فصل ۱

جبر و معادله

جبر و معادله

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی — درس اول

- دنبالهٔ حسابی
- مجموع جملات دنباله‌های حسابی
- روشی دیگر برای محاسبهٔ S_n
- چند مجموع مهم از دنباله‌های حسابی
- دنبالهٔ هندسی
- مجموع جملات دنباله هندسی

معادلات درجه دوم — درس دوم

- معادلات درجه دوم
- روابط بین ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم
- تشکیل معادلهٔ درجه دوم با داشتن ریشه‌های آن
- سهمی و رابطهٔ آن با معادلهٔ درجه دو
- صفرهای تابع
- تبدیل برخی معادلات به معادلهٔ درجه دو

معادلات گویا و گنگ — درس سوم

- معادلات گویا
- معادلات گنگ

قدرمطلق و ویژگی‌های آن — درس چهارم

- قدرمطلق
- ویژگی‌های قدرمطلق
- نمودارهای قدرمطلقی
- معادلات قدرمطلقی
- نامساوی‌های مهم قدرمطلقی

آشنایی با هندسه تحلیلی — درس پنجم

- آشنایی با هندسهٔ تحلیلی

درس سوم معادلات گویا و گنگ

وعدهٔ ۱۳
معادلات گویا

فرض کنید $p(x)$ و $q(x)$ دو چند جمله‌ای از درجات دلخواه باشند در این صورت به عبارتی مانند $\frac{p(x)}{q(x)}$ یک **عبارت گویا** گفته می‌شود.

دامنهٔ یک عبارت گویا عبارت است از مقادیری از x که به ازای آن‌ها، مخرج کسر برابر صفر **نباشد**.

$\frac{p(x)}{q(x)}$ دامنهٔ عبارت گویای : $D = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = ۰\}$

به طور مثال دامنه عبارت گویای $\frac{x^۳ - ۲x + ۵}{x^۲ - ۴}$ برابر است با:

$$D = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid x^۲ - ۴ = ۰\} = \mathbb{R} - \{-۲, ۲\}$$

یادآوری: فرض کنید $p(x)$ و $q(x)$ دو چند جمله‌ای باشند.

در این صورت کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) این دو چند جمله‌ای را با نماد $[p(x), q(x)]$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

۱ ابتدا هر دو چند جمله‌ای را کاملاً تجزیه می‌کنیم.

۲ پس از تجزیه چند جمله‌ای‌ها، ک.م.م را از رابطهٔ زیر به دست می‌آوریم.

حاصل‌ضرب عوامل مشترک و غیر مشترک با بیشترین توان $= [p(x), q(x)]$

به عنوان مثال:

$$p(x) = ۳x^{۲} - ۱۸ = ۳(x^{۲} - ۹) = ۳(x - ۳)(x + ۳)$$

$$q(x) = (x^{۲} - ۵x + ۶)^{۳} = ((x - ۲)(x - ۳))^{۳}$$

$$= (x - ۲)^{۳}(x - ۳)^{۳}$$

$$[p(x), q(x)] = ۳(x - ۲)^{۳}(x - ۳)^{۳}(x + ۳)$$

برای حل یک معادلهٔ گویا، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

مرحلهٔ اول: به دست آوردن دامنه معادله گویا:

$D = \mathbb{R} - \{$ریشه‌های مخرج همهٔ کسرها$\}$

مرحلـهٔ دوم: طرفین معادله را در ک.م.م مخرج‌ها ضرب می‌کنیم تا معادله از حالت کسری خارج شود.

مرحلـهٔ سـوم: معادلـه به دسـت آمـده را حل می‌کنیم، پـس از حل معادلـه، ریشـه‌هایی مـورد قبول هسـتند که عضو دامنه باشـند.

گاهـی جواب‌هـای بـه دسـت آمـده در محیـط پیرامون مـورد قبول نیسـتند (مثـلاً زمـان منفـی یا طـول منفی یـا ...) ایـن جواب‌ها نیز مـورد قبول نخواهنـد بود.

مثال: **معادله $\dfrac{۳}{x + ۲} + \dfrac{۲}{x} = \dfrac{۴x - ۴}{x^{۲} - ۴}$ را حل کنید.**

پاسخ ابتدا دامنهٔ معادله را به دست می‌آوریم:

$D = \mathbb{R} - \{$ریشه های مخرج$\} = \mathbb{R} - \{۰, ۲, -۲\}$

حال، ک.م.م مخرج‌ها را می‌یابیم:

$\Rightarrow$ ک.م.م $= x(x - ۲)(x + ۲)$

$$\begin{cases} x + ۲ \\ x \\ x^{۲} - ۴ = (x - ۲)(x + ۲) \end{cases}$$

سپس ک.م.م را در طرفین معادله ضرب می‌کنیم:

$$۳(x)(x-۲)+۲(x-۲)(x+۲)=(۴x-۴)(x)$$

$$\Rightarrow ۳x^۲-۶x+۲x^۲-۸=۴x^۲-۴x$$

$$\Rightarrow x^۲-۲x-۸=۰ \Rightarrow (x-۴)(x+۲)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۴\in D & ✓ \\ x=-۲\notin D & × \end{cases}$$

($x=-۲$ قابل قبول نیست، زیرا عضو دامنه نمی‌باشد.)

تذکر: اگر معادله گویا به شکل $\dfrac{p(x)}{q(x)}=\dfrac{r(x)}{h(x)}$ باشد، می‌توان برای حل معادله، پس از یافتن دامنه، از طرفین وسطین استفاده کرد.

مثال: معادله $x+\dfrac{۱}{x}=۲\sqrt{۵}$ را حل کنید.

پاسخ

$$D=\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}=\mathbb{R}-\{۰\}$$

از مخرج مشترک‌گیری استفاده می‌کنیم:

$$\frac{x^۲+۱}{x}=\frac{۲\sqrt{۵}}{۱}\xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}}x^۲+۱=۲\sqrt{۵}x$$

$$\Rightarrow x^۲-۲\sqrt{۵}x+۱=۰$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۲\sqrt{۵})^۲-۴(۱)(۱)$$

$$=۲۰-۴=۱۶\Rightarrow\sqrt{\Delta}=۴$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۲\sqrt{۵}\pm۴}{۲}\Rightarrow\begin{cases} x=\sqrt{۵}+۲\in D & ✓ \\ x=\sqrt{۵}-۲\in D & ✓ \end{cases}$$

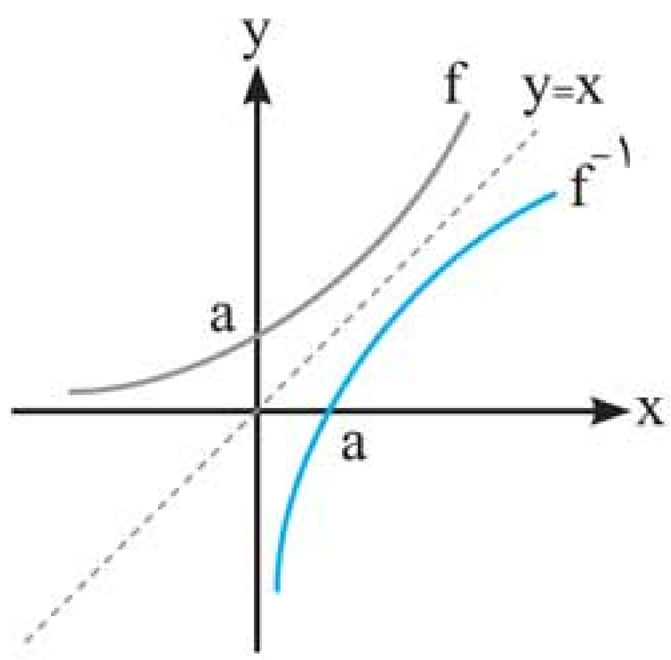
وعدهٔ ۱۳

محاسبهٔ وارون توابع

فرض کنید تابع $f(x)$، تابعی یک‌به‌یک باشد. در این صورت برای به‌دست آوردن f^{-1} سه حالت در نظر می‌گیریم:

حالت ۱) اگر تابع یک‌به‌یک f به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها داده شده باشد، برای محاسبهٔ f^{-1}، جای x و y را در تمام زوج مرتب‌ها عوض می‌کنیم:

$$f=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),...\}\Leftrightarrow f^{-1}=\{(y_1,x_1),(y_2,x_2),...\}$$



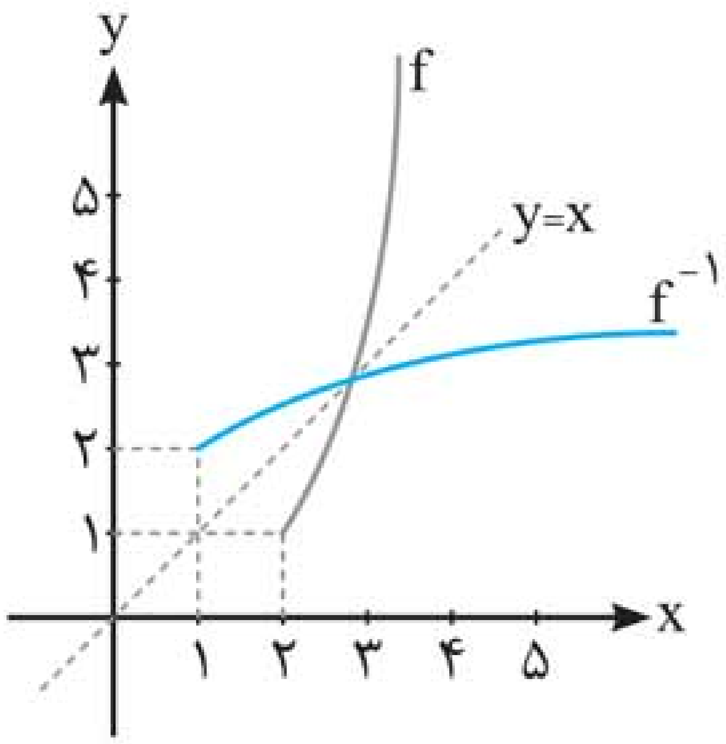
حالت ۲) اگر نمودار تابع یک‌به‌یک f را داشته باشیم، برای رسم f^{-1}، نمودار f را نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ناحیهٔ اول و سوم) قرینه می‌کنیم.

حالت ۳) اگر ضابطهٔ تابع یک‌به‌یک $f(x)$ را داشته باشیم، در صورت امکان، x را برحسب y محاسبه می‌کنیم (x را تنها می‌کنیم) سپس y را به x و x را به $f^{-1}(x)$ تبدیل می‌کنیم.

مثال: نمودار وارون هر یک از توابع زیر را رسم کنید، دامنه و برد تابع و معکوس آن‌ها را بیابید.

الف) $\begin{cases} f:[2,+\infty)\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^2-3 \end{cases}$

نمودار $f(x)$ را رسم می‌کنیم سپس آن را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم:

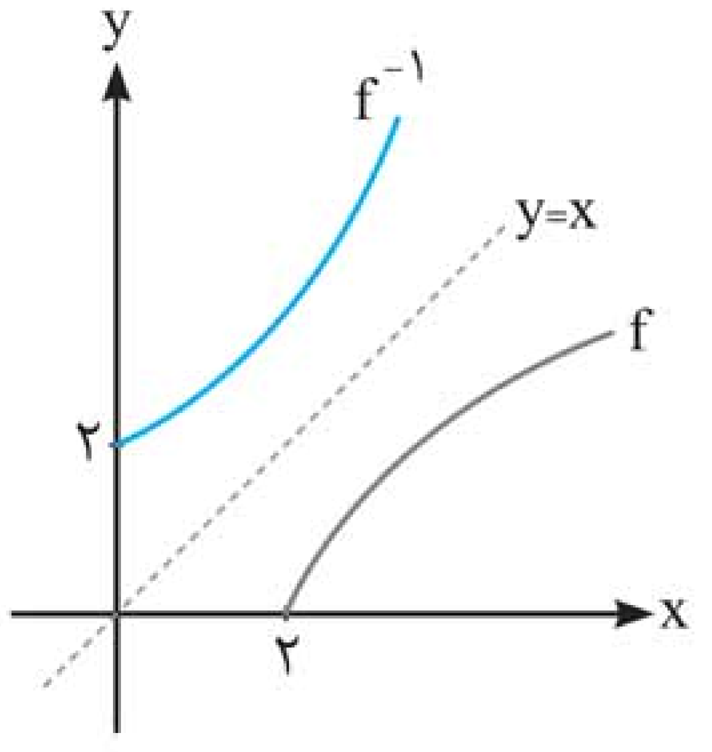


$$\begin{cases} D_f = [۲, +\infty) \\ R_f = [۱, +\infty) \end{cases} , \quad \begin{cases} D_{f^{-1}} = [۱, +\infty) \\ R_{f^{-1}} = [۲, +\infty) \end{cases}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، جای دامنه و برد در $f^{-1}(x)$ عوض می‌شود.

ب) $f(x) = \sqrt{x - ۲}$

نمودار $f(x)$ را رسم می‌کنیم سپس آن را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم:



$$\begin{cases} D_f = [۲, +\infty) \\ R_f = [۰, +\infty) \end{cases} , \quad \begin{cases} D_{f^{-1}} = [۰, +\infty) \\ R_{f^{-1}} = [۲, +\infty) \end{cases}$$

تابع نمایی
درس اول

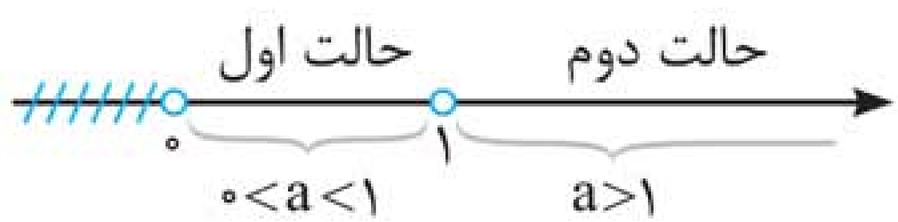
وعدهٔ ۱
تابع نمایی

هر تابع با ضابطهٔ $f(x)=a^x$ که در آن a عددی **حقیقی، مثبت** و **مخالف** یک است را یک **تابع نمایی** می‌نامیم.

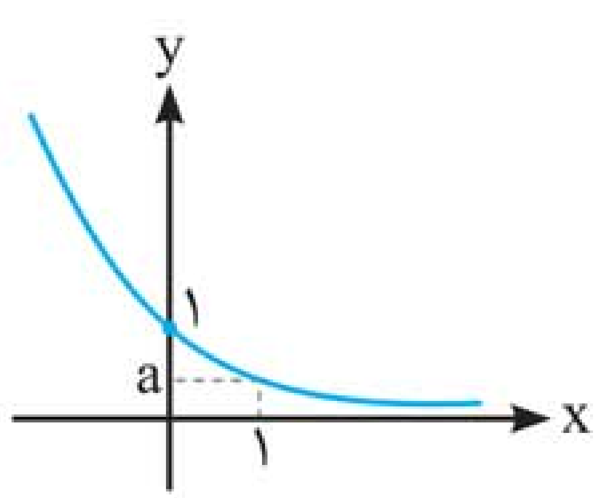
در تابع $f(x)=a^x$، a را **پایه** و x را **نما** یا **توان** می‌گوییم.

$y=a^x$

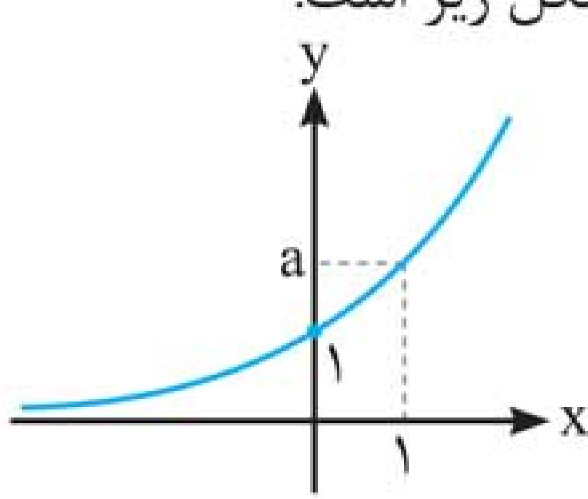
از آن‌جایی‌که a (پایه) مثبت و مخالف یک است پس برای a دو حالت وجود دارد:



با توجه به دو حالت گفته شده، نمودار تابع $f(x)=a^x$ به یکی از دو شکل زیر است:



$f(x)=a^x : (0<a<1)$



$f(x)=a^x ; (a>1)$

چاشنی: با توجه به هر دو نمودار، می‌توان ویژگی‌های زیر را برای تابع $y=a^x$ در نظر گرفت:

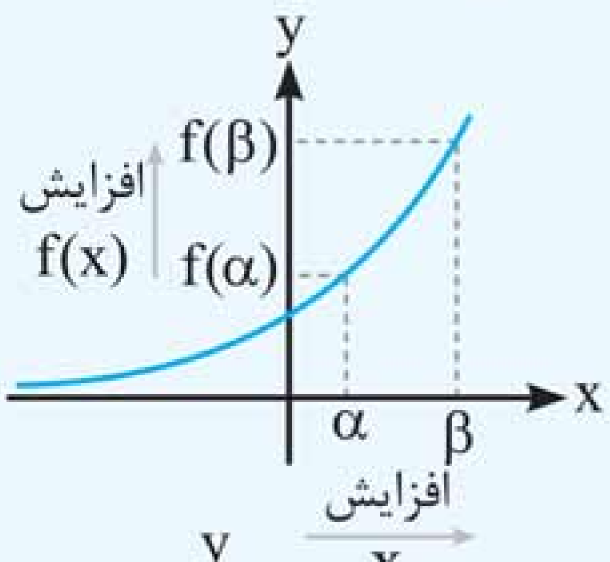
۱ در هر دو حالت، دامنه و برد تابع به صورت زیر است:

$D_f=\mathbb{R}$

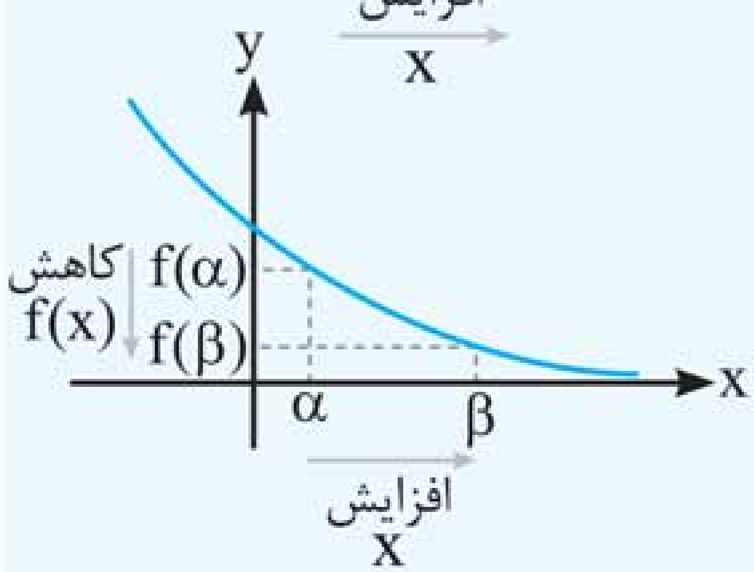
$R_f=(0,+\infty)$

۲ در هر دو حالت، تابع $f(x)=a^x$ از نقاط $A\Big|_{1}^{0}$ و $B\Big|_{a}^{1}$ می‌گذرد.

۳ در هر دو حالت، تابع $f(x)=a^x$ تابعی **یک‌به‌یک** است.



۴ اگر $a>1$، آن‌گاه با **افزایش** مقدار x، مقدار f(x) نیز **افزایش** می‌یابد. (تابع افزایشی است.)

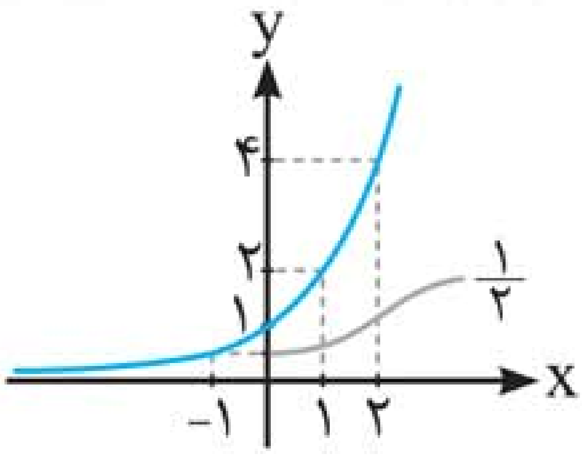


۵ اگر $0<a<1$، آن‌گاه با **افزایش** x، مقدار f(x) **کاهش** می‌یابد. (تابع کاهشی است.)

مثال: نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید، دامنه و برد آن‌ها را به‌دست آورید.

الف) $\mathbf{f(x)=2^x}$

این تابع، نمایی است زیرا به شکل $y=a^x$ است که در آن $a=2>1$ است، پس نمودار آن، افزایشی است.

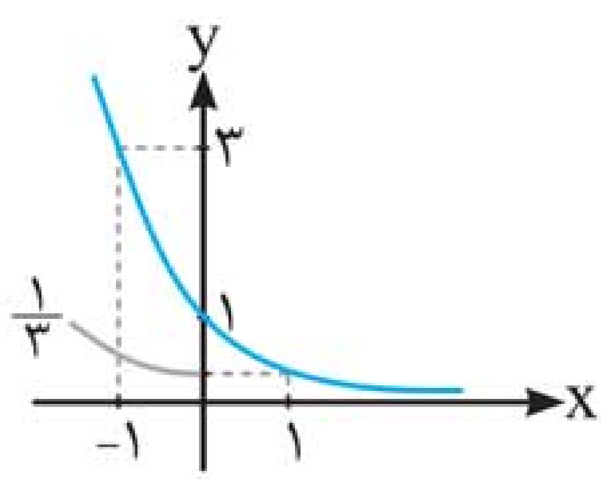


$D_f = \mathbb{R}$

$R_f = (۰, +\infty)$

ب) $g(x) = (\frac{۱}{۳})^x$

این تابع نیز نمایی اســـت و در آن $a = \frac{۱}{۳}$ است $(۰ < a < ۱)$، پس نمودار آن کاهشی است.

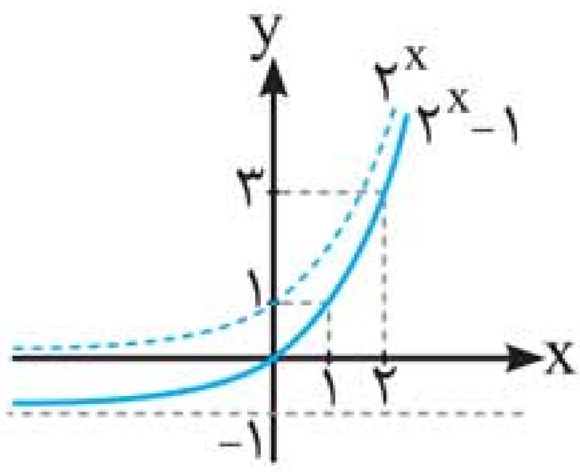


$D_g = \mathbb{R}$

$R_g = (۰, +\infty)$

پ) $h(x) = ۲^x - ۱$

این تابع همان تابع نمایی $y = ۲^x$ اســـت که یـــک واحد به پایین منتقل شده است.

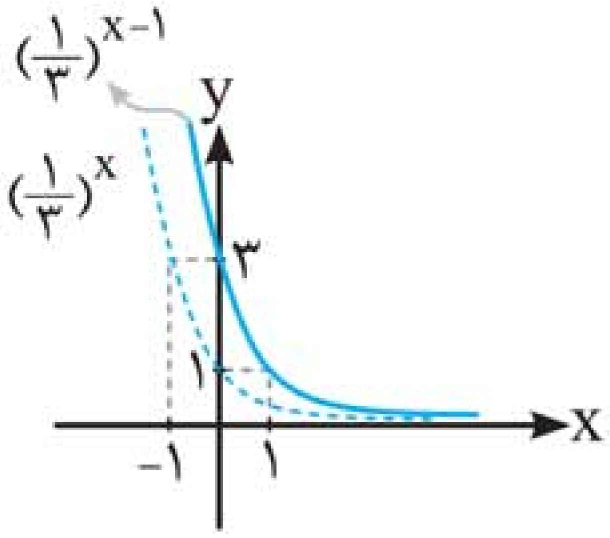


$D_h = \mathbb{R}$

$R_h = (-۱, +\infty)$

ت) $k(x) = (\frac{۱}{۳})^{x-۱}$

این تابع همان تابع نمایی $y = (\frac{۱}{۳})^x$ اســـت که یک واحد به راست منتقل شده است.



$D_k = \mathbb{R}$

$R_k = (0, +\infty)$

چاشنی: الف) از آن‌جایی که دامنهٔ تابع $f(x) = a^x$ مجموعهٔ اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ اســـت، پس می‌توان به جای x، **اعداد گنگ** نیز قرار داد. به‌طور مثال اعداد $2^{\sqrt{7}}$، $(\frac{1}{5})^{\pi}$، $\sqrt{3}^{\sqrt[3]{2}}$، π^{π} و ... تعریف می‌شوند.

ب) در سال‌های گذشته با توان **طبیعی، صحیح** و **گویا** آشنا شده‌ایم. با توجه به قسمت «الف»، می‌توانیم توان حقیقی را نیز تعریف کنیم و قوانین توان را برای توان‌های حقیقی نیز در نظر بگیریم. اگر a و b اعداد **حقیقی، مثبت** و **مخالف یک** و x و y اعداد **حقیقی** باشند، داریم:

۱ $a^0 = 1$

۲ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

۳ $(a^x)^y = a^{xy}$

۴ $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

۵ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

۶ $(ab)^x = a^x \cdot b^x$

۷ $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$

مثال: عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $2^{\sqrt{20}} \times (\frac{1}{\sqrt{8}})^{6\sqrt{5}} \times (\sqrt[3]{128})^{3\sqrt{5}}$

ابتدا توجه کنیم که: $\sqrt[۳]{۱۲۸}=\sqrt[۳]{۲^۷}=۲^{\frac{۷}{۳}}$, $\sqrt{۸}=\sqrt{۲^۳}=۲^{\frac{۳}{۲}}$

حال داریم:

$$۲^{\sqrt{۲۰}}\times(\frac{۱}{\sqrt{۸}})^{۶\sqrt{۵}}\times\sqrt[۳]{۱۲۸}^{۳\sqrt{۵}}$$

$$=۲^{\sqrt{۴\times۵}}\times(۲^{-\frac{۳}{۲}})^{۶\sqrt{۵}}\times(۲^{\frac{۷}{۳}})^{۳\sqrt{۵}}$$

$$=۲^{۲\sqrt{۵}}\times۲^{-\frac{۳}{۲}\times۶\sqrt{۵}}\times۲^{\frac{۷}{۳}\times۳\sqrt{۵}}=۲^{۲\sqrt{۵}}\times۲^{-۹\sqrt{۵}}\times۲^{۷\sqrt{۵}}$$

$$=۲^{(۲\sqrt{۵}-۹\sqrt{۵}+۷\sqrt{۵})}=۲^{۰}=۱$$

ب) $((\sqrt{۳})^{\sqrt{۵}-۱})^{(\sqrt{۵}+۱)}$

$$=\sqrt{۳}^{(\sqrt{۵}-۱)(\sqrt{۵}+۱)}=\sqrt{۳}^{(۵-۱)}=\sqrt{۳}^{۴}=۹$$

چاشنی: دیدیم که بُرد تابع $f(x)=a^x$ مجموعهٔ $(۰,+\infty)$ است. این به آن معناست که حاصل a^x همواره مثبت است و هرگز **صفر** یا **منفی** نمی‌شود.

مثال: معادلهٔ $۵^x+x^۲+۳=۰$ را حل کنید.

پاسخ $۵^x+x^۲+۳=۰\Rightarrow\underbrace{۵^x}_{\text{همواره مثبت}}=\underbrace{-x^۲-۳}_{\text{همواره منفی}}\Rightarrow$ معادله جواب ندارد.

مثال: بدون رسم نمودار، بُرد تابع $f(x)=-۳\times۲^x+۱$ را محاسبه کنید.

پاسخ می‌دانیم بُرد تابع $y=۲^x$، مجموعهٔ $(۰,+\infty)$ است، پس:

$$۲^x>۰\xrightarrow{\times(-۳)}-۳\times۲^x<۰\xrightarrow{+۱}\underbrace{-۳\times۲^x+۱}_{f(x)}<۱$$

$$\Rightarrow f(x) < ۱ \Rightarrow R_f = (-\infty , ۱)$$

تذکر: اگر $k \neq ۰$ عددی حقیقی باشد، توابعی به شکل $f(x) = ka^x$ رفتاری نمایی دارند. $(a \neq ۱ , a > ۰)$

چاشنی: همانطور که قبلاً دیدیم، در تابع $f(x) = a^x$ اگر $a > ۱$ باشد آن‌گاه تابع $f(x)$ **افزایشی** و اگر $۰ < a < ۱$ باشد، آن‌گاه تابع $f(x)$ **کاهشی** است. به عبارت دیگر:

$$x_۱ < x_۲ \xrightarrow{a > ۱} a^{x_۱} < a^{x_۲} \quad , \quad x_۱ < x_۲ \xrightarrow{۰ < a < ۱} a^{x_۱} > a^{x_۲}$$

جهت عوض نمی‌شود.   جهت عوض می‌شود.

مثال: کدام نامساوی صحیح است؟

الف) $(\frac{۱}{۳})^۵ < (\frac{۱}{۳})^۶$

$$۵ < ۶ \xrightarrow{۰ < \frac{۱}{۳} < ۱} (\frac{۱}{۳})^۵ > (\frac{۱}{۳})^۶$$

(جهت عوض می‌شود)

پس نامساوی داده شده نادرست است.

ب) $(\sqrt[۳]{۵}) > (\frac{۱}{۵})^{-۲}$

ابتدا پایه‌ها را یکی می‌کنیم:

$$(\sqrt[۳]{۵})^۷ = (۵^{\frac{۱}{۳}})^۷ = ۵^{\frac{۷}{۳}} \quad , \quad (\frac{۱}{۵})^{-۲} = (۵^{-۱})^{-۲} = ۵^۲$$

$$\frac{۷}{۳} > ۲ \xrightarrow{۵ > ۱} ۵^{\frac{۷}{۳}} > ۵^۲$$

(جهت عوض نمی‌شود.)

پس نامساوی داده شده صحیح است.

پیوست
فرمول‌نامه

فصل اول

۱ مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی: (a_n : جملهٔ nام)

الف) $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ ب) $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$$\begin{cases} S_1 = a_1 \\ S_n - S_{n-1} = a_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} & \text{(مجموع n عدد طبیعی متوالی با شروع از ۱)} \\ 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2 & \text{(مجموع اعداد فرد متوالی طبیعی با شروع از ۱)} \end{cases}$$

۲ مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1)$$

$$\begin{cases} a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1) & \text{(برای هر n طبیعی)} \\ a^n + 1 = (a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \cdots - a + 1) & \text{(برای هر n طبیعی و فرد)} \end{cases}$$

۳ معادلهٔ درجه ۲ $(ax^{2}+bx+c=0)$:

$$\begin{cases}\Delta = b^{2}-4ac \quad (\text{مبین معادله}) \\ x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \quad (\text{ریشه‌های معادله})\end{cases}$$

برای Δ سه حالت در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases}\Delta>0 \Rightarrow \text{دو ریشهٔ حقیقی دارد.} \quad \left(x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ \Delta=0 \Rightarrow \text{یک ریشه (مضاعف) دارد.} \quad \left(x=-\dfrac{b}{2a}\right) \\ \Delta<0 \Rightarrow \text{معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.}\end{cases}$$

۴ دو حالت خاص در حل معادلهٔ درجه ۲:

$$ax^{2}+bx+c=0\begin{cases}a+b+c=0 \Rightarrow \begin{cases}x=1 \\ x=\dfrac{c}{a}\end{cases} \\ a+c=b \Rightarrow \begin{cases}x=-1 \\ x=-\dfrac{c}{a}\end{cases}\end{cases}$$

۵ روابط بین ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲:

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^{2}+bx+c=0$ باشند و مجموع آن‌ها را با S و حاصل‌ضرب آن‌ها را با P نمایش دهیم، در این صورت داریم:

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a} \quad , \quad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

۶ اتحادهای فرعی مهم:

$$\begin{cases}\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=S^2-2P\\ \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^3-3PS\end{cases}$$

---

۷ تشکیل معادلهٔ درجه دوم با داشتن ریشه‌های آن:

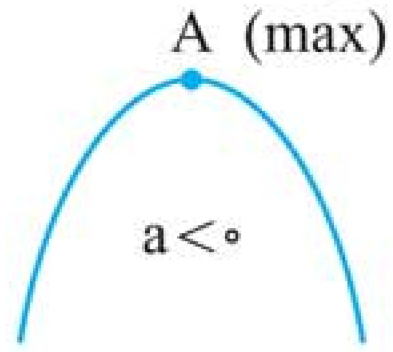
معادلهٔ درجه‌دومی که ریشه‌های آن α و β باشند، برابر است با:

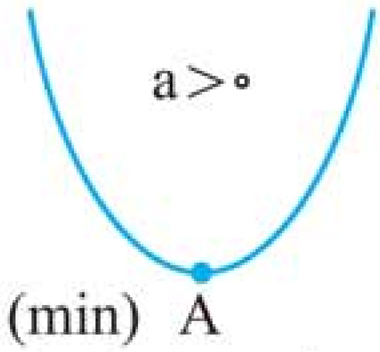
$$a(x^2-Sx+P)=0$$

که در آن a عددی حقیقـــی، دلخواه و مخالف صفر، $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\beta$ می‌باشند.

---

۸ سهمی: $\mathbf{y=ax^2+bx+c}$





مختصات رأس سهمی $=A\left|\begin{array}{l}x_A=\dfrac{-b}{2a}\ \text{(معادلهٔ محور تقارن سهمی)}\\[2mm] y_A=-\dfrac{\Delta}{4a}\ \text{(مقدار min یا max سهمی)}\end{array}\right.$

اگر α و β ریشه‌های سهمی باشند، در این صورت سهمی به شکل روبه‌رو قابل نمایش است: $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$

اگر سهمی دارای ریشهٔ مضاعفی مانند $x=\alpha$ باشد، آن‌گاه به شکل روبه‌رو قابل نمایش است: $y=a(x-\alpha)^2$

اگر α و β ریشه‌های سهمی و x_A طول رأس سهمی باشند، آن‌گاه:

$$x_A=\frac{\alpha+\beta}{2}$$