

درس اول: تبدیل نمودار توابع

انتقال

انبساط و انقباض

پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس اول

۲  
۲  
۵

۲

درس دوم: تابع درجه سوم، توابع یکنوا

تابع درجه سوم

تابع یکنوا

پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس دوم

۱۰  
۱۱  
۱۴

۱۰

درس سوم: بخش پذیری و تقسیم

بخش پذیری و تقسیم

پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس سوم

۱۸  
۲۰

۱۸

پرسش‌های تکمیلی فصل ۱

سؤالات کنکور مرتبط با فصل ۱

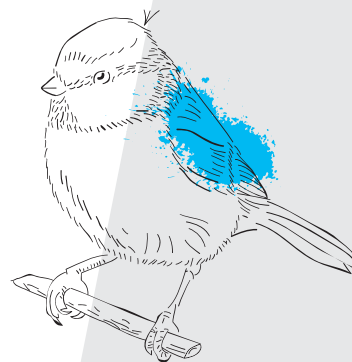
پاسخ کلیدی پرسش‌های فصل ۱

پاسخ تشریحی پرسش‌های فصل ۱

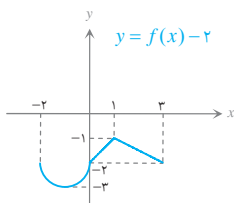
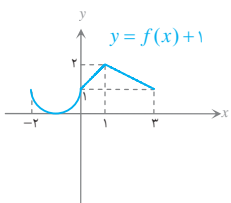
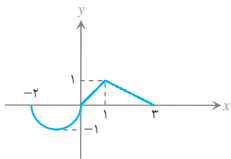
آزمون‌های سه‌گانه فصل ۱

پاسخ کلیدی آزمون‌های سه‌گانه فصل ۱

۲۳  
۲۵  
۲۷  
۲۸  
۴۵  
۴۸

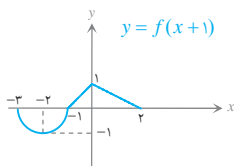
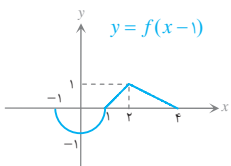


فرض کنید نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت مقابل داده شده است.



**۱ انتقال عمودی:** برای رسم نمودار تابع  $f(x) + k$ ، نمودار  $f(x)$  را به اندازه  $|k|$  واحد در امتداد محور  $y$  انتقال می‌دهیم. اگر  $k > 0$  باشد، انتقال در جهت مثبت (بالا) و اگر  $k < 0$  باشد، انتقال در جهت منفی (پایین) است.

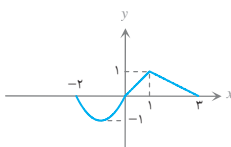
**توجه:** در اثر انتقال عمودی دامنه تغییر نمی‌کند؛ اما برد تغییر می‌کند.



**۲ انتقال افقی:** برای رسم نمودار تابع  $f(x+k)$  کافی است نمودار تابع  $f(x)$  را  $|k|$  واحد در امتداد محور  $x$  ها انتقال دهیم. اگر  $k > 0$  باشد، انتقال در جهت منفی (چپ) و اگر  $k < 0$  باشد، انتقال در جهت مثبت (راست) است.

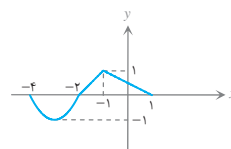
**توجه:** در اثر انتقال افقی برد تغییر نمی‌کند؛ اما دامنه تغییر می‌کند.

**تست:** نمودار تابع  $y = f(x-1)$  به صورت مقابل است. مساحت ناحیه بین نمودار تابع  $y = 1 + f(x+1)$ ، محورهای مختصات و خط  $x = 1$  کدام است؟

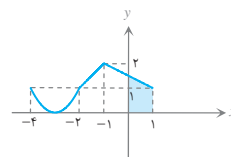


$$\begin{aligned} & \frac{5}{2} \quad (2) & \frac{3}{2} \quad (1) \\ & \frac{5}{2} + \frac{\pi}{2} \quad (4) & \frac{3}{2} + \frac{\pi}{2} \quad (3) \end{aligned}$$

**حل:** گزینه **۲** اگر نمودار  $f(x-1)$  را دو واحد به چپ انتقال دهیم، نمودار  $f((x+2)-1) = f(x+1)$  حاصل می‌شود:

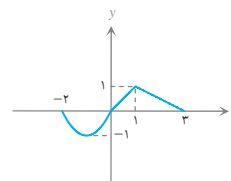


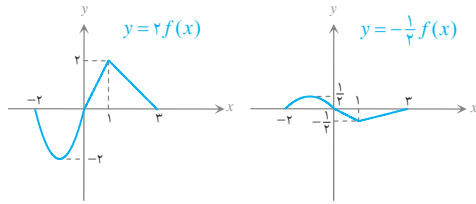
حال نمودار را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار  $y = f(x+1) + 1$  به دست آید. مساحت ناحیه مطلوب برابر است با:



$$S = \frac{(1 + \frac{3}{2}) \times 2}{2} = \frac{5}{2}$$

فرض کنید نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت مقابل داده شده است.





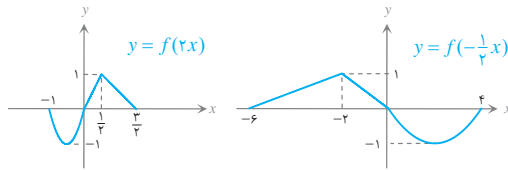
۱ **انبساط و انقباض عمودی:** برای رسم نمودار تابع  $y = kf(x)$ ، کافی

است عرض نقاط نمودار  $y = f(x)$  را در  $k$  ضرب کنیم. در این صورت اگر  $|k| > 1$  نمودار منبسط می‌شود و اگر  $|k| < 1$  نمودار منقبض می‌شود.

نتیجه برای رسم نمودار  $y = -f(x)$  کافی است نمودار  $y = f(x)$  را

نسبت به محور  $x$  ها قرینه کنیم.

توجه در اثر انبساط و انقباض عمودی دامنه تغییر نمی‌کند؛ اما برد تغییر می‌کند.



۲ **انبساط و انقباض افقی:** برای رسم نمودار  $y = f(kx)$ ، کافی است

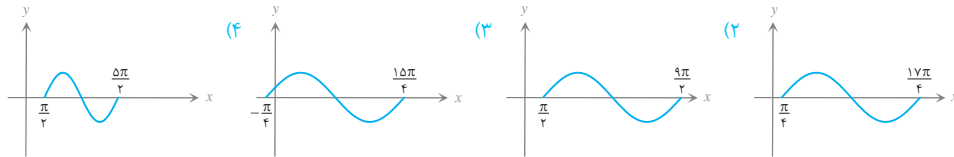
طول نقاط نمودار  $y = f(x)$  را در  $1/k$  ضرب کنیم؛ در این صورت اگر  $|k| > 1$  نمودار منقبض می‌شود و اگر  $|k| < 1$  نمودار منبسط می‌شود.

نتیجه برای رسم نمودار  $y = f(-x)$ ، کافی است نمودار  $y = f(x)$

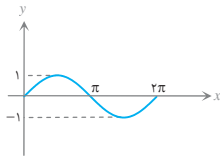
را نسبت به محور  $y$  ها قرینه کنیم.

توجه در اثر انبساط و انقباض افقی برد تغییر نمی‌کند؛ اما دامنه تغییر می‌کند.

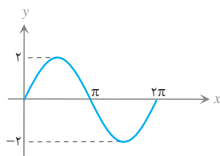
تست: قسمتی از نمودار تابع  $y = 2 \sin\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$  کدام است؟



حل: گزینه ۲ نمودار  $f(x) = \sin x$  مطابق شکل مقابل است:

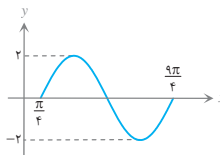


نمودار  $g(x) = 2f(x) = 2 \sin x$  را با انبساط عمودی نمودار  $y = f(x)$  رسم می‌کنیم.



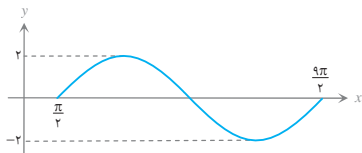
حال کافی است نمودار  $g(x)$  را  $\frac{\pi}{4}$  به راست منتقل کنیم. در این صورت:

$$y = g\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = h(x)$$



اکنون نمودار را در راستای محور  $x$  ها دو برابر منبسط می‌کنیم:

$$y = h\left(\frac{1}{4}x\right) = 2 \sin\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$$



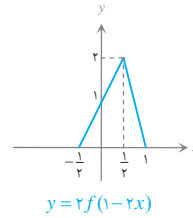
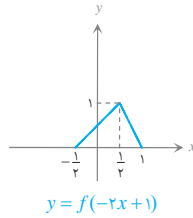
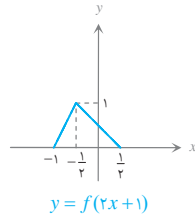
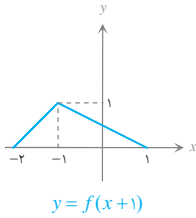
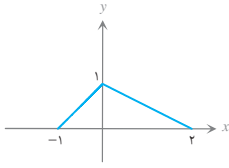


**تست:** اگر نمودار  $y = f(x)$  به صورت مقابل باشد، مساحت ناحیه بین نمودار  $y = -2f(1-2x)$ ، محور  $x$

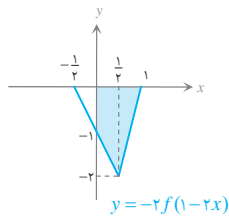
ها و محور  $y$  ها و خط  $x = 1$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{4}$  (۲)  $(\frac{1-a}{2}, \frac{b}{3})$   
 (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $(1-2a, 3b)$

**حل:** گزینه ۱ نمودار را مرحله به مرحله رسم می کنیم:



مساحت ناحیه مورد نظر برابر است با:



$$S = \frac{(1+2) \times \frac{1}{2}}{2} + \frac{\frac{1}{2} \times 2}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

**تست:** اگر نقطه  $(a, b)$  روی نمودار  $y = f(x)$  باشد، کدام نقطه روی نمودار  $y = 3f(1-2x)$  قرار دارد؟

- (۱)  $(1-2a, \frac{b}{3})$  (۲)  $(\frac{1-a}{2}, \frac{b}{3})$  (۳)  $(\frac{1-a}{2}, 3b)$  (۴)  $(1-2a, 3b)$

**حل:** گزینه ۳ نقطه  $(a, b)$  روی نمودار  $y = f(x)$  است؛ پس  $f(a) = b$ ؛ بنابراین:

$$1-2x = a \Rightarrow x = \frac{1-a}{2}$$

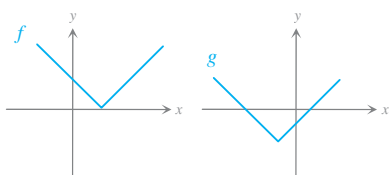
$$y = 3f(1-2(\frac{1-a}{2})) = 3f(a) = 3b$$

در این صورت به ازای  $x = \frac{1-a}{2}$  داریم:

پس نقطه  $(\frac{1-a}{2}, 3b)$  روی نمودار  $y = 3f(1-2x)$  قرار دارد.

**راه دوم:** نمودار  $y = 3f(1-2x)$  همان نمودار  $y = f(x)$  است که یک واحد به چپ منتقل شده و سپس نسبت به محور  $y$  قرینه شده است و آنگاه در راستای محور  $x$  ها دو برابر منقبض شده و در نهایت در راستای محور  $y$  سه برابر منبسط شده است؛ پس:

$$(a, b) \Rightarrow (a-1, b) \Rightarrow (1-a, b) \Rightarrow (\frac{1-a}{2}, 3b)$$



۱. نمودار توابع  $f(x)$  و  $g(x) = a + f(x+b)$  به صورت مقابل است. کدام گزینه

زیر صحیح است؟

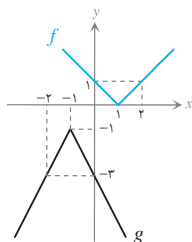
- (۱)  $a > 0$  و  $b > 0$       (۲)  $a > 0$  و  $b < 0$   
 (۳)  $a < 0$  و  $b < 0$       (۴)  $a < 0$  و  $b > 0$

۲. نمودار تابع  $y = 2f(\frac{1}{3}x)$  چگونه از روی نمودار تابع  $y = f(x)$  به دست می‌آید؟

- (۱) انقباض افقی و انقباض عمودی      (۲) انقباض افقی و انبساط عمودی  
 (۳) انبساط افقی و انقباض عمودی      (۴) انبساط افقی و انقباض عمودی

۳. از انقباض افقی نمودار  $y = \cos x$  در راستای محور  $x$  ها، نمودار کدام تابع زیر به دست می‌آید؟

- (۱)  $\cos 2x$       (۲)  $\cos \frac{1}{3}x$       (۳)  $2 \cos x$       (۴)  $\frac{1}{2} \cos x$



۴. با توجه به نمودار مقابل، ضابطه  $g$  کدام است؟

- (۱)  $2f(x-2) - 1$   
 (۲)  $\frac{1}{2}f(x-2) - 1$   
 (۳)  $-\frac{1}{2}f(x+2) - 1$   
 (۴)  $-2f(x+2) - 1$

۵. نمودار تابع  $y = 2 - |x|$  را دو واحد به راست و یک واحد به پایین انتقال داده، سپس در راستای محور  $x$  ها دو برابر منقبض می‌کنیم.

مجموع طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور  $x$  ها کدام است؟

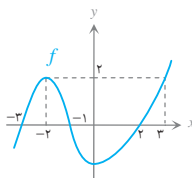
- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴

۶. اگر  $(x_0, y_0)$  یک نقطه دلخواه از نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد کدام نقطه زیر، یک نقطه از نمودار تابع  $y = 2f(3x)$  است؟

- (۱)  $(\frac{x_0}{3}, \frac{y_0}{2})$       (۲)  $(\frac{x_0}{3}, 2y_0)$       (۳)  $(3x_0, \frac{y_0}{2})$       (۴)  $(3x_0, 2y_0)$

۷. نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت مقابل است. مجموع صفرهای تابع  $y = f(1+2x) - 2$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{3}{2}$       (۲)  $-\frac{1}{2}$       (۳)  $-1$       (۴)  $-3$



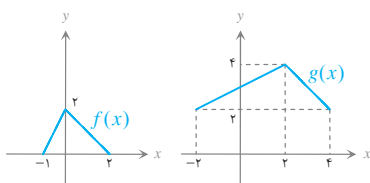
۸. کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) دامنه دو تابع  $y = f(x)$  و  $y = 2f(x) + 3$  یکسان است.  
 (۲) برد دو تابع  $y = f(x)$  و  $y = f(3x-2)$  یکسان است.  
 (۳) دامنه تابع  $y = f(x)$  زیرمجموعه دامنه تابع  $y = f(2x)$  است.  
 (۴) برد تابع  $y = f(x)$  زیرمجموعه برد تابع  $y = 2f(x)$  است.

۹. نمودار توابع  $f(x)$  و  $g(x) = 2 - af(1+bx)$  به صورت مقابل است. حاصل

$a + b$  کدام است؟

- (۱)  $-0.5$       (۲)  $-1.5$   
 (۳)  $-3$       (۴)  $-1$



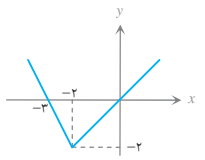


۱۰. اگر  $S_1(2, 3)$  رأس سهمی  $y = f(x)$  و  $S_2(\alpha, \beta)$  رأس سهمی  $y = 2 - 3f(1+x)$  باشد، حاصل  $\alpha\beta$  کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۲۱ (۳) -۶ (۴) -۷

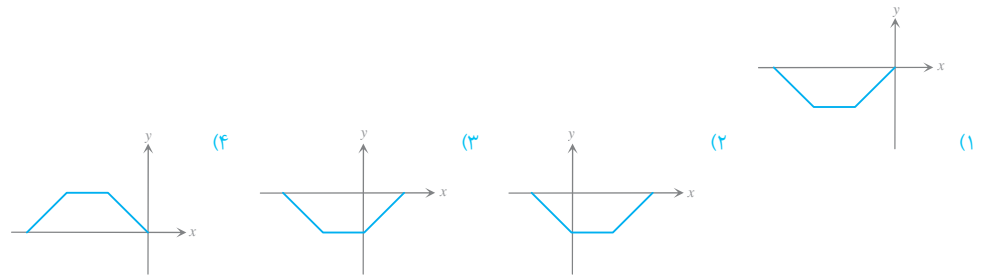
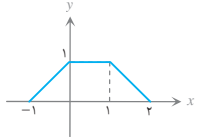
پرش های سطح متوسط

۱۱. نمودار تابع  $f(x)$  به صورت مقابل است. نمودار تابع  $y = f(x+1) - 3$  محور  $x$  ها را در دو نقطه با طول  $\alpha$  و  $\beta$  قطع می کند. حاصل  $\alpha + \beta$  کدام است؟



- (۱)  $-\frac{5}{2}$  (۲)  $-\frac{7}{2}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

۱۲. اگر نمودار  $y = f(x)$  مطابق شکل باشد، نمودار  $y = -f(1-x)$  کدام است؟



۱۳. نمودار تابع  $y = |x|$  را سه واحد به راست منتقل می کنیم و سپس نسبت به محور  $x$  ها قرینه می کنیم و آن را پنج واحد به بالا منتقل می کنیم. مساحت بین نمودار جدید و نمودار اولیه چقدر است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۱۲

۱۴. دامنه و برد تابع  $y = f(x+1)$  به ترتیب  $[1, 4]$  و  $[-2, 1]$  است. اگر دامنه و برد تابع  $f(x) + 1$  برابر  $D$  و  $R$  باشد،  $D \cap R$  کدام است؟

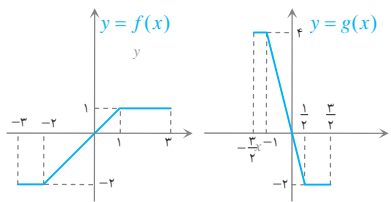
- (۱)  $[2, \frac{7}{2}]$  (۲)  $[\frac{5}{2}, 3]$  (۳)  $[2, 3]$  (۴)  $[-1, 2]$

۱۵. نمودار تابع  $y = 3|x+2|$  را دو واحد به راست منتقل کرده و سپس نسبت به محور  $x$  ها قرینه می کنیم. نمودار حاصل را حداقل چقدر به سمت بالا منتقل کنیم تا نمودار تابع اولیه را قطع کند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۶

۱۶. فرض کنید برای هر نقطه  $(x_0, y_0)$  از نمودار تابع  $f(x) = \cos x$ ، نقطه  $(\frac{x_0}{2}, 1 - y_0)$  روی نمودار  $g(x)$  باشد. ضابطه  $g(x)$  کدام است؟

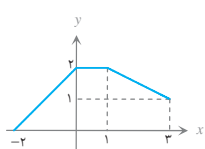
- (۱)  $2 \sin^2 2x$  (۲)  $2 \sin^2 x$  (۳)  $2 \cos^2 2x$  (۴)  $2 \cos^2 x$



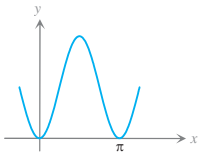
۱۷. نمودار  $f(x)$  و  $g(x)$  داده شده است. چه رابطه ای بین این دو برقرار است؟

- (۱)  $g(x) = -\frac{1}{2}f(2x)$  (۲)  $g(x) = -2f(\frac{1}{2}x)$   
 (۳)  $g(x) = -2f(2x)$  (۴)  $g(x) = -\frac{1}{2}f(\frac{1}{2}x)$

۱۸. نمودار تابع  $f(x)$  به صورت زیر است. مساحت ناحیه محدود به نمودار  $y = f(|x|) - 1$  و محور  $x$  ها چقدر است؟

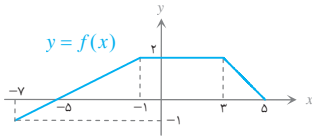


- (۱) ۸ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۳



۱۹. بخشی از نمودار تابع  $y = a - 2 \cos bx$  به صورت مقابل است. حاصل  $a + |b|$  کدام است؟

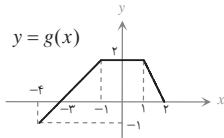
- (۱)  $\frac{5}{2}$   
 (۲)  $\frac{3}{2}$   
 (۳)  $2$   
 (۴)  $4$



۲۰. نمودار توابع  $f(x)$  و  $g(x)$  به صورت مقابل است. اگر نقطه  $A(x_0, y_0)$  روی نمودار  $f$

باشد، متناظر با آن، کدام نقطه زیر روی نمودار  $g$  است؟

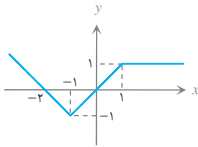
- (۱)  $(\frac{1}{2}x_0 + 1, y_0)$   
 (۲)  $(\frac{x_0 + 1}{2}, y_0)$   
 (۳)  $(2x_0 + 1, y_0)$   
 (۴)  $(\frac{x_0 - 1}{2}, y_0)$



### پرش های سطح دشوار

۲۱. فرض کنید  $f(x) = |x| - 1$ . در این صورت مساحت بین نمودار  $f(x)$  و نمودار  $y = 3 - f(x - 1)$  چقدر است؟

- (۱) ۱۰  
 (۲) ۵  
 (۳) ۱۲  
 (۴) ۶



۲۲. اگر نمودار  $y = f(x)$  مطابق شکل مقابل باشد، مساحت ناحیه بین نمودار  $y = f(-|x| + 1)$  و محور  $x$

ها در بازه  $[-1, 1]$  کدام است؟

- (۱) ۱  
 (۲)  $\frac{1}{2}$   
 (۳)  $\frac{3}{2}$   
 (۴) ۲

۲۳. برای رسم نمودار  $y = f(-2x + 4)$  از روی  $f(x)$  کدام ترتیب عملیات نادرست است؟

- (۱) چهار واحد انتقال به چپ، تقسیم طول نقاط بر ۲، قرینه کردن نسبت به محور  $y$  ها  
 (۲) تقسیم طول نقاط بر ۲، دو واحد انتقال به چپ، قرینه کردن نسبت به محور  $y$  ها  
 (۳) قرینه کردن نسبت به محور  $y$  ها، چهار واحد انتقال به راست، تقسیم طول نقاط بر ۲  
 (۴) قرینه کردن نسبت به محور  $y$  ها، تقسیم طول نقاط بر ۲، دو واحد انتقال به چپ

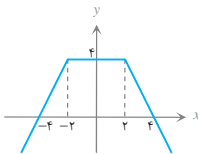
۲۴. فرض کنید نمودار  $y = f(2x)$  داده شده است. برای ترسیم نمودار  $y = -f(x + 1) + 1$  انجام کدام مراحل نادرست است؟

- (۱) دو برابر انبساط افقی، یک واحد انتقال به چپ، قرینه کردن نسبت به محور  $x$  ها و یک واحد انتقال به بالا  
 (۲) یک واحد انتقال به پایین، قرینه کردن نسبت به محور  $x$  ها،  $\frac{1}{2}$  واحد انتقال به چپ، دو برابر انبساط افقی  
 (۳) قرینه کردن نسبت به محور  $x$  ها، دو برابر انبساط افقی، یک واحد انتقال به چپ، یک واحد انتقال به بالا  
 (۴) یک واحد انتقال به چپ، دو برابر انبساط افقی، قرینه کردن نسبت به محور  $x$  ها، یک واحد انتقال به بالا

۲۵. نمودار تابع  $f(x)$  به صورت مقابل است. سطح محدود به منحنی  $y = 2f(4x) - 1$  و محور  $x$  ها چقدر

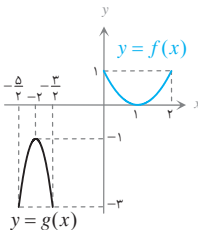
است؟

- (۱)  $\frac{161}{16}$   
 (۲)  $\frac{161}{8}$   
 (۳)  $\frac{159}{16}$   
 (۴)  $\frac{159}{8}$

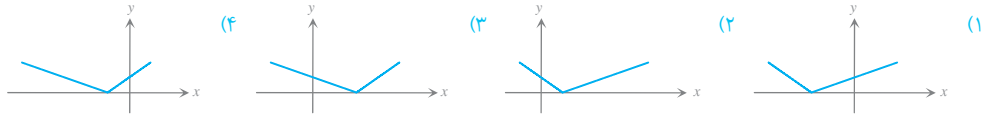
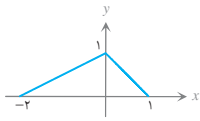


۲۶. اگر نمودار  $g(x)$  از روی نمودار  $f(x)$  ساخته شده باشد، چه رابطه‌ای بین این دو وجود دارد؟

- (۱)  $-2f(2x + 3) - 2$   
 (۲)  $-2f(2x + 5) - 2$   
 (۳)  $-2f(2x + 3) - 1$   
 (۴)  $-2f(2x + 5) - 1$



۲۷. اگر نمودار  $y = -f(2x) + 1$  به صورت مقابل باشد، نمودار  $f(x+1)$  کدام است؟



۲۸. اگر  $f(x+3) = x + \frac{4}{x}$ ، نمودار تابع  $y = 2 + f(2x)$  از کدام نقطه می‌گذرد؟

- (۱)  $(2, 7)$       (۲)  $(1, 5)$       (۳)  $(0, -\frac{4}{3})$       (۴)  $(3, -2)$

۲۹. نمودار تابع  $y = \sin kx$  محور  $x$  ها را در بازه  $[0, \pi]$  در ۵ نقطه قطع می‌کند. حدود  $k$  کدام است؟ ( $k > 0$ )

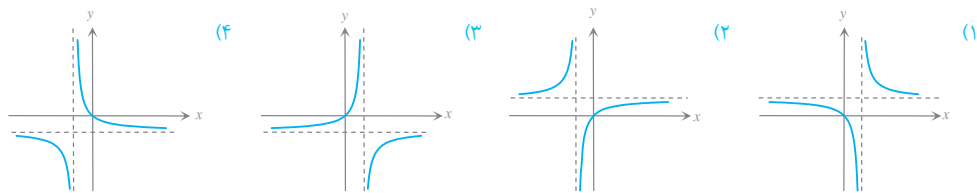
- (۱)  $3 < x \leq 4$       (۲)  $4 \leq k < 5$       (۳)  $5 \leq k < 6$       (۴)  $4 \leq k < 6$

۳۰. اگر  $f(x) + g(-x) = 0$ ، آنگاه کدام گزینه درباره نمودارهای  $f(x)$  و  $g(x)$  صحیح است؟

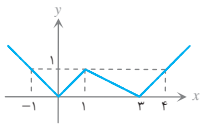
- (۱) نمودار دو تابع بر هم منطبق‌اند.      (۲) نمودارها نسبت به محور  $y$  متقارن‌اند.  
 (۳) نمودارها نسبت به خط  $y = x$  متقارن‌اند.      (۴) نمودارها نسبت به مبدأ مختصات متقارن‌اند.

پرسش‌های ترکیب سطوح

۳۱. نمودار تابع  $y = 1 + \frac{1}{x-1}$  به کدام صورت زیر است؟



۳۲. اگر نمودار  $y = f(x)$  مطابق شکل مقابل باشد، نمودار  $y = |f(-x+1) - 2|$  خط  $y = x$  را در نقطه‌ای به کدام طول قطع می‌کند؟



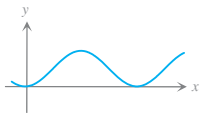
- (۱)  $\frac{1}{2}$       (۲)  $\frac{3}{2}$

- (۳)  $\frac{5}{2}$       (۴) در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند.

۳۳. نمودارهای دو تابع  $y = -2\sin 2x$  و  $y = 3\cos 3x$  در فاصله  $[0, \pi]$  در چند نقطه متقاطع‌اند؟

- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴

۳۴. با فرض  $f(x) = \sin x$ ، بخشی از نمودار تابع  $g(x) = 1 + f(x+a)$  به صورت مقابل است. مقدار  $a$  کدام می‌تواند باشد؟

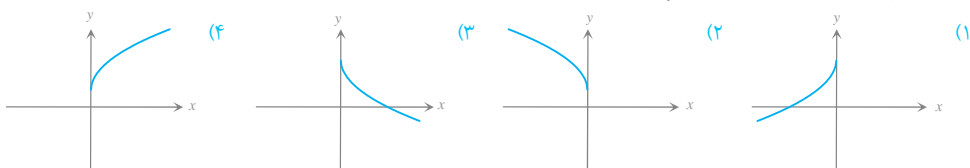


- (۱)  $\frac{\pi}{2}$       (۲)  $-\frac{\pi}{2}$       (۳)  $\pi$       (۴)  $-\pi$

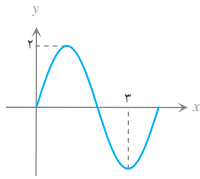
۳۵. اگر  $f(x+2) = x^2 + 2x$ ، نمودار تابع  $y = 2f(2x-3)$  از کدام نقطه می‌گذرد؟

- (۱)  $(1, 6)$       (۲)  $(3, 6)$       (۳)  $(1, 3)$       (۴)  $(3, 3)$

۳۶. نمودار تابع  $y = 2 - \sqrt{-2x}$  به کدام صورت زیر است؟

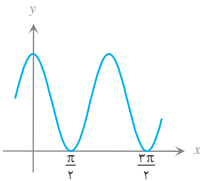






۳۷. بخشی از نمودار تابع  $y = a \cos\left(\left(\frac{1}{4} + bx\right)\pi\right)$  به صورت مقابل است. مقدار  $ab$  کدام است؟

- (۱)  $1/5$  (۲)  $-1$   
(۳)  $-1/5$  (۴)  $1$



۳۸. بخشی از نمودار تابع  $y = a \cos bx + 2$  به صورت مقابل است. حاصل  $a - b$  کدام است؟

- (۱)  $4$  یا  $0$  (۲)  $-4$  یا  $0$   
(۳)  $1/5$  یا  $2/5$  (۴)  $-1/5$  یا  $-2/5$

۳۹. اگر نمودار تابع  $y = 2 - |x|$  را چهار واحد به سمت راست و سه واحد به سمت پایین منتقل کنیم، طول نقطه تقاطع تابع جدید با تابع اولیه کدام است؟

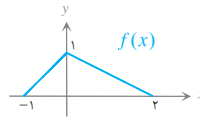
- (۱)  $3$  (۲)  $3/5$  (۳)  $4$  (۴)  $4/5$

۴۰. دامنه و برد تابع  $y = f(x)$  به ترتیب برابر  $[1, 2]$  و  $[-1, 3]$  است. دامنه و برد تابع  $y = 2f\left(-\frac{1}{4}x + 1\right) - 1$  چند عضو صحیح مشترک دارند؟

- (۱)  $8$  (۲)  $5$  (۳)  $4$  (۴)  $6$

۴۱. از برخورد نمودار  $f(x) = |x|$  و  $g(x) = a + bf(x)$  یک مستطیل به وجود می‌آید. در این صورت کدام صحیح است؟

- (۱)  $a > 0, b > 0$  (۲)  $a > 0, b < 0$  (۳)  $a < 0, b < 0$  (۴)  $a < 0, b > 0$



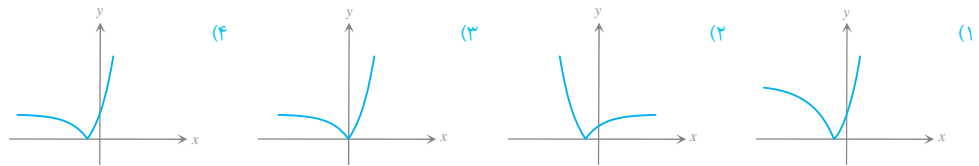
۴۲. نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل است. نمودار تابع  $y = f(1 - 2x)$  را در چند نقطه قطع می‌کند؟

- (۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) هیچ

۴۳. با فرض  $f(x) = 2^{2x+1} - 1$  دامنه تابع  $y = \sqrt{xf\left(\frac{x}{4} - 1\right)}$  کدام است؟

- (۱)  $\mathbb{R} - (0, 1)$  (۲)  $(-\infty, 0]$  (۳)  $[0, +\infty)$  (۴)  $\mathbb{R}$

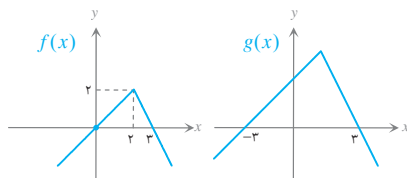
۴۴. نمودار تابع  $y = |2^{2x+1} - 1|$  کدام است؟



۴۵. نمودار توابع  $f(x)$  و  $g(x) = a + f(x + b)$  به صورت مقابل است. حاصل

$2a + b$  کدام است؟

- (۱)  $3$  (۲)  $4$   
(۳)  $5$  (۴)  $6$



## بخش پذیری و تقسیم

**قضیه تقسیم:** اگر  $f(x)$  و  $p(x)$  چندجمله‌ای باشند و درجه  $p(x)$  از صفر بزرگ‌تر باشد، آنگاه توابع چندجمله‌ای منحصر به فرد  $q(x)$  و  $r(x)$  وجود دارد؛ به طوری که:

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x)$$

که در آن درجه  $r(x)$  از درجه  $p(x)$  کمتر است.

**توجه ۱:** در تقسیم  $f(x)$  بر  $p(x)$ ، چندجمله‌ای  $f(x)$  را مقسوم،  $p(x)$  را مقسوم‌علیه،  $q(x)$  را خارج قسمت و  $r(x)$  را باقی‌مانده می‌نامند.

**توجه ۲:** اگر  $r(x) = 0$  باشد، گفته می‌شود  $f(x)$  بر  $p(x)$  بخش پذیر است.

به عنوان مثال:

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 3x^2 - 5x + 2 \\ \underline{2x^3 - x^2} \\ 3x^2 + x^2 - 5x + 2 \\ \underline{3x^2 - 3x} \\ x^2 - 2x + 2 \\ \underline{x^2 - 1} \\ -2x + 3 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 1 \\ 2x^2 + 3x + 1 \end{array} \right.$$

$$2x^3 + 3x^2 - 5x + 2 = (x^2 - 1)(2x + 3) + (-2x + 3)$$

اگر  $p(x)$  چندجمله‌ای درجه یک  $ax + b$  باشد، درجه باقی‌مانده صفر است و در واقع یک عدد خواهد بود و داریم:

$$f(x) = (ax + b)q(x) + r$$

$$f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0 \times q\left(-\frac{b}{a}\right) + r \Rightarrow r = f\left(-\frac{b}{a}\right)$$

رابطه فوق همواره برقرار است؛ از جمله به ازای  $x = -\frac{b}{a}$ ؛ در این صورت:

**نتیجه ۱:** باقی‌مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $ax + b$  برابر  $r = f\left(-\frac{b}{a}\right)$  است.

**تست:** اگر باقی‌مانده تقسیم  $f(x) = x^3 + ax^2 + 11x - 6$  بر  $x + 1$  برابر  $-24$  باشد، مجموع ریشه‌های معادله  $f(x) = 0$  کدام است؟

$$1 \quad 1) \quad 6 \quad 2) \quad 5 \quad 3) \quad 4 \quad 4)$$

**حل:** گزینه ۲ باقی‌مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x + 1$  برابر  $f(-1)$  است؛ پس:

$$f(-1) = -1 + a - 11 - 6 = -24 \Rightarrow a = -6 \Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

ملاحظه می‌شود که  $f(1) = 0$ ؛ پس  $f(x)$  بر  $x - 1$  بخش پذیر است:

$$f(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 1, 2, 3$$

مجموع ریشه‌های معادله برابر ۶ است.

**توجه ۲:** اگر  $f(x)$  بر  $p_1(x)p_2(x)$  بخش پذیر باشد، بر  $p_1(x)$  و  $p_2(x)$  نیز بخش پذیر است.

**تست:** اگر  $f(x) = ax^3 + bx^2 + x + c$  بر  $x^2 - 5x + 6$  بخش پذیر باشد و باقی‌مانده تقسیم آن بر  $x - 1$  برابر ۴ باشد،  $a + b - c$  کدام است؟

$$-9 \quad 1) \quad -11 \quad 2) \quad 3 \quad 3) \quad 11 \quad 4)$$

**حل:** گزینه ۱  $f(x)$  بر  $(x - 2)(x - 3)$  بخش پذیر است؛ پس بر  $x - 2$  و  $x - 3$  بخش پذیر است و داریم:

$$f(2) = 0 \Rightarrow 8a + 4b + 2 + c = 0 \Rightarrow 8a + 4b + c = -2$$

$$f(3) = 0 \Rightarrow 27a + 9b + 3 + c = 0 \Rightarrow 27a + 9b + c = -3$$

$$f(1) = 4 \Rightarrow a + b + 1 + c = 4 \Rightarrow a + b + c = 3$$

باقی‌مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x - 1$  برابر  $f(1)$  است؛ پس:

پس داریم:

$$\begin{cases} 8a + 4b + c = -2 \\ 27a + 9b + c = -3 \\ a + b + c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a + 5b = -1 \\ 26a + 8b = -6 \end{cases} \Rightarrow a = 1, \quad b = -4, \quad c = 6 \Rightarrow a + b - c = -9$$



**نکته** اگر  $f(x)$  بر  $ax+b$  و  $cx+d$  بخش پذیر باشد، بر  $(ax+b)(cx+d)$  نیز بخش پذیر است؛ مشروط بر آنکه  $\frac{b}{a} \neq \frac{d}{c}$ .

**تست:** عبارت  $f(x) = x^r + ax + b$  بر  $(x-1)^2$  بخش پذیر است،  $2a+b$  کدام است؟

(۱) ۳-      (۲) ۴-      (۳) ۵-      (۴) ۶-

**حل:** گزینه (۲)  $f(x)$  بر  $x-1$  بخش پذیر است؛ پس:

$$f(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + b = 0 \Rightarrow b = -a - 1 \Rightarrow f(x) = x^r + ax - a - 1 = (x^r - 1) + (ax - a)$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)(x^r + x + 1) + a(x-1) = (x-1) \underbrace{(x^r + x + 1 + a)}_{g(x)}$$

اگر  $f(x)$  بر  $(x-1)^2$  بخش پذیر باشد، باید  $g(x)$  نیز بر  $x-1$  بخش پذیر باشد؛ یعنی:

$$g(1) = 0 \Rightarrow 3 + a = 0 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow b = -a - 1 = 2 \Rightarrow 2a + b = -4$$

**مثال:** باقی مانده تقسیم  $f(x) = x^n - a^n$  را بر  $x-a$  بیابید.

$$x - a = 0 \Rightarrow x = a \Rightarrow r(x) = a^n - a^n = 0$$

**حل:**

پس:  $x^n - a^n$  بر  $x-a$  بخش پذیر است.

می توان نشان داد:

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + a^{n-1}) ; n \in \mathbb{N}$$

$$x^n - a^n = (x+a)(x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \dots - a^{n-1}) ; n \text{ زوج}$$

$$x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \dots + a^{n-1}) ; n \text{ فرد}$$

به عنوان مثال:

$$x^7 - 27 = x^7 - 3^3 = (x-3)(x^6 + 3x^3 + 9)$$

$$x^5 - y^5 = (x-y)(x^4 + x^3y + xy^3 + y^4)$$

$$x^5 - 16 = (x+2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8)$$

$$x^5 + 32y^5 = x^5 + (2y)^5 = (x+2y)(x^4 - 2x^3y + 4x^2y^2 - 8xy^3 + 16y^4)$$

**تست:** عبارت  $x^{2f} + 1$  بر کدام عبارت بخش پذیر است؟

(۱)  $x^{12} + 1$       (۲)  $x^3 + 1$       (۳)  $x^6 + 1$       (۴)  $x^4 + 1$

$$x^{2f} + 1 = (x^{12})^2 + 1^2$$

**حل:** گزینه (۴)

این عبارت بر  $x^{12} + 1$  بخش پذیر نیست؛ چون ۲ زوج است.

$$x^{2f} + 1 = (x^r)^4 + 1^4 = (x^6)^4 + 1^4$$

به همین ترتیب بر  $x^3 + 1$  و  $x^6 + 1$  بخش پذیر نیست؛ اما:

$$x^{2f} + 1 = (x^4)^3 + 1^3$$

این عبارت بر  $x^4 + 1$  بخش پذیر است.

**تست:** عدد  $2^{20} - 1$  بر کدام عدد زیر بخش پذیر نیست؟

(۱) ۱۵      (۲) ۱۷      (۳) ۳۱      (۴) ۳۳

$$2^{20} - 1 = (2^4)^5 - 1^5$$

**حل:** گزینه (۲)

پس این عدد بر  $2^4 - 1 = 15$  بخش پذیر است و چون ۵ زوج نیست بر  $2^4 + 1 = 17$  بخش پذیر نیست. حال دقت کنید که:

$$2^{20} - 1 = (2^5)^4 - 1^4$$

چون ۴ زوج است این عدد بر  $2^5 \pm 1$  یعنی ۳۱ و ۳۳ بخش پذیر است.





پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس سوم

پرسش‌های سطح ساده

۹۱. چندجمله‌ای  $f(x) = x^3 + ax^2 - 3x + 2a$  بر  $x + 1$  بخش پذیر است. باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x - 1$  کدام است؟  
 ۳ (۱)      ۶ (۲)      -۸ (۳)      -۱۴ (۴)
۹۲. چندجمله‌ای  $f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 - 3x + 1$  بر  $x^2 - 1$  بخش پذیر است. حاصل  $ab$  کدام است؟  
 -۲ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      -۳ (۴)
۹۳. اگر  $f(2x + 1)$  بر  $x - 1$  بخش پذیر باشد،  $f(2x - 1)$  بر کدام عبارت بخش پذیر است؟  
 $x - 1$  (۱)       $x - 2$  (۲)       $x + 1$  (۳)       $x + 2$  (۴)
۹۴. باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $2x - x^2$  برابر  $3x - 1$  است. باقی مانده تقسیم  $f(3x + 5)$  بر  $x + 1$  چقدر است؟  
 ۶ (۱)      ۵ (۲)      ۴ (۳)      ۳ (۴)
۹۵. اگر باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x^2 - 9$  برابر  $3x + 9$  و بر  $x - 3$  برابر  $r_1$  و بر  $x + 3$  برابر  $r_2$  باشد،  $r_1 + r_2$  کدام است؟  
 ۳ (۱)      ۴ (۲)      ۵ (۳)      ۶ (۴)
۹۶. چندجمله‌ای  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx^2 - 4$  بر  $x^2 - x - 2$  بخش پذیر است. حاصل  $a + b$  کدام است؟  
 ۱ (۱)      -۳ (۲)      ۳ (۳)      -۱ (۴)
۹۷. باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x - 4$  برابر  $2x - 4$  است. باقی مانده تقسیم  $2f(x)$  بر  $x - 2$  کدام است؟  
 ۷ (۱)      ۱۴ (۲)       $\frac{7}{2}$  (۳)      ۲۸ (۴)
۹۸. کدام عبارت بر  $a^2 + b^2$  بخش پذیر است؟  
 $a^{18} + b^{18}$  (۴)       $a^{12} + b^{12}$  (۳)       $a^8 + b^8$  (۲)       $a^{16} + b^{16}$  (۱)
۹۹. اگر  $Q(x)$  خارج قسمت تقسیم  $x^5 + 3x^2 + 2x + 3$  بر  $(x + 1)^2$  باشد، مقدار  $Q(1)$  کدام است؟  
 ۱ (۱)      ۲ (۲)      -۳ (۳)      -۴ (۴)
۱۰۰. در خارج قسمت تقسیم  $(x^6 + 3x^2 + 5x) \div (x + 2)$  ضریب  $x$  کدام است؟  
 ۳ (۱)      ۵ (۲)      ۷ (۳)      ۱ (۴)

پرسش‌های سطح متوسط

۱۰۱. باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای  $f(x)$  بر  $x + 1$  و  $x + 2$  به ترتیب برابر ۲ و ۴ است. باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x^2 + 3x + 2$  کدام است؟  
 $x + 3$  (۱)       $x + 6$  (۲)       $-2x$  (۳)       $-3x$  (۴)
۱۰۲. کدام عبارت را با  $4x + 2$  یا  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 2$  جمع کنیم تا عبارت حاصل بر  $x^2 - 1$  بخش پذیر باشد؟  
 $3x + 5$  (۱)       $3x - 5$  (۲)       $-3x + 5$  (۳)       $-3x - 5$  (۴)
۱۰۳. خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای  $1 - x^{2n}$  بر  $1 - x$  و  $1 + x$  به ترتیب برابر  $f(x)$  و  $g(x)$  است. حاصل  $f(1) + g(-1)$  کدام است؟  
 $2n$  (۱)       $4n$  (۲)       $-2n$  (۳)      صفر (۴)
۱۰۴. اگر  $f(x)$  بر  $x^2 - 9$  بخش پذیر باشد، باقی مانده تقسیم  $f(2x + 1)$  بر  $x + 2$  چقدر است؟  
 ۱ (۱)      -۱ (۲)      -۲ (۳)      صفر (۴)
۱۰۵. اگر چندجمله‌ای  $f(x + 2)$  بر  $x - 3$  بخش پذیر باشد، چندجمله‌ای  $f(1 - 2x)$  بر کدام گزینه زیر بخش پذیر است؟  
 $x - 1$  (۱)       $3 - 2x$  (۲)       $5 - 2x$  (۳)       $x + 2$  (۴)
۱۰۶. باقی مانده عبارت  $(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1$  بر  $f(x) = x^2 + 3x$  کدام است؟  
 $2x + 7$  (۱)       $2x - 7$  (۲)       $-2x + 7$  (۳)       $-2x - 7$  (۴)

۱۰۷. خارج قسمت تقسیم عبارت  $x^3 - 3x^2 + 2x - 1$  بر  $x - 2$  به ازای  $x = 1$  کدام است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

۱۰۸. عبارت  $x^2 + 4$  را به شکل ضرب  $x^2 - 2x + m$  و  $q(x)$  نوشته ایم.  $q(2) + m$  کدام است؟

- ۱۲ (۱)      ۱۰ (۲)      ۸ (۳)      ۶ (۴)

۱۰۹. عبارت  $x^{18} - y^{12}$  بر کدام عبارت بخش پذیر نیست؟

- ۱ (۱)  $x^3 - y^6$       ۲ (۲)  $x^6 + y^4$       ۳ (۳)  $x^3 + y^3$       ۴ (۴)  $x^3 - y^2$

۱۱۰. باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x^2 - 3x + 2$  و  $x^2 + 3x + 2$  به ترتیب برابر  $x - 3$  و  $x + 3$  است. باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x^2 - 1$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $2x - 4$       ۲ (۲)  $2x + 4$       ۳ (۳)  $-2x$       ۴ (۴)  $-3x$

### پرسش های سطح دشوار

۱۱۱. اگر  $f(x)$  یک تابع خطی باشد و چندجمله ای  $f(x) + 3x^2 - x^5$  بر  $x^2 - 4$  بخش پذیر باشد، مقدار  $f(1)$  چقدر است؟

- ۸ (۱)      ۱۰ (۲)      ۱۲ (۳)      ۱۴ (۴)

۱۱۲. با فرض  $f(x) = x^2 + 2x - 3$  باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $f(f(x))$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $x - 3$       ۲ (۲)  $-3$       ۳ (۳)  $2x - 3$       ۴ (۴)  $9$

۱۱۳. مقدار خارج قسمت تقسیم  $x^8 - 256$  بر  $x^2 - 4$  به ازای  $x = 2$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $128$       ۲ (۲)  $256$       ۳ (۳)  $512$       ۴ (۴)  $1024$

۱۱۴. اگر  $x^2 - 2x - 3$  یکی از عوامل تجزیه چندجمله ای  $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax^2 + bx + 6$  باشد، یکی دیگر از عوامل تجزیه این

چندجمله ای کدام است؟

- ۱ (۱)  $x - 2$       ۲ (۲)  $x + 2$       ۳ (۳)  $x + 6$       ۴ (۴)  $x - 6$

۱۱۵. باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x - 1$  و  $x^2 - 4$  به ترتیب برابر  $2$  و  $x + 1$  است. باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $(x - 1)(x^2 - 4)$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $3x - 1$       ۲ (۲)  $x^2 + 1$       ۳ (۳)  $x^2 + 2x - 1$       ۴ (۴)  $x + 1$

۱۱۶. اگر عبارت  $x(x + 1)^2$  بر عبارت  $ax^2 + bx + 2$  بخش پذیر باشد،  $2a + 3b$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $6$       ۲ (۲)  $12$       ۳ (۳)  $8$       ۴ (۴)  $16$

۱۱۷. اگر چندجمله ای  $f(x) = x^5 + 3x^3 + ax^2 + bx + 1$  بر  $(x - 1)^2$  بخش پذیر باشد، حاصل  $a - b$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $5$       ۲ (۲)  $23$       ۳ (۳)  $18$       ۴ (۴)  $-13$

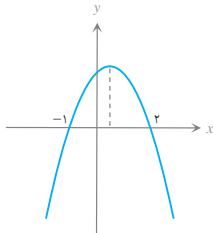
۱۱۸. نمودار سهمی  $f(x)$  به صورت مقابل است. باقی مانده تقسیم  $3 - xf(x) + x^2$  بر  $f(x)$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $3x + 1$

- ۲ (۲)  $2x + 9$

- ۳ (۳)  $5x + 3$

- ۴ (۴)  $4x - 1$



۱۱۹. چندجمله ای درجه سوم  $f(x)$  بر  $x + 1$  بخش پذیر است. اگر باقی مانده تقسیم آن بر  $x - 1$ ،  $x - 2$  و  $x - 3$  برابر  $48$  باشد،  $f(0)$

کدام است؟

- ۱ (۱)  $12$       ۲ (۲)  $-12$       ۳ (۳)  $36$       ۴ (۴)  $-36$

۱۲۰. اگر  $x^2 + 6x + 4$  بر  $x^2 + ax + b$  بخش پذیر باشد، حاصل  $ab$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $\pm 24$       ۲ (۲)  $\pm 32$       ۳ (۳)  $\pm 18$       ۴ (۴)  $\pm 16$

### پرسش های ترکیب سطوح

۱۲۱. باقی مانده تقسیم  $f(x) = x^5 + 3x^3 - 2x^2 - x + 7$  بر  $x^2 - 1$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $8$       ۲ (۲)  $3x + 5$       ۳ (۳)  $5x + 6$       ۴ (۴)  $2x + 6$





۱۲۲. اگر باقی‌مانده تقسیم  $2 + 3x + mx^2 - x^5$  بر  $x - 1$  برابر ۳ باشد، باقی‌مانده تقسیم آن بر  $x + 1$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۳ (۴) -۵

۱۲۳. در چندجمله‌ای  $f(x)$  رابطه  $f(1) = f(2) = 2$  برقرار است. چندجمله‌ای  $f(x) - 2$  بر کدام عبارت بخش‌پذیر است؟

- (۱)  $x^2 - 4$  (۲)  $x^2 - 1$  (۳)  $x^2 - 3x + 2$  (۴)  $x^2 + 3x + 2$

۱۲۴. باقی‌مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x - 1$  و  $x - 2$  به ترتیب بر ۲ و ۳ است. باقی‌مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $2x^2 - 6x + 4$  کدام است؟

- (۱)  $x + 1$  (۲)  $2x + 1$  (۳)  $x + 2$  (۴)  $2x + 3$

۱۲۵. باقی‌مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x^2 - 1$  برابر  $x + 2$  است. باقی‌مانده تقسیم  $f(x) + 3x^2 + x$  بر  $x^2 - 1$  کدام است؟

- (۱)  $x + 2$  (۲)  $x + 3$  (۳)  $2x + 4$  (۴)  $2x + 5$

۱۲۶. باقی‌مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x^2 - 5x + 6$  برابر  $3x - 1$  است. باقی‌مانده تقسیم  $f(x) - xf(1 - x)$  بر  $x + 1$  است؟

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۶ (۴) -۶

۱۲۷. باقی‌مانده تقسیم  $f(x) = x^6 + ax^5 + bx + 2$  بر  $x - 2$  و  $x + 3$  برابر  $x - 3$  است. مقدار  $f(-1)$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) ۵

۱۲۸. چندجمله‌ای  $f(x) = x^6 + x^3 + x - 1$  بر کدام عبارت بخش‌پذیر است؟

- (۱)  $x^2 - 1$  (۲)  $x^2 + x + 1$  (۳)  $x^2 + x - 1$  (۴)  $x^2 - x + 1$

۱۲۹. اگر  $q(x)$  خارج‌قسمت تقسیم  $f(x) = x^5 - 3x^4 + 4x + 1$  بر  $x - 1$  باشد، باقی‌مانده تقسیم  $q(x)$  بر  $x + 1$  کدام است؟

- (۱) -۱۰ (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴) -۵

۱۳۰. باقی‌مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $2x^2 - 3x + 1$  برابر  $2x + 1$  است. باقی‌مانده تقسیم  $f(x^2)$  بر  $2x^2 - 1$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲)  $2x$  (۳)  $2x + 1$  (۴)  $2x - 1$

۱۳۱. چندجمله‌ای  $f(x) = x^3 + ax^2 + 1$  بر  $x - 1$  بخش‌پذیر است. مجموع ریشه‌های معادله  $\frac{f(x)}{x - 1} = 0$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) -۳

۱۳۲. باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $f(x)$  بر  $x^2 - 2x - 3$  برابر  $3x + 1$  است. باقی‌مانده تقسیم  $f(x + 2) - f(x - 2)$  بر  $x - 1$  کدام است؟

- (۱) -۱۲ (۲) ۸ (۳) -۸ (۴) ۱۲

۱۳۳. اگر باقی‌مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x^2 - 1$  برابر ۴ باشد، باقی‌مانده تقسیم  $f(x^3)$  بر  $x^2 + x + 1$  کدام است؟

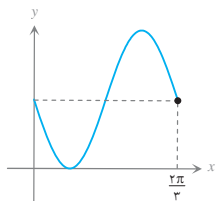
- (۱) ۴ (۲)  $4x$  (۳)  $4x - 1$  (۴)  $4x + 1$

۱۳۴. اگر  $f(x) = (x + 1)^3 + ax + b$  بر  $x - 1$  بخش‌پذیر باشد و باقی‌مانده تقسیم آن بر  $x + 2$  برابر ۳ باشد، مقدار  $f(0)$  کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) -۳ (۴) -۴

۱۳۵. باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $f(x)$  بر  $x^2 - 2x - 3$  برابر  $4x + 1$  است. باقی‌مانده تقسیم  $1 + xf(x)$  بر  $x - 3$  کدام است؟

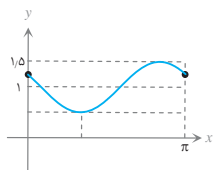
- (۱) ۱ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴) ۴۰



۱۶۶. شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = 1 - \sin mx$  است. مقدار تابع در نقطه  $x = \frac{7\pi}{6}$  کدام است؟

خارج - ۱۳۹۶

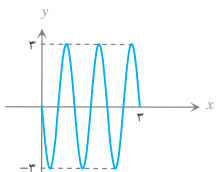
- (۱) صفر  
(۲)  $\frac{1}{2}$   
(۳) ۱  
(۴) ۲



۱۶۷. شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $y = 1 + a \sin(bx - \frac{\pi}{6})$  است.  $a + b$  کدام است؟

خارج - ۱۳۹۵

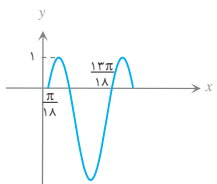
- (۱)  $\frac{1}{2}$   
(۲) ۱  
(۳)  $\frac{3}{2}$   
(۴) ۲



۱۶۸. شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع  $y = a \sin(b\pi x)$  است.  $a \cdot b$  کدام است؟

خارج - ۱۳۹۲

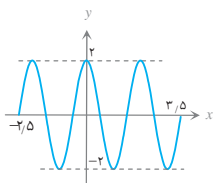
- (۱) -۶  
(۲) -۳  
(۳)  $4/5$   
(۴) ۶



۱۶۹. شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $y = a - 2 \cos(bx + \frac{\pi}{3})$  است.  $a + b$  کدام است؟

داخل - ۱۳۹۵

- (۱)  $\frac{1}{2}$   
(۲) ۱  
(۳)  $\frac{3}{2}$   
(۴) ۲



۱۷۰. شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع  $y = a \sin \pi(\frac{1}{4} + bx)$  است.  $a \cdot b$  کدام است؟

داخل - ۱۳۹۲

- (۱) ۲  
(۲)  $2/5$   
(۳) ۳  
(۴)  $3/5$

داخل - ۱۳۸۹

۱۷۱. تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & ; x \geq 0 \\ \frac{1}{x} & ; x < 0 \end{cases}$  بر روی مجموعه اعداد حقیقی چگونه است؟

- (۱) یک‌به‌یک، نزولی  
(۲) یک‌به‌یک، صعودی  
(۳) یک‌به‌یک، غیریکنوا  
(۴) غیریک‌به‌یک، غیریکنوا

داخل - ۱۳۹۴

۱۷۲. نمودار تابع  $y = |2x - 6| - |x + 4| + x$  در یک بازه اکیداً نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه کدام است؟

- (۱)  $y = -x + 6; x < -4$   
(۲)  $y = -x + 5; x > 2$   
(۳)  $y = -\frac{1}{2}x + 1; -4 < x < 3$   
(۴)  $y = -\frac{1}{2}x + 1; -1 \leq x \leq 10$

داخل - ۱۳۸۶

۱۷۳. عبارت  $x^2 - 4$  بر  $x^2 + 4ax^2 + 2bx + 1$  بخش پذیر است.  $a + b$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{15}{8}$   
(۲)  $-\frac{17}{16}$   
(۳)  $\frac{17}{16}$   
(۴)  $\frac{15}{8}$

خارج - ۱۳۹۳

۱۷۴. حاصل عبارت  $\frac{t^8 - t^7 + t^6 - \dots - t + 1}{t^6 - t^3 + 1}$ ، به‌ازای  $t = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$  کدام است؟

- (۱) ۳  
(۲) ۴  
(۳) ۵  
(۴) ۶





۱۷۵. به ازای مقداری از  $a$  چندجمله‌ای  $f(x) = x^6 + ax^3 - 8x$  بر  $x + 2$  بخش پذیر است. کوچک‌ترین ریشه معادله  $f(x) = 0$  کدام

داخل - ۱۳۹۴

است؟

- (۱)  $1 - \sqrt{3}$  (۲)  $1 - \sqrt{5}$  (۳)  $-1 - \sqrt{3}$  (۴)  $-1 - \sqrt{5}$

خارج - ۱۳۸۷

۱۷۶. اگر یکی از ریشه‌های معادله  $x(ax^2 - x - 5) = 2$  برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشه دیگر آن کدام است؟

- (۱)  $-2$  (۲)  $-\frac{3}{2}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

۱۷۷. اگر عبارت  $x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 + k$  به ازای هر عدد طبیعی  $n$  بر دوجمله‌ای  $x + 2$  بخش پذیر باشد. آنگاه باقی‌مانده تقسیم

داخل - ۱۳۸۹

آن بر  $x^2 - 1$  کدام است؟

- (۱)  $-3x - 6$  (۲)  $2x + 4$  (۳)  $-2x + 1$  (۴)  $3x - 4$

خارج - ۱۳۹۴

۱۷۸. اگر عبارت  $x^6 + ax^2 - bx + 4$  بر  $(x-1)^2$  بخش پذیر باشد،  $b$  کدام است؟

- (۱)  $3$  (۲)  $4$  (۳)  $5$  (۴)  $6$

داخل - ۱۳۹۵

۱۷۹. اگر عبارت  $a - 14x + 10 - 4x^2 + ax^3$  بر سه‌جمله‌ای  $x^2 - 2x + 1$  بخش پذیر باشد،  $a$  کدام است؟

- (۱)  $1$  (۲)  $2$  (۳)  $3$  (۴)  $4$

۱۸۰. باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $P(x)$  بر  $x - 2$  و  $x + 3$  به ترتیب ۱ و  $-4$  است. باقی‌مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $x^2 + x - 6$  کدام است؟

خارج - ۱۳۹۷

- (۱)  $x - 1$  (۲)  $x + 1$  (۳)  $-x + 2$  (۴)  $2x - 1$



پاسخ تشریحی پرسش‌های فصل ۱

۱. گزینه ۴ نمودار  $f$  به چپ انتقال یافته؛ پس  $b > 0$  و سپس به پایین منتقل شده؛ پس  $a < 0$ .

۲. گزینه ۳ نمودار تابع  $af(bx)$  با فرض  $a > 1$  از انبساط عمودی و با فرض  $0 < b < 1$  از انبساط افقی  $f(x)$  به دست می‌آید. بنابراین نمودار  $f(x)$  در راستای محور  $x$  ها سه برابر منبسط شده و در راستای محور  $y$  ها نیز دو برابر منبسط گردیده است.

۳. گزینه ۱۱ اگر  $k > 1$ ، نمودار  $f(kx)$  از انقباض نمودار  $f(x)$  در راستای محور  $x$  ها به دست می‌آید.

هریک از گزینه‌ها به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\cos 2x \text{ : انقباض در راستای محور } x \text{ ها}$$

$$\cos \frac{1}{4} x \text{ : انبساط در راستای محور } x \text{ ها}$$

$$2 \cos x \text{ : انبساط در راستای محور } y \text{ ها}$$

$$\frac{1}{4} \cos x \text{ : انقباض در راستای محور } y \text{ ها}$$

۴. گزینه ۴ نمودار  $f$  دو واحد به چپ منتقل شده:

$$-f(x+2) \text{ : سپس نسبت به محور } x \text{ ها قرینه شده:}$$

$$-2f(x+2) \text{ : سپس در راستای محور } y \text{ ها دو برابر منبسط شده:}$$

و در نهایت در راستای محور  $y$  ها یک واحد به پایین منتقل شده:

$$-2f(x+2) - 1$$

۵. گزینه ۲

$$2 - |x| \rightarrow 2 - |x - 2| \rightarrow (2 - |x - 2|) - 1 \rightarrow 1 - |2x - 2|$$

بنابراین:

$$1 - |2x - 2| = 0 \Rightarrow 2x - 2 = \pm 1 \Rightarrow 2x = 1, 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

۶. گزینه ۲ برای رسم  $f(3x)$  از روی  $f(x)$ ،  $x$  ها بر ۳ تقسیم می‌شوند و برای رسم  $2f(3x)$ ،  $y$  ها در ۲ ضرب می‌شوند. پس نقطه

$$\left(\frac{x_0}{3}, 2y_0\right) \text{ روی نمودار جدید است.}$$

$$\text{راه دوم: با مقایسه } \begin{cases} y_0 = f(x_0) \\ y = f(3x) \end{cases} \text{ می‌دانیم } \begin{cases} \frac{y}{2} = y_0 \\ 3x = x_0 \end{cases} \text{ پس } \begin{cases} x = \frac{x_0}{3} \\ y = 2y_0 \end{cases}$$

۷. گزینه ۲ معادله  $y = 0$  را بررسی می‌کنیم:

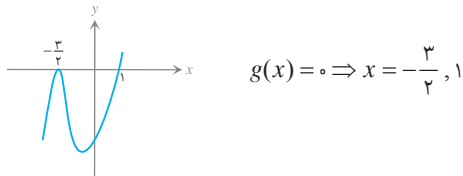
$$y = 0 \Rightarrow f(1+2x) - 2 = 0 \Rightarrow f(1+2x) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+2x = -2 \\ 1+2x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{1}{2}$$

راه دوم: نمودار تابع  $f(1+2x) - 2$  را رسم می‌کنیم. ترتیب رسم به صورت زیر است:

$$f(x) \Rightarrow f(1+x) \Rightarrow f(1+2x) \Rightarrow f(1+2x) - 2$$

$$g(x) = f(1+2x) - 2$$



۸. گزینه ۳  $y = f(2x)$  همان  $f(x)$  است که در راستای محور  $x$  ها دو برابر فشرده شده؛ پس دامنه  $f(2x)$  زیرمجموعه  $f(x)$  است.

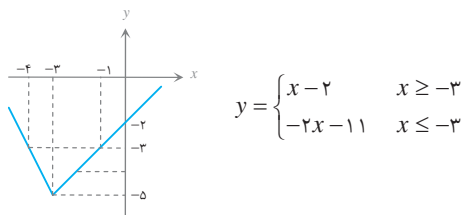
۹. گزینه ۲ طول بازه دو برابر شده و نمودار نسبت به محور  $y$  نیز قرینه شده است؛ پس  $b = -\frac{1}{4}$ . طول بازه برد تغییر نکرده و نمودار نسبت به محور  $x$  قرینه نشده است؛ پس  $-a = 1$ ؛ یعنی  $a = -1$ . در این صورت  $a + b = -1/5$ .

۱۰. گزینه ۴ اگر نمودار  $f(x)$  را یک واحد به چپ منتقل کنیم؛ سپس در راستای محور  $y$  ها ۳ برابر منبسط کرده و نسبت به محور  $x$  ها قرینه کنیم و آنگاه ۲ واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار  $x$  ها قرینه  $y = 2 - 3f(1+x)$  حاصل می‌شود؛ پس اگر  $(x_0, y_0)$  روی منحنی  $y = f(x)$  باشد، نقطه  $(x_0 - 1, 2 - 3y_0)$  روی منحنی  $g(x) = 2 - 3f(1+x)$  قرار دارد.

$$(2, 3) \in f \Rightarrow (2-1, 2-3 \times 3) \in g \Rightarrow (1, -7) \in g$$

پس  $\alpha = 1$  و  $\beta = -7$  و  $\alpha\beta = -7$  است.

۱۱. گزینه ۲ اگر نقاط  $(0, 0)$ ،  $(-2, -2)$  و  $(-3, 0)$  را یک واحد به چپ و سه واحد به پایین انتقال دهیم به نقاط  $(-1, -3)$ ،  $(-3, -5)$  و  $(-4, -3)$  می‌رسیم. در اثر انتقال، شیب‌ها تغییر نمی‌کنند. ضابطه تابع به دست آمده را می‌نویسیم:



$$y = \begin{cases} x - 2 & x \geq -3 \\ -2x - 11 & x \leq -3 \end{cases}$$

معادله  $y = 0$  دارای ریشه‌های  $\alpha = 2$  و  $\beta = -\frac{11}{2}$  است؛ پس

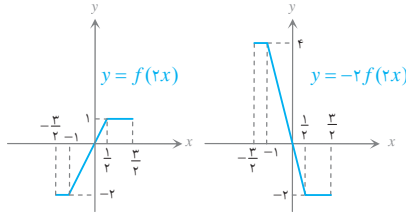
$$\alpha + \beta = -\frac{7}{2}$$



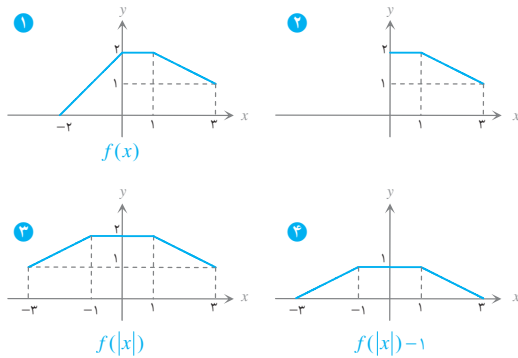
راه سوم: تبدیل  $x_0$  به  $\frac{x_0}{\pi}$  یعنی نمودار در راستای محور  $x$  ها دو برابر منقبض شده؛ پس  $\cos x$  به  $\cos 2x$  تبدیل می‌شود. تبدیل  $y$  به  $y_0 - y$ ، یعنی نمودار نسبت به محور  $x$  ها قرینه شده و یک واحد به بالا منتقل شده است؛ پس:

$$y = 1 - \cos 2x \Rightarrow y = 2 \sin^2 x$$

۱۷. گزینه ۳ نمودار  $f(x)$  را به  $g(x)$  تبدیل می‌کنیم.



۱۸. گزینه ۲ برای رسم  $f(|x|)$ ، سمت چپ نمودار  $f(x)$  را حذف کرده و قرینه سمت راست آن را نسبت به محور  $y$  ها به آن اضافه می‌کنیم.



$$\frac{6+2}{\pi} \times 1 = 4 \quad \text{مساحت دوزنقه به دست آمده برابر است با:}$$

۱۹. گزینه ۴ فاصله دو مینیمم تابع  $y = \cos x$  برابر  $2\pi$  است؛ اما در این شکل  $\pi$  است؛ بنابراین نمودار دو برابر فشرده شده است؛ لذا  $b = \pm 2$  ضمناً نمودار از مبدأ می‌گذرد؛ پس:

$$y(0) = 0 \Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a + |b| = 2 + 2 = 4$$

۲۰. گزینه ۴ باید به دنباله الگویی باشیم که اعداد روی محور  $x$  ها، یعنی ۵ و ۳ و ۱ و -۱ و -۵ و -۷ را به اعداد ۲ و ۱ و -۱ و -۳ و -۴ تبدیل

کند. یکی از این الگوها  $\frac{x-1}{\pi}$  است.

راه دوم: یکی از نقاط روی  $f$  را آزمایش می‌کنیم:

$$\begin{cases} \text{نادرست} & (\frac{5}{\pi}, 2) \in g & \text{گزینه «۱»} \\ \text{نادرست} & (2, 2) \in g & \text{گزینه «۲»} \\ \text{نادرست} & (7, 2) \in g & \text{گزینه «۳»} \\ \text{درست} & (1, 2) \in g & \text{گزینه «۴»} \end{cases}$$

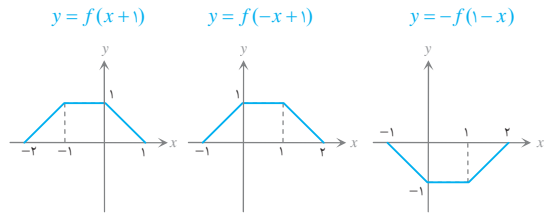
راه سوم: نمودار  $f$  را یک واحد به چپ منتقل کرده‌ایم و سپس آن را در راستای محور  $x$  ها دو برابر منقبض نموده‌ایم؛ پس:

$$f(x) \rightarrow f(x+1) \rightarrow f(2x+1) = g(x)$$

از طرفی  $y_0 = f(x_0)$ . اگر  $2x+1 = x_0$  باشد، داریم  $x = \frac{x_0-1}{\pi}$ ؛ پس:

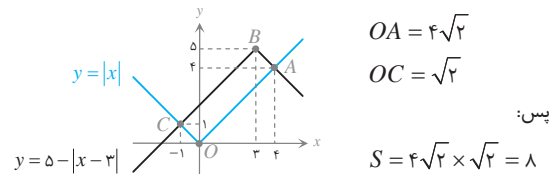
$$y_0 = f(x_0) = g\left(\frac{x_0-1}{\pi}\right)$$

۱۲. گزینه ۲



$$y = |x| \rightarrow |x-3| \rightarrow -|x-3| \rightarrow -|x-3| + 5 \quad \text{گزینه ۲}$$

با توجه به شکل:



$$OA = 4\sqrt{2}$$

$$OC = \sqrt{2}$$

پس:

$$S = 4\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 8$$

۱۴. گزینه ۲ در تابع  $f(x+1)$  محدوده تغییرات  $x$  بازه  $[1, 4]$  است؛ پس:

$$1 \leq x \leq 4 \Rightarrow 2 \leq x+1 \leq 5$$

پس  $f$  برای مقادیر متعلق به بازه  $[2, 5]$  تعریف شده است؛ پس:

$$2 \leq 2x-3 \leq 5 \Rightarrow 5 \leq 2x \leq 8 \Rightarrow 2.5 \leq x \leq 4$$

$$\Rightarrow D = [2.5, 4]$$

$$-2 \leq f(2x-3) \leq 1 \Rightarrow -4 \leq 2f(2x-3) \leq 2$$

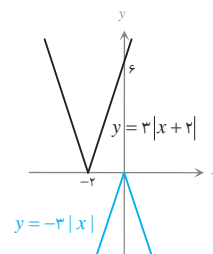
$$\Rightarrow -3 \leq 2f(2x-3) + 1 \leq 3 \Rightarrow R = [-3, 3]$$

$$D \cap R = [2.5, 3]$$

پس:

$$y = 3|x+2| \rightarrow 3|(x-2)+2| = 3|x| \rightarrow -3|x| \quad \text{گزینه ۴}$$

اگر نمودار  $3|x|$  را ۶ واحد به بالا منتقل کنیم، بخشی از یک شاخه آن بر بخشی از یک شاخه نمودار اولیه منطبق می‌شود.



۱۶. گزینه ۲

$$\begin{cases} g\left(\frac{x_0}{\pi}\right) = 1 - y_0 \\ \cos x_0 = y_0 \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 \frac{x_0}{\pi} = y_0 \Rightarrow 2 \sin^2 \frac{x_0}{\pi} = 1 - y_0 \end{cases}$$

$$\text{پس } g\left(\frac{x_0}{\pi}\right) = 2 \sin^2 \frac{x_0}{\pi} \text{ و در نتیجه } g(x) = 2 \sin^2 x$$

راه دوم: مختصات نقطه جدید را  $(x, y)$  فرض می‌کنیم. در این صورت:

$$\begin{cases} x = \frac{x_0}{\pi} \Rightarrow x_0 = \pi x \\ y = 1 - y_0 \Rightarrow y_0 = 1 - y \end{cases}$$

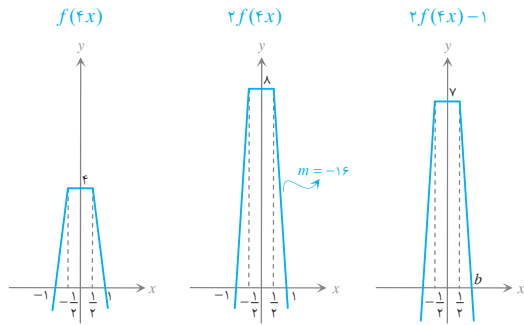
با جای گذاری در ضابطه داده شده داریم:

$$1 - y = \cos 2x \Rightarrow y = 1 - \cos 2x \Rightarrow y = 2 \sin^2 x$$





۲۵. گزینه ۱ نمودار را در راستای محور  $x$  چهار برابر فشرده می‌کنیم؛ سپس در راستای محور  $y$  دو برابر منبسط می‌کنیم و سپس یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم.

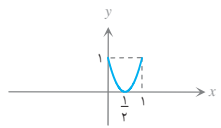


برای پیدا کردن  $b$  می‌توان با توجه به شیب خط  $m = -16$  نوشت:

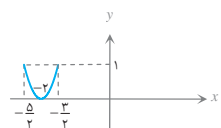
$$-16 = \frac{0 - 7}{b - \frac{1}{2}} \Rightarrow -16b + 8 = -7 \Rightarrow b = \frac{15}{16}$$

پس:

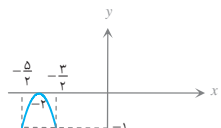
$$S = \frac{(1 + \frac{15}{16}) \times 7}{2} \times \frac{8}{16} = \frac{23 \times 7}{16} = \frac{161}{16}$$



۲۶. گزینه ۴ نمودار  $f(x)$  در راستای محور  $x$  دو برابر منقبض شده  $f(2x)$  است:



سپس نمودار  $\frac{5}{2}$  واحد به چپ منتقل شده:

$$f(2(x + \frac{5}{2})) = f(2x + 5)$$


سپس نمودار نسبت به محور  $x$  ها قرینه شده:

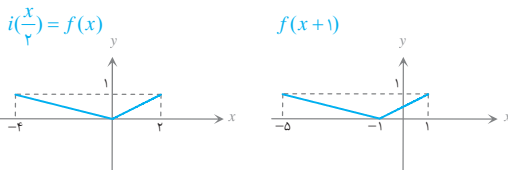
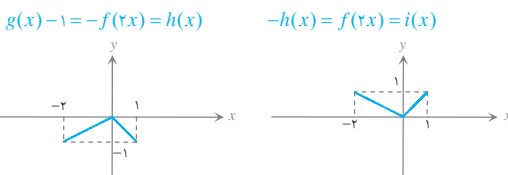
$$-f(2x + 5)$$


سپس در راستای محور  $y$  دو برابر منبسط شده:

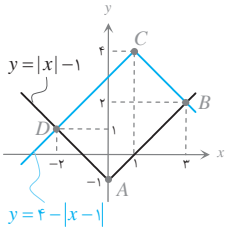
$$-2f(2x + 5)$$

و در نهایت یک واحد به پایین منتقل شده:  $-2f(2x + 5) - 1$

۲۷. گزینه ۴ نمودار داده شده را  $g(x)$  می‌نامیم:



۲۱. گزینه ۳  $y = 3 - f(x-1) = 3 - (|x-1| - 1) = 4 - |x-1|$  با توجه به شکل:

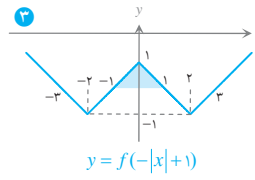
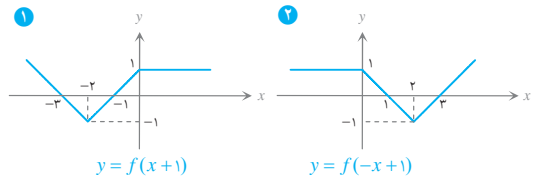


$$AB = \sqrt{(3-1)^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$AD = \sqrt{(1-(-1))^2 + (0-4)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$S \Rightarrow AB \times AD = 12$$

۲۲. گزینه ۱



پس مساحت ناحیه برابر  $1 = \frac{2 \times 1}{2}$  است.

۲۳. گزینه ۴ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

- گزینه «۱»:  $f(x+4) \rightarrow f(2x+4) \rightarrow f(2(-x)+4)$  ✓
- گزینه «۲»:  $f(2x) \rightarrow f(2(x+2)) \rightarrow f(2x+4) \rightarrow f(2(-x)+4)$  ✓
- گزینه «۳»:  $f(-x) \rightarrow f(-(-x-4)) \rightarrow f(-x+4) \rightarrow f(-2x+4)$  ✓
- گزینه «۴»:  $f(-x) \rightarrow f(-2x) \rightarrow f(-2(x+2)) = f(-2x-4)$  ✗

۲۴. گزینه ۴ گزینه «۱»:

$$f(x) \rightarrow f(x+1) \rightarrow -f(x+1) \rightarrow -f(x+1)+1$$

گزینه «۲»:

$$f(2x)-1 \rightarrow -f(2x)+1 \rightarrow -f(2(x+\frac{1}{2}))+1$$

$$= -f(2x+1)+1 \rightarrow -f(2(\frac{x}{2}))+1+1$$

گزینه «۳»:

$$-f(2x) \rightarrow -f(2(\frac{x}{2})) = -f(x) \rightarrow -f(x+1)$$

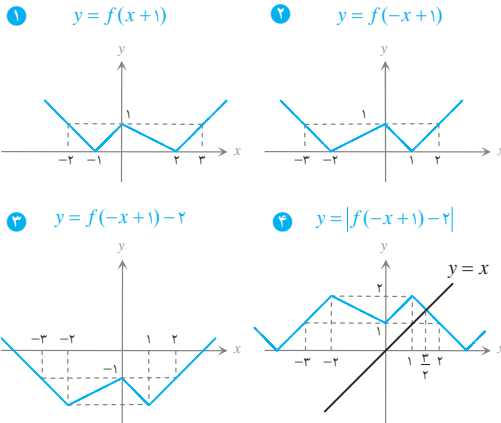
$$\rightarrow -f(x+1)+1$$

گزینه «۴»:

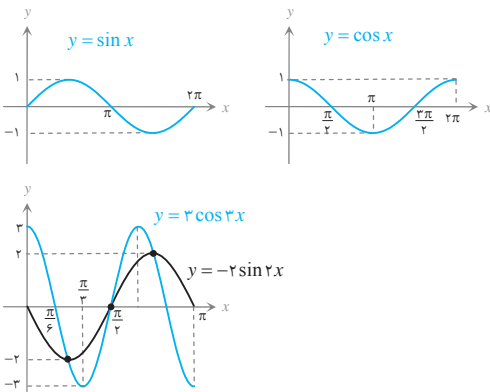
$$f(2(x+1)) = f(2x+2) \rightarrow f(2(\frac{x}{2}))+2 = f(x+2)$$

$$\rightarrow -f(x+2) \rightarrow -f(x+2)+1$$

۳۲. گزینه ۲



۳۳. گزینه ۳



دو نمودار در سه نقطه متقاطع‌اند.

۳۴. گزینه ۲  $g(x) = 1 + f(x+a) = 1 + \sin(x+a)$ نمودار  $g$  از مبدأ گذشته است؛ پس:

$$g(0) = 0 \Rightarrow 1 + \sin(0+a) = 0 \Rightarrow \sin a = -1$$

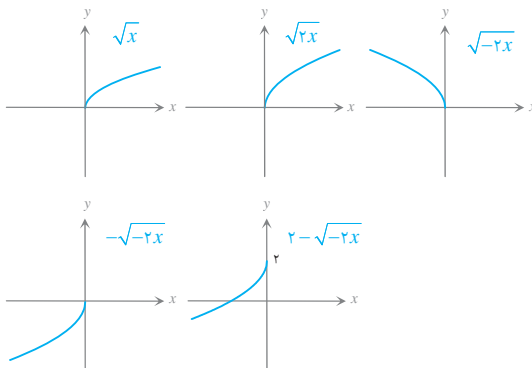
در این گزینه‌ها فقط  $a = -\frac{\pi}{2}$  می‌تواند صحیح باشد.۳۵. گزینه ۲ با جای‌گذاری  $x=1$  در رابطه داده‌شده، داریم:

$$f(3) = 3 \quad \text{با جای‌گذاری } x=3 \text{ در ضابطه دوم داریم:}$$

$$y = 2f(2(3)-3) = 2f(3) = 6$$

پس نقطه  $(3, 6)$  روی نمودار تابع دوم قرار دارد.۳۶. گزینه ۱ با توجه به نمودار  $\sqrt{x}$ ، برای رسم  $2 - \sqrt{-2x}$ 

به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم

۲۸. گزینه ۱ در تابع اولیه به‌ازای  $x=1$  داریم:

$$f(4) = 1 + 4 = 5 \Rightarrow f(4) = 5$$

با جای‌گذاری  $x=2$  در تابع داریم:

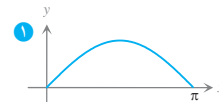
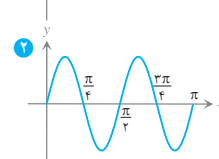
$$y = 2 + f(4) = 2 + 5 = 7 \Rightarrow y(2) = 7$$

پس نقطه  $(2, 7)$  روی نمودار است.

$$f(x+3) = x + \frac{f}{x} \Rightarrow f(x) = x - 3 + \frac{f}{x-3} \quad \text{راه دوم:}$$

$$\Rightarrow f(2x) = 2x - 3 + \frac{f}{2x-3} \Rightarrow 2 + f(2x) = 2x - 1 + \frac{f}{2x-3}$$

$$\Rightarrow y = g(x) = 2x - 1 + \frac{f}{2x-3}$$

ملاحظه می‌شود که  $g(2) = 7$ .در فاصله  $[0, \pi]$  محور  $x$  ها را دردو نقطه  $0$  و  $\pi$  قطع می‌کند.اگر نمودار  $\sin kx$  مطابق شکلمحور  $x$  را در فاصله  $[0, \pi]$  در ۵

نقطه قطع کند، و اگر مطابق

شکل ۳ در ۶ نقطه قطع کند،

 $k=5$ ؛ بنابراین اگر  $4 \leq k < 5$ ،نمودار  $y = \sin kx$  محور  $x$  ها را

در ۵ نقطه قطع خواهد کرد.

راه دوم: نمودار  $\sin kx$  در نقاطی به طول  $n\pi, n \in \mathbb{Z}$  محور  $x$  را قطع

$$kx = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\pi}{k}$$

می‌کند؛ پس:

به‌ازای  $n=0, 1, 2, \dots, 5$  داریم:

$$x = 0, \frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}, \frac{3\pi}{k}, \frac{4\pi}{k}, \frac{5\pi}{k}$$

$$\begin{cases} \frac{4\pi}{k} \leq \pi \Rightarrow k \geq 4 \\ \frac{5\pi}{k} > \pi \Rightarrow k < 5 \end{cases} \Rightarrow k \in [4, 5)$$

باید:

۳۰. گزینه ۴  $g(-x) = -f(x) \Rightarrow g(x) = -f(-x)$ بنابراین، اگر نمودار  $f(x)$  ابتدا نسبت به محور  $y$  قرینه شود  $(f(-x))$ و سپس نسبت به محور  $x$  قرینه شود  $(-f(-x))$  نمودار  $g(x)$ 

حاصل می‌شود؛ پس دو نمودار نسبت به مبدأ مختصات متقارن‌اند.

۳۱. گزینه ۱ نمودار  $y = \frac{1}{x}$  را یک واحد به راست منتقل می‌کنیم:

$$y = \frac{1}{x-1} \quad \text{و سپس یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا تابع}$$

$$y = 1 + \frac{1}{x-1} \quad \text{حاصل شود.}$$

