خلاصه‌ی جبر و معادله

۱ مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

⇦ **دنباله‌ی حسابی:** دنباله‌ای است که هر جمله‌ی آن برابر است با حاصل‌جمع جمله‌ی قبلی آن با عدد ثابت d. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم.

$a_۱$ و $a_۱+d$ و $a_۱+۲d$ و ....

⇦ **جمله‌ی عمومی دنباله حسابی:** جمله‌ی nام دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول $a_۱$ و قدرنسبت d برابر است با: $a_n=a_۱+(n-۱)d$

⇦ **واسطه‌ی حسابی:** اگر a، b و c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، آن‌گاه b را واسطه‌ی حسابی a و c می‌نامیم. در این‌صورت:

$$b=\frac{a+c}{۲}$$

⇦ **مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی:** اگر $a_۱$ جمله‌ی اول و d قدرنسبت یک دنباله‌ی حسابی باشند، آن‌گاه مجموع n جمله‌ی اول آن از روابط زیر به‌دست می‌آید:

۱ $S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$ ۲ $S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$

نکته ۱: برای هر $n>۱$ داریم: $a_n=S_n-S_{n-۱}$

نکته ۲: در دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی عمومی به‌صورت $an+b$ و مجموع n جمله‌ی اول به‌صورت $an^۲+bn$ است.

تست ۱

در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی سوم، دو برابر جمله‌ی هفتم است. اگر مجموع n جمله‌ی اول این دنباله برابر صفر باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

حل: گزینه‌ی ۱ صحیح است.

$$a_۳=۲a_۷\Rightarrow(a_۱+۲d)=۲(a_۱+۶d)\Rightarrow a_۱+۱۰d=۰ \quad و \quad S_{۲۱}=\frac{۲۱}{۲}(۲a_۱+۲۰d)=۲۱(a_۱+۱۰d)=۲۱\times۰=۰$$

دقت کنید که از رابطه‌ی $a_۱+۱۰d=۰$ نتیجه می‌گیریم که $a_{۱۱}=۰$ پس مجموع ۱۰ جمله‌ی قبل از $a_{۱۱}$ و ۱۰ جمله‌ی بعد از $a_{۱۱}$ برابر صفر است، لذا $S_{۲۱}=۰$.

تست ۲

در یک دنباله‌ی‌حسابی، $s_n=۳n^۲+۲n$ است. حاصل $s=(a_۱+a_۲)+(a_۴+a_۵)+(a_۷+a_۸)+\dots+(a_{۱۹}+a_{۲۰})$ کدام است؟

۱) ۱۴۵۰ ۲) ۱۵۵۰ ۳) ۱۶۵۰ ۴) ۱۷۵۰

حل: گزینه‌ی ۴ صحیح است. عبارت s را به‌صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

$$s=(a_۱+a_{۲۰})+(a_۲+a_{۱۹})+(a_۴+a_{۱۷})+\dots+(a_{۱۰}+a_{۱۱})=۲a_{۲۱}+۲a_{۲۱}+۲a_{۲۱}+\dots+۲a_{۲۱}=۷(۲a_{۲۱})$$
$$\Rightarrow s=۱۴a_{۲۱}=۱۴(S_{۲۱}-S_{۲۰})=۱۴(۱۳۲۳+۴۲-۱۲۰۰-۴۰)=۱۷۵۰$$

تست ۳

در یک دنباله‌ی حسابی ۶۰ جمله‌ای، مجموع جملات ردیف زوج، ۳ برابر مجموع جملات ردیف فرد است. اگر قدرنسبت این دنباله برابر ۳ باشد، مجموع جملات ردیف فرد کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۷۲

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. مجموع جملات ردیف فرد را s می‌نامیم. در این‌صورت مجموع جملات ردیف زوج برابر $3s$ است.

$$\begin{cases} 3s = a_2 + a_4 + \cdots + a_{60} \\ s = a_1 + a_3 + \cdots + a_{59} \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 2s = (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{60} - a_{59})$$

پس $2s = 30d$ و در نتیجه $s = 15d = 45$.

⇦ **دنباله‌ی هندسی:** دنباله‌ای است که هر جمله‌ی آن برابر است با حاصل‌ضرب جمله‌ی قبلی آن در عدد ثابت q. این عدد ثابت و مخالف صفر را قدرنسبت دنباله می‌نامیم.

$$a_1, a_1q, a_1q^2, \cdots$$

⇦ **جمله‌ی عمومی دنباله هندسی:** جمله‌ی nام دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a_1 و قدرنسبت q برابر است با: $a_n = a_1 q^{n-1}$

⇦ **واسطه‌ی هندسی:** اگر a، b و c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، آن‌گاه b را واسطه‌ی هندسی a و c می‌نامیم. در این‌صورت:

$$b^2 = ac$$

⇦ **مجموع n جمله‌ی اول دنباله هندسی:** اگر a_1 و q به ترتیب جمله‌ی اول و قدرنسبت یک دنباله‌ی هندسی باشند، آن‌گاه مجموع n جمله‌ی اول آن از رابطه‌ی مقابل به‌دست می‌آید: $s_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

نکته ۳: اگر جملات nام، kام و tام یک دنباله‌ی حسابی، سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، آن‌گاه قدرنسبت دنباله‌ی هندسی برابر است با: $\dfrac{t-k}{k-n}$

تست ۴

در یک دنباله‌ی هندسی $2n$ جمله‌ای، مجموع جملات ردیف زوج، $\frac{3}{2}$ برابر مجموع جملات ردیف فرد است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

حل: گزینه‌ی ۱ صحیح است. جملات ردیف زوج یک دنباله‌ی هندسی، با جمله‌ی اول a_2 و قدرنسبت q^2 و جملات ردیف فرد یک دنباله‌ی هندسی، با جمله‌ی اول a_1 و قدرنسبت q^2 است. در هر دو دنباله، تعداد جملات n است.

$$s_2 = \frac{3}{2}s_1 \Rightarrow \frac{a_2(1-(q^2)^n)}{1-q^2} = \frac{3}{2} \times \frac{a_1(1-(q^2)^n)}{1-q^2} \Rightarrow a_2 = \frac{3}{2} \times a_1 \Rightarrow a_1 q = \frac{3}{2} \times a_1 \Rightarrow q = \frac{3}{2}$$

تست ۵

جملات چهارم، ششم و دوازدهم یک دنباله‌ی حسابی، سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی‌اند. مجموع چه تعداد از جملات اولیه‌ی دنباله‌ی حسابی برابر صفر است؟

۱) ۷ جمله ۲) ۶ جمله ۳) ۵ جمله ۴) ۴ جمله

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است. به شرطی a_4، a_6 و a_{12} تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند که $(a_6)^2 = a_4.a_{12}$ باشد.

$$(a_6)^2 = a_4.a_{12} \Rightarrow (a+5d)^2 = (a+3d)(a+11d) \Rightarrow a^2 + 10ad + 25d^2 = a^2 + 14ad + 33d^2$$
$$\Rightarrow 4ad + 8d^2 = 0 \Rightarrow 2a + 4d = 0 \Rightarrow s_5 = 0$$

تست ۶

مجموع جواب‌های معادله‌ی $2 = \dfrac{1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + x^8}{1 - x^3 + x^6}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $-\sqrt{5}$

حل: گزینه‌ی ۱ صحیح است. صورت کسر، حاصل جمع ۹ جمله از یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $a_1 = 1$ و قدرنسبت $q = -x$ است؛ پس برابر است با:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + x^8 = \frac{a_1(1-q^9)}{1-q} = \frac{1(1-(-x)^9)}{1-(-x)} = \frac{1+x^9}{1+x}$$

به طور مشابه مخرج کسر نیز یک دنباله‌ی هندسی ۳ جمله ای با جمله‌ی اول $a_1 = 1$ و قدرنسبت $q = -x^3$ است؛ پس برابر است با:

$$1 - x^3 + x^6 = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = \frac{1(1-(-x^3)^3)}{1-(-x^3)} = \frac{1+x^9}{1+x^3}$$

پس داریم:

$$2 = \frac{\frac{1+x^9}{1+x}}{\frac{1+x^9}{1+x^3}} = \frac{1+x^3}{1+x} = \frac{(1-x+x^2)(1+x)}{1+x} = 1 - x + x^2$$

پس $x^2 - x - 1 = 0$ و در نتیجه $x_1 + x_2 = 1$ است.

۲ معادلات درجه دوم

⇦ **ریشه‌یابی:** در معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با فرض $\Delta = b^2 - 4ac$ سه حالت زیر وجود دارد.

۱) $\Delta < 0$ ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۲) $\Delta = 0$ یک ریشه‌ی مضاعف برابر $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$ دارد.

۳) $\Delta > 0$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز به‌صورت $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ دارد.

تست ۷

اگر $x = 2$ ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $3x^2 + (m-1)x + n = 0$ باشد، حاصل $m+n$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل: گزینه‌ی ۱ صحیح است. ریشه‌ی مضاعف برابر $\dfrac{-b}{2a}$ است. پس داریم:

$$2 = -\frac{m-1}{2 \times 3} \Rightarrow m = -11$$

حال $x = 2$ را در معادله جایگزین می‌کنیم.

$$3x^2 - 12x + n = 0 \xrightarrow{x=2} 12 - 24 + n = 0 \Rightarrow n = 12$$

پس $n + m = 1$ است.

نکته ۴:

اگر $x = \alpha$ ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ باشد، آن‌گاه $f(x) = a(x-\alpha)^2$.

همچنین اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم فوق باشند، آن‌گاه $f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$.

تست ۸

کدام عبارت زیر یک عامل $x^2 - 3x + 3a - a^2 = 0$ است؟

۱) $x + 3 + a$ ۲) $x + 3 - a$ ۳) $x - 3 + a$ ۴) $x - 3 - a$

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است. معادله‌ی درجه‌ی دوم را حل می‌کنیم:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12a + 4a^2}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{(2a-3)^2}}{2} = \frac{3 \pm (2a-3)}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3 + 2a - 3}{2} = a \\ x_2 = \dfrac{3 - 2a + 3}{2} = 3 - a \end{cases}$$

پس عبارت داده شده به‌صورت $(x - x_1)(x - x_2)$ تجزیه می‌شود:

$$x^2 - 3x + 3a - a^2 = (x - x_1)(x - x_2) = (x - a)(x - 3 + a)$$

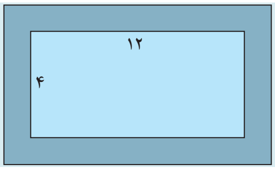
یعنی $x - a$ و $x - 3 + a$ از عوامل عبارت داده شده‌اند.

نکته ۵: برای حل برخی از مسائل کاربردی، با مدل‌سازی مناسب، مسأله را تبدیل به حل یک معادله‌ی درجه ۲ می‌کنیم.

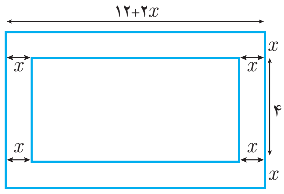
تست ۹

در شکل مقابل یک آبراه بتونی با پهنای یکسان و به مساحت ۱۷ مترمربع اطراف استخری به ابعاد ۱۲ متر و ۴ متر قرار دارد. پهنای آبراه چند سانتی‌متر است؟

۱) ۴۰ ۲) ۵۰ ۳) ۶۰ ۴) ۷۵



حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. پهنای آبراه را x فرض می‌کنیم و مساحت آن را پیدا می‌کنیم:



$$s = ۲(x(۱۲+۲x)+۴x) = ۴x^۲+۳۲x \Rightarrow ۴x^۲+۳۲x = ۱۷ \Rightarrow ۴x^۲+۳۲x-۱۷ = ۰$$

جواب این معادله $x = \frac{۱}{۲}$ است، پس پهنای آبراه برابر ۵۰ سانتی‌متر است.

روابط بین ضرایب و ریشه‌ها: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، آن‌گاه:

۱) $s = \alpha+\beta = -\frac{b}{a}$ ۲) $p = \alpha\beta = \frac{c}{a}$ ۳) $|\alpha-\beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|\alpha|}$

مثال ۱

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم باشند، حاصل $\alpha^۲+\beta^۲$ و $\alpha^۳+\beta^۳$ را برحسب s و p بنویسید.

حل: از اتحادها کمک می‌گیریم:

$$\alpha^۲+\beta^۲ = (\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta = s^۲-۲p$$
$$\alpha^۳+\beta^۳ = (\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta) = s^۳-۳ps$$

تست ۱۰

بین ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۳x+۳m-۱=۰$ رابطه‌ی $\alpha+۳\beta=۵$ برقرار است. مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

حل: گزینه‌ی ۱ صحیح است. با توجه به رابطه $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ داریم:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=۳\\ \alpha+۳\beta=۵\end{cases} \xrightarrow{\text{کم}} ۲\beta=۲ \Rightarrow \beta=۱$$

حال $\beta=۱$ را در معادله جایگزین می‌کنیم.

$$x^۲-۳x+۳m-۱=۰ \xrightarrow{x=۱} ۱-۳+۳m-۱=۰ \Rightarrow m=۱$$

تست ۱۱

ریشه‌های معادله‌ی $x^۲+۲mx+۴m-۴=۰$ دو عدد صحیح زوج متوالی‌اند. مقدار m کدام است؟

۱) ۱ یا ۳- ۲) ۱ یا ۳ ۳) ۱- یا ۳ ۴) ۱- یا ۳-

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. اختلاف دو عدد صحیح زوج متوالی، ۲ واحد است.

$$\alpha-\beta=۲ \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=۲ \Rightarrow \frac{\sqrt{۴m^۲-۴(۴m-۴)}}{۱}=۲ \Rightarrow \sqrt{۴m^۲-۱۶m+۱۶}=۲$$
$$\Rightarrow ۴m^۲-۱۶m+۱۶=۴ \Rightarrow m^۲-۴m+۳=۰ \Rightarrow m=۱,۳$$

دقت کنید به ازای $m=۱$ و $m=۳$ ریشه‌های معادله دو عدد زوج متوالی هستند.

نکته ۶: گاهی اوقات برای یافتن رابطه‌ی بین ریشه‌ها، می‌توان ریشه را در خود معادله جایگزین کرد.

به طور مثال اگر α ریشه‌ی معادله‌ی $x^۲-۳x+۱=۰$ باشد، آن‌گاه $\alpha^۲-۳\alpha+۱=۰$ و یا $\alpha^۲=۳\alpha-۱$.

تست ۱۲

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - ۳x - ۳ = ۰$ باشند، حاصل $\frac{۳\beta}{\alpha} + \frac{\alpha^۲ - ۳}{\beta}$ چقدر است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) -۱۵ ۴) ۱۵

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است. اگر α را در معادله جایگزین کنیم، داریم:

$$\alpha^۲ - ۳\alpha - ۳ = ۰ \Rightarrow \alpha^۲ - ۳ = ۳\alpha$$

پس در عبارت داده شده، به جای $\alpha^۲ - ۳$ عبارت ۳α را جایگزین می‌کنیم.

$$\frac{\alpha^۲ - ۳}{\beta} + \frac{۳\beta}{\alpha} = \frac{۳\alpha}{\beta} + \frac{۳\beta}{\alpha} = \frac{۳(\alpha^۲ + \beta^۲)}{\alpha\beta} = \frac{۳(s^۲ - ۲p)}{p} = \frac{۳(۹ + ۶)}{-۳} = -۱۵$$

تست ۱۳

بین ضرایب معادله‌ی درجه دوم $ax^۲ + bx + ۲c = ۰$ رابطه‌ی $۲a - b + c = ۰$ برقرار است. یک ریشه‌ی این معادله کدام است؟

۱) $-\frac{c}{۲a}$ ۲) $\frac{c}{۲a}$ ۳) $\frac{c}{a}$ ۴) $-\frac{c}{a}$

حل: گزینه‌ی ۴ صحیح است.

راه‌حل اول: اگر $x_۱ = -۲$ را در معادله جایگزین کنیم داریم:

$$ax^۲ + bx + ۲c = ۴a - ۲b + ۲c = ۲(۲a - b + c) = ۰$$

پس ۲- یک ریشه‌ی معادله است. از آن‌جایی که حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{۲c}{a}$ است، پس:

$$(-۲)x_۲ = \frac{۲c}{a} \Rightarrow x_۲ = -\frac{c}{a}$$

راه‌حل دوم: در معادله‌ی داده شده به جای b عبارت $۲a + c$ را جایگزین می‌کنیم (دقت کنید $۲a - b + c = ۰$ است)، بنابراین:

$$ax^۲ + (۲a + c)x + ۲c = ۰ \Rightarrow ax^۲ + ۲ax + cx + ۲c = ۰ \Rightarrow ax(x + ۲) + c(x + ۲) = ۰ \Rightarrow (x + ۲)(ax + c) = ۰ \Rightarrow x = -۲, -\frac{c}{a}$$

⇦ **تشکیل معادله‌ی درجه دوم:** برای آن‌که معادله‌ی درجه دومی بنویسیم که ریشه‌های آن α و β باشند، ابتدا $s = \alpha + \beta$ و $p = \alpha\beta$ را محاسبه می‌کنیم و سپس در معادله‌ی زیر جایگزین می‌کنیم:

$$x^۲ - sx + p = ۰$$

نکته ۷: معادله‌ی درجه دومی که ریشه‌های آن α و β است را به‌صورت مقابل نیز می‌توانیم بنویسیم: $a(x - \alpha)(x - \beta) = ۰$

تست ۱۴

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - ۳x - ۲ = ۰$ باشند، ریشه‌های کدام معادله‌ی زیر $۱ + \frac{۲}{\beta}$ و $۱ + \frac{۲}{\alpha}$ است؟

۱) $x^۲ + x - ۴ = ۰$ ۲) $x^۲ - x - ۴ = ۰$ ۳) $x^۲ - ۴x - ۱ = ۰$ ۴) $x^۲ + x - ۳ = ۰$

حل: گزینه‌ی ۱ صحیح است.

راه‌حل اول: با توجه به معادله‌ی داده شده روابط $\alpha + \beta = ۳$ و $\alpha\beta = -۲$ برقرار است. حاصل s و p را در معادله‌ی خواسته شده پیدا می‌کنیم:

$$s = (۱ + \frac{۲}{\alpha}) + (۱ + \frac{۲}{\beta}) = ۲ + \frac{۲(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = ۲ + \frac{۲(۳)}{-۲} = -۱$$

$$p = (۱ + \frac{۲}{\alpha})(۱ + \frac{۲}{\beta}) = ۱ + \frac{۲}{\alpha} + \frac{۲}{\beta} + \frac{۴}{\alpha\beta} = ۱ + \frac{۲(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} + \frac{۴}{\alpha\beta} = ۱ + \frac{۲ \times ۳}{-۲} + \frac{۴}{-۲} = -۴$$

حال در عبارت $x^۲ - sx + p = ۰$ جایگزین می‌کنیم:

$$x^۲ - sx + p = x^۲ + x - ۴ = ۰$$

راه‌حل دوم: ریشه‌ی معادله‌ی جدید را $x = ۱ + \frac{۲}{\alpha}$ فرض می‌کنیم.

$$x = ۱ + \frac{۲}{\alpha} \Rightarrow x - ۱ = \frac{۲}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{۲}{x - ۱}$$

در معادله‌ی داده شده α را جایگزین می‌کنیم، پس:

$$\alpha^۲ - ۳\alpha - ۲ = ۰ \Rightarrow (\frac{۲}{x - ۱})^۲ - ۳(\frac{۲}{x - ۱}) - ۲ = ۰ \Rightarrow \frac{۴ - ۶(x - ۱) - ۲(x - ۱)^۲}{(x - ۱)^۲} = ۰ \Rightarrow -۲x^۲ - ۲x + ۸ = ۰ \Rightarrow x^۲ + x - ۴ = ۰$$

تست ۱۵

اگر $۳+۲\sqrt{۲}$ ریشه‌ی معادله‌ی $x^{۲}+ax+b=۰$ باشد به طوری که a و b دو عدد صحیح‌اند. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) -۷ ۲) -۵ ۳) ۷ ۴) ۵

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است.

راه‌حل اول: برای آن‌که a و b صحیح باشند، ریشه‌ی دیگر باید $۳-۲\sqrt{۲}$ باشد. بنابراین:

$$s=(۳+۲\sqrt{۲})+(۳-۲\sqrt{۲})=-a\Rightarrow a=-۶$$
$$p=(۳+۲\sqrt{۲})(۳-۲\sqrt{۲})=b\Rightarrow b=۱$$

پس $a+b=-۵$ است.

راه‌حل دوم: فرض کنید $x=۲\sqrt{۲}+۳$ ریشه‌ی معادله‌ی مورد نظر باشد، پس داریم:

$$x=۲\sqrt{۲}+۳\Rightarrow x-۳=۲\sqrt{۲}\xrightarrow{\text{به توان دو}}(x-۳)^{۲}=(۲\sqrt{۲})^{۲}\Rightarrow x^{۲}-۶x+۱=۰$$

یعنی $a=-۶$ و $b=۱$ و در نتیجه $a+b=-۵$ است.

معادلاتی که منجر به درجه ۲ می‌شوند: برخی از معادلات را می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب، به معادله‌ی درجه دوم تبدیل کرد و پس از حل آن و با رجوع به تغییر متغیر، مقادیر مجهول معادله‌ی اولیه را یافت.

تست ۱۶

مجموع جواب‌های معادله‌ی $(x^{۲}-۳x)^{۲}-۲x^{۲}+۶x-۸=۰$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۸

حل: گزینه‌ی ۱ صحیح است. با فرض $x^{۲}-۳x=t$ داریم:

$$(x^{۲}-۳x)^{۲}-۲(x^{۲}-۳x)-۸=۰\Rightarrow t^{۲}-۲t-۸=۰\Rightarrow t=-۲ \text{ یا } ۴$$

$$\begin{cases} t=-۲\Rightarrow x^{۲}-۳x=-۲\Rightarrow x^{۲}-۳x+۲=۰\Rightarrow x=۱,۲ \\ t=۴\Rightarrow x^{۲}-۳x=۴\Rightarrow x^{۲}-۳x-۴=۰\Rightarrow x=-۱,۴ \end{cases}$$

حال جمع ریشه‌ها برابر ۶ است.

تست ۱۷

معادله‌ی $x^{۴}-mx^{۲}+۳-m=۰$ چهار ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد. حدود m کدام است؟

۱) $m>۲$ یا $m<-۶$ ۲) $۲<m<۳$ ۳) $۰<m<۳$ ۴) $m<-۶$

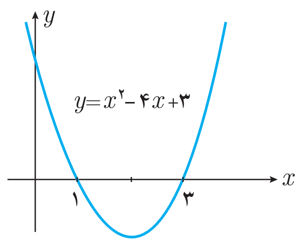
حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. با فرض $x^{۲}=t$ به معادله $t^{۲}-mt+۳-m=۰$ می‌رسیم، این معادله باید ۲ ریشه‌ی مثبت داشته باشد (به ازای هر یک از جواب‌های مثبت برای t، برای x دو جواب به‌دست می‌آید) شرط داشتن دو ریشه‌ی مثبت آن است که $\Delta>۰$، $s>۰$ و $p>۰$ باشد.

$$\Delta=m^{۲}-۴(۳-m)=m^{۲}+۴m-۱۲\xrightarrow{\Delta>۰}m<-۶ \text{ یا } m>۲$$
$$p=۳-m\xrightarrow{p>۰}m<۳$$
$$s=m\xrightarrow{s>۰}m>۰$$

اشتراک سه شرط بالا به‌صورت $۲<m<۳$ است.

۳ صفرهای تابع

برای هر تابع f، جواب‌های معادله‌ی $f(x)=۰$ را صفرهای تابع f می‌نامیم. صفرهای تابع f همان طول نقطه‌های تلاقی نمودار f با محور x هاست. به طور مثال نمودار تابع $f(x)=x^{۲}-۴x+۳$ به‌صورت مقابل است:



$f(x)=۰\Rightarrow x^{۲}-۴x+۳=۰\Rightarrow x=۱,۳\Rightarrow$ ۱ و ۳ صفرهای تابع f هستند.

نکته ۸: اگر α یک صفر تابع $f(x)$ باشد آن‌گاه $f(x)$ به‌صورت مقابل تجزیه می‌شود: $f(x)=(x-\alpha)g(x)$

در حالت خاص اگر α و β صفرهای تابع درجه دوم $f(x)=ax^{2}+bx+c$ باشند، آن‌گاه: $ax^{2}+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

تست ۱۸ اگر $x=-2$ یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^{3}+ax^{2}+x-6$ باشد، اختلاف سایر صفرهای این تابع چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل: گزینه‌ی ۴ صحیح است. به ازای $x=-2$ مقدار f برابر صفر است.

$$f(-2)=0\Rightarrow -8+4a-2-6=0\Rightarrow a=4$$

حال f را به عامل $x+2$ تجزیه می‌کنیم. برای این کار کافی است $f(x)$ را بر $x+2$ تقسیم کنیم.

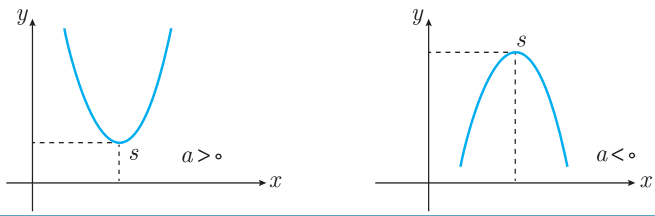
$$\begin{array}{l|l} x^{3}+4x^{2}+x-6 & x+2 \\ \underline{x^{3}+2x^{2}} & x^{2}+2x-3 \\ 2x^{2}+x-6 & \\ \underline{2x^{2}+4x} & \\ -3x-6 & \\ \underline{-3x-6} & \\ 0 & \end{array}$$

$$f(x)=(x+2)(x^{2}+2x-3)=(x+2)(x+3)(x-1)$$

بنابراین دو ریشه‌ی دیگر $x=1$ و $x=-3$ است که ۴ واحد اختلاف دارند.

۴ رسم سهمی

نمودار $y=f(x)=ax^{2}+bx+c$ یک سهمی است که مختصات رأس آن عبارت است از $x_s=\dfrac{-b}{2a}$ و $y_s=-\dfrac{\Delta}{4a}$

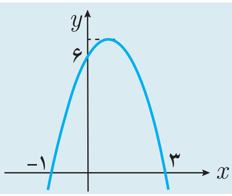


تذکر سهمی‌ها دارای خط تقارن به معادله‌ی $x=-\dfrac{b}{2a}$ هستند.

نکته ۹: اگر $s(\alpha,\beta)$ رأس سهمی باشد، معادله‌ی آن به‌صورت مقابل است: $y=a(x-\alpha)^{2}+\beta$

نکته ۱۰: اگر $x_1=\alpha$ و $x_2=\beta$ ریشه‌های یک سهمی باشند، معادله‌ی آن به‌صورت مقابل است: $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$

تست ۱۹ نمودار سهمی $y=ax^{2}+bx+c$ به‌صورت مقابل است. عرض رأس سهمی چقدر است؟



۱) ۷ ۲) ۸

۳) ۹ ۴) ۱۰

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. چون ۳ و ۱- صفرهای تابع‌اند، پس معادله را به‌صورت $y=a(x-3)(x+1)$ می‌نویسیم. نقطه $(0,6)$ را در معادله صدق می‌دهیم.

$$\begin{cases} x=0 \\ y=6 \end{cases}\Rightarrow 6=a(-3)(1)\Rightarrow a=-2$$

پس معادله سهمی به‌صورت مقابل است: $y=-2(x-3)(x+1)=-2x^{2}+4x+6$

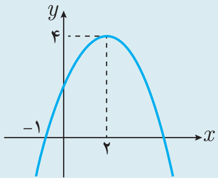
عرض رأس سهمی $y=\dfrac{-\Delta}{4a}$ است. لذا: $y=-\dfrac{b^{2}-4ac}{4a}=-\dfrac{16-4(-2)(6)}{4(-2)}=8$

البته طول رأس سهمی وسط ریشه‌هاست، $x=\dfrac{3-1}{2}=1$. حال $x=1$ را در معادله‌ی سهمی جایگزین می‌کنیم، بنابراین عرض رأس سهمی به‌دست می‌آید.

$$y=-2(x-3)(x+1)\xrightarrow{x=1}y=8$$

تست ۲۰

نمودار $f(x)=ax^{2}+bx+c$ به‌صورت مقابل است. مقدار $f(-4)$ کدام است؟



۱) -12 ۲) -10

۳) -8 ۴) -16

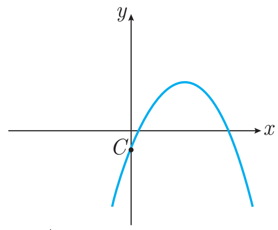
حل: گزینه‌ی ۱ صحیح است. رأس سهمی به‌صورت $s(2,4)$ است، پس معادله‌ی سهمی به‌صورت $f(x)=a(x-2)^{2}+4$ است. کافی است $f(-1)=0$ را آزمایش کنیم.

$$f(-1)=0 \Rightarrow a\times 9+4=0 \Rightarrow a=-\frac{4}{9} \Rightarrow f(x)=\frac{-4}{9}(x-2)^{2}+4 \Rightarrow f(-4)=\frac{-4}{9}(-6)^{2}+4=-12$$

نکته ((:

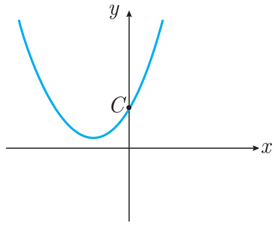
به کمک علامت s، p و Δ و یا علامت a، b و c می‌توان مشخص کرد که نمودار یک سهمی از چه ناحیه‌هایی عبور می‌کند.

به مثال‌های زیر توجه کنید:

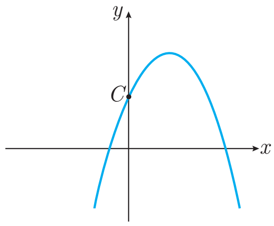


$\Delta>0\ ,\ s>0\ ,\ p>0$

$(a<0\ ,\ b>0\ ,\ c<0)$



$\Delta<0\ ,\ a>0\ ,\ b>0\ ,\ c>0$



$\Delta>0\ ,\ s>0\ ,\ p<0$

$(a<0\ ,\ b>0\ ,\ c>0)$

توجه داشته باشید که $f(0)=c$ است، پس c همان محل برخورد منحنی با محور y هاست.

تست ۲۱

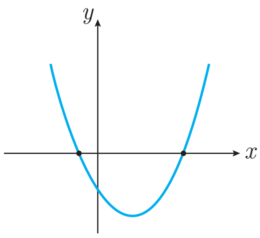
نمودار سهمی $y=2x^{2}+mx-3+m$ از هر چهار ناحیه‌ی مختصات عبور می‌کند. حدود m کدام است؟

۱) $m>3$ ۲) $0<m<3$ ۳) $m<3$ ۴) $-3<m<3$

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است. کافی است تابع دارای دو صفر مختلف‌العلامت باشد:

پس حاصل‌ضرب ریشه‌ها منفی است.

$$p=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-3+m}{2} \Rightarrow \frac{-3+m}{2}<0 \Rightarrow m<3$$



دقت کنید وقتی $p<0$ است خود به خود، Δ مثبت است.

⇦ **یافتن ماکزیمم و مینیمم درجه ۲:** عرض رأس سهمی $y=ax^{2}+bx+c$ در واقع همان ماکزیمم و یا می‌نیمم مقدار y است. (که در واقع این تابع را نیز تعیین می‌کند.)

مثال ۲

بیش‌ترین مقدار مساحت مستطیلی را بیابید که بین طول و عرض آن رابطه‌ی $2x+y=12$ برقرار باشد.

حل: مساحت مستطیل برابر $s=xy$ است. به جای y مساوی آن یعنی $12-2x$ را جایگزین می‌کنیم.

$$s=xy=x(12-2x)=-2x^{2}+12x$$

راه‌حل اول: بیش‌ترین مقدار یک عبارت درجه دوم از رابطه‌ی $\frac{-\Delta}{4a}$ به‌دست می‌آید.

$$\max s=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{144-4(-2)(0)}{4(-2)}=18$$

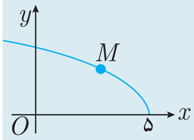
راه‌حل دوم: عبارت را به‌صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$$s=-2x^{2}+12x=-2(x-3)^{2}+18$$

پس حداکثر s برابر ۱۸ است.

تست ۲۲

در شکل مقابل نقطه‌ی M روی منحنی $y=\sqrt{۱۰-۲x}$ در ناحیه‌ی اول قرار دارد. حداقل OM چقدر است؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{۱۰}$

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است. نقطه‌ی $M(x,\sqrt{۱۰-۲x})$ را در نظر بگیرید.

$$OM=\sqrt{x^۲+(\sqrt{۱۰-۲x})^۲}=\sqrt{x^۲-۲x+۱۰}=\sqrt{(x-۱)^۲+۹}$$

حداقل $(x-۱)^۲$ برابر صفر است، پس حداقل OM برابر $\sqrt{۹}$ یعنی برابر ۳ است.

۵ معادلات گویا و گنگ

⇦ **معادلات شامل عبارات گویا:** برای حل معادلات شامل عبارات گویا، با مخرج مشترک گرفتن و سپس طرفین و وسطین کردن دو طرف معادله و ساده کردن عبارت جبری به‌دست آمده، معادله را حل می‌کنیم. جواب به‌دست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کند.

تست ۲۳

معادله‌ی $\dfrac{۴x-۱۲}{x^۲-۴x}=\dfrac{۲}{x-۲}+\dfrac{۳}{x}$ چند جواب دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. مخرج مشترک می‌گیریم سپس طرفین وسطین می‌کنیم.

$$\frac{۳(x-۲)+۲x}{\cancel{x}(x-۲)}=\frac{۴x-۱۲}{\cancel{x}(x-۴)}\Rightarrow\frac{۵x-۶}{x-۲}=\frac{۴x-۱۲}{x-۴}\Rightarrow(۵x-۶)(x-۴)=(x-۲)(۴x-۱۲)$$
$$\Rightarrow ۵x^۲-۲۶x+۲=۴x^۲-۲۰x+۲۴\Rightarrow x^۲-۶x=۰\Rightarrow x=۰,x=۶$$

جواب $x=۰$ قابل قبول نیست.

تست ۲۴

۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک با غلظت ۷ درصد داریم. ۴۸ کیلوگرم آب و n کیلوگرم نمک به این محلول اضافه می‌کنیم تا غلظت آن ۱۰ درصد گردد. مقدار n کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۸ ۴) ۴

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. در محلول اولیه $۱۴=\frac{۷}{۱۰۰}\times ۲۰۰$ کیلوگرم نمک وجود دارد. در محلول ثانویه وزن کل محلول $n+۴۸+۲۰۰$ و وزن نمک آن $n+۱۴$ است. پس غلظت محلول جدید برابر $\dfrac{۱۴+n}{۲۴۸+n}$ است که باید برابر ۱۰ درصد باشد.

$$\frac{۱۴+n}{۲۴۸+n}=\frac{۱۰}{۱۰۰}=\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow ۱۴۰+۱۰n=۲۴۸+n\Rightarrow ۹n=۱۰۸\Rightarrow n=۱۲$$

تست ۲۵

علی و محسن کاری را با هم در ۱۸ ساعت تمام می‌کنند. ولی اگر هر کدام به تنهایی کار کنند، زمان اتمام کار علی ۱/۵ برابر زمان اتمام کار محسن است. محسن به تنهایی در چند ساعت کار را تمام می‌کند؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۰ ۳) ۳۶ ۴) ۴۵

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. اگر محسن در x ساعت کار را تمام کند، علی در $۱/۵x$ ساعت کار را تمام می‌کند. در یک ساعت، محسن $\dfrac{۱}{x}$ و علی $\dfrac{۱}{۱/۵x}$ کار را انجام می‌دهند. جمع این دو مقدار باید برابر $\dfrac{۱}{۱۸}$ باشد.

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۱/۵x}=\frac{۱}{۱۸}\Rightarrow\frac{۱/۵+۱}{۱/۵x}=\frac{۱}{۱۸}\Rightarrow\frac{۲۵}{۱۵x}=\frac{۱}{۱۸}\Rightarrow x=۳۰$$

⇦ **نسبت طلایی:** در یک مستطیل به طول L و عرض w اگر نسبت $\frac{w+L}{L}=\frac{L}{w}$ برقرار باشد، گوییم در این مثلث نسبت طلایی برقرار است. در واقع داریم:

$$\frac{L}{w}=\frac{w+L}{L}=\frac{w}{L}+۱\xrightarrow{\frac{L}{w}=t}t=\frac{۱}{t}+۱\Rightarrow t=\frac{۱+t}{t}\Rightarrow t^۲=۱+t\Rightarrow t^۲-t-۱=۰\Rightarrow t=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

در چنین مستطیلی نسبت طول به عرض برابر $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ است.

تست ۲۶

در مستطیلی با محیط $۶+۲\sqrt{۵}$، نسبت طول به عرض متناسب با نسبت طلایی است. عرض این مستطیل چقدر است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ ۴) ۴

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. اگر عرض مستطیل را x فرض کنیم، طول آن برابر $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}x$ است.

$$\text{محیط}=۲(x+\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}x)=(۳+\sqrt{۵})x=۶+۲\sqrt{۵}\Rightarrow x=۲$$

⇦ **معادلات شامل عبارات گنگ:** برای حل معادلات شامل عبارت‌های رادیکالی، با به توان رساندن طرفین معادله (و در صورت لزوم تکرار این عمل و ساده کردن، به معادله‌ای بدون رادیکال می‌رسیم که آن را حل می‌کنیم. جواب‌های به‌دست آمده باید در معادله‌ی اصلی آزمایش شوند.

دقت کنید زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج نباید منفی باشد، هم‌چنین اگر خواستید دو طرف یک معادله را به توان زوج برسانید شرط هم‌علامت بودن دو طرف تساوی را بررسی کنید.

تست ۲۷

نزدیک‌ترین عدد صحیح به جواب معادله‌ی $\sqrt{x+۱}+\sqrt{۲x-۲}=\sqrt{۳x+۳}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. دو طرف تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(x+۱)+(۲x-۲)+۲\sqrt{x+۱}\sqrt{۲x-۲}=۳x+۳\Rightarrow ۳x-۱+۲\sqrt{۲x^۲-۲}=۳x+۳\Rightarrow\sqrt{۲x^۲-۲}=۲$$

مجدداً دو طرف تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم: $۲x^۲-۲=۴\Rightarrow x^۲=۳\Rightarrow x=\sqrt{۳}$

جواب $x=-\sqrt{۳}$ قابل قبول نیست چون زیر رادیکال در معادله‌ی اصلی منفی می‌شود. نزدیک‌ترین عدد به $\sqrt{۳}$ همان ۲ است.

تست ۲۸

حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۳x+\sqrt{x^۲-۳x-۹}=۱۱$ چقدر است؟

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) ۱۰ ۴) -۱۰

حل: گزینه‌ی ۴ صحیح است. فرض کنید $t=x^۲-۳x-۹$ در این صورت $x^۲-۳x=t+۹$ داریم:

$$t+۹+\sqrt{t}=۱۱\Rightarrow\sqrt{t}=۲-t\xrightarrow{\text{به توان دو}}t=۴-۴t+t^۲\Rightarrow t^۲-۵t+۴=۰\Rightarrow t=۱ \text{ یا } ۴$$

جواب $t=۴$ قابل قبول نیست چون سمت راست معادله $\sqrt{t}=۲-t$ منفی می‌شود.

$$t=۱\Rightarrow x^۲-۳x-۹=۱\Rightarrow x^۲-۳x-۱۰=۰\Rightarrow x_۱x_۲=\frac{c}{a}=-۱۰$$

نکته ۲: در عبارات گنگ شامل $\sqrt{f(x)}$ دقت کنید که هم $f(x)$ و هم $\sqrt{f(x)}$ هیچ‌کدام منفی نیستند.

تست ۲۹

معادله‌ی $\sqrt{x^۲-x-۲}+\sqrt{x^۲+ax+a}=۰$ جواب دارد. مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{-۴}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است. حاصل‌جمع دو عبارت نامنفی هرگز صفر نمی‌شود مگر آن که هر دو صفر باشند.

$$\begin{cases}\sqrt{x^{۲}-x-۲}=۰ \Rightarrow x^{۲}-x-۲=۰ \Rightarrow x=-۱ \text{ یا } ۲\\ \sqrt{x^{۲}+ax+a}=۰ \Rightarrow x^{۲}+ax+a=۰ \quad (۲)\end{cases}$$

جواب‌های معادله اول را در معادله‌ی دوم آزمایش می‌کنیم.

$$x^{۲}+ax+a=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۲ \Rightarrow ۴+۲a+a=۰ \Rightarrow a=-\frac{۴}{۳}\\ x=-۱ \Rightarrow ۱-a+a=۰ \Rightarrow ۱=۰ \quad \text{تناقض}\end{cases}$$

۶ روش هندسی حل معادلات

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، جواب‌های معادله‌ی $f(x)=g(x)$ همان طول نقاط تلاقی نمودارهای این دو تابع است و برعکس. بنابراین یکی از راه‌های یافتن تعداد جواب‌ها و یا مقدار تقریبی ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=g(x)$ آن است که نمودار این دو تابع را رسم کنیم و نقاط تقاطع آن‌ها را پیدا کنیم. به این روش حل معادله، روش هندسی یا نموداری حل معادله می‌گویند.

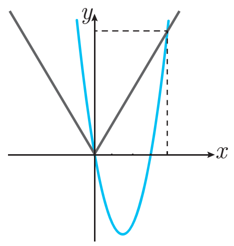
تست ۳۰

معادله‌ی $x=\frac{|x|}{x-۳}$ چند جواب دارد؟

۱) یک　　۲) دو　　۳) سه　　۴) چهار

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. با فرض $x \neq ۳$ طرفین وسطین می‌کنیم به معادله‌ی $|x|=x^{۲}-۳x$ می‌رسیم حال نمودار دو تابع $y=x^{۲}-۳x$ و $y=|x|$ را رسم می‌کنیم.

نمودار این دو تابع در نقاط $x=۰$ و $x=۴$ متقاطع‌اند.

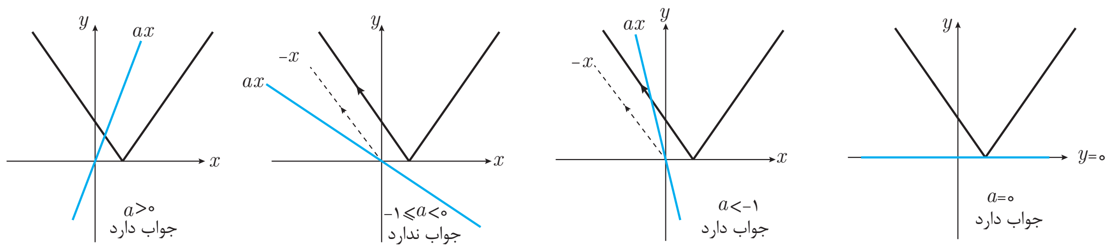


تست ۳۱

معادله‌ی $|x-۲|=ax$ جواب ندارد. حدود a کدام است؟

۱) $۰<a<۱$　　۲) $-۱\leq a<۰$　　۳) $a>۱$　　۴) $a\leq -۱$

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. معادله را به‌صورت $|x-۲|=ax$ می‌نویسیم و سپس نمودار دو تابع $y=|x-۲|$ و $y=ax$ را رسم می‌کنیم.



فقط در حالت $-۱\leq a<۰$ جواب ندارد.

۷ قدرمطلق و ویژگی‌های آن

تعریف: قدرمطلق a به دو صورت زیر تعریف می‌شود:

۱ $|a|=\begin{cases}a & a\geq ۰\\ -a & a<۰\end{cases}$　　۲ $|a|=\sqrt{a^{۲}}$

در واقع $|a|$ همان فاصله‌ی نقطه‌ای به طول a از مبدأ، بر روی محور اعداد حقیقی است.

تست ۳۲

با فرض $-2 < x < 1$، حاصل $P = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + 3\sqrt{x^2 + 4x + 4}$ در چه محدوده‌ای قرار دارد؟

۱) $3 < p < 9$ ۲) $3 < p < 6$ ۳) $2 < p < 6$ ۴) $2 < p < 9$

حل: گزینه‌ی ۱ صحیح است. زیر رادیکال‌ها را مربع کامل می‌کنیم:

$$p = \sqrt{(x-1)^2} + 3\sqrt{(x+2)^2} = |x-1| + 3|x+2|$$

چون $-2 < x < 1$، پس $x + 2$ مثبت و $x - 1$ منفی است.

$$p = -(x-1) + 3(x+2) = 2x + 7$$

با توجه به محدوده‌ی x داریم:

$$-2 < x < 1 \Rightarrow -4 < 2x < 2 \Rightarrow 3 < 2x + 7 < 9 \Rightarrow 3 < p < 9$$

⇦ **ویژگی‌های قدرمطلق:** برخی از ویژگی‌های قدرمطلق به‌صورت زیر است:

۱) $|x| \geq 0$

۲) $|x| = a \Rightarrow x = \pm a \quad (a \geq 0)$

۳) $|x| = |-x|$

۴) $|x| = |a| \Rightarrow x = \pm a$

۵) $|xy| = |x|\,|y|$

۶) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$

۷) $|x^2| = |x|^2 = x^2$

۸) $|x| < a \Rightarrow -a < x < a \quad (a > 0)$

۹) $|x| > a \Rightarrow x < -a$ یا $x > a$

۱۰) $-|x| \leq x \leq |x|$

۱۱) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (نامساوی مثلثی)

۱۲) $|x-y| \geq \big||x| - |y|\big|$

تست ۳۳

اگر $|a| < |b|$ و $a < 0$، آن‌گاه حاصل $p = |a-b| + |a+b| + |a|$ کدام است؟

۱) $-a - 2b$ ۲) $2b$ ۳) a ۴) $3a$

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است. با توجه به ویژگی شماره ۹ داریم:

$$|a| < |b| \xrightarrow{a<0} -a < |b| \Rightarrow b < a \text{ یا } b > -a$$

البته اگر جایگاه اعداد را روی محور تعیین کنیم، روابط بالا شهودی‌تر به‌دست می‌آیند.

$$\underset{b}{\times}\ \ \underset{a}{\times}\ \ \underset{0}{\times}\ \ \underset{-a}{\overset{|a|}{\times}}\ \ \underset{b}{\times} \longrightarrow x$$

پس $a - b$ مثبت و $a + b$ نیز مثبت است.

$$p = |a-b| + |a+b| + |a| = a - b + a + b - a = a$$

نکته ۱۳:

از نامساوی مثلثی می‌توان دو نتیجه گرفت:

۱) a, b مختلف‌العلامت $\Leftrightarrow |a+b| < |a| + |b|$

۲) a, b هم علامت یا صفر $\Leftrightarrow |a+b| = |a| + |b|$

تست ۳۴

تمام اعداد بازه‌ی $[a,b]$ در تساوی $|2x-5| + |2-x| = |3-x|$ صدق می‌کنند. حداکثر $b - a$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) 2

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. اگر سمت راست را به‌صورت $|x-3|$ بنویسیم، آن‌گاه با توجه به نکته‌ی بالا باید $2x - 5$ و $2 - x$ هم علامت یا صفر باشند.

$$|\underbrace{2x-5}_{a}| + |\underbrace{2-x}_{b}| = |\underbrace{x-3}_{a+b}| \Rightarrow (2x-5)(2-x) \geq 0 \Rightarrow 2 \leq x \leq \frac{5}{2}$$

پس $b = \frac{5}{2}$ و $a = 2$ و $b - a = \frac{1}{2}$ است.

⇦ **معادلات قدرمطلق:** برای حل معادلات شامل عبارت قدرمطلق از ویژگی‌های قدرمطلق استفاده می‌کنیم. دو ویژگی که در حل معادلات کاربرد فراوان دارند عبارتند از:

❶ $|f(x)| = |g(x)| \Rightarrow f(x) = \pm g(x)$

❷ $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$

تست ۳۵

مجموع ریشه‌های معادله‌ی $(x-1)^2 - 5\left|x-1\right| + 6 = 0$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۴

حل: گزینه‌ی ۴ صحیح است. فرض کنید $t = \left|x-1\right|$، در این صورت معادله به‌صورت $t^2 - 5t + 6 = 0$ در خواهد آمد.

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow \left|x-1\right| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3 \\ x - 1 = -2 \Rightarrow x = -1 \end{cases} \\ t = 3 \Rightarrow \left|x-1\right| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4 \\ x - 1 = -3 \Rightarrow x = -2 \end{cases} \end{cases}$$

حاصل جمع جواب‌ها برابر ۴ است.

تست ۳۶

معادله‌ی $\left|2x-4\right| + x = k$ جواب ندارد. حدود k کدام است؟

۱) $k < 4$ ۲) $k > 2$ ۳) $k < 2$ ۴) $k > 4$

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است. قدرمطلق را دو حالت می‌گیریم. در هر دو حالت، جواب به‌دست آمده باید غیرقابل قبول باشد.

۱) $x \ge 2 \Rightarrow 2x - 4 + x = k \Rightarrow x = \dfrac{k+4}{3} \Rightarrow$ شرط غیرقابل قبول بودن : $\dfrac{k+4}{3} < 2 \Rightarrow k < 2$

۲) $x < 2 \Rightarrow -(2x-4) + x = k \Rightarrow x = 4 - k \Rightarrow$ شرط غیرقابل قبول بودن : $4 - k \ge 2 \Rightarrow k \le 2$

از اشتراک دو نامساوی بالا به رابطه‌ی $k < 2$ می‌رسیم.

⇦ **نامعادلات قدرمطلق:** برای حل نامعادلات شامل عبارات قدرمطلق از ویژگی‌های زیر استفاده می‌کنیم.

۱) $\left|x\right| < \left|a\right| \Leftrightarrow x^2 < a^2$

۲) $\left|x\right| < a \Rightarrow -a < x < a$

۳) $\left|x\right| > a \Rightarrow x < -a$ یا $x > a$

۴) $\left|a+b\right| \le \left|a\right| + \left|b\right|$

تذکر

به شرطی می‌توان دو طرف نامساوی را به توان زوج رساند که هر دو طرف مثبت باشند.

تست ۳۷

مجموعه جواب نامعادله‌ی $\left|2x+1\right| < x + 3$ به‌صورت بازه‌ی (a,b) است. $a+b$ کدام است؟

۱) $\dfrac{4}{3}$ ۲) $\dfrac{2}{3}$ ۳) $\dfrac{1}{2}$ ۴) $\dfrac{3}{2}$

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است.

راه‌حل اول: چون قدرمطلق مثبت (یا صفر) است پس $x+1$ حتماً مثبت است و می‌توانیم دو طرف نامساوی را به توان ۲ برسانیم.

$$\left|2x+1\right|^2 < (x+3)^2 \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 < x^2 + 6x + 9 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 8 < 0 \Rightarrow (x-2)(3x+4) < 0 \Rightarrow -\frac{4}{3} < x < 2$$

پس: $a + b = 2 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{2}{3}$

راه‌حل دوم: طبق قاعده‌ی $\left|x\right| < a \Rightarrow -a < x < a$ داریم:

$$\left|2x+1\right| < x + 3 \Rightarrow -(x+3) < 2x + 1 < x + 3 \Rightarrow \begin{cases} -x - 3 < 2x + 1 \\ 2x + 1 < x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-4}{3} < x \\ x < 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{-4}{3} < x < 2$$

تست ۳۸

مجموعه جواب نامعادلات $x^2 + ax + b < 0$ و $\left|x-2\right| < 3$ یکسان است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۹ ۴) ۹-

حل: گزینه‌ی ۴ صحیح است. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲+ax+b=۰$ باشند آن‌گاه جواب نامعادله‌ی $x^۲+ax+b<۰$ به‌صورت $\alpha<x<\beta$ است. از طرفی داریم:

$$\left|x-۲\right|<۳\Rightarrow -۳<x-۲<۳\Rightarrow -۱<x<۵$$

پس ۱- و ۵ همان ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $x^۲+ax+b=۰$ هستند.

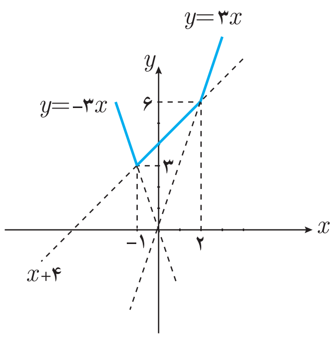
$$\begin{cases}x=-۱\Rightarrow ۱-a+b=۰\\ x=۵\Rightarrow ۲۵+۵a+b=۰\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}a=-۴\\ b=-۵\end{cases}\Rightarrow a+b=-۹$$

رسم توابع قدرمطلق: در حالت کلی برای رسم یک تابع قدرمطلقی، ابتدا عبارات داخل قدرمطلق‌ها را تعیین علامت می‌کنیم و پس از مشخص شدن علامت آن‌ها، قدرمطلق را حذف می‌کنیم و تابع حاصل که شامل قدرمطلق نیست را رسم می‌کنیم.

مثال ۳ نمودار تابع $f(x)=\left|x-۲\right|+۲\left|x+۱\right|$ را رسم کنید.

حل: ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها، $x=-۱$ و $x=۲$ هستند. با توجه به علامت داخل قدرمطلق‌ها داریم:

x		۱-		۲	
$x+۱$	$-(x+۱)$		$x+۱$		$x+۱$
$x-۲$	$-(x-۲)$		$-(x-۲)$		$x-۲$
$f(x)$	$-۳x$		$x+۴$		$۳x$



پس $f(x)$ یک تابع سه ضابطه‌ای است.

$$f(x)=\begin{cases}-۳x & x<-۱\\ x+۴ & -۱\le x\le ۲\\ ۳x & x>۲\end{cases}$$

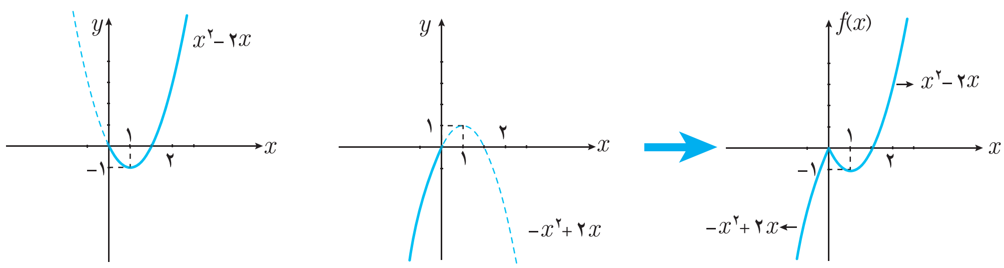
تست ۳۹ نمودار تابع $y=\left|x\right|(x-۲)$ نمودار کدام خط زیر را دو بار قطع می‌کند؟

۱) $y=۱$ ۲) $y=-۱$ ۳) $y=۲$ ۴) $y=-۲$

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. برای قدرمطلق دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases}x\ge ۰\Rightarrow \left|x\right|=x\Rightarrow y=x(x-۲)=x^۲-۲x\\ x<۰\Rightarrow \left|x\right|=-x\Rightarrow y=-x(x-۲)=-x^۲+۲x\end{cases}$$

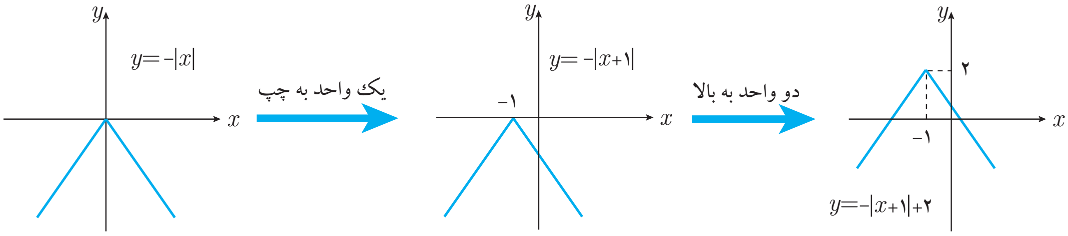
حال دو سهمی را رسم می‌کنیم. دقت کنید $x=۱$ طول رأس هر دو سهمی است. همچنین $x=۰$ و $x=۲$ ریشه‌ی هر دو است.



خط $y=-۱$ که از رأس سهمی در $f(x)$ عبور می‌کند، نمودار f را دو بار قطع می‌کند.

نکته ۱۴: برای رسم تابع $y=\left|x+a\right|+b$ از انتقال $\left|x\right|$ استفاده می‌کنیم.

به طور مثال نمودار $y = ۲ - \left|x + ۱\right|$ به‌صورت زیر رسم می‌شود.

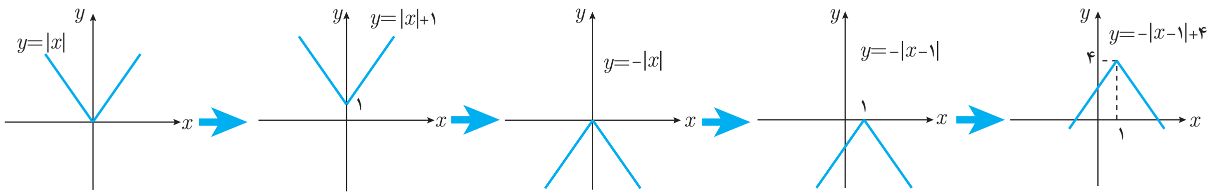


تست ۴۰

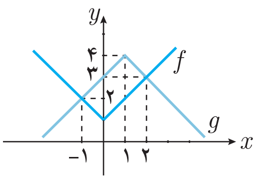
مساحت محدود به نمودار توابع $f(x) = \left|x\right| + ۱$ و $g(x) = ۴ - \left|x - ۱\right|$ چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) ۴

حل: گزینه‌ی ۴ صحیح است. نمودار توابع f و g را به کمک انتقال رسم می‌کنیم.

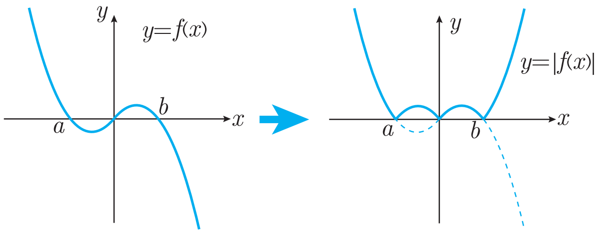


مساحت مستطیل حاصل را به‌دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} \text{طول مستطیل} = \sqrt{۲^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۸} \\ \text{عرض مستطیل} = \sqrt{۱^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۲} \end{cases} \Rightarrow \text{مساحت} = \sqrt{۸} \times \sqrt{۲} = ۴$$

نکته ۱۵: برای رسم تابع $y = \left|f(x)\right|$، ابتدا نمودار f را رسم می‌کنیم سپس بخشی از منحنی f که زیر محور xهاست، را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

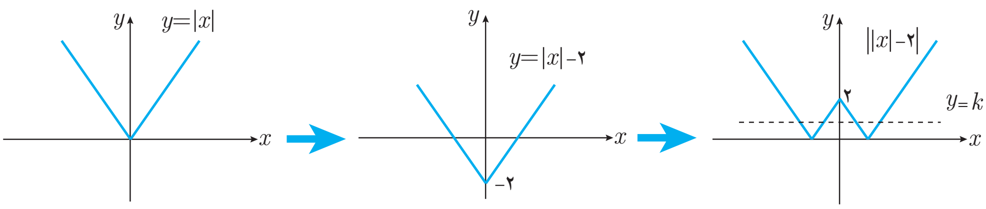


تست ۴۱

معادله $\left|\left|x\right| - ۲\right| = k$ چهار جواب دارد، حدود k کدام است؟

۱) $k > ۲$ ۲) $۰ < k < ۲$ ۳) $k > ۰$ ۴) $k > ۴$

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. نمودار توابع $f(x) = \left|\left|x\right| - ۲\right|$ و $g(x) = k$ را رسم می‌کنیم. باید چهار نقطه‌ی تقاطع داشته باشند.



طبق نمودار می‌بایست $۰ < k < ۲$ باشد.

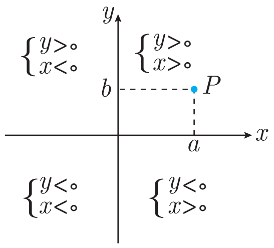
۸ آشنایی با هندسه‌ی تحلیلی

⇦ **محور اعداد:** هر عدد حقیقی، متناظر نقطه‌ای بر محور اعداد حقیقی است و برعکس.

⇦ **فاصله‌ی بین دو نقطه روی محور:** اگر طول نقاط متناظر با A و B روی محور اعداد را به ترتیب با x_A و x_B نشان دهیم، در این صورت فاصله‌ی بین A و B برابر است با:

$$|AB| = |x_B - x_A|$$

⇦ **محورهای مختصات:** محورهای مختصات صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هر ناحیه یک ربع نامیده می‌شود. (نقاط روی محورها در هیچ ربعی نیستند) هر نقطه بر صفحه‌ی مختصات مانند $p(a,b)$ را در نظر بگیرید، آن‌گاه $a = x_p$ و $b = y_p$ است.



⇦ **فاصله‌ی بین دو نقطه:** فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$AB = \sqrt{(x_۱ - x_۲)^۲ + (y_۱ - y_۲)^۲}$$

در حالت خاص، فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x,y)$ از مبدأ برابر است با: $\sqrt{x^۲ + y^۲}$

تست ۴۲ اگر $A(۱,۲)$ و $B(۴,a)$ و $C(a,۶)$ سه رأس مثلث متساوی‌الساقین به رأس A باشند، آن‌گاه مقدار a کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۳-

حل: گزینه‌ی ۱ صحیح است. برابری دو ضلع AB و AC را بررسی می‌کنیم:

$$AB = AC \Rightarrow \sqrt{(a-۲)^۲ + (۴-۱)^۲} = \sqrt{(۶-۲)^۲ + (a-۱)^۲}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^۲ - ۴a + ۱۳} = \sqrt{a^۲ - ۲a + ۱۷} \Rightarrow a^۲ - ۴a + ۱۳ = a^۲ - ۲a + ۱۷ \Rightarrow a = -۲$$

تست ۴۳ اگر $M(۲,۳)$ و $N(-۲,-۱)$ دو رأس یک مربع باشند، مساحت آن چقدر است؟

۱) ۳۲ یا ۸ ۲) ۱۶ یا ۸ ۳) ۱۶ یا ۳۲ ۴) ۶۴ یا ۸

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است. مساحت یک مربع به ضلع a برابر $a^۲$ و به قطر d برابر $\frac{۱}{۲}d^۲$ است. طول MN یا با ضلع مربع برابر است یا با قطر مربع.

$$MN = \sqrt{(۳+۱)^۲ + (۲+۲)^۲} = \sqrt{۳۲} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{۳۲} \Rightarrow s = a^۲ = ۳۲ \\ d = \sqrt{۳۲} \Rightarrow s = \frac{۱}{۲}d^۲ = ۱۶ \end{cases}$$

⇦ **مختصات نقطه‌ی وسط یک پاره‌خط:** اگر نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB باشد، آن‌گاه مختصات M از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} \ , \ y_M = \frac{y_A + y_B}{۲}$$

تست ۴۴ سه نقطه‌ی $A(-۱,۳)$ و $B(۲,۴)$ و $C(۰,۰)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر M و N به ترتیب وسط AB و AC باشند، طول MN چقدر است؟

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۵}$

حل: گزینه‌ی ۴ صحیح است.

راه‌حل اول: مختصات وسط اضلاع را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{۲} = \dfrac{۱}{۲} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{۲} = \dfrac{۷}{۲} \end{cases} \Rightarrow M = (\dfrac{۱}{۲}, \dfrac{۷}{۲}) \qquad \begin{cases} x_N = \dfrac{x_A + x_C}{۲} = \dfrac{-۱}{۲} \\ y_N = \dfrac{y_A + y_C}{۲} = \dfrac{۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow N = (\dfrac{-۱}{۲}, \dfrac{۳}{۲})$$

پس طول MN برابر است با:

$$MN = \sqrt{(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲})^۲ + (\frac{۷}{۲} - \frac{۳}{۲})^۲} = \sqrt{۵}$$

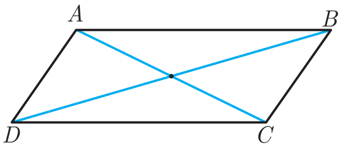
راه‌حل دوم: طول MN برابر نصف طول BC است.

$$MN = \frac{۱}{۲} BC = \frac{۱}{۲}\sqrt{(۲-۰)^۲ + (۴-۰)^۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲۰} = \sqrt{۵}$$

تست ۴۵

اگر $A(۲,۳)$، $B(-۱,۵)$ و $C(۳,-۱)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشند، مجموع مختصات رأس D کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

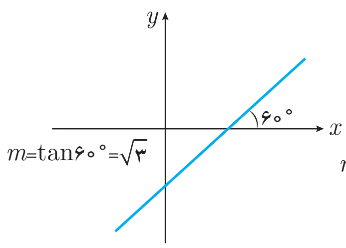


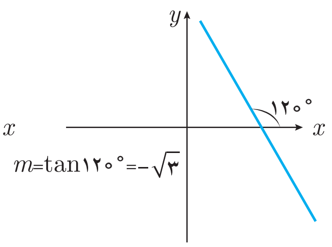
حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است. در متوازی‌الاضلاع، وسط قطرها بر هم منطبق است، پس:

$$\frac{A + C}{۲} = \frac{B + D}{۲} \Rightarrow A + C = B + D \Rightarrow (۲,۳) + (۳,-۱) = (-۱,۵) + D$$
$$\Rightarrow (۵,۲) - (-۱,۵) = D \Rightarrow D = (۶,-۳)$$

پس مجموع مختصات D برابر ۳ است.

⇦ **شیب خط:** تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد شیب آن خط است.





نکته ۱۶: شیب خطی که از دو نقطه‌ی $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ می‌گذرد، برابر است با $m = \dfrac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$

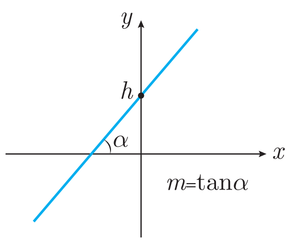
تذکر شیب خط افقی $y=b$ برابر صفر است. شیب خط قائم $x = a$ را اصطلاحاً بی‌نهایت گوییم.

⇦ **معادله خط:** معادله خط در دو حالت نوشته می‌شود:

حالت اول: معادله خطی با شیب m و عرض از مبدأ h به‌صورت $y = mx + h$ است.

حالت دوم: معادله خطی که از دو نقطه‌ی $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ می‌گذرد، به‌صورت زیر است:

$$y - y_۱ = \underbrace{\frac{y_۱ - y_۲}{x_۱ - x_۲}}_{m}(x - x_۱)$$

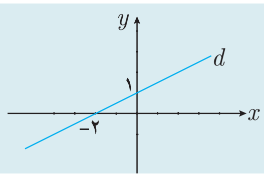


تذکر در حالت کلی معادله‌ی خط به‌صورت $ax + by = c$ است که شیب آن برابر $\dfrac{-a}{b}$ است. $(b \neq ۰)$

تست ۴۶

خط d مطابق شکل، مقابل از کدام نقطه‌ی زیر عبور می‌کند؟

۱) $(۴,۲)$ ۲) $(۴,۳)$ ۳) $(-۴,-۳)$ ۴) $(-۴,-۲)$

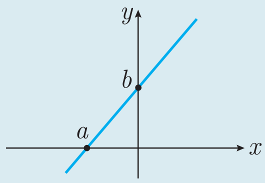


حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. شیب خط d که از دو نقطه‌ی $(-۲,۰)$ و $(۰,۱)$ عبور می‌کند، برابر $\frac{۱}{۲} = \frac{۰-۱}{-۲-۰} = m$ است (البته از راه تانژانت هم می‌توانستیم m را بیابیم).

$$\text{معادله‌ی خط}: y-۱ = \frac{۱}{۲}(x-۰) \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}x+۱$$

پس این خط از نقطه‌ی $(۴,۳)$ عبور می‌کند.

نکته ۱۷: معادله‌ی خط مقابل به‌صورت $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=۱$ است.

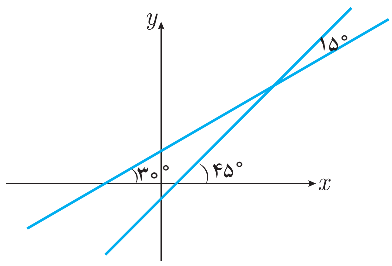


تست ۴۷

زاویه‌ی بین دو خط $y = x-۱$ و $\sqrt{۳}y = x+۱$ چقدر است؟

۱) ۱۵° ۲) ۷۵° ۳) ۳۰° ۴) $۲۲/۵^\circ$

حل: گزینه‌ی ۱ صحیح است. تانژانت زاویه‌ی یک خط با جهت مثبت محور x ها همان شیب خط است.



$$y = x-۱ \Rightarrow ۱ = m = \tan\alpha \Rightarrow \alpha = ۴۵^\circ$$

$$y = \frac{۱}{\sqrt{۳}}x+\frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = m = \tan\beta \Rightarrow \beta = ۳۰^\circ$$

پس زاویه‌ی بین دو خط، ۱۵° است.

⇦ خطوط عمود بر هم: خطوط d و d' با شیب‌های m و m' بر هم عمودند، هرگاه $mm' = -۱$ و برعکس.

به بیان دیگر اگر شیب خطی m باشد، شیب خط عمود بر آن $\frac{-۱}{m}$ است. $(m \neq ۰)$

تست ۴۸

خطوط $ax+by=۳$ و $۲x+y=۴$ در نقطه‌ی $A(۱,۲)$ بر هم عمودند. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل: گزینه‌ی ۱ صحیح است. اولاً مختصات A در معادله‌ی خطوط باید صدق کند.

$$ax+by=۳ \xrightarrow{x=۱,\,y=۲} a+۲b=۳ \qquad (۱)$$

ثانیاً شیب خط اول برابر $m = -\frac{a}{b}$ و شیب خط دوم برابر $m' = -۲$ است، پس:

$$mm' = -۱ \Rightarrow \frac{-a}{b}(-۲) = -۱ \Rightarrow b = -۲a \qquad (۲)$$

از حل دستگاه $\begin{cases} a+۲b=۳ \\ b=-۲a \end{cases}$ مقادیر $a=-۱$ و $b=۲$ به‌دست می‌آید، پس $a+b=۱$ است.

تست ۴۹

معادله‌ی خط عمودمنصف پاره‌خط واصل دو نقطه‌ی $A(-۱,۳)$ و $B(۳,۵)$ کدام است؟

۱) $x+۲y=۶$ ۲) $x+۲y=۹$ ۳) $y+۲x=۹$ ۴) $y+۲x=۶$

حل: گزینه‌ی ۴ صحیح است.

راه‌حل اول: شیب خط AB برابر $\frac{۱}{۲} = \frac{۳-۵}{-۱-۳} = m$ است. پس شیب خط عمود بر AB برابر $\frac{-۱}{m} = -۲$ است.

از طرفی عمودمنصف از وسط AB عبور می‌کند یعنی از نقطه‌ی $M = \frac{A+B}{۲} = (۱,۴)$، پس معادله‌ی عمودمنصف را می‌نویسیم.

$$y-۴=-۲(x-۱) \Rightarrow y+۲x=۶$$

راه‌حل دوم: اگر نقطه‌ی $p(x,y)$ روی عمودمنصف باشد، آن‌گاه:

$$PA=PB \Rightarrow \sqrt{(۳-y)^۲+(-۱-x)^۲} = \sqrt{(۵-y)^۲+(۳-x)^۲} \Rightarrow (۳-y)^۲+(-۱-x)^۲=(۵-y)^۲+(۳-x)^۲$$
$$\Rightarrow ۹-۶y+y^۲+۱+۲x+x^۲ = ۲۵-۱۰y+y^۲+۹-۶x+x^۲ \Rightarrow ۴y+۸x=۲۴ \Rightarrow y+۲x=۶$$

خطوط موازی: خطوط d و d' با شیب‌های m و m' وقتی موازی یک‌دیگرند که $m=m'$ باشد.

در حالت کلی دو خط $ax+by+c=۰$ و $a'x+b'y+c'=۰$ با فرض $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ موازی یک‌دیگرند.

نکته ۱۸: فاصله‌ی دو خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ از یک‌دیگر برابر است با: $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$

تست ۵۰

فاصله‌ی دو خط موازی $ax+۶y+۱۰=۰$ و $۴x-۳y+b=۰$ برابر ۲ است. مقدار b چقدر است؟

۱) ۵- یا ۱۰ ۲) ۵ یا ۱۵- ۳) ۵ یا ۱۰- ۴) ۱۰ یا ۱۵-

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. دو خط وقتی موازی‌اند که $\frac{-۳}{۶}=\frac{۴}{a}$ باشد پس $a=-۸$ حال ضرایب دو خط را یکسان می‌کنیم:

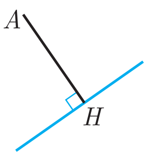
$$\begin{cases}۴x-۳y+b=۰\\ -۸x+۶y+۱۰=۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}۴x-۳y+b=۰\\ ۴x-۳y-۵=۰\end{cases}$$

فاصله‌ی دو خط برابر $\frac{|b-(-۵)|}{\sqrt{۴^۲+(-۳)^۲}}$ است، پس:

$$\frac{|b+۵|}{۵}=۲ \Rightarrow |b+۵|=۱۰ \Rightarrow b=۵ \text{ یا } -۱۵$$

فاصله‌ی نقطه از خط: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_۰,y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$AH=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

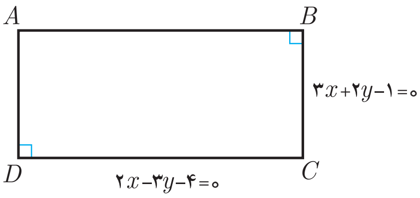


تست ۵۱

دو خط به معادلات $۲x-۳y=۴$ و $۳x+۲y=۱$ دو ضلع یک مستطیل و نقطه‌ی $A(۲,۴)$ یک رأس آن است. مساحت مستطیل چقدر است؟

۱) ۲۶ ۲) ۲۴ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است. دو خط بر هم عمودند، پس دو ضلع مجاور از مستطیل هستند. نقطه A خارج از این دو ضلع است. فاصله‌ی A از دو خط، همان طول و عرض مستطیل است.



$$AB=BC = \text{فاصله‌ی } A \text{ از } = \frac{|۳(۲)+۲(۴)-۱|}{\sqrt{۳^۲+۲^۲}} = \frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}}$$

$$AD=DC = \text{فاصله‌ی } A \text{ از } = \frac{|۲(۲)-۳(۴)-۴|}{\sqrt{۲^۲+۳^۲}} = \frac{۱۲}{\sqrt{۱۳}}$$

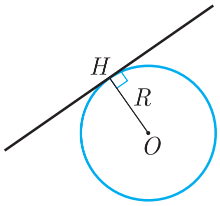
$$\text{مساحت} = AB\times AD = \frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}}\times\frac{۱۲}{\sqrt{۱۳}} = ۱۲$$

تست ۵۲

به ازای کدام مقدار m، خط $۳x-۴y=m$ بر دایره‌ی به مرکز $O(۲,-۱)$ و به شعاع $R=۳$ مماس است؟

۱) ۵- یا ۲۵ ‌ ‌ ‌ ۲) ۵ یا ۱۵- ‌ ‌ ‌ ۳) ۵- یا ۱۵ ‌ ‌ ‌ ۴) ۱۵- یا ۲۵

حل: گزینه‌ی ۱ صحیح است. باید فاصله‌ی مرکز از خط برابر شعاع دایره باشد.



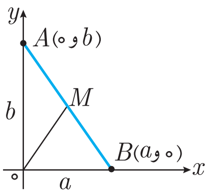
$$۳x-۴y-m=۰$$

$$\text{فاصله‌ی } O \text{ از خط} = \frac{|۳(۲)-۴(-۱)-m|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}} = \frac{|۱۰-m|}{۵} \Rightarrow OH=R \Rightarrow \frac{|۱۰-m|}{۵}=۳$$

$$\Rightarrow |۱۰-m|=۱۵ \Rightarrow m=-۵ \text{ یا } ۲۵$$

کاربرد هندسه‌ی تحلیلی در حل سؤالات هندسه: در بعضی از سؤالات هندسه می‌توانیم با انتخاب محورهای مختصات مناسب و اختصاص مختصات مناسب به نقاط، مسأله را به روش تحلیلی حل نمود.

به طور مثال برای اثبات این قضیه که «در مثلث قائم‌الزاویه، میانه‌ی وارد بر وتر، نصف وتر است» می‌توانیم مثلث را به‌صورت زیر روی محورهای مختصات بنا کنیم:



محاسبه طول میانه: $M=\frac{A+B}{۲}=(\frac{a}{۲},\frac{b}{۲})$ ‌ ‌ $OM=\sqrt{\frac{a^۲}{۴}+\frac{b^۲}{۴}}=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲}}{۲}$

محاسبه طول وتر: $\begin{cases}A(۰,b)\\B(a,۰)\end{cases} \Rightarrow AB=\sqrt{a^۲+b^۲}$

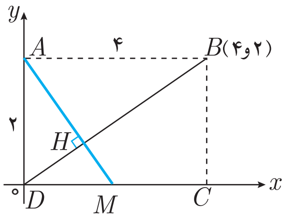
پس $OM=\frac{۱}{۲}AB$ و قضیه اثبات شد.

تست ۵۳

در مستطیل $ABCD$ از A عمودی بر قطر BD رسم می‌کنیم تا DC را در M قطع کند. اگر $AD=۲$ و $AB=۴$ باشد، اندازه‌ی AM چقدر است؟

۱) $\sqrt{۶}$ ‌ ‌ ‌ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ‌ ‌ ‌ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ‌ ‌ ‌ ۴) $\sqrt{۵}$

حل: گزینه‌ی ۴ صحیح است. محورها را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم. شیب AH عکس و قرینه‌ی شیب BD است.



$$M_{BD}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow M_{AH}=-۲$$

$$\text{معادله‌ی خط } AH: y-y_A=-۲(x-x_A)$$

$$y-۲=-۲x \xrightarrow{y=۰} x_M=۱$$

حال طول AM را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases}A(۰,۲)\\M(۱,۰)\end{cases} \Rightarrow AM=\sqrt{۲^۲+۱^۲}=\sqrt{۵}$$