

نسبت و تناسب در هندسه



تعریف: به تساوی $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (با $d, b \neq 0$) یک تناسب می‌گویند.

چاشنی: (ویژگی‌های تناسب)

۱ طرفین وسطین کردن:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \quad (b, d \neq 0)$$

۲ معکوس کردن طرفین تناسب:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad (a, b, c, d \neq 0)$$

۳ تعویض‌های طرفین یا وسطین:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{یا} \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad (a, b, c, d \neq 0)$$

۴ ترکیب نسبت در صورت یا مخرج: ($b, d \neq 0$)

الف $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

ب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$

۵ تفضیل نسبت در صورت یا مخرج: ($b, d \neq 0$)

الف $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

ب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (b, d \neq 0)$$

۶ (تعمیم ۶)

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \quad (b_1, b_2, \dots, b_n \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$$

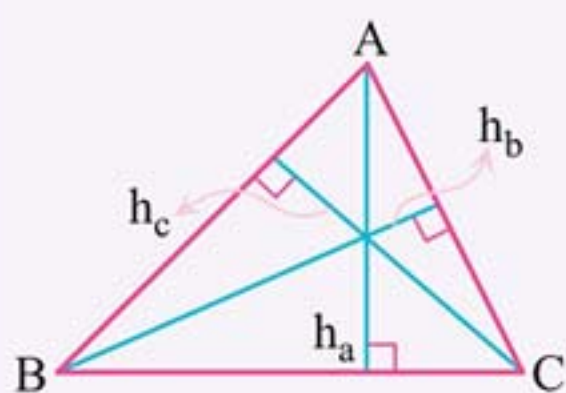
تعریف: اگر طرفین یا وسطین یک تناسب شامل دو عدد برابر

باشد، یعنی $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ، داریم $b^2 = ac$ ، در این صورت b را واسطه

هندسی a و c می‌نامیم.

نکته: در هر مثلث نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس

نسبت اندازه‌های ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع برابر است:

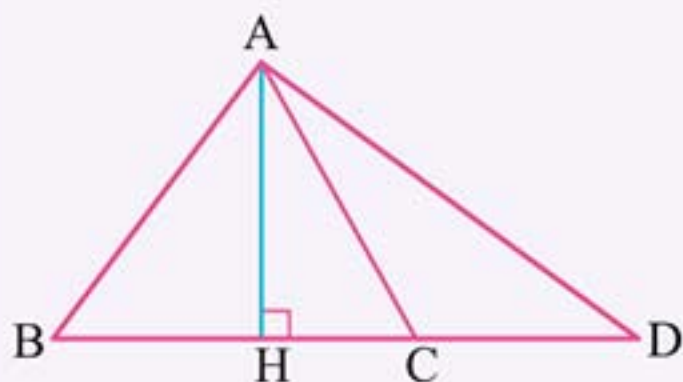


$$\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}, \frac{a}{c} = \frac{h_c}{h_a}, \frac{b}{c} = \frac{h_c}{h_b}$$

در هر مثلث قائم‌الزاویه به وتر a داریم:

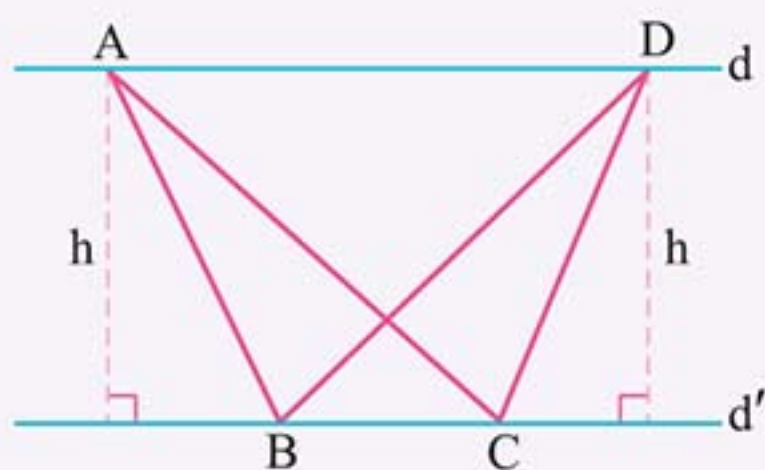
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}$$

◀ فرض کنید اندازه ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، در این صورت:



$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{BC}{CD}$$

◀ اگر دو مثلث، قاعده مشترک داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعده روی یک خط و موازی این قاعده باشند، این مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند:

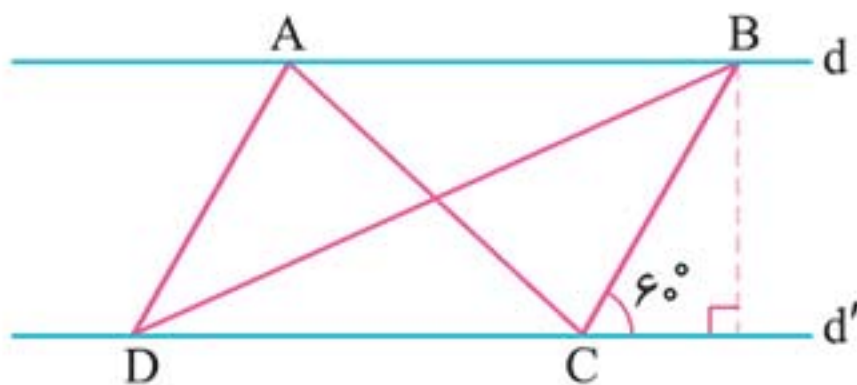


$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DBC}$$

🔴 **تست:** در شکل زیر خط‌های d و d' موازی هستند، اگر

$\widehat{BCA} = \widehat{BAC}$ و $BC = \frac{4}{3} \text{ cm}$ و $DB = 3AB$ باشد، در این

صورت ارتفاع وارد بر ضلع DB در مثلث ABD کدام است؟



$$\frac{2\sqrt{3}}{9} \quad (4)$$

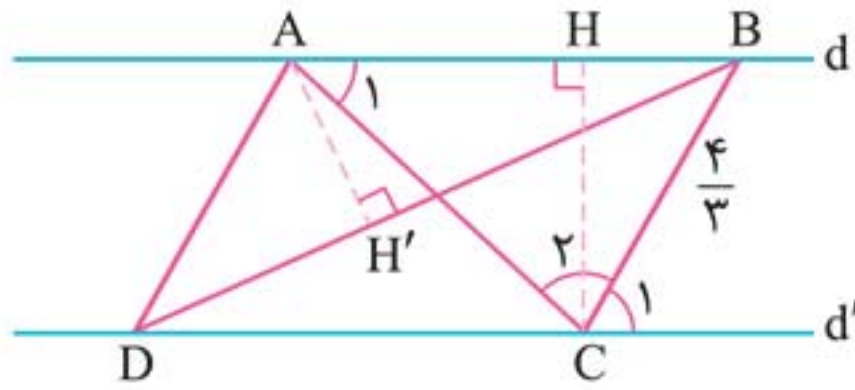
$$\frac{3\sqrt{3}}{9} \quad (3)$$

$$\frac{9\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

$$\frac{7\sqrt{3}}{3} \quad (1)$$

پاسخ گزینه «۴»

چون $d \parallel d'$ و BC مورب است، پس $\hat{A}BC = \hat{C}_1 = 60^\circ$. از طرفی طبق فرض $\hat{A}_1 = \hat{C}_2 = 60^\circ$ پس مثلث ABC متساوی الاضلاع است:



از طرفی می دانیم که اندازه ارتفاع در مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر با $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ است، پس:

$$CH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

طبق نکته گفته شده داریم:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} \Rightarrow \frac{CH \times AB}{\cancel{AB}} = \frac{AH' \times DB}{\cancel{AB}}$$

$$\xrightarrow{DB=3AB} \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \cancel{AB} = AH' \times (3 \cancel{AB})$$

$$\Rightarrow AH' = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

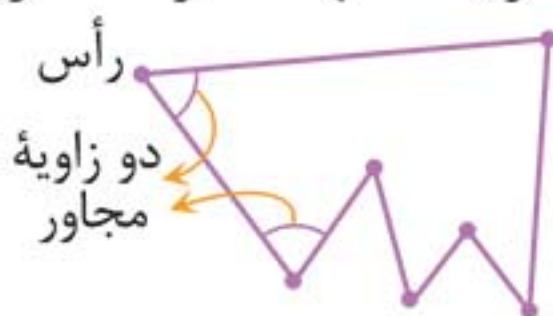


چند ضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن

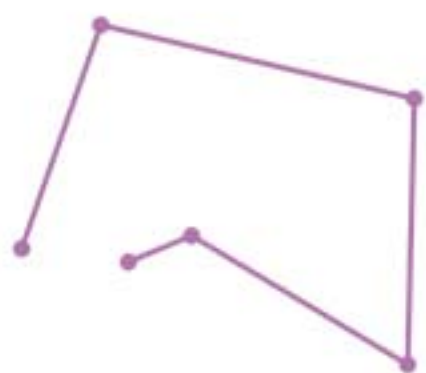
تعریف: n ضلعی یک شکل بسته‌ای است شامل n ($n \geq 3$) پاره‌خط متوالی که در آن:

الف هر پاره‌خط دقیقاً دو پاره‌خط را در نقاط انتهایی خودش (رأس‌ها) قطع کند.

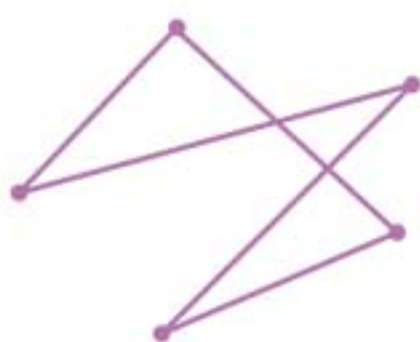
ب هر دو پاره‌خط که در یک انتها مشترک‌اند، روی یک خط نباشد.



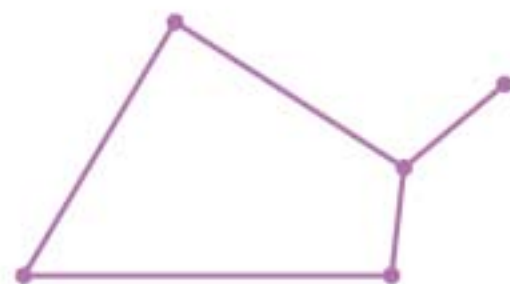
۷ ضلعی است.



چندضلعی نیست.



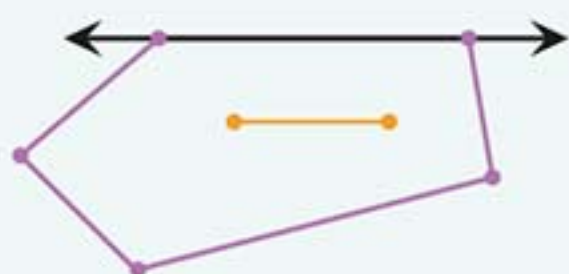
چندضلعی نیست.



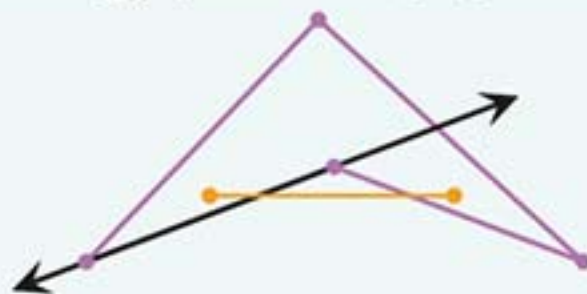
چندضلعی نیست.

چاشنی: (n ضلعی‌های محدب و مقعر)

n ضلعی را محدب گوئیم، هرگاه با در نظر گرفتن خط شامل هر ضلع آن، بقیه نقاط چندضلعی در یک طرف آن خط واقع شوند. چندضلعی که محدب نباشد، مقعر می‌نامند.



چندضلعی محدب



چندضلعی مقعر

نکته: در چندضلعی محدب تمام زاویه‌های داخلی کمتر از 180° می‌باشند، اما در چندضلعی مقعر حداقل یک زاویه داخلی بزرگ‌تر از 180° وجود دارد.

در چندضلعی محدب هر پاره‌خطی که دو نقطه دلخواه درون چندضلعی را به هم وصل کند تمام آن درون چندضلعی قرار دارد، اما در چندضلعی مقعر چنین نیست.

تعریف: در هر چندضلعی، پاره‌خطی که دو رأس غیرمجاور را به هم وصل می‌کند، قطر می‌نامند.



چاشنی: در هر n ضلعی داریم:

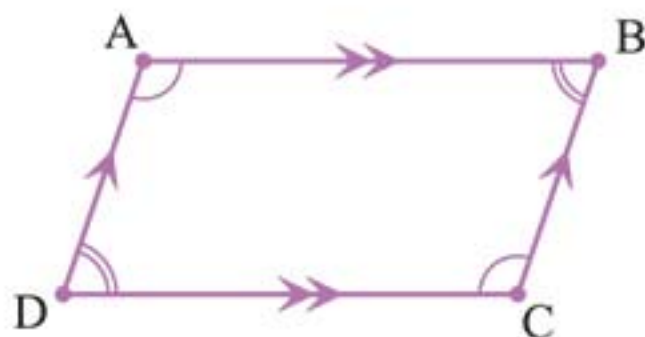
$$\begin{cases} \text{تعداد قطرها} = \frac{n(n-3)}{2} \\ \text{مجموع زوایای داخلی} = (n-2) \times 180^\circ \\ \text{مجموع زوایای خارجی} = 360^\circ \end{cases}$$

نکته: هر n ضلعی محدب حداکثر ۳ زاویه داخلی حاده دارد.



تعریف: متوازی الاضلاع، چهارضلعی است که هر دو ضلع مقابل

آن موازی هستند.



$ABCD \Leftrightarrow AB \parallel CD, AD \parallel BC$ متوازی الاضلاع است

یادداشتی: (ویژگی‌های متوازی الاضلاع)

۱ یک چهارضلعی متوازی الاضلاع است اگر و تنها اگر هر دو ضلع مقابل هم‌اندازه باشند:

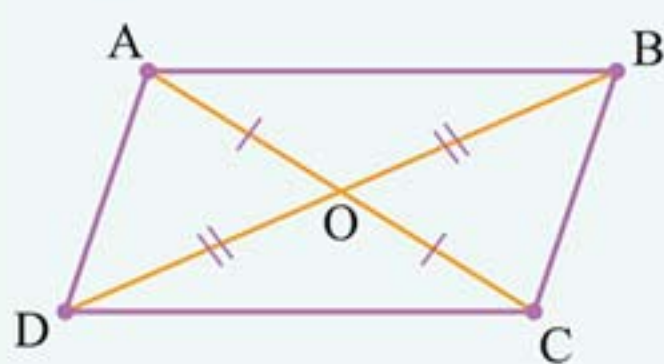
$ABCD \Leftrightarrow (AB = DC, AD = BC)$ متوازی الاضلاع است

۲ یک چهارضلعی متوازی الاضلاع است اگر و تنها اگر هر دو زاویه مقابل آن هم‌اندازه باشند.

$ABCD \Leftrightarrow (\hat{A} = \hat{C}, \hat{B} = \hat{D})$ متوازی الاضلاع است.

۳ یک چهارضلعی متوازی الاضلاع است اگر و تنها اگر هر دو زاویه مجاور، مکمل باشند.

$ABCD \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{C} = \hat{C} + \hat{D} = \hat{D} + \hat{A} = 180^\circ$ متوازی الاضلاع است.



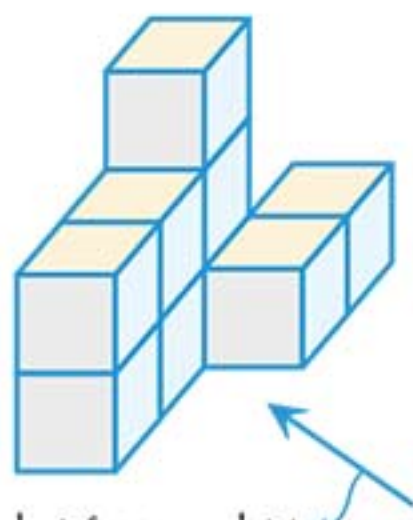
۴ یک چهارضلعی متوازی الاضلاع است اگر و تنها اگر قطرهای آن منصف یکدیگر باشند:

$(OA = OC, OB = OD)$

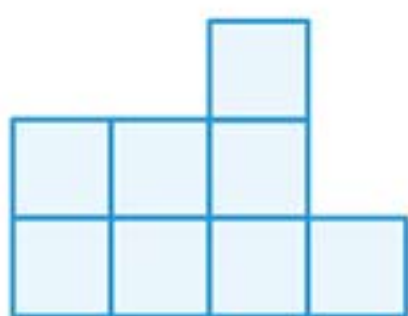


در تفکر تجسمی از جملات و شیوه‌های زبانی برای تفکر استفاده نمی‌شود، بلکه این تصاویر هستند که در ذهن نقش می‌بندند و کمک می‌کنند دربارهٔ موضوع مورد نظر فکر کنیم.

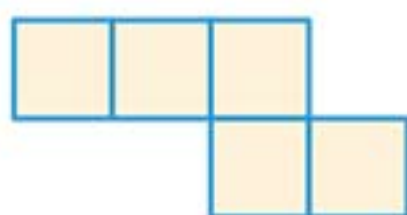
تعریف: به تصاویری که از سه نمای روبه‌رو، چپ و بالای یک جسم رسم می‌شود، **تصاویر سه نمای آن جسم** می‌گویند، به شکل زیر توجه کنید:



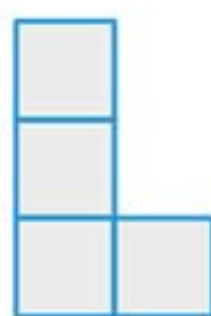
نشان دهنده نمای روبه‌رو



نمای روبه‌رو



نمای بالا

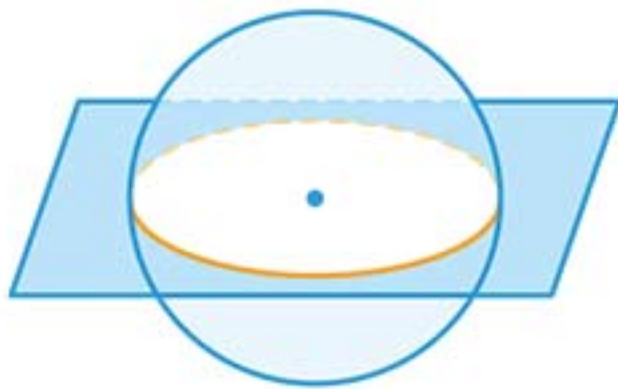


نمای روبه‌رو

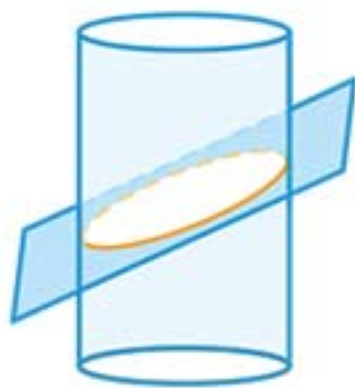


تعریف: شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، **سطح مقطع آن** نامیده می‌شود.

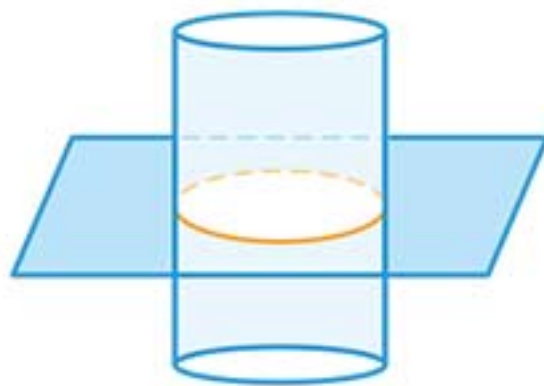
۱ برش کره: سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره، یک دایره است:



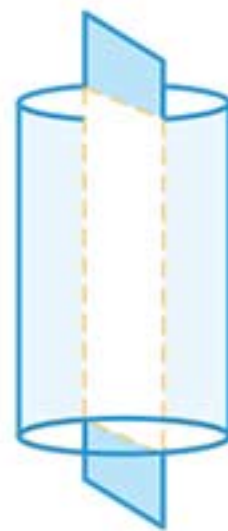
۲ برش استوانه: سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک استوانه، سه حالت زیر را دارد:



بیضی (برش مایل)

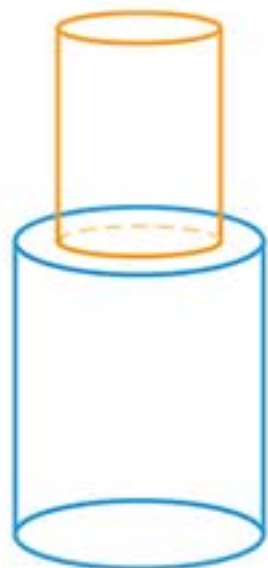


دایره (برش افقی)



مستطیل (برش عمودی)

تست: دو استوانه توپر به ارتفاع‌های ۶ و ۸ روی هم قرار گرفته‌اند. اگر شعاع قاعده‌ها به ترتیب ۲ و ۳ باشد سطح حاصل از برش عمودی و گذرا از مرکز دایره سطح مقطع چقدر است؟



(۱) ۶۸

(۲) ۷۴

(۳) ۷۲

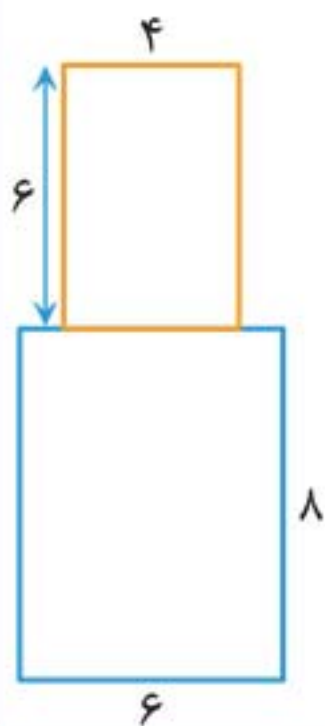
(۴) ۶۶



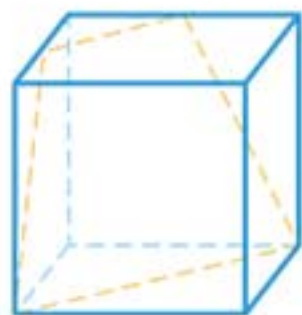
پاسخ گزینه «۳»

سطح مقطع حاصل، دو مستطیل می‌باشند که روی هم قرار گرفته‌اند:

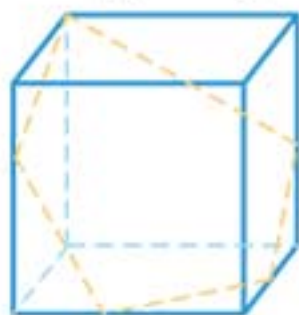
$$S = S_1 + S_2 = 6 \times 8 + 6 \times 4 \\ = 48 + 24 = 72$$



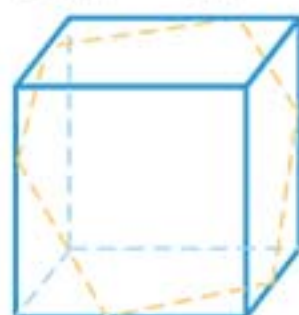
۳ برش مکعب: سطح مقطع یک مکعب می‌تواند مربع، مستطیل، مثلث، دوزنقه، پنج‌ضلعی یا شش‌ضلعی باشد.



دوزنقه (برش مایل)



پنج ضلعی (برش مایل)



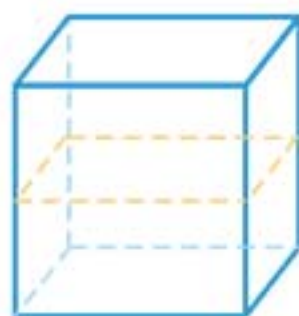
شش ضلعی (برش مایل)



مربع یا مستطیل
(برش مایل)



مثلث (برش مایل)



مربع یا مستطیل
(برش افقی)

تست: در یک مکعب به طول یال ۴ واحد، بر انتهای سه یال گذرا بر یک رأس، صفحه‌ای می‌گذرد. مساحت مقطع این صفحه با مکعب کدام است؟

(تجربی ۹۵)

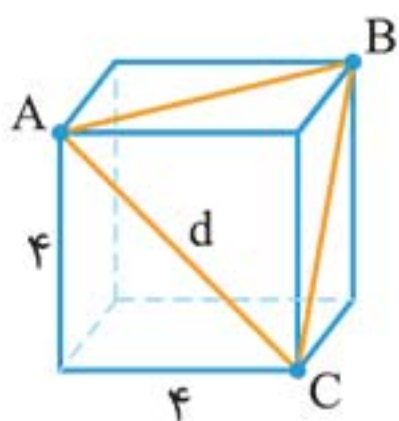
۸√۳ (۴)

۱۲ (۳)

۴√۶ (۲)

۸ (۱)

پاسخ گزینه «۴»



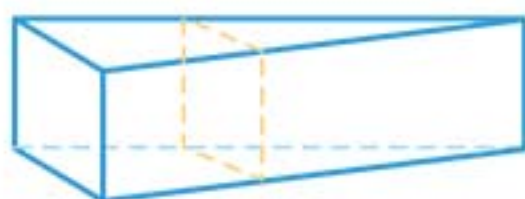
سطح مقطع حاصل یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع d است.

$$d^2 = 4^2 + 4^2 = 32$$

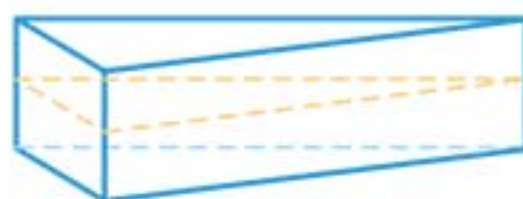
$$\Rightarrow d = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} d^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (4\sqrt{2})^2 = \frac{32\sqrt{3}}{4} = 8\sqrt{3}$$

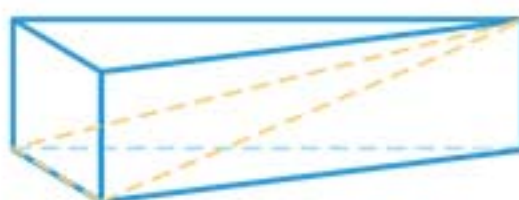
۴ برش منشور (مثلث القاعده): سطح مقطع یک منشور مثلث القاعده می تواند مثلث، مستطیل یا ذوزنقه باشد:



مستطیل (برش عمودی)



مثلث (برش افقی)

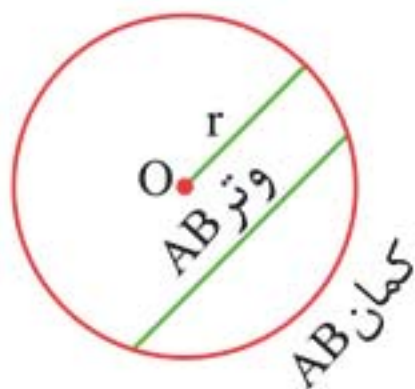


مثلث (برش مایل)

۵ برش مخروط: سطح مقطع یک مخروط می تواند دایره، بیضی یا سهمی باشد:



مفاهیم اولیه در دایره



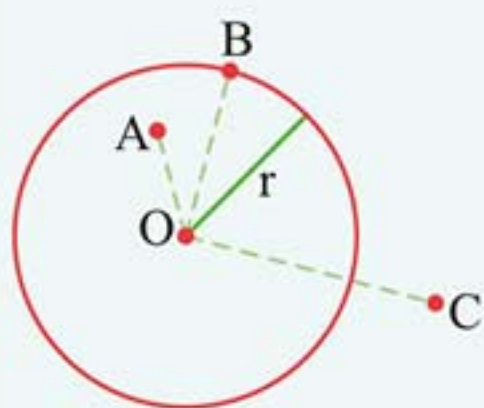
تعریف: دایره مجموعه نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت به نام مرکز (O) به فاصله ثابت r (شعاع) می‌باشد و آن را نماد $C(O, r)$ نمایش می‌دهیم.

◀ **وتر دایره:** پاره‌خطی که دو سر آن روی دایره باشد.

◀ **قطر دایره:** وتری از دایره که از مرکز دایره می‌گذرد.

◀ **کمان:** کمان دایره شامل دو نقطه روی دایره و تمام نقاط بین آن دو نقطه است. هر کمان دایره را به دو قسمت تقسیم می‌کند.

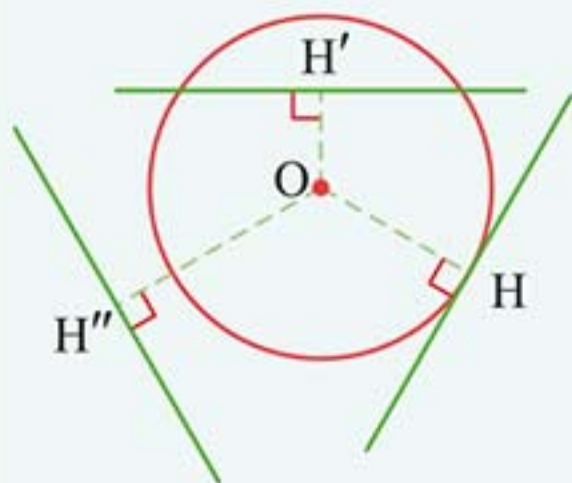
چاشنی: (وضعیت نقطه و دایره)



هر نقطه نسبت به دایره سه وضعیت زیر را دارد:

- ۱ درون دایره: $OA < r$
- ۲ روی دایره: $OB = r$
- ۳ بیرون دایره: $OC > r$

◀ (اوضاع نسبی خط و دایره)

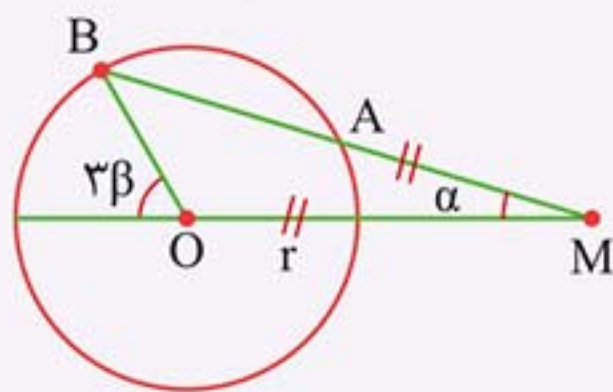


- ۱ مماس: خط و دایره در یک نقطه مشترک هستند ($OH = r$)
- ۲ متقاطع: خط و دایره در دو نقطه مشترک هستند ($OH' < r$)
- ۳ متخارج: خط و دایره هیچ نقطه مشترکی ندارند ($OH'' > r$)

نکته: شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

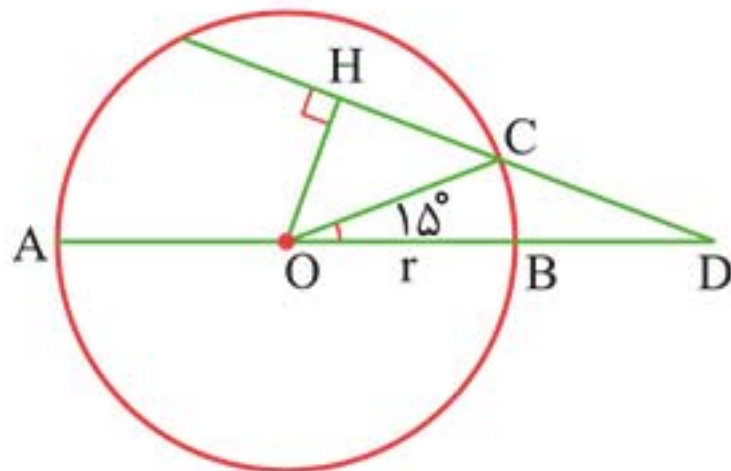
خط متقاطع با دایره را قاطع می‌نامیم که وتری از دایره جدا می‌کند.

در شکل زیر اگر $MA = r$ باشد آن گاه $\beta = 3\alpha$ است.



تست: در شکل زیر AB قطر دایره، $\widehat{COB} = 15^\circ$ و $DC = r$

است. اندازه OH چه مضربی از شعاع دایره است؟



$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

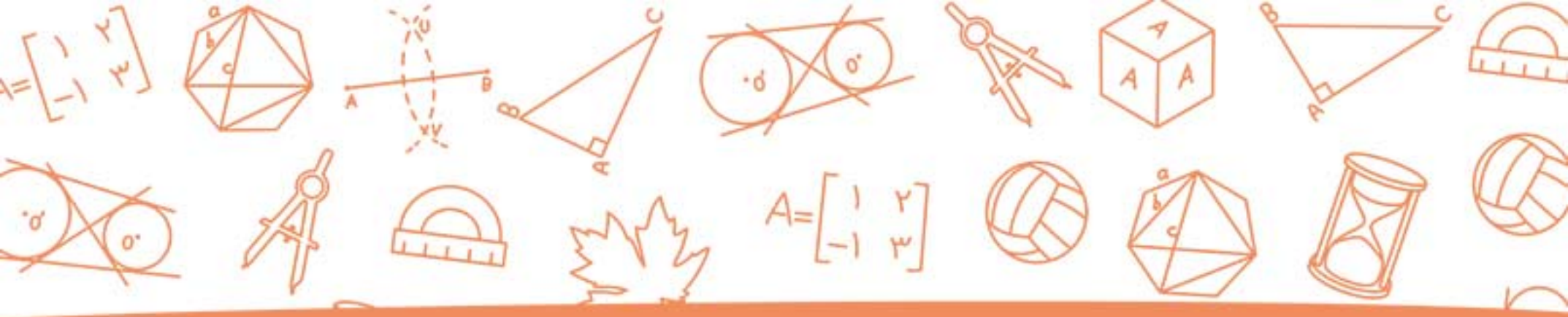
پاسخ گزینه «۱»

چون $DC = OC = r$ ، پس مثلث OCD متساوی الساقین است.

هم‌چنین چون که \widehat{OCH} برای این مثلث زاویه خارجی است،

داریم، $\widehat{OCH} = 30^\circ$ حال OH را محاسبه می‌کنیم:

$$\sin 30^\circ = \frac{OH}{OC} \Rightarrow OH = \frac{1}{2} OC = \frac{1}{2} r$$



پیوست

فرمول نامه





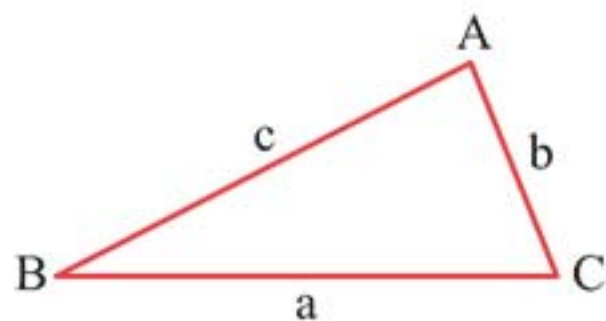
ترسیم‌های هندسی و استدلال

۱ دایره مجموعه نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت (مرکز دایره) به فاصله ثابت (شعاع دایره) باشند.

۲ هر نقطه، روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن به یک فاصله است و برعکس.

۳ هر نقطه، روی عمود منصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و برعکس.

۴ یک مثلث در صورتی قابل رسم است که:

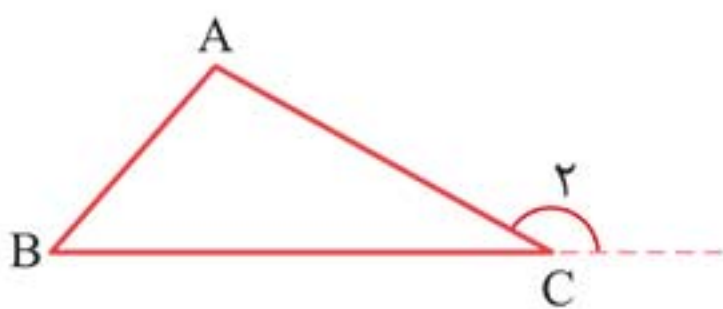


$$\begin{cases} b + c > a \\ a + c > b \\ a + b > c \end{cases}$$

$$|b - c| < a < b + c$$

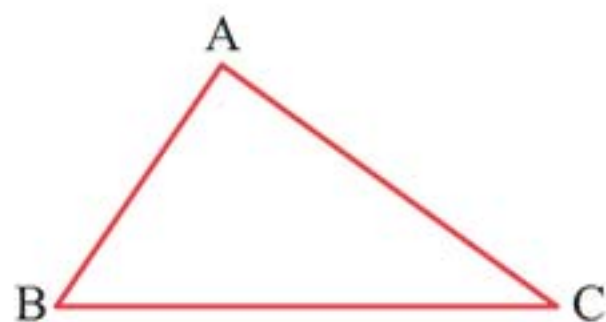
یا در حالت کلی:

۵ ارتفاع، نیمساز زاویه‌ها و عمود منصف اضلاع یک مثلث هم‌رس‌اند.



$$\begin{cases} \hat{C}_2 > \hat{A}, \hat{C}_2 > \hat{B} \\ \hat{C}_2 = \hat{A} + \hat{B} \end{cases}$$

۶



$$AC > AB \Leftrightarrow \hat{B} > \hat{C}$$

۷



سوالات کنکور سراسری ۹۸

۱. در یک دوزنقه، خطی که وسط ساق‌ها را به هم وصل کند مساحت آن را به نسبت ۳ به ۵ تقسیم می‌کند، نسبت قاعده‌های دوزنقه کدام است؟

$$\frac{1}{4} \text{ (۱)} \quad \frac{1}{3} \text{ (۲)} \quad \frac{2}{5} \text{ (۳)} \quad \frac{3}{5} \text{ (۴)}$$

۲. در مثلث ABC نقطه M وسط BC است. نیمسازهای دو زاویه AMB و AMC دو ضلع مثلث را در P و Q قطع می‌کنند. نقطه O محل تلاقی AM و PQ است. OM برابر کدام است؟

$$\frac{1}{4} BC \text{ (۱)} \quad AQ \text{ (۲)} \quad OA \text{ (۳)} \quad OP \text{ (۴)}$$

۳. در چهارضلعی $ABCD$ ، وسط دو ضلع غیرمجاور و وسط دو قطر آن، رأس‌های یک لوزی است. الزاماً کدام نتیجه‌گیری در مورد چهارضلعی مفروض، درست است؟

- (۱) دو ضلع غیرمجاور دیگر، برابرند.
- (۲) دو قطر عمود بر هم‌اند.
- (۳) دو ضلع شامل رأس‌های لوزی، برابرند.
- (۴) دو ضلع غیرمجاور، موازی‌اند.

۴. نقطه A و خط d و صفحه P مفروض‌اند. در رسم صفحه‌ای گذرا از نقطه A ، موازی خط d و عمود بر صفحه P ، در کدام حالت، تعداد جواب‌ها، بی‌شمار است؟

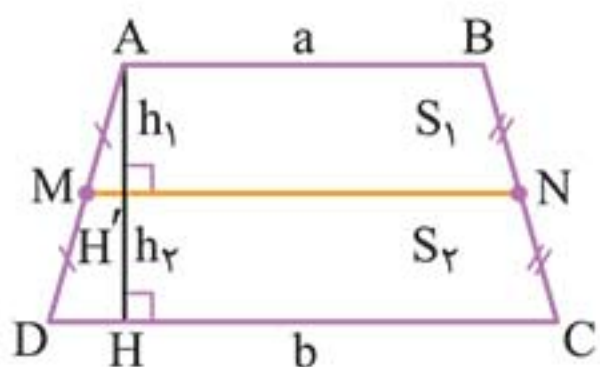
$$\begin{aligned} d \cap p = d \text{ (۱)} & \quad d \cap p \neq \phi \text{ (۲)} \\ d \parallel p \text{ (۳)} & \quad d \perp p \text{ (۴)} \end{aligned}$$



پاسخنامه

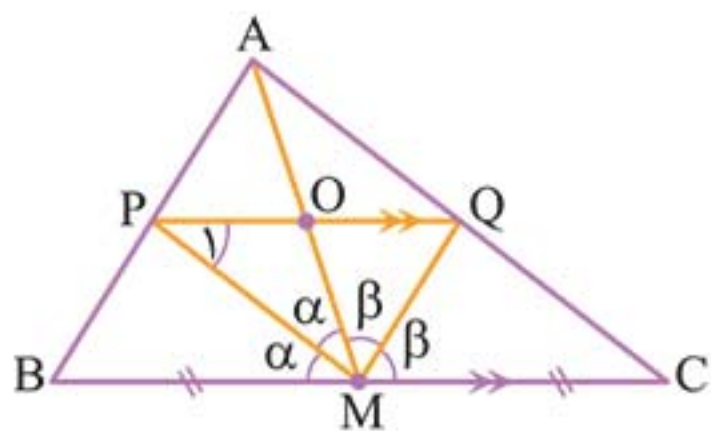
۱. گزینه «۲»

دو دوزنقه هم ارتفاع هستند.



$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta ADH \sim \Delta MHN \Rightarrow MH' \parallel DH \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow h_1 = h_2 \\ MN = \frac{a+b}{2}, \frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{5} = \frac{a + \frac{a+b}{2}}{b + \frac{a+b}{2}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

۲. گزینه «۴»



$$\left\{ \begin{array}{l} MP \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AM}{BC} \\ MQ \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AQ}{QC} = \frac{AM}{BC} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \Rightarrow PQ \parallel BC$$

$$PQ \parallel BC \Rightarrow \angle P_1 = \alpha \Rightarrow OP = OM$$