۲ واحد اضافه می‌شود:

$$\frac{\text{تغییرات متغیر وابسته}}{\text{تغییرات متغیر مستقل}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = ۲$$

۳. در قسمت‌های بالا حل شده است.



نمودار چندجمله‌ای $f(x)$ را رسم کرده‌ایم. برای هر دو نقطه از نمودار به نسبت اختلاف yها بر اختلاف xها شیب گفته می‌شود.

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \tan\alpha$$

در نمودارهای غیرخطی شیب متفاوت است و بستگی به نقاط A و B دارد. ولی در خط، شیب همواره ثابت است.

قضیه

نمودار چندجمله‌ای درجه اول $y = p(x) = ax + b$ یک خط راست است. در این نمودار:

۱. a برابر شیب خط است.

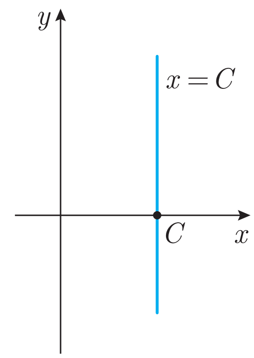
۲. محل برخورد خط با محور عرض‌ها در فاصله‌ی b از مبدأ است. (عرض از مبدأ)

۳. محل برخورد خط با محور طول‌ها در فاصله‌ی $-\frac{b}{a}$ از مبدأ است. $(a \neq ۰)$ (طول از مبدأ)

۴. اگر $a = ۰$، آن‌گاه نمودار یک خط افقی است.

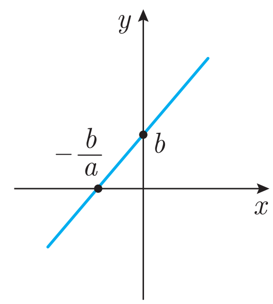
رابطه‌ی جبری بالا به ازای هر a و b حقیقی یک خط را مشخص می‌کند ولی دقت کنید که تمام خطوط را مشخص نمی‌کند. خطوطی که بر محور xها عمودند و با معادلاتی به صورت $x = c$ نشان داده می‌شوند به ازای هیچ a و bای از رابطه‌ی $y = ax + b$ به‌دست نمی‌آید و باید آن‌ها را جداگانه بررسی کرد. در

واقع $y = ax + b$، معادله‌ی خطوطی را می‌سازد که دارای شیب هستند. برای خط‌های عمود بر محور xها (مانند $x = ۲$ یا $x = -\frac{۵}{۲}$ و ...) شیب تعریف نمی‌شود. $(\tan \frac{\pi}{۲} \notin \mathbb{R})$

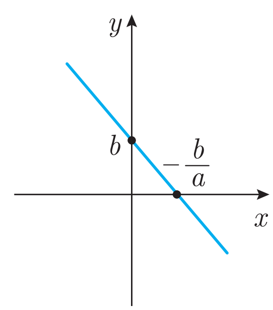


برای $y = ax + b$ توجه کنید:

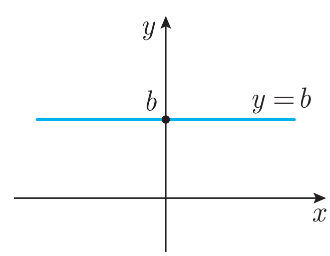
اگر شیب مثبت باشد $(a > ۰)$، با افزایش x مقدار y نیز اضافه می‌شود، مانند $y = ۲x + ۶$.



اگر شیب منفی باشد $(a < ۰)$، با افزایش x مقدار y کاهش می‌یابد، مانند $y = -۲x + ۶$.



اگر شیب صفر باشد $(a = ۰)$، با افزایش یا کاهش x، مقدار y تغییر نکرده و مستقل از x است، مانند $y = ۶$.



دقت کنید که $y = ۲x + ۶$ یک رابطه‌ی جبری است که به ازای هر مقدار x یک مقدار y وجود دارد که در آن صدق می‌کند. $(\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : y = ۲x + ۶)$ می‌توان هر $x_۰$ و $y_۰$ای که در این رابطه با هم مرتبط هستند و در واقع با هم در این رابطه‌ی جبری صدق می‌کنند را به صورت $(x_۰, y_۰)$ نشان داد. منظورمان این است که اگر در این رابطه‌ی جبری مقدار x را برابر $x_۰$ قرار دهیم آن‌گاه مقدار y برابر $y_۰$ خواهد شد. حالا تمام $(x_۰, y_۰)$هایی که در این رابطه‌ی جبری صدق می‌کنند با هم تشکیل یک مجموعه می‌دهند که به آن، مجموعه‌ی جواب این رابطه‌ی جبری گفته می‌شود و صورت ریاضی آن $M = \{(x,y) | x, y \in \mathbb{R}\ ,\ y = ۲x + ۶\}$ است. اعضای این مجموعه را به روش‌های گوناگونی می‌توان نشان داد که یکی از بهترین آن‌ها، نمودار در مختصات دکارتی است.

سعی کنید تفاوت بین رابطه‌ی جبری و مجموعه جواب آن و نمودار را خوب بفهمید. (یادگیری ریاضی یعنی فهم این مفاهیم)

مثال ۱-۱۴ معادله‌ی خطی را به‌دست آورید که طول از مبدأ و عرض از مبدأ آن به ترتیب q و p است. $(pq \neq ۰)$

حل: این خط از نقاط $(۰, p)$ و $(q, ۰)$ می‌گذرد، پس:

$$\text{شیب} = m = \frac{p - ۰}{۰ - q} = -\frac{p}{q}$$

از طرفی می‌دانیم که عرض از مبدأ آن $b = p$ است، پس:

$$y = -\frac{p}{q}x + p \ \Rightarrow\ qy + px = pq \ \Rightarrow\ \frac{y}{p} + \frac{x}{q} = ۱$$

مثال ۱-۱۵ رابطه‌ی بین شیب و عرض از مبدأ (در صورت وجود) قطرهای دایره‌ای به مرکز $(۲, ۲)$ را بنویسید.

حل: فرم کلی معادله‌ی خط‌های غیرقائم به‌صورت $y = ax + b$ است. اگر خط بخواهد از نقطه‌ی $(۲, ۲)$ بگذرد باید:

$$۲ = ۲a + b \ \Rightarrow\ b = ۲ - ۲a$$

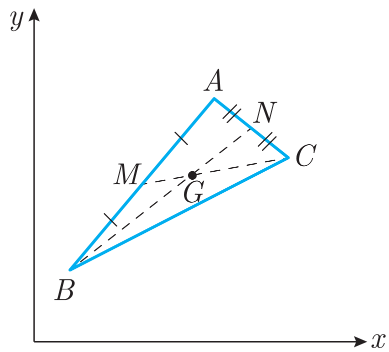
و خواهیم داشت:

$$y = ax + (۲ - ۲a)$$

معادله‌ی متغیردار بالا در واقع دسته‌ای از خطوط را مشخص می‌کند و به ازای هر مقدار حقیقی a $(\forall a \in \mathbb{R})$ این معادله‌ی متغیردار تبدیل به یک معادله‌ی خط می‌شود. البته توجه کنید که خط قائم گذرنده از $(۲, ۲)$ با معادله‌ی $x = ۲$ را نمی‌توان از فرم کلی بالا به‌دست آورد و باید جداگانه آن را لحاظ کرد.

۱-۳ روابطی در دستگاه مختصات

در این‌جا به بحث در مورد فرمول‌های اصلی نمی‌پردازیم ولی صورت آن‌ها را برایتان آورده‌ایم تا در صورت نیاز استفاده کنید:

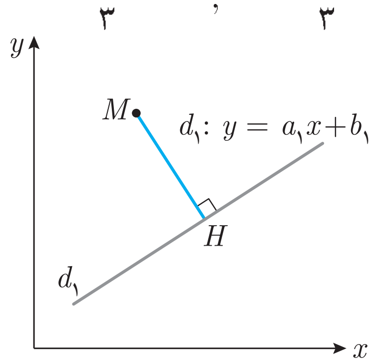


۱) $|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ + (y_A - y_B)^۲}$

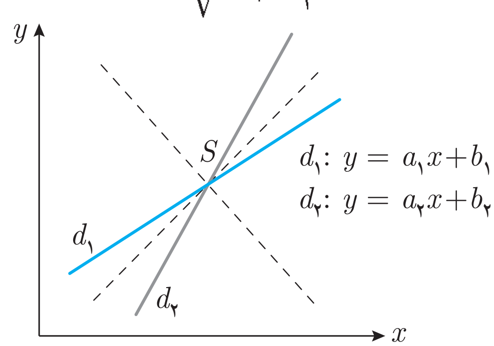
۲) (وسط پاره‌خط AB) $M = \left(\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲}\right)$

۳) $S_{ABC} = \frac{۱}{۲}|(x_A - x_B)y_C + (x_B - x_C)y_A + (x_C - x_A)y_B|$

۴) (محل برخورد میانه‌ها) $G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{۳}, \frac{y_A + y_B + y_C}{۳}\right)$



۵) فاصله‌ی نقطه‌ی M از خط $d_۱$ $= \frac{|y_M - a_۱x_M - b_۱|}{\sqrt{۱ + a_۱^۲}}$



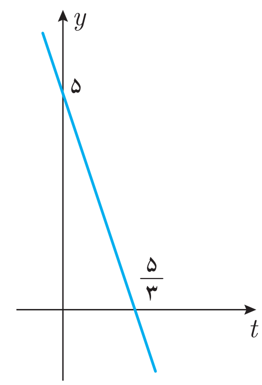
۶) معادله‌ی نیم‌سازهای دو خط $d_۱$ و $d_۲$: $\frac{|y - a_۱x - b_۱|}{\sqrt{۱ + a_۱^۲}} = \frac{|y - a_۲x - b_۲|}{\sqrt{۱ + a_۲^۲}}$

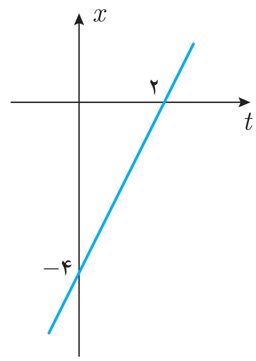
۷) معادله دایره به مرکز (α, β) و شعاع r : $(x - \alpha)^۲ + (y - \beta)^۲ = r^۲$

مثال ۱-۱۶ هر سه نمودار $t-x$، $t-y$ و $x-y$ را برای رابطه‌های جبری زیر رسم کنید:

۱. $y=-۳t+۵$ و $x=۲t-۴$ ‏ ‏ ‏ ۲.[1] $y=\cos t$ و $x=\sin t$

حل: ۱.

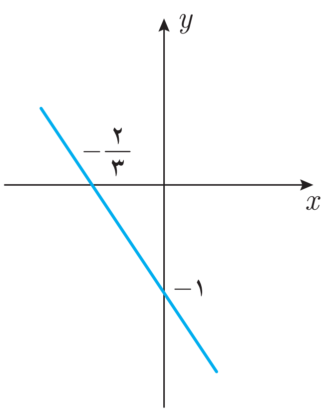




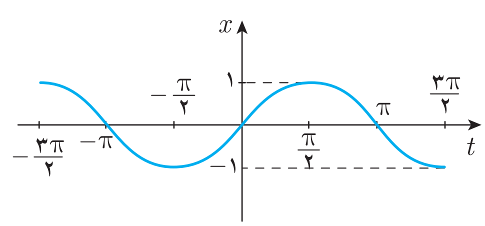
برای رسم $x-y$ باید رابطه‌ی بین x و y را پیدا کنیم:

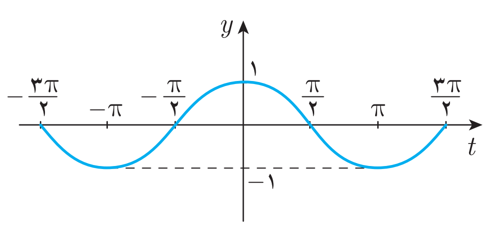
$$\begin{cases} x=۲t-۴ \\ y=-۳t+۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\dfrac{x+۴}{۲} \\ t=\dfrac{۵-y}{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x+۴}{۲}=\frac{۵-y}{۳} \Rightarrow y=-\frac{۳}{۲}x-۱$$



۲.

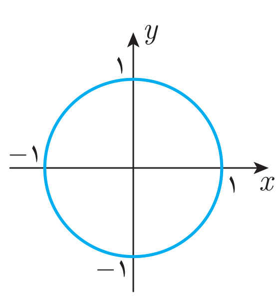




برای رسم $x-y$:

$$\begin{cases} x=\sin t \\ y=\cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{۲}=\sin^{۲} t \\ y^{۲}=\cos^{۲} t \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}=\sin^{۲} t+\cos^{۲} t=۱$$

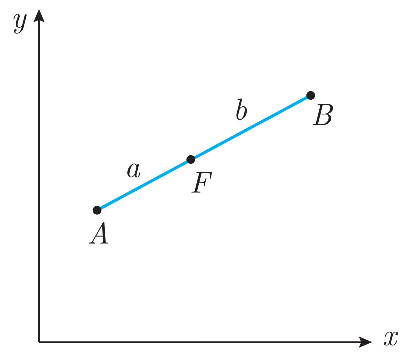


دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۱ واحد:

۱) اگر با مبحث مثلثات آشنایی ندارید از این مورد بگذرید.

۱-٤ مسائل حل شده فصل اول

۱. با فرض این‌که مختصات نقاط A و B به ترتیب (x_A, y_A) و (x_B, y_B) باشند، مختصات نقطه‌ی F را به‌دست آورید.



حل: ابتدا مختصات بردار $\overrightarrow{AB}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A) \Rightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{AB}$$

$$= \left(\frac{(x_B - x_A)a}{a+b}, \frac{(y_B - y_A)a}{a+b}\right) \Rightarrow F = A + \overrightarrow{AF}$$

$$\Rightarrow F = \left(x_A + \frac{(x_B - x_A)a}{a+b}, y_A + \frac{(y_B - y_A)a}{a+b}\right)$$

$$= \left(\frac{bx_A + ax_B}{a+b}, \frac{by_A + ay_B}{a+b}\right)$$

۲. نقاط $M_\circ = (-۳, \beta - ۳)$، $N_\circ = (-۲\alpha - ۲, -۱)$ و $P_\circ = (\alpha, ۲\beta + ۱)$ به ترتیب وسط اضلاع PN، PM و NM از $\overset{\triangle}{MNP}$ هستند. اگر مختصات مرکز ثقل $\overset{\triangle}{MNP}$، $G = (-\frac{۴}{۳}, \circ)$ باشد.

(الف) نشان دهید که G مرکز ثقل $M_\circ \overset{\triangle}{N_\circ} P_\circ$ نیز هست.

(ب) α و β را بیابید.

حل:

(الف) باید نشان دهیم:

$$\frac{x_{M_\circ} + x_{N_\circ} + x_{P_\circ}}{۳} = \frac{x_M + x_N + x_P}{۳}$$

برای این کار از سمت چپ شروع می‌کنیم:

$$x_{M_\circ} + x_{N_\circ} + x_{P_\circ} = \frac{(x_N + x_P)}{۲} + \frac{(x_M + x_P)}{۲} + \frac{(x_M + x_N)}{۲}$$

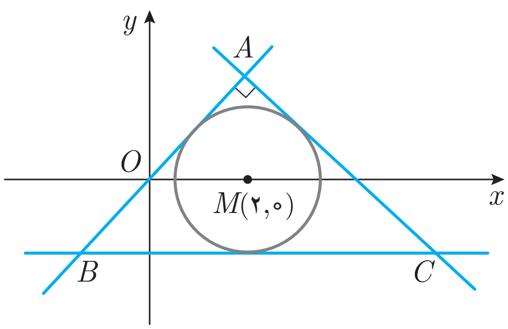
$$= x_M + x_N + x_P$$

برای y نیز به همین شیوه عمل می‌شود.

ب) از نتیجه‌ی قسمت قبل استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} -۳ + (-۲\alpha - ۲) + \alpha = -۴ \\ (\beta - ۳) + -۱ + (۲\beta + ۱) = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -۱ \\ \beta = ۱ \end{cases}$$

۳. با توجه به شکل، مرکز دایره‌ی محاطی $M = (۲, ۰)$ و شعاع دایره‌ی محاطی $\sqrt{۲}$ است (دایره به سه ضلع مثلث ABC مماس است). با استفاده از اطلاعات زیر معادله‌ی اضلاع مثلث را به‌دست آورید:

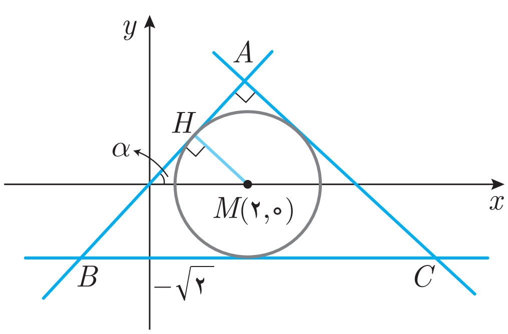


الف) $\hat{A} = ۹۰^\circ$

ب) ضلع BC موازی محور طول‌ها است.

ج) $C = (۴ + \sqrt{۲}, -\sqrt{۲})$

د) ضلع AB از مبدأ مختصات می‌گذرد.



حل: از نقطه‌ی M به نقطه‌ی تماس AB و دایره (H) وصل می‌کنیم. می‌دانیم که شعاع MH بر AB عمود است.

$$\overset{\triangle}{OMH} : OH^۲ = OM^۲ - HM^۲ = ۴ - ۲ = ۲$$

$$\Rightarrow OH = \sqrt{۲} \Rightarrow \alpha = ۴۵^\circ$$

از طرفی می‌دانیم که شیب ضلع AB برابر است با $\tan ۴۵^\circ = ۱$ و چون این خط از مبدأ می‌گذرد معادله‌ی آن به‌دست می‌آید:

$$AB : y = ۱ \times x + ۰ = x$$

شیب خط BC برابر صفر است و از نقطه‌ی $C = (۴ + \sqrt{۲}, -\sqrt{۲})$ می‌گذرد، پس:

۱-۵ تمرین‌های فصل اول

۱. اگر چندجمله‌ای $(x+\sqrt{2}y-3z)^7$ را بسط داده و جملات متشابه را با هم جمع کنیم، چه تعدادی از جمله‌های آن فقط متغیر x دارند؟

۲. در هر یک از خانه‌های جدول زیر یک چندجمله‌ای بنویسید به طوری که حاصل‌جمع هر سه خانه‌ی پشت سر هم برابر $2x^2$ شود. جدول را به چند حالت مختلف می‌توان پر کرد؟

	$6x-8$					$-x^2+4x$	

۳. با استفاده از اطلاعات زیر اثبات کنید $(a^2+b^2)\in\mathbb{Q}$.

$$\begin{cases} 1)\ a,b\in\mathbb{R} \\ 2)\ (a^4+a^2+1)\in\mathbb{Q} \\ 3)\ (a^6+a^4+a^2+a^4b^2+a^2b^2+b^2)\in\mathbb{Q} \end{cases}$$

۴. در هر مورد با تعیین a و b رابطه‌ی زیر را به اتحاد تبدیل کنید:

۱) $a(x+1)^2+b(x+1)-ax^2-bx=8x+3$

۲) $(x^2+ax+1)^2=x^4+bx^3+6x^2+bx+1$

۳) $x^4+2x^3-4x^2-5x-6=(x-a)(x-b)(x^2+x+1)$

۵. (الف) ثابت کنید:

$$(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^4+y^4+z^4)=(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)$$

(ب) ثابت کنید اگر a، b و c سه عدد مثبت حقیقی باشند که در رابطه‌ی

$$2(a^8+b^8+c^8)=(a^4+b^4+c^4)^2$$

صدق می‌کنند حتماً می‌توان یک مثلث قائم‌الزاویه با طول اضلاع a، b و c ساخت.

۶. باقی‌مانده‌ی $p(x^{1357})$ را بر $(x-1)(x+1)$ بیابید:

$$p(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{1394}+x^{1395}$$

۷. اثبات کنید چند جمله‌ای $f(x)$ حداقل در دو مقدار از بازه‌ی $[-5,+5]$ برابر صفر است:

$$17f^4(x)+17f^2(x)=f(x^2+3x-3)-f(x)$$

۸. چندجمله‌ای $A(x)$، n ریشه‌ی حقیقی دارد. اثبات کنید که یکی از آن‌ها در بازه‌ی $[0,2]$ است به شرطی که:

$$\begin{cases} A(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0 \\ -2\le a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_2+a_1+a_0\le 0 \end{cases}$$