فصل اول

هندسه مقدماتی ۱

۱-۱ همنهشتی مثلث‌ها

هدف بخش: در این بخش با مثلث‌های همنهشت و خواص آن‌ها آشنا شده و سعی می‌شود با همین مفهوم ساده هندسی مسایلی در سطوح بالا طرح و بررسی شود.

تعریف: دو مثلث همنهشت دو مثلثی هستند که بتوان کاملاً بر یکدیگر منطبق کرد.

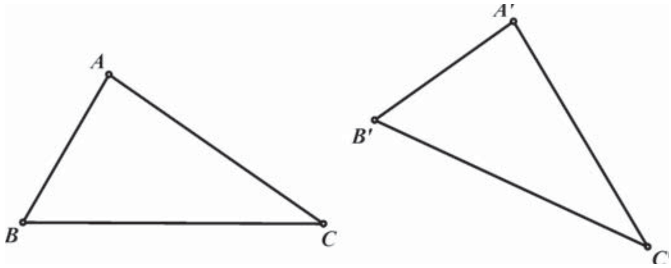
بدیهی است که در دو مثلث همنهشت یا قابل انطباق اضلاع دو به دو با یکدیگر و زوایا نیز دو به دو با یکدیگر برابرند، که به این زوایا و اضلاع برابر، زوایا و اضلاع متناظر می‌گوییم.

به عنوان مثال اگر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ همنهشت باشند ($A\overset{\triangle}{B}C = A'\overset{\triangle}{B'}C'$) بطوری که $\widehat{A} = \widehat{A'}$، $\widehat{B} = \widehat{B'}$ و $\widehat{C} = \widehat{C'}$ آنگاه اضلاع متناظر AB و AC نیز به ترتیب برابر اضلاع $A'B'$ و $A'C'$ خواهند بود.

دو مثلث، بنابر هر یک از سه حالت زیر با یکدیگر همنهشت خواهند بود:

الف) **قضیه ۱-۱:** هرگاه دو ضلع و زاویه بین آن‌ها از مثلثی با دو ضلع و زاویه بین آن‌ها از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث همنهشت هستند.

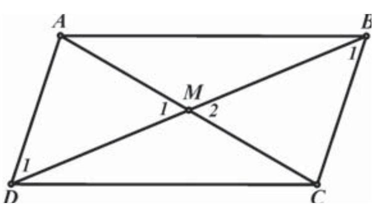
$$\left.\begin{array}{r} AB = A'B' \\ \widehat{A} = \widehat{A'} \\ AC = A'C' \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$$



برای اثبات کافی است دو مثلث را بر روی زوایای مساوی A و A' بر یکدیگر منطبق کنیم، از آنجا که $AB = A'B'$ و $AC = A'C'$ هستند، رئوس B، B' و همچنین C، C' نیز بر یکدیگر منطبق خواهند شد.

مسأله ۱-۱: ثابت کنید هر چهارضلعی که اقطار آن یکدیگر رانصف کنند، یک متوازی‌الاضلاع است. (متوازی‌الاضلاع چهارضلعی است که اضلاع آن دو به دو با یکدیگر موازی‌اند.)

در چهارضلعی $ABCD$، محل تقاطع دو قطر AC و BD را M می‌نامیم



$$\left.\begin{array}{r} MA = MC \\ \widehat{M_1} = \widehat{M_2} \\ MD = MB \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{MAD} = \overset{\triangle}{MCB}$$

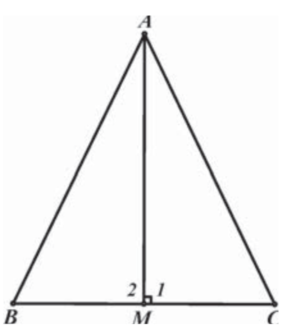
$$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{D_1} \Rightarrow BC \| AD$$

به ترتیب مشابه می‌توان نشان داد: $AB \| CD$

در نتیجه $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است.

مسأله ۱-۲: ثابت کنید هر مثلثی که میانه و ارتفاع آن بر یکدیگر منطبق باشد، یک مثلث متساوی‌الساقین است.

در مثلث ABC، AM هم میانه و هم ارتفاع است.



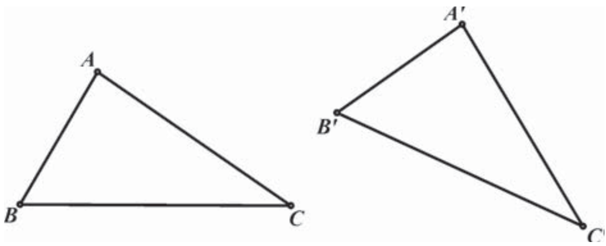
$$\left.\begin{array}{r} BM = CM \\ \widehat{M_1} = \widehat{M_2} = 90^\circ \\ AM = AM \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{AMB} = \overset{\triangle}{AMC} \Rightarrow AB = AC$$

در نتیجه مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

نتیجه: هر نقطه روی عمود منصف یک پاره‌خط، از دو سر آن به یک فاصله است.

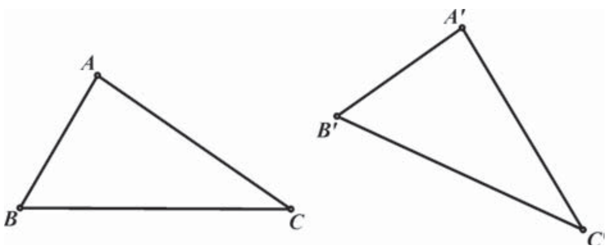
ب) **قضیه ۱-۲:** هرگاه دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلثی با دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث همنهشت هستند.

$$\left.\begin{array}{c}\widehat{B} = \widehat{B'} \\ BC = B'C' \\ \widehat{C} = \widehat{C'}\end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C = A'\overset{\triangle}{B'}C'$$



اثبات این حالت نیز مانند حالت قبل است که به خود شما واگذار می‌شود.

مسأله ۱-۳: اگر در دو مثلث ABC و $A'B'C'$، $BC = B'C'$ و $\widehat{A} = \widehat{A'}$ و $\widehat{B} = \widehat{B'}$ باشد ثابت کنید: $A\overset{\triangle}{B}C = A'\overset{\triangle}{B'}C'$



می‌دانیم که در هر مثلث مجموع زوایای داخلی برابر ۱۸۰° است. پس داریم:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{C} = ۱۸۰^\circ - \widehat{A} - \widehat{B}$$

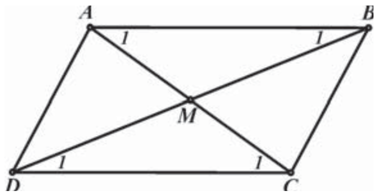
$$\widehat{A'} + \widehat{B'} + \widehat{C'} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{C'} = ۱۸۰^\circ - \widehat{A'} - \widehat{B'}$$

$$\left.\begin{array}{c}\widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'}\end{array}\right\} \Rightarrow ۱۸۰^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = ۱۸۰^\circ - \widehat{A'} - \widehat{B'}$$

با توجه به روابط بالا نتیجه می‌گیریم که زوایای C و C' نیز با هم برابرند.

$$\left.\begin{array}{c}\widehat{B} = \widehat{B'} \\ BC = B'C' \\ \widehat{C} = \widehat{C'}\end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C = A'\overset{\triangle}{B'}C'$$

مسأله ۱-۴: ثابت کنید هر چهارضلعی که دو ضلع روبروی آن با یکدیگر مساوی و موازی باشد، یک متوازی‌الاضلاع است.



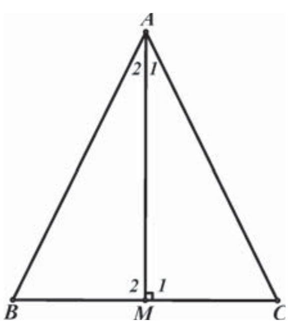
در چهارضلعی $ABCD$ اضلاع AB و CD با یکدیگر مساوی و موازی‌اند. محل برخورد اقطار AC و BD را M می‌نامیم.

$$AB \| CD \Rightarrow \left.\begin{cases} \widehat{A_۱} = \widehat{C_۱} \\ \widehat{B_۱} = \widehat{D_۱} \\ AB = CD \end{cases}\right\} \Rightarrow M\overset{\triangle}{A}B = M\overset{\triangle}{C}D$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AM = CM \\ BM = DM \end{cases}$$

در چهارضلعی $ABCD$ اقطار AC و BD یکدیگر را نصف می‌کنند. پس طبق مسأله ۱-۱ $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است.

مسأله ۱-۵: ثابت کنید هر مثلثی که نیمساز و ارتفاع آن بر یکدیگر منطبق باشند، یک مثلث متساوی‌الساقین است.



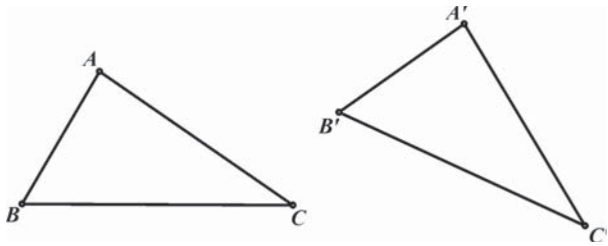
در مثلث ABC، AM هم نیمساز و هم ارتفاع است.
بنابراین دو مثلث ABM و ACM به حالت دو زاویه و ضلع بین با یکدیگر همنهشت‌اند.

$$\left.\begin{matrix} \widehat{A_۱} = \widehat{A_۲} \\ AM = AM \\ \widehat{M_۱} = \widehat{M_۲} = ۹۰^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}M = A\overset{\triangle}{C}M \Rightarrow AB = AC$$

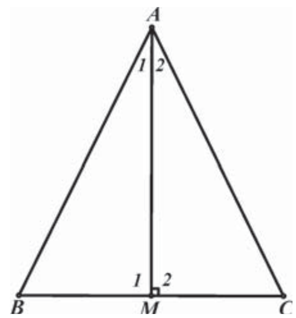
در نتیجه مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

ج) **قضیه ۱-۳:** هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث با یکدیگر همنهشت هستند.

$$\left.\begin{matrix} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{matrix}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C = A'\overset{\triangle}{B'}C'$$



مسأله ۱-۶: ثابت کنید در هر مثلث متساوی‌الساقین، میانه وارد بر قاعده، ارتفاع و نیمساز نیز می‌باشد.



در مثلث متساوی‌الساقین ABC، AM میانه‌ی وارد بر قاعده است.

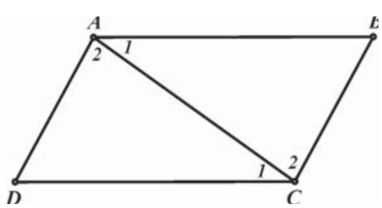
$$\left.\begin{aligned} AB &= AC \\ BM &= CM \\ AM &= AM \end{aligned}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}M = A\overset{\triangle}{C}M \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A_۱} = \widehat{A_۲} \\ \widehat{M_۱} = \widehat{M_۲} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\widehat{M_۱} = \widehat{M_۲} \\ &\widehat{M_۱} + \widehat{M_۲} = ۱۸۰^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \widehat{M_۱} = \widehat{M_۲} = ۹۰^\circ$$

در نتیجه، AM، نیمساز و ارتفاع مثلث ABC می‌باشد.

نتیجه: از همنهشتی دو مثلث $A\overset{\triangle}{B}M$ و $A\overset{\triangle}{C}M$ می‌توان نتیجه گرفت در هر مثلث متساوی‌الساقین دو زاویه مجاور به قاعده با یکدیگر برابرند ($\widehat{B} = \widehat{C}$) و بالعکس.

مسأله ۱-۷: ثابت کنید هر چهارضلعی که اضلاع مقابل آن دو به دو با یکدیگر برابر باشند، یک متوازی‌الاضلاع است.



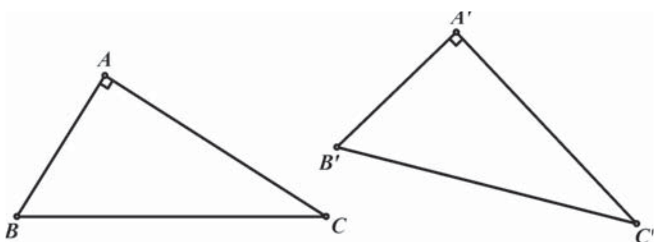
$$\left.\begin{array}{r} AB = CD \\ AD = BC \\ AC = AC \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{CAD} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A_۱} = \widehat{C_۱} \Rightarrow AB||CD \\ \widehat{A_۲} = \widehat{C_۲} \Rightarrow AD||BC \end{cases}$$

در نتیجه چهارضلعی $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است.

دو مثلث قائم‌الزاویه علاوه بر سه حالت گذشته، بنابر هر یک از دو حالت زیر نیز همنهشت خواهند بود:

الف) **قضیه ۱-۴:** هرگاه وتر و یک زاویه حاده از مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر و یک زاویه حاده از مثلث قائم‌الزاویه دیگری برابر باشند، آن دو مثلث همنهشت خواهند بود.

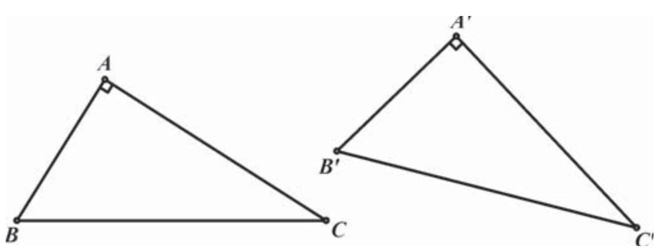
$$\left.\begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{A'} = ۹۰^\circ \\ BC = B'C' \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$$



اثبات این قضیه مشابه مسأله ۱-۳ می‌باشد.

ب) **قضیه ۱-۵:** هرگاه وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ی دیگری برابر باشند، آن دو مثلث با یکدیگر همنهشت خواهند بود.

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{A'} = ۹۰^\circ \\ BC = B'C' \\ AB = A'B' \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$$



طبق قضیه فیثاغورث در هر مثلث قائم‌الزاویه داریم:

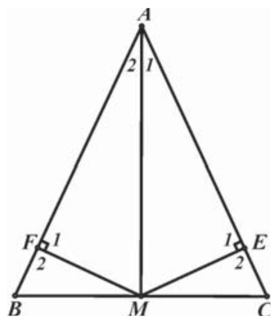
$$\begin{cases} AB^{۲} + AC^{۲} = BC^{۲} & \Rightarrow AC^{۲} = BC^{۲} - AB^{۲} \\ A'B'^{۲} + A'C'^{۲} = B'C'^{۲} & \Rightarrow A'C'^{۲} = B'C'^{۲} - A'B'^{۲} \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} BC = B'C' \\ AB = A'B' \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC^{۲} - AB^{۲} = B'C'^{۲} - A'B'^{۲}$$

$$\Rightarrow AC^{۲} = A'C'^{۲} \Rightarrow AC = A'C'$$

بنابراین دو مثلث به حالت سه ضلع با هم همنهشت می‌شوند.

مسأله ۱-۸: ثابت کنید هر مثلثی که میانه و نیمساز آن بر یکدیگر منطبق باشند، یک مثلث متساوی‌الساقین است.



میانه AM از مثلث ABC را رسم می‌کنیم و پای عمودهای وارد از M بر اضلاع AC و AB را به ترتیب E و F می‌نامیم.

$$\left.\begin{matrix} \widehat{E_۱} = \widehat{F_۱} = ۹۰^\circ \\ AM = AM \\ \widehat{A_۱} = \widehat{A_۲} \end{matrix}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{M}E = A\overset{\triangle}{M}F \Rightarrow \begin{cases} AE = AF \\ ME = MF \end{cases} \qquad (۱)$$

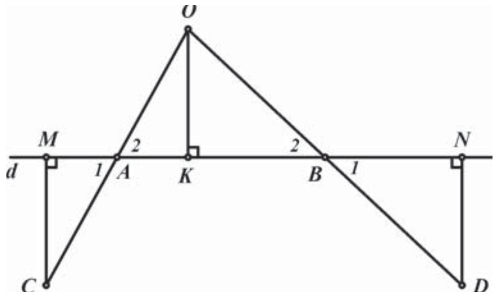
$$\left.\begin{matrix} \widehat{E_۲} = \widehat{F_۲} = ۹۰^\circ \\ MC = MB \\ ME = MF \end{matrix}\right\} \Rightarrow M\overset{\triangle}{C}E = M\overset{\triangle}{B}F \Rightarrow CE = BF \qquad (۲)$$

با جمع روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$AE + CE = AF + BF \Rightarrow AC = AB$$

مسایل

۱) خط d و دو نقطه A و B روی آن و نقطه O خارج از آن مفروض‌اند. از O به A و B وصل کرده و هرکدام را به اندازه خودشان امتداد می‌دهیم تا نقاط C و D حاصل شوند. ثابت کنید نقاط C و D از خط d هم‌فاصله‌اند.



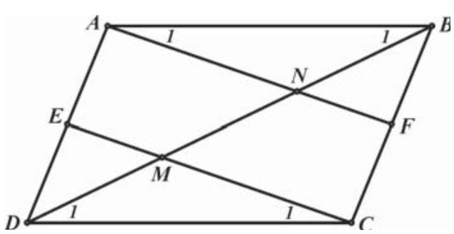
عمودهای CM، DN و OK را بر خط d رسم می‌کنیم. می‌دانیم مثلث‌های زیر به حالت وتر و یک زاویه حاده با هم برابرند. یعنی داریم:

$$\left.\begin{array}{r} OA = AC \\ \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \\ \widehat{M} = \widehat{K} = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow M\overset{\triangle}{A}C = K\overset{\triangle}{A}O \Rightarrow CM = OK \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{r} OB = BD \\ \widehat{B_1} = \widehat{B_2} \\ \widehat{N} = \widehat{K} = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow N\overset{\triangle}{B}D = K\overset{\triangle}{B}O \Rightarrow DN = OK \qquad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow CM = DN = OK$$

۲) متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مفروض است. اوساط اضلاع AD و BC را به ترتیب E و F می‌نامیم. اگر CE و AF قطر BD را به ترتیب در M و N قطع کنند، نشان دهید: $DM = BN$



برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم $A\overset{\triangle}{B}N = C\overset{\triangle}{D}M$. برای این منظور می‌دانیم که دو ضلع AB و CD که با هم برابرند و دو زاویه $\widehat{B_1}$ و $\widehat{D_1}$ نیز که به دلیل توازی AB و CD با هم برابرند. پس فقط کافی است نشان دهیم: $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$

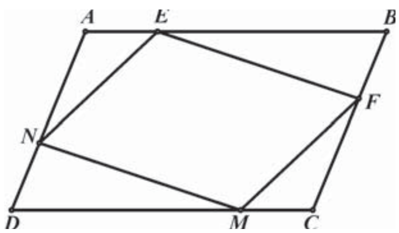
از آنجا که E و F اوساط AD و BC هستند داریم:

$$\left.\begin{array}{r} AE = CF \\ AE || CF \end{array}\right\} \Rightarrow AECF \text{ متوازی‌الاضلاع } \Rightarrow AF || CE$$

بنابراین چون اضلاع دو زاویه $\widehat{A_1}$ و $\widehat{C_1}$ با هم موازی‌اند پس این دو زاویه با هم برابرند یعنی داریم:

$$\left.\begin{array}{r} \widehat{A_1} = \widehat{C_1} \\ \widehat{B_1} = \widehat{D_1} \\ AB = CD \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}N = C\overset{\triangle}{D}M \Rightarrow BN = DM$$

۳) روی اضلاع AB، BC، CD و DA از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ به ترتیب چهار پاره‌خط AE، BF، CM و DN را بطور مساوی جدا می‌کنیم. ثابت کنید چهارضلعی $EFMN$ متوازی‌الاضلاع است.



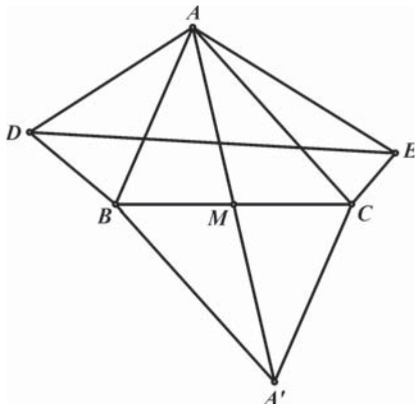
برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم هر دو ضلع روبرو از این چهارضلعی با هم برابرند.

$$\left.\begin{array}{r} AE = CM \\ \widehat{A} = \widehat{C} \\ DN = BF \Rightarrow AN = CF \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{E}N = C\overset{\triangle}{M}F \Rightarrow NE = MF$$

$$\left.\begin{array}{r} DN = BF \\ \widehat{D} = \widehat{B} \\ CM = AE \Rightarrow DM = BE \end{array}\right\} \Rightarrow D\overset{\triangle}{N}M = B\overset{\triangle}{F}E \Rightarrow NM = EF$$

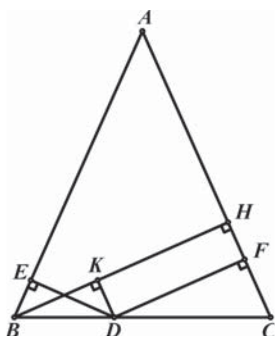
۴) روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC و در خارج از آن دو مثلث متساوی‌الساقین ABD و ACE را می‌سازیم بطوری که $AD = AB$ و $AC = AE$. اگر داشته باشیم $\widehat{DAE} = \widehat{B} + \widehat{C}$ و M نقطه وسط ضلع BC باشد، ثابت کنید: $DE = 2AM$

میانه AM را به اندازه خودش و از طرف M امتداد می‌دهیم تا نقطه A' حاصل شود. از آنجا که اقطار چهارضلعی $ABA'C$ یکدیگر را نصف می‌کنند بنابراین $ABA'C$ متوازی‌الاضلاع است. برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم $DE = AA'$ و برای این منظور نشان می‌دهیم: $A\overset{\triangle}{B}A' = A\overset{\triangle}{D}E$



$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}AE = AC\\ BA' = AC\end{array}\right\} \Rightarrow AE = BA'\\ AD = BA\\ \widehat{DAE} = \widehat{ABA'} = \widehat{B} + \widehat{C}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABA'} = \overset{\triangle}{ADE} \Rightarrow DE = AA' = ۲AM$$

۵) نقطه دلخواه D را بر روی قاعده BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC انتخاب می‌کنیم. اگر E و F به ترتیب پای عمودهای وارد از D بر اضلاع AB و AC و BH ارتفاع وارد بر AC باشد، ثابت کنید: $DE+DF = BH$



راه حل اول: عمود DK را بر BH رسم می‌کنیم. چهارضلعی $DKHF$ مستطیل است و $KH = DF$.
پس برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم $BK = DE$.
برای این منظور ثابت می‌کنیم: $\overset{\triangle}{BKD} = \overset{\triangle}{BED}$

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}DK \perp BH\\ AC \perp BH\end{array}\right\} \Rightarrow DK \| AC \Rightarrow \widehat{BDK} = \widehat{BCA}\\ \widehat{CBA} = \widehat{BCA}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BDK} = \widehat{CBA}$$

پس از آنجا که دو مثلث قائم‌الزاویه BED و BKD در وتر BD نیز مشترک هستند، بنابراین به حالت وتر و یک زاویه حاده با هم برابرند. پس داریم:

$$\left.\begin{array}{r} BK = DE \\ KH = DF \end{array}\right\} \Rightarrow DE + DF = BH$$

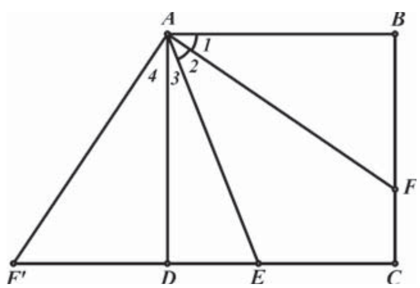
راه حل دوم: برای اثبات حکم از مفهوم مساحت مثلث‌ها استفاده می‌کنیم.

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} \Rightarrow \frac{۱}{۲}BH \cdot AC = \frac{۱}{۲}DE \cdot AB + \frac{۱}{۲}DF \cdot AC$$

از آنجا که $AB = AC$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{۱}{۲}BH \cdot AC = \frac{۱}{۲}AC(DE + DF) \Rightarrow BH = DE + DF$$

۶) مربع $ABCD$ و نقطه E بر ضلع CD مفروض‌اند. نیمساز زاویه EAB را رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در F قطع کند. ثابت کنید: $BF + DE = AE$



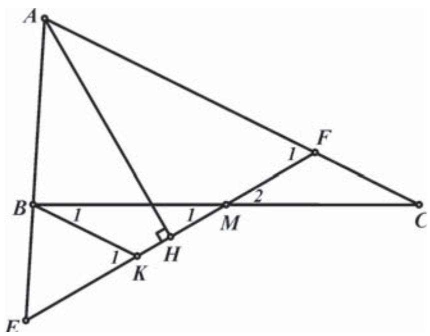
ضلع DC از مربع را از طرف D به اندازه‌ی BF امتداد می‌دهیم تا نقطه F' حاصل شود. حال برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم $AE = F'E$ یعنی مثلث AEF' متساوی‌الساقین است.

$$\left.\begin{array}{r} AD = AB \\ \widehat{D} = \widehat{B} = ۹۰^\circ \\ F'D = FB \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{AF'D} = \overset{\triangle}{AFB} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{AF'D} = \widehat{AFB} \\ \widehat{A_۴} = \widehat{A_۱} \end{cases} \qquad (۱)$$

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \widehat{A_۴} = \widehat{A_۱} \\ \widehat{A_۲} = \widehat{A_۱} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A_۴} = \widehat{A_۲} \\ AD \| BC \Rightarrow \widehat{A_۲} + \widehat{A_۳} = \widehat{AFB} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A_۴} + \widehat{A_۳} = \widehat{AFB} \qquad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow \widehat{A_۳} + \widehat{A_۴} = \widehat{AF'D} \Rightarrow \widehat{F'AE} = \widehat{AF'E} \Rightarrow AE = F'E = BF + DE$$

۷) در مثلث ABC، از M وسط ضلع BC عمودی بر نیمساز داخلی زاویه A رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC و یا امتداد آن‌ها را به ترتیب در نقاط E و F قطع کند. ثابت کنید: $BE = CF$



از نقطه B خطی موازی FC رسم می‌کنیم تا EF را در K قطع کند و ثابت می‌کنیم BE و CF هر دو با BK برابرند.

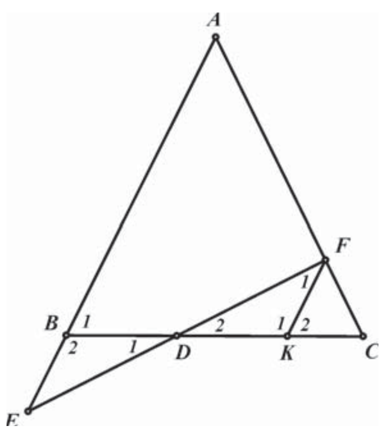
$$\left.\begin{array}{l} MC = MB \\ \widehat{M_2} = \widehat{M_1} \\ BK \| AC \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{B_1} \end{array}\right\} \Rightarrow M\overset{\triangle}{B}K = M\overset{\triangle}{C}F \Rightarrow FC = BK \qquad (1)$$

در مثلث AEF نیمساز و ارتفاع بر یکدیگر منطبق شده‌اند بنابراین مثلث AEF متساوی‌الساقین بوده و زوایای $\widehat{F_1}$ و $\widehat{E}$ با یکدیگر برابرند.

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{E} = \widehat{F_1} \\ BK \| AC \Rightarrow \widehat{K_1} = \widehat{F_1} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{E} = \widehat{K_1} \Rightarrow BE = BK \qquad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow BE = FC$$

۸) در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، نقاط F و E را به ترتیب روی AC و امتداد AB طوری انتخاب می‌کنیم که $BE = CF$ باشد. نشان دهید BC، پاره‌خط EF را نصف می‌کند.



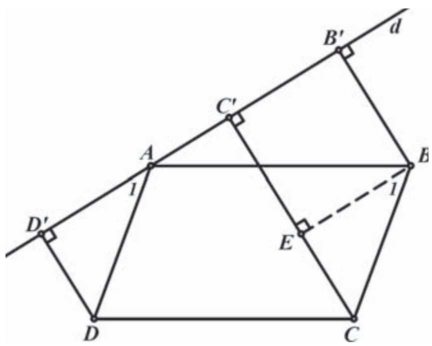
از نقطه F خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا BC را در K قطع کند و ثابت می‌کنیم دو مثلث BDE و FDK با یکدیگر همنهشت‌اند.

$$\left.\begin{array}{l} AB = AC \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{C} \\ AB \| FK \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{K_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{K_2} \Rightarrow FK = CF$$

$$\left.\begin{array}{l} FK = CF \\ BE = CF \end{array}\right\} \Rightarrow BE = FK$$

$$\left.\begin{array}{l} BE = FK \\ AE \| FK \Rightarrow \widehat{E} = \widehat{F_1} \\ AE \| FK \Rightarrow \widehat{B_2} = \widehat{K_1} \end{array}\right\} \Rightarrow B\overset{\triangle}{E}D = F\overset{\triangle}{D}K \Rightarrow DE = DF$$

۹) چهارضلعی $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است. از نقاط B، C و D، عمودهای BB'، CC' و DD' را بر خط d که از نقطه‌ی A می‌گذرد، فرود می‌آوریم. نشان دهید: $CC' = BB' + DD'$



پای عمود وارد از B بر CC' را E می‌نامیم.

$$\left.\begin{array}{r} BE \perp CC' \\ d \perp CC' \end{array}\right\} \Rightarrow BE \| d$$

$$\left.\begin{array}{r} CE \perp d \\ DD' \perp d \end{array}\right\} \Rightarrow CE \| DD'$$

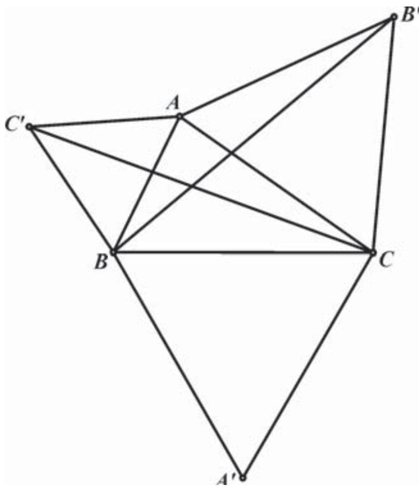
$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} BE \| d \\ BC \| AD \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{A_1} \\ \widehat{D'} = \widehat{E} = ۹۰^\circ \\ BC = AD \end{array}\right\} \Rightarrow B\overset{\triangle}{C}E = A\overset{\triangle}{D}D' \Rightarrow CE = DD'$$

همچنین در مستطیل $BEC'B'$، دو ضلع BB' و EC' با هم برابرند.

$$\Rightarrow BB' + DD' = EC' + CE$$

$$\Rightarrow BB' + DD' = CC'$$

۱۰) روی اضلاع مثلث ABC و در خارج آن سه مثلث متساوی‌الاضلاع ABC'، BCA'، $CB'A$ را می‌سازیم. ثابت کنید: $AA' = BB' = CC'$



$$\left.\begin{array}{l} \widehat{C'AC} = \widehat{BAC} + ۶۰^\circ \\ \widehat{BAB'} = \widehat{BAC} + ۶۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{C'AC} = \widehat{BAB'}$$

$$\left.\begin{array}{c} AB = AC' \\ AB' = AC \\ \widehat{C'AC} = \widehat{BAB'} \end{array}\right\} \Rightarrow C\overset{\triangle}{A}C' = B\overset{\triangle}{A}B'$$

$$\Rightarrow BB' = CC'$$

به ترتیب مشابه می‌توان نشان داد که:

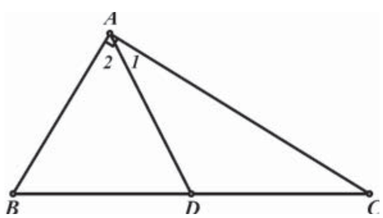
$$AA' = BB' \Rightarrow AA' = BB' = CC'$$

۱۱) ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه

الف) میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

ب) اگر یکی از زوایا برابر ۳۰ درجه باشد، ضلع روبروی زاویه ۳۰ درجه برابر نصف وتر است.

الف) در مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\widehat{A} = ۹۰^\circ)$ نقطه‌ی D را روی وتر BC طوری انتخاب می‌کنیم که $\widehat{A_۱} = \widehat{C}$ باشد.



$$\widehat{A_۱} = \widehat{C} \Rightarrow AD = CD \qquad (۱)$$

$$\left.\begin{array}{c} \widehat{A_۱} + \widehat{A_۲} = ۹۰^\circ \\ \widehat{C} + \widehat{B} = ۹۰^\circ \\ \widehat{A_۱} = \widehat{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A_۲} = \widehat{B} \Rightarrow AD = BD$$

با توجه به رابطه (۱) نتیجه می‌گیریم که:

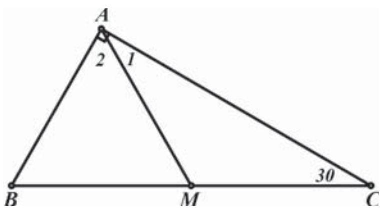
$$\Rightarrow AD = CD = BD \Rightarrow AD = \frac{۱}{۲}BC$$

پس AD میانه‌ی مثلث ABC است.

توجه داشته باشید که عکس این قسمت هم برقرار است یعنی در هر مثلثی اگر میانه وارد بر یک ضلع نصف آن باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

ب) میانه AM را رسم می‌کنیم. بنابر قسمت قبل داریم:

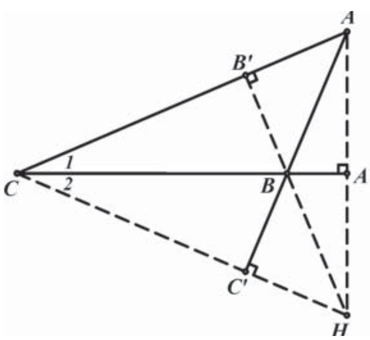
$$AM = CM \Rightarrow \widehat{A_۱} = \widehat{C} = ۳۰^\circ \Rightarrow \widehat{A_۲} = ۶۰^\circ$$



از آنجا که دو زاویه $A_۲$ و B از مثلث ABM برابر ۶۰ درجه هستند مثلث ABM متساوی‌الاضلاع است بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AM = AB \\ AM = \frac{۱}{۲}BC \end{array}\right\} \Rightarrow AB = \frac{۱}{۲}BC$$

۱۲) در مثلث ABC، $\widehat{B} - \widehat{C} = ۹۰^\circ$ است. اگر نقطه‌ی H محل برخورد ارتفاع‌های مثلث باشد، ثابت کنید که دو مثلث ABC و HBC همنهشت هستند.



زاویه ABC زاویه خارجی مثلث CBC' بوده و برابر مجموع دو زاویه غیر مجاور از مثلث می‌باشد. بنابراین

$$\widehat{ABC} = \widehat{C_۲} + ۹۰^\circ \Rightarrow \widehat{C_۲} = \widehat{ABC} - ۹۰^\circ \qquad (۱)$$

از طرفی طبق فرض مسأله داریم:

$$\widehat{ABC} - \widehat{C_۱} = ۹۰^\circ \Rightarrow \widehat{C_۱} = \widehat{ABC} - ۹۰^\circ$$

با توجه به رابطه (۱) نتیجه می‌گیریم که: $\Rightarrow \widehat{C_۱} = \widehat{C_۲}$

در مثلث ACH، ارتفاع CA' نیمساز زاویه ACH است، پس مثلث ACH متساوی‌الساقین است. در نتیجه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AC = HC \\ \widehat{C_۱} = \widehat{C_۲} \\ CB = CB \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C = H\overset{\triangle}{B}C$$

۱-۲ تشابه مثلث‌ها

هدف بخش: در این بخش برآنیم تا ضمن شناخت خواص مثلث‌های متشابه، با کاربردهای وسیع و گوناگون تشابه در انواع مسایل هندسی آشنا شویم.

پیش از آنکه به قضیه تالس و تشابه مثلث‌ها بپردازیم، بدلیل کاربرد برخی خواص نسبت‌های تناسب در تشابه، مروری بر بعضی از مهمترین این خواص خواهیم داشت.

قضیه ۱-۶: اگر تساوی $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ برقرار باشد نسبت‌های زیر برقرار خواهند بود:

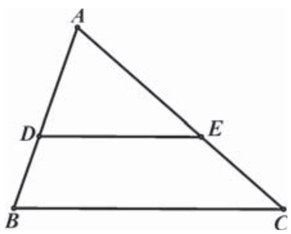
الف) $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$. به این خاصیت ترکیب در صورت $(+)$ یا تفضیل در صورت $(-)$ می‌گویند.

ب) $\frac{a}{b \pm a} = \frac{c}{d \pm c}$. به این خاصیت ترکیب در مخرج $(+)$ یا تفضیل در مخرج $(-)$ می‌گویند.

ج) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a \pm c}{b \pm d}$

اثبات تمامی قسمت‌های بالا مشابه یکدیگر است و کافی است هر نسبت را طرفین ـ وسطین کرده و ساده کنید، تا به عبارت $ad = bc$ که همان فرض $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ است، برسید.

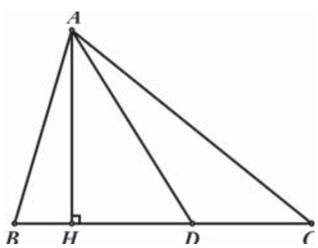
قضیه تالس ۱-۷: هر خط موازی با یکی از اضلاع مثلث، دو ضلع دیگر مثلث را به نسبت‌های یکسان تقسیم می‌کند.



$$DE \| BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

برای اثبات قضیه تالس ابتدا لم مهم و کاربردی زیر را مطرح می‌کنیم.

لم: برای هر خط دلخواه AD که ضلع BC از مثلث ABC را قطع می‌کند نسبت پاره‌خط‌های بوجود آمده بر روی BC با نسبت مساحت مثلث‌های متناظر برابر است.

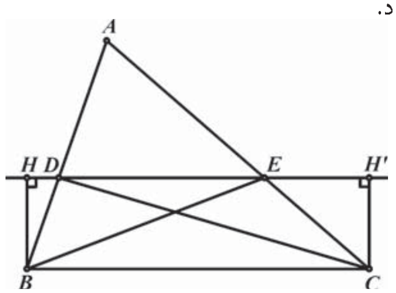


حکم: $\frac{BD}{DC} = \frac{S_{ABD}}{S_{ADC}}$

H را پای ارتفاع نظیر رأس A می‌نامیم.

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{\frac{1}{2}AH \cdot BD}{\frac{1}{2}AH \cdot DC} = \frac{BD}{DC}$$

برای اثبات قضیه تالس هرکدام از نسبت‌های $\frac{AD}{DB}$ و $\frac{AE}{EC}$ را با استفاده از لم فوق به نسبت مساحت‌ها تبدیل می‌کنیم تا حکم جدید حاصل گردد.

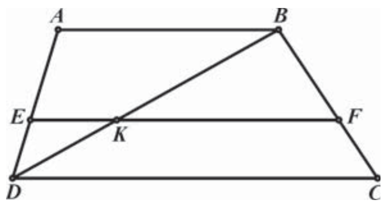


حکم جدید:
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{S_{EDA}}{S_{EDB}}\\[2mm]\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{S_{DEA}}{S_{DEC}}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{S_{EDA}}{S_{EDB}}=\frac{S_{DEA}}{S_{DEC}}\Rightarrow S_{EDB}=S_{DEC}$$

$$\left.\begin{array}{r}S_{EDB}=\frac{1}{2}DE\cdot BH\\[2mm]S_{DEC}=\frac{1}{2}DE\cdot CH'\\[2mm]BC\|DE\Rightarrow BH=CH'\end{array}\right\}\Rightarrow S_{EDB}=S_{DEC}$$

پس حکم جدید برقرار است که از آن حکم $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$ نتیجه می‌شود.

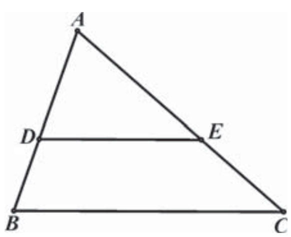
مسأله ۱-۹: ثابت کنید هر خط موازی قاعده‌های ذوزنقه، ساق‌های آن را به‌طور متناسب قطع می‌کند.



محل برخورد BD و EF را K می‌نامیم. با استفاده از قضیه تالس در دو مثلث ABD و BCD خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l}EK\|AB\Rightarrow\dfrac{AE}{ED}=\dfrac{BK}{KD}\\[2mm]FK\|CD\Rightarrow\dfrac{BF}{FC}=\dfrac{BK}{KD}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$$

عکس قضیه تالس: هر خطی که دو ضلع از مثلث را به‌طور متناسب قطع کند با ضلع سوم موازی خواهد بود.

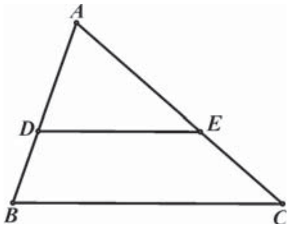


$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\Rightarrow DE\|BC$$

اثبات عکس قضیه تالس را به خود شما واگذار می‌کنیم.

راهنمایی: برای اثبات عکس قضیه تالس از نقطه D خطی موازی BC رسم کنید تا AC را در نقطه‌ی E' قطع کند. با استفاده از قضیه تالس ثابت کنید که نقطه E' بر نقطه‌ی E منطبق است.

نکته: طبق قضیه تالس $DE\|BC$ است، اگر و فقط اگر $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$ باشد. اما طبق خواص نسبت‌های تناسب شرط $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$ را می‌توان با استفاده از ترکیب در مخرج یا صورت به نسبت‌های زیر تبدیل کرد.



الف) $\dfrac{AD}{DB+AD}=\dfrac{AE}{EC+AE}\Rightarrow\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$

ب) $\dfrac{AD+DB}{DB}=\dfrac{AE+EC}{EC}\Rightarrow\dfrac{AB}{DB}=\dfrac{AC}{EC}$

به عبارت دیگر طبق قضیه تالس $DE||BC$ است اگر و فقط اگر هر کدام از نسبت‌های فوق برقرار باشد.

تعریف: دو مثلث ABC و $A'B'C'$ با یکدیگر متشابه هستند ($\overset{\triangle}{ABC}\sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$) اگر و فقط اگر:

۱ـ زوایای دو مثلث دو بدو با یکدیگر برابر باشند. $\widehat{A}=\widehat{A'}\ ,\ \ \widehat{B}=\widehat{B'}\ ,\ \ \widehat{C}=\widehat{C'}$

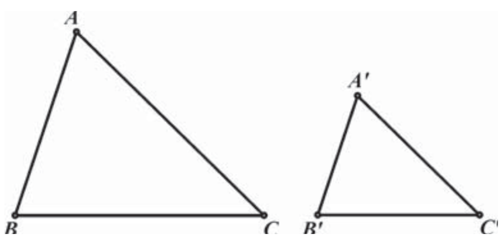
۲ـ اضلاع متناظر متناسب باشند. $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'}=k$

که به عدد ثابت k، نسبت تشابه دو مثلث گفته می‌شود.

دو مثلث بنابر هر یک از سه حالت زیر متشابه خواهند بود:

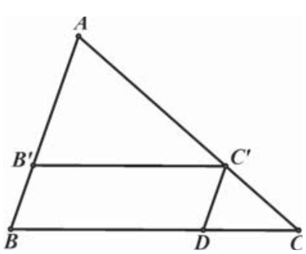
الف) **قضیه ۱-۸:** هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه هستند.

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A}=\widehat{A'}\\ \widehat{B}=\widehat{B'}\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\triangle}{ABC}\sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$$



از آنجا که دو زاویه A و A' با یکدیگر و B و B' نیز با یکدیگر برابرند، پس زوایای C و C' نیز با هم برابر خواهند بود. بنابراین شرط اول تشابه دو مثلث یعنی تساوی زوایا برقرار است. اما برای اثبات تناسب اضلاع، مثلث $A'B'C'$ را روی مثلث ABC طوری قرار می‌دهیم که دو زاویه A و A' بر یکدیگر منطبق شوند.

$$\widehat{B}=\widehat{B'}\Rightarrow B'C'||BC$$



طبق قضیه تالس داریم

$$\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}\qquad(۱)$$

پس تناسب دو ضلع برقرار است، اما برای اثبات نسبت ضلع سوم، از C' خطی به موازات AB رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در D قطع کند. طبق قضیه تالس خواهیم داشت:

$$C'D \| AB \Rightarrow \frac{AC'}{AC} = \frac{BD}{BC}$$

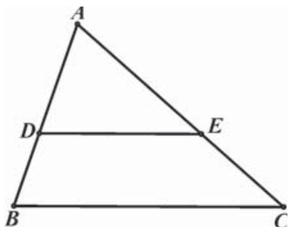
در متوازی‌الاضلاع $B'C'DB$ دو ضلع BD و $B'C'$ با هم برابرند

$$\Rightarrow \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

با توجه به رابطه (۱) داریم:
$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

از آنجا که شرط دوم تشابه یعنی تناسب اضلاع نیز برقرار است، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه هستند.

نتیجه: طبق قضیه فوق در صورتی که خطی موازی BC، دو ضلع دیگر مثلث را در نقاط D و E قطع کند خواهیم داشت:
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$



مسأله ۱-۱۰: ثابت کنید در دو مثلث متشابه همواره:

الف) نسبت طول نیمسازهای نظیر دو مثلث برابر نسبت تشابه دو مثلث است.

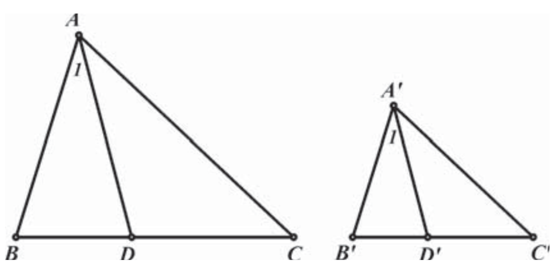
ب) نسبت طول ارتفاع‌های نظیر دو مثلث برابر نسبت تشابه دو مثلث است.

ج) نسبت مساحت دو مثلث برابر مربع نسبت تشابه دو مثلث است.

د) نسبت محیط دو مثلث برابر نسبت تشابه دو مثلث است.

الف) عدد ثابت k را برابر نسبت تشابه دو مثلث ABC و $A'B'C'$ در نظر می‌گیریم.

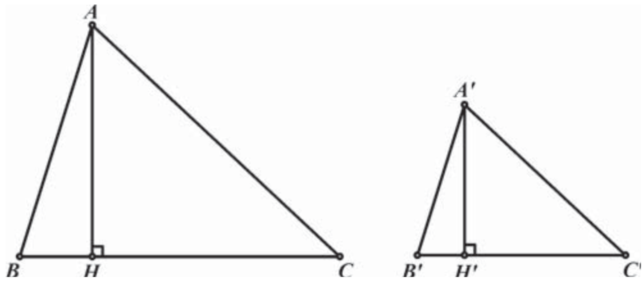
AD و $A'D'$ به ترتیب نیمسازهای داخلی دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ هستند.



$$\overset{\triangle}{A}BC \sim A'\overset{\triangle}{B'}C' \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'} \Rightarrow \frac{\widehat{A}}{۲} = \frac{\widehat{A'}}{۲} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r}\widehat{A_1}=\widehat{A'_1}\\ \widehat{B}=\widehat{B'}\end{array}\right\}\Rightarrow A\overset{\triangle}{B}D\sim A'\overset{\triangle}{B'}D'\Rightarrow \frac{AD}{A'D'}=\frac{AB}{A'B'}=k$$

ب) AH و $A'H'$، به ترتیب ارتفاع‌های دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ هستند.



$$\left.\begin{array}{r}A\overset{\triangle}{B}C\sim A'\overset{\triangle}{B'}C'\Rightarrow \widehat{B}=\widehat{B'}\\ \widehat{H}=\widehat{H'}=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow A\overset{\triangle}{B}H\sim A'\overset{\triangle}{B'}H'$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{A'H'}=\frac{AB}{A'B'}=k$$

ج) $$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\frac{\frac{1}{2}AH\cdot BC}{\frac{1}{2}A'H'\cdot B'C'}=\frac{AH}{A'H'}\cdot\frac{BC}{B'C'}=k\cdot k=k^2$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=k^2$$

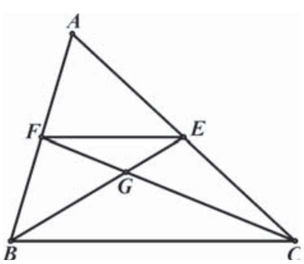
د) $$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=k$$

با استفاده از خواص نسبت‌های تناسب داریم:

$$\Rightarrow \frac{AB+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'}=\frac{AB}{A'B'}=k$$

مسأله ۱-۱۱: ثابت کنید میانه‌های هر مثلث یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند.

حکم: $\frac{BG}{GE}=\frac{CG}{GF}=\frac{2}{1}$



در مثلث ABC، BE و CF میانه‌های مثلث هستند.

یعنی داریم:

$$AE=CE\ ,\ \ AF=BF$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{FB}=\frac{AE}{EC}=1$$