درس اول

# ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

## تعریف ماتریس

مفهوم ماتریس نخستین بار در کارهای ویلیام هامیلتون ریاضی‌دان ایرلندی و کیلی ریاضی‌دان انگلیسی در نیمه‌ی اول قرن نوزدهم مطرح شد. یکی از کاربردهای مهم ماتریس در فیزیک کوانتُم است. هایزنبرگ، اولین کسی که در فیزیک ماتریس‌ها را به‌کار برد جمله‌ی معروفی دارد که می‌گوید: «تنها ابزار ریاضی که من در مکانیک کوانتم به آن احتیاج دارم، ماتریس‌ها است.»

فرض کنید نمرات دروس ریاضی، فیزیک، شیمی و ادبیات آرش، نادر و فرشید به‌ترتیب از راست به چپ «۲۰، ۱۸/۵، ۱۷ و ۱۹»، «۱۹، ۱۶، ۱۴/۵ و ۱۸/۵» و «۱۶، ۱۵/۵، ۱۹ و ۲۰» باشند. می‌توانیم این نمرات را به یکی از دو صورت زیر نشان دهیم:

الف)

ستون‌ها، سطرها

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} \text{ریاضی} & \text{فیزیک} & \text{شیمی} & \text{ادبیات} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{آرش} \\ \text{نادر} \\ \text{فرشید} \end{matrix} & \begin{bmatrix} ۲۰ & ۱۸/۵ & ۱۷ & ۱۹ \\ ۱۹ & ۱۶ & ۱۴/۵ & ۱۸/۵ \\ ۱۶ & ۱۵/۵ & ۱۹ & ۲۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

در این‌جا از یک ماتریس با ۳ سطر و ۴ ستون استفاده کردیم.

ب)

ستون‌ها، سطرها

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} \text{آرش} & \text{نادر} & \text{فرشید} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{ریاضی} \\ \text{فیزیک} \\ \text{شیمی} \\ \text{ادبیات} \end{matrix} & \begin{bmatrix} ۲۰ & ۱۹ & ۱۶ \\ ۱۸/۵ & ۱۶ & ۱۵/۵ \\ ۱۷ & ۱۴/۵ & ۱۹ \\ ۱۹ & ۱۸/۵ & ۲۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

و در این‌جا اطلاعات را در یک ماتریس با ۴ سطر و ۳ ستون مرتب کردیم.

**تعریف:** هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک «ماتریس» نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در ماتریس را «**درایه‌ی**» آن ماتریس می‌نامیم.

معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند $A$، $B$، $C$ و ... نام‌گذاری می‌کنیم.

**مثال:** ماتریسی با ۳ سطر و ۴ ستون مثال بزنید.

**حل:** برای نمونه به دو ماتریس زیر توجه کنید:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \pi & ۴ \\ -۱ & ۷ & \sqrt{۲} & ۳ \\ ۵ & -۳ & ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & -۲ & ۷ \\ ۱/۵ & ۰ & ۴ & -۱ \\ ۶ & -۶ & -۷ & \sqrt{۳} \end{bmatrix}$$

به هرکدام از ماتریس‌های $A$ و $B$ ماتریسی از مرتبه $۳\times۴$ (۳ در ۴) گوییم. این ماتریس دارای $۳\times۴=۱۲$ درایه است.

در ماتریس $A$ درایه‌ی $\sqrt{۲}$ در سطر دوم و ستون سوم قرار دارد. و در ماتریس $B$ درایه‌ی ۷ در سطر اول و ستون چهارم قرار دارد.

**نکته**

اگر ماتریس $A$ دارای $m$ سطر و $n$ ستون باشد آن را ماتریس از مرتبه‌ی $\underset{\text{سطر}}{m}\times\underset{\text{ستون}}{n}$ گوییم و به صورت $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ نشان می‌دهیم.

$a_{ij}$ را «درایه‌ی عمومی» ماتریس $A$ می‌نامیم که $۱\le i\le m$ و $۱\le j\le n$ تغییر می‌کنند.

**مثال:** ماتریس‌های $A=[a_{ij}]_{۳\times۲}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times۴}$ را با درایه‌هایشان نشان دهید.

**حل:** ماتریس $A$ دارای ۳ سطر و ۲ ستون و ماتریس $B$ دارای ۲ سطر و ۴ ستون است:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳} & b_{۱۴} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳} & b_{۲۴} \end{bmatrix}$$

همان‌طور که متوجه شدید به‌عنوان مثال درایه‌ی $a_{۲۱}$ یعنی درایه‌ای از ماتریس $A$ که در سطر دوم و ستون اول قرار دارد.

پس در حالت کلی درایه‌ی $a_{ij}$ از ماتریس $A$ در سطر $i$ اُم و ستون $j$ اُم قرار دارد.

**مثال:** اگر در ماتریس $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$ برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=5$، برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=-2$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=0$. در این صورت $A$ را با درایه‌هایش نشان دهید.

**حل:** ماتریس $A$ به‌صورت $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ است. در درایه‌های $a_{11}$ و $a_{22}$ داریم $i=j$ پس مقدار آن‌ها برابر ۵ است.

در درایه‌ی $a_{12}$ داریم $i<j$ پس طبق فرض $a_{12}=0$ و در درایه‌ی $a_{21}$ داریم $i>j$ پس طبق فرض $a_{21}=-2$ .

بنابراین ماتریس $A$ به‌صورت مقابل است:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

**مثال:** درایه‌های ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 4}$ را با تعریف زیر به‌دست آورید:

$$a_{ij}=\begin{cases} i-2j & ; \quad i=j \\ \dfrac{i+j}{2} & ; \quad i>j \\ 0 & ; \quad i<j \end{cases}$$

**حل:** ماتریس $A$ به صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

طبق فرض داریم:

$$\left.\begin{aligned} a_{21} &= \frac{2+1}{2}=1/5 \\ a_{31} &= \frac{3+1}{2}=2 \\ a_{32} &= \frac{3+2}{2}=2/5 \end{aligned}\right\}$$

در این درایه‌ها داریم $i>j$ پس از قانون دوم استفاده می‌کنیم

$$a_{12}=a_{13}=a_{14}=a_{23}=a_{24}=a_{34}=0$$

در این درایه‌ها داریم $i<j$ پس از قانون سوم استفاده می‌کنیم

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= 1-2(1)=-1 \\ a_{22} &= 2-2(2)=-2 \\ a_{33} &= 3-2(3)=-3 \end{aligned}\right\}$$

در این درایه‌ها داریم $i=j$ پس از قانون اول استفاده می‌کنیم.

پس ماتریس $A$ به‌صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2/5 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

**مثال:** در ماتریس $A=[i+2j]_{2\times 4}$ مجموع درایه‌های ستون سوم چقدر است؟

**حل:** ماتریس $A$ به‌صورت مقابل است:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

ستون سوم دارای درایه‌های $a_{13}$ و $a_{23}$ است.

طبق فرض:

$$a_{13}=1+2(3)=7 \quad , \quad a_{23}=2+2(3)=8$$

بنابراین مجموع درایه‌های ستون سوم برابر $7+8=15$ است.

**تست:** ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 2}$ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases} 2i-j & i>j \\ i+3j & i=j \\ i^2-j & i<j \end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس $A$ برابر کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۳ ۳) ۲۱ ۴) ۲۰

**حل:** درایه‌های ماتریس $A$ را با توجه به تعریف $a_{ij}$ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} a_{11}&=1+3=4 \quad , \quad a_{12}=1^2-2=-1 \\ a_{21}&=4-1=3 \quad , \quad a_{22}=2+6=8 \\ a_{31}&=6-1=5 \quad , \quad a_{32}=6-2=4 \end{aligned}$$

بنابراین $A=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 8 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$. در نتیجه مجموع درایه‌های ماتریس $A$ برابر $4-1+3+8+5+4=23$ است. پس گزینه‌ی «۲» درست است.

## معرفی چند ماتریس خاص

۱ **ماتریس مربعی:** اگر در ماتریس $A$ تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها با هم برابر و مساوی $n$ باشد، $A$ را ماتریس «مربعی» از مرتبه‌ی $n$ ($n\times n$) می‌نامیم. مانند ماتریس‌های زیر:

$$B=\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳} \\ b_{۳۱} & b_{۳۲} & b_{۳۳} \end{bmatrix}$$ (ماتریس مربعی از مرتبه ۳)

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۴ \end{bmatrix}$$ (ماتریس مربعی از مرتبه ۲)

در ماتریس‌های مربعی درایه‌هایی که شماره‌ی سطر و ستون آن‌ها برابر است روی «قطر اصلی» قرار دارند. قطر دیگر این ماتریس را «قطر فرعی» می‌گوییم. (مجموع شماره‌ی سطر و ستون درایه‌هایی که روی قطر فرعی هستند برابر است با $n+۱$)

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

قطر فرعی     قطر اصلی

در ضمن در ماتریس مربعی در درایه‌های بالای قطر اصلی شماره‌ی سطر از ستون کمتر است و در درایه‌های پایین قطر اصلی شماره‌ی سطر از ستون بیشتر است. به‌عبارت دیگر اگر $i<j$ آن‌گاه $a_{ij}$ درایه‌ی بالای قطر اصلی است و اگر $i>j$ آن‌گاه $a_{ij}$ درایه‌ی پایین قطر اصلی است.

۲ **ماتریس سطری:** اگر ماتریس $A$ فقط از یک سطر تشکیل شده باشد آن را یک ماتریس «سطری» می‌نامیم. مانند ماتریس‌های زیر:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \end{bmatrix}_{۱\times ۲} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}_{۱\times ۳} \quad , \quad C=\begin{bmatrix} ۹ \end{bmatrix}_{۱\times ۱}=۹$$

پس مرتبه‌ی هر ماتریس سطری به صورت $۱\times n$ است.

توجه کنید که هر ماتریس $۱\times ۱$ مانند $A=[a]_{۱\times ۱}$ را مساوی با عدد حقیقی $a$ تعریف می‌کنیم.

۳ **ماتریس ستونی:** اگر ماتریس فقط دارای یک ستون باشد آن را ماتریس «ستونی» می‌نامیم. مانند ماتریس‌های زیر:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}_{۲\times ۱} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} ۰ \\ -۱ \\ \sqrt{۲} \\ ۷ \end{bmatrix}_{۴\times ۱} \quad , \quad C=\begin{bmatrix} ۹۰ \end{bmatrix}_{۱\times ۱}=۹۰$$

پس مرتبه‌ی هر ماتریس ستونی به‌صورت $m\times ۱$ است.

۴ **ماتریس‌های بالامثلثی و پایین‌مثلثی:** اگر $A$ ماتریس مربعی باشد به‌طوری که همه‌ی درایه‌های زیر قطر اصلی آن برابر صفر باشند آن‌گاه $A$ را ماتریس «بالامثلثی» می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی بالا مثلثی‌اند.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۲ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix} \quad , \quad C=\begin{bmatrix} -۱ & -۲ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} \quad , \quad D=\begin{bmatrix} a & b & c \\ ۰ & d & e \\ ۰ & ۰ & f \end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر اگر $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ بالامثلثی باشد آن‌گاه به ازای هر $i>j$ درایه‌ی $a_{ij}$ صفر است. توجه داشته باشید در ماتریس بالامثلثی درایه‌های بالا و روی قطر اصلی هم می‌توانند صفر باشند.

به همین ترتیب اگر $A$ یک ماتریس مربعی باشد به‌طوری که همه‌ی درایه‌های بالای قطر اصلی آن برابر صفر باشند آن‌گاه $A$ را ماتریس «پایین‌مثلثی» می‌نامیم. مانند ماتریس‌های زیر:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۴ & -۱ & ۰ \\ ۷ & \sqrt{۲} & ۵ \end{bmatrix} \quad , \quad C=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۹ & -۲ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad D=\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ b & c & ۰ \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر اگر $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ پایین مثلثی باشد آن‌گاه به ازای هر $i<j$ درایه‌ی $a_{ij}$ صفر است. توجه داشته باشید در ماتریس پایین مثلثی درایه‌های روی قطر اصلی و زیر قطر اصلی هم می‌توانند صفر باشند.

**مثال:** ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases}۰ & i>j\\ -۲ & i=j\\ ۲i+۱ & i<j\end{cases}$ مفروض است، نوع این ماتریس را مشخص کنید.

**حل:** ابتدا با تعریف داده شده برای $a_{ij}$ درایه‌های این ماتریس را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{۱۱}=-۲\quad,\quad a_{۱۲}=۲+۱=۳\quad,\quad a_{۱۳}=۲+۱=۳$$
$$a_{۲۱}=۰\quad,\quad a_{۲۲}=-۲\quad,\quad a_{۲۳}=۴+۱=۵$$
$$a_{۳۱}=۰\quad,\quad a_{۳۲}=۰\quad,\quad a_{۳۳}=-۲$$

بنابراین ماتریس $A$ به‌صورت مقابل است.

$$A=\begin{bmatrix}-۲ & ۳ & ۳\\ ۰ & -۲ & ۵\\ ۰ & ۰ & -۲\end{bmatrix}$$

درایه‌های زیر قطر اصلی ماتریس مربعی $A$ صفر است پس $A$ ماتریس بالامثلثی است.

**تست:** ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ را درنظر بگیرید. با کدام تعریف برای $a_{ij}$ ماتریس $A$ پایین مثلثی است؟ (در گزینه‌ها [ ] نماد جزءصحیح است.)

۱) $\begin{cases}\left[\frac{i+j}{۲}\right]-۲ & i>j\\ i-j & i\le j\end{cases}$
۲) $\begin{cases}\left[\frac{i-j}{۲}\right]-۲ & i>j\\ i+j & i\le j\end{cases}$
۳) $\begin{cases}\left[\frac{i+j}{۳}\right]-۱ & i<j\\ i-j & i\ge j\end{cases}$
۴) $\begin{cases}\left[\frac{i-j}{۳}\right]-۲ & i<j\\ i+j & i\ge j\end{cases}$

**حل:** ماتریس مربعی $A$ در صورتی پایین‌مثلثی است که درایه‌های بالای قطر اصلی برابر با صفر باشند. پس به‌ازای هر $i<j$ باید $a_{ij}=۰$ باشد. در گزینه‌ی «۳» به‌ازای $i<j$ مقدار $\frac{i+j}{۳}$ بین اعداد ۱ و ۲ قرار دارد (اگر $i=۱$ و $j=۲$ باشد $\frac{i+j}{۳}$ دقیقاً ۱ می‌شود.) پس $\left[\frac{i+j}{۳}\right]=۱$ در نتیجه $\left[\frac{i+j}{۳}\right]-۱=۰$ پس با این تعریف ماتریس $A$ پایین‌مثلثی است. (اگر $i=۱$ و $j=۳$ را درنظر بگیرید در گزینه‌های «۱»، «۲» و «۴» درایه‌ی $a_{۱۳}$ مخالف صفر می‌شود، پس پایین‌مثلثی نیستند.)



**۵ ماتریس قطری:** ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند. توجه کنید که درایه‌های واقع بر قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند. مانند ماتریس‌های زیر:

$$A=\begin{bmatrix}-۲ & ۰\\ ۰ & ۴\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۴ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\quad,\quad C=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\quad,\quad D=\begin{bmatrix}a & ۰ & ۰\\ ۰ & b & ۰\\ ۰ & ۰ & c\end{bmatrix}$$

پس ماتریس قطری هم ماتریس بالامثلثی و هم ماتریس پایین‌مثلثی محسوب می‌شود.

**۶ ماتریس اسکالر:** اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند آن را یک ماتریس «اِسکالر» می‌نامیم. مانند ماتریس‌های زیر:

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\quad,\quad C=\begin{bmatrix}\sqrt{۲} & ۰ & ۰\\ ۰ & \sqrt{۲} & ۰\\ ۰ & ۰ & \sqrt{۲}\end{bmatrix}\quad,\quad D=[۷]=۷\quad,\quad E=\begin{bmatrix}x & ۰ & ۰\\ ۰ & x & ۰\\ ۰ & ۰ & x\end{bmatrix}$$

می‌توان گفت: هر ماتریس اسکالر ماتریس قطری است ولی هر ماتریس قطری ممکن است ماتریس اسکالر نباشد.

**مثال:** ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ اسکالر است. اگر مجموع تمام درایه‌های آن برابر ۱۸ باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن چند است؟

**حل:** طبق تعریف ماتریس اسکالر، $A$ به‌صورت مقابل است:

$$A=\begin{bmatrix}x & ۰ & ۰\\ ۰ & x & ۰\\ ۰ & ۰ & x\end{bmatrix}$$

بنابراین طبق فرض مسأله: $x+x+x=۱۸\Rightarrow x=۶$

پس: $(x)(x)(x)=۶^{۳}=۲۱۶$

۷ **ماتریس همانی (واحد):** اگر ماتریس $A$ اسکالر باشد و همه‌ی درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن یک باشد آن را ماتریس «همانی» می‌نامیم.

معمولاً ماتریس همانی را با $I_n$ نمایش می‌دهیم که در آن $n$ مرتبه‌ی ماتریس است. مانند ماتریس‌های زیر:

$$I_۱=[۱] \quad , \quad I_۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad , \quad I_۳=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

به‌عبارت دیگر می‌توان درایه‌های ماتریس همانی $I_n=[a_{ij}]_{n\times n}$ را به صورت زیر تعریف کرد.

$$a_{ij}=\begin{cases} ۱ & i=j \\ ۰ & i\neq j \end{cases}$$

۸ **ماتریس صفر:** ماتریسی است که همه‌ی درایه‌های آن صفر باشند. ماتریس صفر را با نماد $\bar{O}$ نشان می‌دهیم. مانند ماتریس‌های زیر:

$$\bar{O}=[۰]_{۱\times۱} \quad , \quad \bar{O}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times۲} \quad , \quad \bar{O}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۳\times۲} \quad , \quad \bar{O}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

توجه کنید ماتریس صفر می‌تواند مربعی یا غیرمربعی باشد.

**مثال:** اگر ماتریس $\begin{bmatrix} ۱+x & z^۳+y \\ ۲y-۲x & z^۲+t \end{bmatrix}$ ماتریس صفر باشد آن‌گاه مقدار $۲t^۲-۳x^۳$ را به‌دست آورید.

**حل:** در ماتریس صفر همه‌ی درایه‌ها صفر است. بنابراین:

$$۱+x=۰\Rightarrow x=-۱ \quad , \quad ۲y-۲x=۰\overset{x=-۱}{\Rightarrow} y=-۱ \quad , \quad z^۳+y=۰\overset{y=-۱}{\Rightarrow} z=۱ \quad , \quad z^۲+t=۰\overset{z=۱}{\Rightarrow} t=-۱$$

در نتیجه مقدار خواسته شده برابر است با:

$$۲t^۲-۳x^۳=۲(-۱)^۲-۳(-۱)^۳=۲+۳=۵$$

## تساوی دو ماتریس

دو ماتریس هم‌مرتبه‌ی $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ را مساوی می‌گوییم هرگاه درایه‌های آن‌ها نظیر به نظیر با هم برابر باشند. به عبارت دیگر:

$$\forall i,j \quad , \quad a_{ij}=b_{ij}\Leftrightarrow[a_{ij}]=[b_{ij}]$$

یعنی:

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{bmatrix}_{۲\times۳}=\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳} \end{bmatrix}_{۲\times۳}\Leftrightarrow\begin{cases} a_{۱۱}=b_{۱۱} \\ a_{۱۲}=b_{۱۲} \\ a_{۱۳}=b_{۱۳} \\ a_{۲۱}=b_{۲۱} \\ a_{۲۲}=b_{۲۲} \\ a_{۲۳}=b_{۲۳} \end{cases}$$

**مثال:** دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲x-y & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲z & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۴ & x-y+۱ & ۴ \\ ۱ & ۱۰ & x-۲y \end{bmatrix}$ با هم برابرند. $x+y+z$ چقدر است؟

**حل:** طبق تعریف دو ماتریس مساوی داریم:

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} ۴=۲x-y \\ x-y+۱=۳ \end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases} ۲x-y=۴ \\ -x+y=-۲ \end{cases}\Rightarrow x=۲\Rightarrow y=۰ \\ ۱۰=۲z\Rightarrow z=۵ \qquad\qquad\qquad \Rightarrow x+y+z=۷ \\ x-۲y=۲\Rightarrow ۲-۲(۰)=۲ \checkmark \end{cases}$$

**تست:** اگر دو ماتریس $\begin{bmatrix} 1+2x & y+x \\ 1-z & x^2+y \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} x-y & 3y-1 \\ 3 & k \end{bmatrix}$ مساوی باشند، آن‌گاه حاصل $z+k$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۱- ۴) ۲

**حل:** هر دو ماتریس $2\times 2$ بوده پس هم‌مرتبه هستند. بنابراین مساوی‌اند هرگاه درایه‌های نظیر آن‌ها برابر هم باشند. بنابراین:

$$\begin{cases} \begin{cases} x-y=1+2x \\ 3y-1=y+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ x-2y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \\ 1-z=3 \Rightarrow z=-2 \\ x^2+y=k \overset{x=-1}{\underset{y=0}{\Rightarrow}} k=1 \end{cases}$$

در نتیجه حاصل $z+k$ برابر $-2+1=-1$ است. پس گزینه‌ی «۳» درست است.

## جمع ماتریس‌ها

اگر دو ماتریس هم‌مرتبه‌ی $A$ و $B$ مفروض باشند برای جمع یا تفاضل آن‌ها کافی است درایه‌های دو ماتریس را نظیر به نظیر با هم جمع یا از هم کم کنیم که حاصل مجموع یا تفاضل $A$ و $B$ ماتریسی مانند $C$ است که با $A$ و $B$ هم‌مرتبه است.

$$A=[a_{ij}]_{m\times n} \quad , \quad B=[b_{ij}]_{m\times n} \quad \Rightarrow \begin{cases} A+B=[a_{ij}]+[b_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}] \\ A-B=[a_{ij}]-[b_{ij}]=[a_{ij}-b_{ij}] \end{cases}$$

**مثال:** دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 7 \\ 9 & -4 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. ماتریس‌های $A+B$ و $B-A$ را تشکیل دهید.

**حل:**

$$B-A=\begin{bmatrix} 4-1 & -2-2 \\ 7-(-1) & -2-4 \\ -4-0 & 9-5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 8 & -6 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \qquad A+B=\begin{bmatrix} 1+4 & 2+(-2) \\ -1+7 & 4+(-2) \\ 0+(-4) & 5+9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 2 \\ -4 & 14 \end{bmatrix}$$

**مثال:** دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. ماتریس $C=[c_{ij}]_{3\times 3}$ را چنان تشکیل دهید که تساوی $A+C=B$ برقرار باشد.

**حل:**

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2+c_{11} & 3+c_{12} & 4+c_{13} \\ -1+c_{21} & 2+c_{22} & 0+c_{23} \\ 4+c_{31} & -1+c_{32} & 5+c_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} c_{11}=-1 & , & c_{12}=-3 & , & c_{13}=-6 \\ c_{21}=5 & , & c_{22}=-5 & , & c_{23}=1 \\ c_{31}=-3 & , & c_{32}=3 & , & c_{33}=-2 \end{matrix} \Rightarrow C=\begin{bmatrix} -1 & -3 & -6 \\ 5 & -5 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

بنابراین از تساوی $A+C=B$ می‌توان تساوی $C=B-A$ را نتیجه گرفت.

**تست:** اگر $A=[ij]_{2\times 3}$ و $B=[j-3i]_{2\times 3}$ دو ماتریس باشند، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $A+B$ برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) ۵ ۳) ۱ ۴) ۳

**حل:** از آن‌جایی که این دو ماتریس هم‌مرتبه هستند، درنتیجه می‌توان آن‌ها را جمع کرد. ابتدا درایه‌های هر دو ماتریس $A$ و $B$ را به‌دست می‌آوریم. در ماتریس $A$ درایه‌ها به صورت $a_{ij}=ij$ تعریف شده از پس:

$$\begin{matrix} a_{11}=1 & , & a_{12}=2 & , & a_{13}=3 \\ a_{21}=2 & , & a_{22}=4 & , & a_{23}=6 \end{matrix}$$

در نتیجه $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

از طرف دیگر در ماتریس $B$ درایه‌ها به‌صورت $b_{ij} = j - ۳i$ تعریف شده‌اند. پس:

$$b_{۱۱} = ۱ - ۳ = -۲ \quad , \quad b_{۱۲} = ۲ - ۳ = -۱ \quad , \quad b_{۱۳} = ۳ - ۳ = ۰$$
$$b_{۲۱} = ۱ - ۶ = -۵ \quad , \quad b_{۲۲} = ۲ - ۶ = -۴ \quad , \quad b_{۲۳} = ۳ - ۶ = -۳$$

در نتیجه $B = \begin{bmatrix} -۲ & -۱ & ۰ \\ -۵ & -۴ & -۳ \end{bmatrix}$.

بنابراین ماتریس $A + B$ برابر است با:

$$A + B = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۳ \\ -۳ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس $A + B$ برابر ۳ است. بنابراین گزینه‌ی «۴» درست است.

## ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس

برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریسی مانند $A$ آن عدد را در تمام درایه‌های ماتریس ضرب می‌کنیم. یعنی:

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \quad , \quad r \in \mathbb{R} \Rightarrow rA = r[a_{ij}]_{m\times n} = [ra_{ij}]_{m\times n}$$

اگر $r = -۱$ آن‌گاه $(-۱)A = -A$.

در این حالت $-A$ را قرینه‌ی ماتریس $A$ می‌نامیم و اگر $r = ۰$ آن‌گاه $(۰)A = \bar{O}$. هم‌چنین اگر $k$ عددی حقیقی و دلخواه باشد، آن‌گاه:

$$k\bar{O}_{m\times n} = \bar{O}_{m\times n}$$

**مثال:** اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & -۳ \\ ۶ & ۷ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۷ & ۲ \\ ۰ & -۳ \\ -۵ & ۴ \end{bmatrix}$ آن‌گاه ماتریس $۲A - ۳B$ را تشکیل دهید.

**حل:**

$$۲A = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۸ & -۶ \\ ۱۲ & ۱۴ \end{bmatrix} \quad , \quad ۳B = \begin{bmatrix} -۲۱ & ۶ \\ ۰ & -۹ \\ -۱۵ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$۲A - ۳B = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۸ & -۶ \\ ۱۲ & ۱۴ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -۲۱ & ۶ \\ ۰ & -۹ \\ -۱۵ & ۱۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲۵ & -۴ \\ ۸ & ۳ \\ ۲۷ & ۲ \end{bmatrix}$$

**تست:** ماتریس $A = [a_{ij}]_{۳\times ۳}$ با درایه‌های $a_{ij} = \begin{cases} j - ۲i & i \le j \\ i - j & i > j \end{cases}$ و ماتریس $B = [b_{ij}]_{۳\times ۳}$ با درایه‌های $b_{ij} = \begin{cases} i - ۲j & i < j \\ j - i & i \ge j \end{cases}$ مفروض‌اند. ماتریس $۲A + ۲B$ چگونه است؟

۱) قطری　　۲) اسکالر　　۳) بالامثلثی　　۴) پایین‌مثلثی

**حل:** ابتدا درایه‌های ماتریس‌های $A$ و $B$ را با توجه به تعریف آن‌ها به‌دست می‌آوریم:

$$a_{۱۱} = ۱ - ۲ = -۱ \quad , \quad a_{۱۲} = ۲ - ۲ = ۰ \quad , \quad a_{۱۳} = ۳ - ۲ = ۱$$
$$a_{۲۱} = ۲ - ۱ = ۱ \quad , \quad a_{۲۲} = ۲ - ۴ = -۲ \quad , \quad a_{۲۳} = ۳ - ۴ = -۱$$
$$a_{۳۱} = ۳ - ۱ = ۲ \quad , \quad a_{۳۲} = ۳ - ۲ = ۱ \quad , \quad a_{۳۳} = ۳ - ۶ = -۳$$

پس ماتریس $A$ به‌صورت مقابل است:

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & -۲ & -۱ \\ ۲ & ۱ & -۳ \end{bmatrix}$$

از طرف دیگر برای ماتریس $B$ داریم:

$$b_{۱۱} = ۱ - ۱ = ۰ \quad , \quad b_{۱۲} = ۱ - ۴ = -۳ \quad , \quad b_{۱۳} = ۱ - ۶ = -۵$$
$$b_{۲۱} = ۱ - ۲ = -۱ \quad , \quad b_{۲۲} = ۲ - ۲ = ۰ \quad , \quad b_{۲۳} = ۲ - ۶ = -۴$$
$$b_{۳۱} = ۱ - ۳ = -۲ \quad , \quad b_{۳۲} = ۲ - ۳ = -۱ \quad , \quad b_{۳۳} = ۳ - ۳ = ۰$$

پس:

$$B=\begin{bmatrix} ۰ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۰ & -۴ \\ -۲ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$۲A+۲B=۲\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & -۲ & -۱ \\ ۲ & ۱ & -۳ \end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix} ۰ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۰ & -۴ \\ -۲ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & -۶ & -۸ \\ ۰ & -۴ & -۱۰ \\ ۰ & ۰ & -۶ \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $۲A+۲B$ ماتریس بالامثلثی است. پس گزینه‌ی «۳» درست است. (با توجه به گزینه‌ها می‌توان فقط مثلاً درایه‌ی ۱۲ را به‌دست آورد و گزینه‌ی صحیح را انتخاب کرد.)

## خواص مهم جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

فرض کنید $A$، $B$ و $C$ ماتریس‌های هم مرتبه و $m\times n$ و $r$ و $s$ دو عدد حقیقی باشند. خواص زیر به راحتی با توجه به تعریف جمع ماتریس‌ها و تعریف ضرب عدد در ماتریس قابل اثبات‌اند:

الف) خاصیت جابه‌جایی جمع $A+B=B+A$

ب) خاصیت شرکت‌پذیری جمع $A+(B+C)=(A+B)+C$

پ) خاصیت عضو خنثی برای عمل جمع ماتریس $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$

ت) خاصیت عضو قرینه $A+(-A)=(-A)+A=A-A=\bar{O}$

ث) $r(A\pm B)=rA\pm rB$

ج) $(r\pm s)A=rA\pm sA$

چ) $rA=rB \quad , \quad r\neq ۰ \Rightarrow A=B$

ح) $A=B\Rightarrow rA=rB$

خ) $(rs)A=r(sA)=s(rA)$

**مثال:** به‌عنوان نمونه خاصیت «ث» را اثبات کنید.

**حل:** فرض کنید $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ در این صورت اگر $r\in\mathbb{R}$ آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} r(A\pm B) &= r([a_{ij}]_{m\times n}\pm[b_{ij}]_{m\times n})=r[a_{ij}\pm b_{ij}]_{m\times n}=[r(a_{ij}\pm b_{ij})] \\ &=[ra_{ij}\pm rb_{ij}] && \text{(توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع یا تفریق در } \mathbb{R}) \\ &=[ra_{ij}]\pm[rb_{ij}] && \text{(تعریف جمع یا تفاضل دو ماتریس)} \\ &=r[a_{ij}]\pm r[b_{ij}] && \text{(تعریف ضرب عدد در ماتریس)} \\ &=rA\pm rB \end{aligned}$$

**مثال:** ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۳ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & -۴ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ در تساوی $۲(A+\frac{۳}{۲}C)=۳(۲B-C)$ صدق می‌کنند، درایه‌های ماتریس $C$ را به‌دست آورید.

**حل:** با استفاده از ویژگی‌های جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس تساوی داده‌شده در مسئله را ساده می‌کنیم.

$$۲(A+\frac{۳}{۲}C)=۳(۲B-C)\Rightarrow ۲A+۳C=۶B-۳C\Rightarrow ۶C=۶B-۲A \overset{\text{تقسیم بر ۲}}{\Rightarrow} ۳C=۳B-A$$

بنابراین:

$$۳C=۳\begin{bmatrix} ۰ & -۴ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۳ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۳ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & -۱۱ & ۲ \\ ۳ & -۷ & ۴ \end{bmatrix}$$

درنتیجه:

$$C=\frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} -۲ & -۱۱ & ۲ \\ ۳ & -۷ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{۲}{۳} & -\frac{۱۱}{۳} & \frac{۲}{۳} \\ ۱ & -\frac{۷}{۳} & \frac{۴}{۳} \end{bmatrix}$$

## ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی

قبل از تعریف ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی به مثال زیر توجه کنید.

**مثال:** اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times۳}$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times۴}$ آن‌گاه هریک از عبارات زیر را توصیف کنید. به‌طوری که $k$ عدد طبیعی در فاصله‌ی $۱\le k\le ۳$ باشد.

۱) $a_{۲k}$ ۲) $\sum_{k=۱}^{۳}a_{۲k}$ ۳) $\sum_{k=۱}^{۳}a_{۲k}b_{k۳}$

**حل:** ۱) عبارت $a_{۲k}$ با تغییر $k$ مشخص کننده‌ی درایه‌های سطر دوم ماتریس $A$ است به عبارتی $a_{۲k}$ نمایشگر درایه‌های $a_{۲۱}$ و $a_{۲۲}$ و $a_{۲۳}$ در ماتریس $A$ است.

۲) عبارت $\sum_{k=۱}^{۳}a_{۲k}$ بنا به تعریف سیگما مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس $A$ است. یعنی: $\sum_{k=۱}^{۳}a_{۲k}=a_{۲۱}+a_{۲۲}+a_{۲۳}$

۳) عبارت $\sum_{k=۱}^{۳}a_{۲k}b_{k۳}$ درایه‌های سطر دوم ماتریس $A$ را در درایه‌های ستون سوم $B$ نظیر به نظیر ضرب کرده و جواب‌های آن‌ها را جمع می‌کند. یعنی:

$$\sum_{k=۱}^{۳}a_{۲k}b_{k۳}=a_{۲۱}b_{۱۳}+a_{۲۲}b_{۲۳}+a_{۲۳}b_{۳۳}=\begin{bmatrix}a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{۱۳}\\ b_{۲۳}\\ b_{۳۳}\end{bmatrix}$$

حال اگر $A$ ماتریسی سطری و $B$ ماتریسی ستونی باشد به‌طوری که تعداد ستون‌های $A$ با تعداد سطرهای ماتریس $B$ برابر باشند در این صورت $A\times B$ تعریف می‌شود و برای ضرب کافی است هر درایه‌ی ماتریس $A$ را در درایه‌ی نظیرش در $B$ ضرب کرده و حاصل این ضرب‌ها را با هم جمع کنیم که در این صورت ماتریسی ۱×۱ یا یک عدد حقیقی به‌دست می‌آید.

به عنوان نمونه فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}_{۱\times۳}$ و $B=\begin{bmatrix}-۲\\ ۷\\ ۶\end{bmatrix}_{۳\times۱}$ در این صورت داریم:

$$A\times B=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-۲\\ ۷\\ ۶\end{bmatrix}=۲(-۲)+۰(۷)-\frac{۱}{۲}(۶)=-۷$$

## ضرب ماتریس در ماتریس

اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ (تعداد ستون‌های $A$ با تعداد سطرهای $B$ برابر باشد.) در این صورت $A\times B$ قابل تعریف است. $A\times B$ ماتریسی مانند $C$ بوده که مرتبه‌ی آن $m\times p$ است. هر درایه‌ای از $C$ مانند $c_{ij}$ از ضرب سطر $i$ اُم ماتریس $A$ در ستون $j$ اُم ماتریس $B$ به‌دست می‌آید.

به عبارت دیگر درایه‌های $c_{ij}$ به‌صورت مقابل به‌دست می‌آیند. $c_{ij}=\sum_{k=۱}^{n}a_{ik}b_{kj}$

زیرا $a_{ik}$ نمایشگر درایه‌های سطر $i$ ام و $b_{kj}$ نمایشگر درایه‌های ستون $j$ ام $B$ هستند و $\sum_{k=۱}^{n}a_{ik}b_{kj}$ نمایشگر ضرب سطر $i$ام ماتریس $A$ در ستون $j$ام ماتریس $B$ است.

به عنوان مثال فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۳ & ۰\end{bmatrix}_{۲\times۲}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۳\\ ۴ & ۵ & ۰\end{bmatrix}_{۲\times۳}$ می‌خواهیم $A\times B$ را تشکیل دهیم. $A\times B$ ماتریسی به صورت $C=[c_{ij}]_{۲\times۳}$ است.

$$A_{۲\times۲}\times B_{۲\times۳}=C_{۲\times۳}\Rightarrow\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۳ & ۰\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۳\\ ۴ & ۵ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{۱۱} & c_{۱۲} & c_{۱۳}\\ c_{۲۱} & c_{۲۲} & c_{۲۳}\end{bmatrix}$$

$$c_{۱۱}=\begin{bmatrix}۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ ۴\end{bmatrix}=۲(۲)+۳(۴)=۱۶\quad,\quad c_{۲۱}=\begin{bmatrix}-۳ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ ۴\end{bmatrix}=-۳(۲)+۰(۴)=-۶$$

$$c_{۱۲}=\begin{bmatrix}۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱\\ ۵\end{bmatrix}=۲(-۱)+۳(۵)=۱۳\quad,\quad c_{۲۲}=\begin{bmatrix}-۳ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱\\ ۵\end{bmatrix}=-۳(-۱)+۰(۵)=۳\qquad\Rightarrow C=\begin{bmatrix}۱۶ & ۱۳ & ۶\\ -۶ & ۳ & -۹\end{bmatrix}$$

$$c_{۱۳}=\begin{bmatrix}۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳\\ ۰\end{bmatrix}=۲(۳)+۳(۰)=۶\quad,\quad c_{۲۳}=\begin{bmatrix}-۳ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳\\ ۰\end{bmatrix}=-۳(۳)+۰(۰)=-۹$$

**مثال:** دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & ۳ \\ ۷ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۴ & -۱ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. $A\times B$ و $B\times A$ را به‌دست آورید.

**حل:** چون $A=[a_{ij}]_{۳\times ۲}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times ۳}$ پس $A\times B$ ماتریسی ۳ × ۳ است.

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & ۳ \\ ۷ & ۰ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۴ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳(۱)+۲(۰) & ۳(۲)+۲(۴) & ۳(۳)+۲(-۱) \\ -۱(۱)+۳(۰) & -۱(۲)+۳(۴) & -۱(۳)+۳(-۱) \\ ۷(۱)+۰(۰) & ۷(۲)+۰(۴) & ۷(۳)+۰(-۱) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۱۴ & ۷ \\ -۱ & ۱۰ & -۶ \\ ۷ & ۱۴ & ۲۱ \end{bmatrix}$$

ماتریس $B\times A$ یک ماتریس ۲ × ۲ است.

$$B\times A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۴ & -۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & ۳ \\ ۷ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱(۳)+۲(-۱)+۳(۷) & ۱(۲)+۲(۳)+۳(۰) \\ ۰(۳)+۴(-۱)+(-۱)(۷) & ۰(۲)+۴(۳)+(-۱)(۰) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲۲ & ۸ \\ -۱۱ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید لزومی ندارد که $A\times B$ با $B\times A$ برابر باشد. (از این پس $A\times B$ را به‌صورت $AB$ نشان خواهیم داد.)

**مثال:** ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۱ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۷ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. ماتریس‌های $AB$ و $BA$ را در صورت وجود تشکیل دهید.

**حل:** چون $A=[a_{ij}]_{۲\times ۳}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times ۲}$ بنابراین $AB$ وجود ندارد زیرا تعداد ستون‌های $A$ با تعداد سطرهای $B$ برابر نیست. ولی $BA$ وجود دارد.

$$BA=C\Rightarrow\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۷ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۱ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{۱۱} & c_{۱۲} & c_{۱۳} \\ c_{۲۱} & c_{۲۲} & c_{۲۳} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱(۲)+۵(۱) & ۱(-۱)+۵(۴) & ۱(۳)+۵(۵) \\ -۲(۲)+۷(۱) & -۲(-۱)+۷(۴) & -۲(۳)+۷(۵) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ & ۱۹ & ۲۸ \\ ۳ & ۳۰ & ۲۹ \end{bmatrix}$$

**تست:** ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۱۳ & ۱۲ & -۳ \\ ۳ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & m & -۵ \\ ۱۱ & ۵ & ۱ & ۱۹ \\ ۲۱ & \sqrt{۷} & ۲ & -۲۳ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر درایه‌ی سطر دوم، ستون سوم $AB$ برابر ۹ باشد آن‌گاه $m$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۹

**حل:** برای پیدا کردن درایه سطر دوم ستون سوم ماتریس $AB$ کافیست سطر دوم $A$ را در ستون سوم $B$ ضرب کنیم، به عبارت دیگر لازم نیست همه‌ی درایه‌های ماتریس $AB$ را پیدا کنیم.

$$AB \text{ درایه‌ی سطر دوم ستون سوم} =\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}=۳m+۱+۲=۳m+۳$$

بنا به فرض سؤال داریم: $۳m+۳=۹\Rightarrow ۳m=۶\Rightarrow m=۲$

پس گزینه‌ی «۲» درست است.

**مثال:** دو ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times ۳}$ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases} i-j & i<j \\ i+j & i=j \\ i-۲j & i>j \end{cases}$ و $B=[i^۲-۲j]_{۳\times ۲}$ را درنظر بگیرید. درایه‌های ماتریس $AB$ را به‌دست آورید.

**حل:** ابتدا درایه‌های هر دو ماتریس را محاسبه می‌کنیم.

$$\left.\begin{matrix} a_{۱۱}=۱+۱=۲ \;, & a_{۱۲}=۱-۲=-۱ \;, & a_{۱۳}=۱-۳=-۲ \\ a_{۲۱}=۲-۲=۰ \;, & a_{۲۲}=۲+۲=۴ \;, & a_{۲۳}=۲-۳=-۱ \end{matrix}\right\}\Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۴ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} b_{۱۱}=۱^۲-۲=-۱ \;, & b_{۱۲}=۱^۲-۴=-۳ \\ b_{۲۱}=۲^۲-۲=۲ \;, & b_{۲۲}=۲^۲-۴=۰ \\ b_{۳۱}=۹-۲=۷ \;, & b_{۳۲}=۹-۴=۵ \end{matrix}\right\}\Rightarrow B=\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ ۲ & ۰ \\ ۷ & ۵ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$AB=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۴ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ ۲ & ۰ \\ ۷ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱۸ & -۱۶ \\ ۱ & -۵ \end{bmatrix}$$

**مثال:** اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$. مقادیر $a$ و $b$ را طوری به‌دست آورید که حاصل‌ضرب $A\times B$ ماتریسی قطری باشد.

**حل:** بنا بر فرض سؤال ماتریس $AB$ باید ماتریسی قطری باشد. پس لازم است درایه‌های سطر اول ستون دوم و همچنین سطر دوم ستون اول $AB$ برابر صفر باشد. پس ابتدا ماتریس $AB$ را به‌دست می‌آوریم.

$$A\times B=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴+۳a & -۸+۲a\\ b-۳ & -۲b-۲\end{bmatrix}$$

چون $AB$ قطری است بنابر آنچه گفته شد باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}-۸+۲a=۰\Rightarrow a=۴\\ b-۳=۰\Rightarrow b=۳\end{cases}$$

(البته نیازی به به‌دست آوردن $۴+۳a$ و $-۲b-۲$ نیست.)

**مثال:** ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}۳ & -۲ & ۵\\ ۴ & -۱ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۴ & -۱\\ ۰ & ۶\\ ۲ & -۲\end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر درایه‌ی سطر اول و ستون دوم $AB$ برابر $x$ و درایه‌ی سطر دوم و ستون اول $AB$ برابر $y$ باشد، آن‌گاه $x+y$ را به‌دست آورید.

**حل:** به‌جای محاسبه‌ی ماتریس $AB$ فقط دو درایه‌ی خواسته شده را پیدا می‌کنیم.

$$AB \text{ درایه‌ی سطر اول، ستون دوم } = (A \text{ سطر اول})\times(B \text{ ستون دوم})=\begin{bmatrix}۳ & -۲ & ۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱\\ ۶\\ -۲\end{bmatrix}=-۳-۱۲-۱۰=-۲۵\Rightarrow x=-۲۵$$

از طرف دیگر:

$$AB \text{ درایه‌ی سطر دوم و ستون اول } = (A \text{ سطر دوم})\times(B \text{ ستون اول})=\begin{bmatrix}۴ & -۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴\\ ۰\\ ۲\end{bmatrix}=۱۶+۰+۲=۱۸\Rightarrow y=۱۸$$

بنابراین $x+y=-۲۵+۱۸=-۷$

**نکته**

اگر $A$ و $B$ دو ماتریسی باشند که $AB$ یا $BA$ یا هر دو تعریف‌شده باشند آن‌گاه لزوماً $AB$ با $BA$ برابر نیست. ولی می‌توان مثال‌هایی یافت که $AB=BA$ باشد. در این صورت گوییم برای دو ماتریس $A$ و $B$ ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد و یا به طور اختصار «جابه‌جایی» است.

اگر $AB=BA$ آن‌گاه حتماً $A$ و $B$ مربعی بوده و مرتبه‌ی آن‌ها برابر است.

**مثال:** نشان دهید ضرب ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۷ & ۴\\ ۶ & ۳\end{bmatrix}$ دارای خاصیت جابه‌جایی است.

**حل:** $AB$ و $BA$ هر دو ماتریس‌های $۲\times۲$ هستند.

$$AB=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷ & ۴\\ ۶ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱(۷)+۲(۶) & ۱(۴)+۲(۳)\\ ۳(۷)-۱(۶) & ۳(۴)-۱(۳)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۹ & ۱۰\\ ۱۵ & ۹\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}۷ & ۴\\ ۶ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷(۱)+۴(۳) & ۷(۲)+۴(-۱)\\ ۶(۱)+۳(۳) & ۶(۲)+۳(-۱)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۹ & ۱۰\\ ۱۵ & ۹\end{bmatrix}$$

پس $AB=BA$.

**تست:** اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & -۳\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}m-n & n-۱\\ -۴ & -۳\end{bmatrix}$ و $AB=BA$. آن‌گاه مقدار $۳m-۲n$ برابر کدام است؟

۱) $-۴$ ۲) $۶$ ۳) صفر ۴) $۳$

**حل:** می‌دانیم در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد. پس ماتریس‌های $AB$ و $BA$ را محاسبه کرده و بنابر فرض سؤال آن‌ها را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$AB=\begin{bmatrix}۲ & -۳\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m-n & n-۱\\ -۴ & -۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲m-۲n+۱۲ & ۲n-۲+۹\\ ۳m-۳n-۸ & ۳n-۳-۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲m-۲n+۱۲ & ۲n+۷\\ ۳m-۳n-۸ & ۳n-۹\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}m-n & n-۱\\ -۴ & -۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & -۳\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲m-۲n+۳n-۳ & -۳m+۳n+۲n-۲\\ -۸-۹ & ۱۲-۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲m+n-۳ & -۳m+۵n-۲\\ -۱۷ & ۶\end{bmatrix}$$

حال داریم:

$$AB = BA \Rightarrow \begin{bmatrix} 2m-2n+12 & 2n+7 \\ 3m-3n-8 & 3n-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m+n-3 & -3m+5n-2 \\ -17 & 6 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} 3n-9=6 \Rightarrow n=5 \\ 3m-3n-8=-17 \Rightarrow 3m-15-8=-17 \Rightarrow m=2 \end{cases}$$

(به راحتی می‌توان دید که $m=2$ و $n=5$ در شرایط دیگر برابری نیز صدق می‌کنند)

در نتیجه $3m-2n=6-10=-4$ پس گزینه‌ی «۱» درست است.

**مثال:** برای ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ نشان دهید که ماتریس‌های $AB$ و $BA$ برابر نیستند.

**حل:** هر دو ماتریس $AB$ و $BA$ را تشکیل می‌دهیم:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2 & -4+0 \\ 1+3 & 4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+4 & -2-12 \\ 1+0 & 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -14 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌کنید که دو ماتریس به‌دست آمده با هم برابر نیستند.

**مثال:** نشان دهید ماتریس‌های به فرم $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ خاصیت جابه‌جایی دارند. این موضوع را در مورد ماتریس به شکل $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ نیز بررسی کنید.

**حل:** دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$ را درنظر می‌گیریم.

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac+bd & ad+bc \\ bc+ad & bd+ac \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac+bd & bc+ad \\ ad+bc & bd+ac \end{bmatrix}$$

بنابراین $AB=BA$.

به همین ترتیب برای ماتریس دیگر نیز می‌توان عمل کرد.

**مثال:** اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ آن‌گاه $AB$ را تشکیل دهید.

**حل:** $AB$ ماتریسی $2\times 3$ خواهد بود.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(-1)-1(-1)+0(-1) & 1(2)-1(2)+0(2) & 1(-2)-1(-2)+0(-2) \\ 2(-1)-1(-1)-1(-1) & 2(2)-1(2)-1(2) & 2(-2)-1(-2)-1(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

ملاحظه می‌کنید $AB=\bar{O}$ ولی هیچ‌کدام از ماتریس‌های $A$ یا $B$ صفر نیستند.

**نکته**

اگر برای دو ماتریس $A$ و $B$ داشته‌باشیم $AB=\bar{O}$ آن‌گاه لزومی ندارد که یکی از ماتریس‌های $A$ یا $B$ حتماً ماتریس صفر باشند.

**مثال:** اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ آن‌گاه ماتریس مربعی مرتبه‌ی دوم $X$ را چنان تعیین کنید که $AX=\bar{O}$ برقرار باشد.

**حل:** فرض کنید $X=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ در این صورت داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x+2z & y+2t \\ 2x+4z & 2y+4t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2z=0 \Rightarrow x=-2z \\ y+2t=0 \Rightarrow y=-2t \\ 2x+4z=0 \Rightarrow x=-2z \\ 2y+4t=0 \Rightarrow y=-2t \end{cases} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -2z & -2t \\ z & t \end{bmatrix}$$

با انتخاب مقادیر مختلف برای $z$ و $t$ ماتریس‌های متنوعی برای $X$ پیدا می‌شود. به‌عنوان مثال $X=\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $X=\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ می‌توانند جواب مسأله باشند.

## خواص عمل ضرب ماتریس‌ها

۱ در حالت کلی $AB$ و $BA$ با هم برابر نیستند. (به بیان دیگر در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد)

۲ اگر ماتریس همانی (واحد) $I_n$ را از چپ یا راست در $A_{n\times n}$ ضرب کنیم حاصل خود $A_{n\times n}$ می‌شود. یعنی: $A_{n\times n}\times I_n = I_n \times A_{n\times n} = A_{n\times n}$

$I_n$ و $A_{n\times n}$ خاصیت جابه‌جایی دارند.

در واقع $I_n$ مانند عدد ۱ در اعداد بوده و عضو خنثی برای عمل ضرب است. همچنین رابطه‌های زیر را برای ماتریس غیرمربعی $A$ می‌توان نوشت:

$$I_n A_{n\times m} = A_{n\times m} \quad , \quad A_{n\times m}\times I_m = A_{n\times m}$$

۳ می‌توان عمل ضرب در ماتریس‌ها را در عمل جمع یا تفریق ماتریس‌ها پخش (توزیع) کرد. یعنی:

اگر $C=[c_{ij}]_{p\times n}$ ، $B=[b_{ij}]_{p\times n}$ و $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ آن‌گاه: $A\times(B\pm C)=A\times B\pm A\times C$

و اگر $A=[a_{ij}]_{n\times m}$ آن‌گاه: $(B\pm C)A = BA\pm CA$

۴ اگر $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ ، $B=[b_{ij}]_{p\times k}$ و $C=[c_{ij}]_{k\times n}$ آن‌گاه: $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$

به این خاصیت، «خاصیت شرکت‌پذیری ضرب» ماتریس‌ها می‌گوییم.

۵ اگر $\bar{O}$ ماتریس صفر باشد، آن‌گاه: $A_{m\times n}\times \bar{O}_{n\times p} = \bar{O}_{m\times p} \quad , \quad \bar{O}_{p\times m}\times A_{m\times n} = \bar{O}_{p\times n}$

یعنی ماتریس $\bar{O}$ هم مانند عدد صفر عمل می‌کند.

۶ اگر $r\in\mathbb{R}$ و $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ آن‌گاه: $r(AB)=(rA)B=A(rB)$

یعنی هروقت خواستیم می‌توانیم عدد $r$ را در یکی از دو ماتریس ضرب کنیم.

۷ اگر $r\,,s\in\mathbb{R}$ و $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ آن‌گاه: $(rA)(sB)=(rs)(AB)$

دیدید ضرب ماتریس‌ها روی جمع و تفریق آن‌ها خاصیت پخشی دارد. ولی در فاکتور گرفتن از ماتریس‌ها باید دقت کرد به نمونه‌های زیر توجه کنید.

در عبارت $AB+BC$ از ماتریس $B$ نمی‌توان فاکتور گرفت زیرا در $AB$ ماتریس $B$ از سمت راست در $A$ ضرب شده و در $BC$ ماتریس $B$ از چپ در $C$ ضرب شده است و ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد. بنابراین $AB+BC$ در حالت کلی مساوی $B(A+C)$ نیست. یا در عبارت $AB+۲A$ از ماتریس $A$ می‌توان از سمت چپ فاکتور گرفت ولی $AB+۲A$ مساوی $A(B+۲)$ نیست زیرا $B+۲$ تعریف‌نشده است. نحوه‌ی درست نوشتن این فاکتورگیری به‌صورت زیر است:

$$AB+۲A = A(B+۲I)$$

**مثال:** ماتریس‌های $A$ و $B$ در تساوی $A\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ -۳ & ۵\end{bmatrix}B + A\begin{bmatrix}-۱ & -۲\\ ۳ & -۴\end{bmatrix}B = \begin{bmatrix}۵ & ۷\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$ صدق می‌کنند. مجموع درایه‌های ماتریس $AB$ را به‌دست آورید.

**حل:** در تساوی داده‌شده در طرف اول از سمت چپ از $A$ و از سمت راست از $B$ فاکتور می‌گیریم، داریم:

$$A\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ -۳ & ۵\end{bmatrix}B + A\begin{bmatrix}-۱ & -۲\\ ۳ & -۴\end{bmatrix}B = \begin{bmatrix}۵ & ۷\\ -۱ & ۲\end{bmatrix} \Rightarrow A\left(\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ -۳ & ۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۱ & -۲\\ ۳ & -۴\end{bmatrix}\right)B = \begin{bmatrix}۵ & ۷\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A\underbrace{\left(\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\right)}_{I}B = \begin{bmatrix}۵ & ۷\\ -۱ & ۲\end{bmatrix} \Rightarrow AIB = \begin{bmatrix}۵ & ۷\\ -۱ & ۲\end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix}۵ & ۷\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس $AB$ برابر $۵+۷-۱+۲=۱۳$ است.

**مثال:** ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۴ & ۴\\ ۰ & -۲\end{bmatrix}$ را درنظر گرفته و حاصل‌ضرب‌های $AB$ و $AC$ را به‌دست آورید.

**حل:** $AC=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴ & ۴\\ ۰ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸ & ۶\\ ۴ & ۳\end{bmatrix}$ و $AB=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸ & ۶\\ ۴ & ۳\end{bmatrix}$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید $AB = AC$ ولی $B \neq C$. یعنی نمی‌توانیم از طرفین ضرب ماتریس‌ها، ماتریس ثابتی را حذف کنیم. پس:

**نکته**
اگر ماتریس‌های $A$، $B$ و $C$ چنان باشند که داشته‌باشیم $AB = AC$ آن‌گاه لزوماً نمی‌توانیم نتیجه بگیریم $B = C$ یعنی عمل حذف از طرفین در ضرب ماتریس‌ها همواره برقرار نیست.

## توان‌های طبیعی ماتریس‌های مربعی

اگر $A$ یک ماتریس مربعی باشد در این صورت توان‌های طبیعی $A$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A^1 = A \quad , \quad A^2 = A \times A \quad , \quad A^3 = A \times A^2 , \ldots$$

در صورتی که مرتبه‌ی $A$ برابر $n$ باشد، حتماً مرتبه‌ی همه‌ی توان‌های طبیعی $A$ نیز $n$ خواهد بود. در ضمن فقط ماتریس‌های مربعی را می‌توان به توان رساند. به عنوان مثال $(A_{3\times 2})^2$ تعریف‌نشده است، چون ضرب $(A_{3\times 2})(A_{3\times 2})$ معنی ندارد.

تذکر این نکته ضروری است که در ضرب توان‌های مختلف $A$ خاصیت جابه‌جایی برقرار است، یعنی:

$$A^k A^m = A^m A^k = A^{m+k}$$

مثلاً:

$$A^2 A^3 = A^3 A^2 = A^5$$

هم‌چنین می‌توان نشان داد اگر $A$ یک ماتریس مربعی، $k$ یک عدد حقیقی و $m$ و $n$ اعداد طبیعی باشند آن‌گاه:

$$(kA)^n = k^n A^n \quad , \quad I^n = I \quad , \quad (A^m)^n = A^{mn}$$

**نکته**
اگر در مسأله‌ای توان‌های طبیعی یک ماتریس مشخص را خواسته باشند، باید چند توان اولیه‌ی آن را به‌دست آورده و با مشخص شدن یک فرمول کلی جواب مسأله را پیدا کنیم.

**مثال:** اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & k \\ \frac{1}{k} & 0 \end{bmatrix}$ آن‌گاه ماتریس $A^{100}$ را بیابید.

**حل:** ابتدا ماتریس $A^2$ را محاسبه می‌کنیم.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 0 & k \\ \frac{1}{k} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & k \\ \frac{1}{k} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

بنابراین:

$$A^{100} = (A^2)^{50} = I^{50} = I$$

**مثال:** اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ آن‌گاه $A^{100}$ را بیابید.

**حل:** ابتدا چند توان اولیه را به‌دست می‌آوریم:

$$A^1 = A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 2 \times 2^1 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A \times A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & 3 \times 2^2 \\ 0 & 2^3 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A \times A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 32 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^4 & 4 \times 2^3 \\ 0 & 2^4 \end{bmatrix}$$

بنابراین $A^n$ به‌صورت $\begin{bmatrix} 2^n & n \times 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$ است. در نتیجه:

$$A^{100} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 100 \times 2^{99} \\ 0 & 2^{100} \end{bmatrix}$$

**تست:** اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^{99}$ برابر کدام است؟

۱) $A$ ۲) $I$ ۳) $-I$ ۴) $-A$

**حل:** ابتدا ماتریس $A^2$ را محاسبه می‌کنیم.

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=-I$$

بنابراین ماتریس $A^{99}$ را برحسب $A^2$ به‌صورت مقابل می‌نویسیم:

$$A^{99}=A^{98}\times A=(A^2)^{49}\times A=(-I)^{49}\times A=-I\times A=-A$$

پس گزینه‌ی «۴» درست است.

**مثال:** اگر $A^2=\lambda A$ که در آن $A$ ماتریس مربعی و $\lambda$ یک عدد حقیقی است آن‌گاه $A^{1397}$ را به‌دست آورید.

**حل:** چند توان اولیه‌ی $A$ را نوشته و یک فرمول کلی به‌دست می‌آوریم:

$$A^2=\lambda A^1$$
$$A^3=A\times A^2=A\times(\lambda A^1)=\lambda A^2=\lambda(\lambda A^1)=\lambda^2 A^1$$
$$A^4=A\times A^3=A\times(\lambda^2 A^1)=\lambda^2 A^2=\lambda^2(\lambda A)=\lambda^3 A$$

بنابراین با ادامه‌ی این روند خواهیم داشت:

$$A^n=\lambda^{n-1}A$$

پس:

$$A^{1397}=\lambda^{1396}A$$

**تست:** در ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های $A^{10}$ کدام است؟

۱) $2^{10}$ ۲) $2^{11}$ ۳) $2^{12}$ ۴) $2^9$

**حل:** ابتدا ماتریس $A^2$ را به‌دست می‌آوریم.

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=2A$$

می‌دانیم اگر $A^2=\lambda A$ آن‌گاه $A^n=\lambda^{n-1}A$ بنابراین داریم:

$$A^{10}=2^9 A$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس $2^9 A$ برابر $2^9\times(8)=2^9\times 2^3=2^{12}$ است. بنابراین گزینه‌ی «۳» صحیح است.

**مثال:** $A$ و $B$ دو ماتریس مربعی هستند اگر $AB=B$ و $BA=A$ آن‌گاه ثابت کنید $A^2=A$ و $B^2=B$.

**حل:** از فرضیات سؤال به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$AB=B\xrightarrow[\text{از راست ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را در } A}ABA=BA\xrightarrow{BA=A}AA=A\Rightarrow A^2=A$$

$$BA=A\xrightarrow[\text{از راست ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را در } B}BAB=AB\xrightarrow{AB=B}BB=B\Rightarrow B^2=B$$

**تست:** اگر $AB+4BA=\overline{O}$ آن‌گاه در تساوی $AB^3=kB^3A$ مقدار $k$ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۶۴- ۳) ۳۲ ۴) ۳۲-

**حل:** از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم $AB=-4BA$.

حال با استفاده از خاصیت شرکت‌پذیری ضرب ماتریس‌ها در $AB^3$ ماتریس $AB$ را ایجاد می‌کنیم و به‌جای آن $-4BA$ را قرار می‌دهیم.

$$AB^3=(AB)B^2=(-4BA)B^2=-4B\underbrace{(AB)}_{-4BA}B=16B^2\underbrace{(AB)}_{-4BA}=-64B^3A$$

با مقایسه‌ی $-64B^3A$ با $kB^3A$ نتیجه می‌گیریم $k=-64$. پس گزینه‌ی «۲» درست است.

**مثال:** اگر $C=BA$ آن‌گاه حاصل $B(AB)^{۲}A$ را برحسب ماتریس $C$ به‌دست آورید.

**حل:** از خاصیت شرکت‌پذیری ضرب ماتریس‌ها استفاده کرده می‌نویسیم:

$$B(AB)^{۲}A = B(AB)(AB)A = (BA)(BA)(BA) = (BA)^{۳} = C^{۳}$$

پس ماتریس $B(AB)^{۲}A$ برابر $C^{۳}$ است.

**مثال:** فرض کنید $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$. مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۲۰}$ را به‌دست آورید.

**حل:** ابتدا چند توان اولیه‌ی $A$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A^{۱}=A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \quad , \quad A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۳ \\ ۳ & ۳ & ۳ \\ ۳ & ۳ & ۳ \end{bmatrix}=۳A$$

پس $A^{۲}=۳A$ و می‌دانیم اگر $A^{۲}=\lambda A$ باشد آن‌گاه $A^{n}=\lambda^{n-۱}A$ بنابراین داریم:

$$A^{۲۰}=۳^{۱۹}A=\begin{bmatrix} ۳^{۱۹} & ۳^{۱۹} & ۳^{۱۹} \\ ۳^{۱۹} & ۳^{۱۹} & ۳^{۱۹} \\ ۳^{۱۹} & ۳^{۱۹} & ۳^{۱۹} \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های این ماتریس برابر است با: $۹\times ۳^{۱۹}=۳^{۲۱}$

در حالت کلی می‌توان نشان داد اگر $A=\begin{bmatrix} k & k & \cdots & k \\ k & k & \cdots & k \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ k & k & \cdots & k \end{bmatrix}_{m\times m}$، آن‌گاه $A^{۲}=mkA$ بنابراین $A^{n}=(mk)^{n-۱}A$.

همان‌طور که می‌دانید در مجموعه‌ی اعداد حقیقی خاصیت را داریم: $(x+y)(z+t)=xz+xt+yz+yt$

در ماتریس‌ها هم‌چنین خاصیتی برقرار است.

**نکته**

اگر $A$، $B$، $C$ و $D$ چهار ماتریس باشند که همه‌ی ضرب‌های لازم تعریف‌شده باشند، آن‌گاه:

$$(A+B)(C+D)=AC+AD+BC+BD$$

باید به جایگاه ماتریس‌ها دقت لازم را داشت. یعنی وقتی $C$ و $D$ از سمت راست ضرب می‌شود باید آن را در سمت راست نوشت و نیز $A$ و $B$ را باید از سمت چپ ضرب کنیم.

**مثال:** اگر $A$ و $B$ دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، مطلوب است:

الف) $(A+B)^{۲}$ ب) $(A+B)(A-B)$ پ) $(A-B)^{۲}$

**حل:** الف) $(A+B)^{۲}=(A+B)(A+B)=A^{۲}+AB+BA+B^{۲}$

چون ممکن است $AB\neq BA$ پس آن را نمی‌توان به‌صورت $A^{۲}+۲AB+B^{۲}$ نوشت.

ب) $(A+B)(A-B)=A^{۲}-AB+BA-B^{۲}$

به همان دلیل این عبارت را نمی‌توان به‌صورت $A^{۲}-B^{۲}$ نوشت.

پ) $(A-B)^{۲}=(A-B)(A-B)=A^{۲}-AB-BA+B^{۲}$

باز به همان دلیل این عبارت را نمی‌توان به‌صورت $A^{۲}-۲AB+B^{۲}$ نوشت.

**نکته**

در ماتریس‌ها هیچ‌کدام از اتحادهای جبری معروف لزوماً برقرار نیستند.

اگر ضرب ماتریس‌های $A$ و $B$ خاصیت جابه‌جایی داشته باشد ($AB=BA$) آن‌گاه اتحادها برقرار است. به‌عنوان مثال اگر $AB=BA$ باشد، آن‌گاه $(A+B)^{۲}=A^{۲}+۲AB+B^{۲}$.

به‌عنوان مثال اگر $A$ ماتریسی مربعی و $I$ ماتریس همانی هم‌مرتبه با $A$ باشد چون $AI=IA$ پس در محاسبات $(A+kI)^{n}$ می‌توان از اتحادها استفاده کرد.

**مثال:** اگر $A$ ماتریس $2\times 2$ باشد حاصل $(A-2I)^2$ را به‌دست آورید.

**حل:** از اتحاد مربع دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$(A-2I)^2 = A^2 + (-2I)^2 - 2(A)(2I) = A^2 + 4I - 4A$$

**مثال:** ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ مفروض است ثابت کنید $A^3 = \overline{O}$.

**حل:** ابتدا ماتریس $A^2$ را به‌دست می‌آوریم.

$$A^2 = A\times A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حال $A^3$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A^3 = A^2\times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \overline{O}$$

بنابراین اگر توانی از یک ماتریس صفر باشد نمی‌توان نتیجه گرفت آن ماتریس صفر است. (اگر توانی از ماتریس صفر باشد توان‌های بالاتر آن نیز صفر است.)

**تست:** اگر $(A-I)^2 = \overline{O}$ آن‌گاه ماتریس $A^4$ برابر کدام است؟

۱) $I$     ۲) $3A-2I$     ۳) $2A-I$     ۴) $4A-3I$

**حل:** از تساوی $(A-I)^2 = \overline{O}$ نمی‌توان نتیجه گرفت $A-I = \overline{O}$ یعنی $A = I$ پس $A^4 = I$. برای حل این سؤال ابتدا به‌کمک اتحاد تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$(A-I)^2 = \overline{O} \Rightarrow A^2 + I - 2A = \overline{O} \Rightarrow A^2 = 2A - I \quad ①$$

حال این تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$A^2 = 2A - I \xRightarrow{\text{توان ۲}} A^4 = (2A-I)^2 = 4A^2 + I - 4A \xRightarrow{①} A^4 = 4(2A-I) + I - 4A \Rightarrow A^4 = 4A - 3I$$

بنابراین گزینه‌ی «۴» درست است.

توجه کنید در حالت کلی با فرض $(A-I)^2 = \overline{O}$ ماتریس $A^4$ برابر $4A-3I$ است نه $I$ ولی اگر $A$ برابر $I$ هم انتخاب شود نیز گزینه‌ی «۴» درست خواهد بود.

**مثال:** ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & y \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ در تساوی $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ صدق می‌کنند نسبت $\frac{x}{y}$ را به‌دست آورید.

**حل:** چون دو ماتریس $A$ و $B$ در اتحاد $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ صدق می‌کنند. لذا $AB = BA$، داریم:

$$AB = BA \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & y \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1+3x & x+y \\ 5 & 2y+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2y & x+y \\ 5 & 3x+1 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$1+3x = 1+2y \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{3}$$

**مسئله:** ثابت کنید ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ همواره در تساوی مقابل صدق می‌کند.

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = \overline{O}$$

**حل:** ابتدا ماتریس $A^2$ را به‌دست می‌آوریم.

$$A^2 = A\times A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های $A^2$، $A$ و $I$ را در رابطه‌ی داده‌شده قرار می‌دهیم.

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{bmatrix} - (a+d)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + (ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+dc & ad+d^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

این رابطه که برای ماتریس‌های $2\times 2$ همواره برقرار است معروف به رابطه‌ی کیلی - همیلتون است.

**تست:** اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۲ & -۱\end{bmatrix}$ و $A^{۳}=\alpha A-\beta I$. آن‌گاه زوج‌مرتب $(\alpha\ ,\ \beta)$ برابر کدام است؟

۱) $(۱\ ,\ ۰)$ ۲) $(۲\ ,\ -۱)$ ۳) $(-۱\ ,\ ۲)$ ۴) $(۰\ ,\ ۱)$

**حل:** ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۲ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۲ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^{۲}=I$$

بنابراین تساوی داده شده در صورت سؤال به صورت زیر درمی‌آید:

$$A^{۳}=\alpha A-\beta I\Rightarrow A=\alpha A-\beta I\Rightarrow(\alpha-۱)A=\beta I$$

$$\Rightarrow(\alpha-۱)\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}=\beta\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-۲\alpha+۲=۰\Rightarrow\alpha=۱\\ \alpha-۱=\beta\Rightarrow\beta=۰\end{cases}$$

در نتیجه $(\alpha\ ,\ \beta)=(۱\ ,\ ۰)$ پس گزینه‌ی «۱» درست است.

**تست:** ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & ۵\end{bmatrix}$ در تساوی $A^{۲}+\alpha A+\beta I=۰$ صدق می‌کند. حاصل $\alpha+\beta$ برابر کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷- ۴) ۱۳

**حل:** روش اول: با استفاده از رابطه‌ی کیلی - همیلتون می‌نویسیم:

$$A^{۲}-(a+d)A+(ad-bc)I=\overline{O}$$

در ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & ۵\end{bmatrix}$ مقدار $a+d$ برابر $۷=۵+۲$ است و مقدار $ad-bc$ برابر $۱۳=(۲)(۵)-(-۱)(۳)$ است. بنابراین:

$$A^{۲}-۷A+۱۳I=\overline{O}$$

با مقایسه‌ی این تساوی با فرض $A^{۲}+\alpha A+\beta I=۰$ نتیجه می‌گیریم $\alpha=-۷$ و $\beta=۱۳$، پس $\alpha+\beta=۶$ و گزینه‌ی «۲» درست است.

روش دوم: ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & ۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۲۱\\ -۷ & ۲۲\end{bmatrix}$$

ماتریس $A^{۲}$، $A$ و $I$ را در تساوی داده‌شده قرار می‌دهیم:

$$A^{۲}+\alpha A+\beta I=۰\Rightarrow\begin{bmatrix}۱ & ۲۱\\ -۷ & ۲۲\end{bmatrix}+\alpha\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & ۵\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=۰\Rightarrow\begin{bmatrix}۱+۲\alpha+\beta & ۲۱+۳\alpha\\ -۷-\alpha & ۲۲+۵\alpha+\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-۷-\alpha=۰\Rightarrow\alpha=-۷\\ ۱+۲\alpha+\beta=۰\xrightarrow{\alpha=-۷}\beta=۱۳\end{cases}$$

بنابراین $\alpha+\beta=۶$.

**تست:** کدام‌یک از گزینه‌های زیر برای ماتریس‌های $A$ و $B$ همواره درست است؟

۱) $(AB)^{n}=A^{n}B^{n}$ ۲) $A^{n}=\overline{O}\Rightarrow A=\overline{O}$

۳) $(A+B)(A-B)=A^{۲}-B^{۲}$ ۴) $A^{m}\times A^{n}=A^{n}\times A^{m}$

**حل:** در ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی وجود ندارد، پس گزینه‌ی «۱» نادرست است. (اگر $AB=BA$ باشد درست است.)

در ضمن گزینه‌ی «۲» هم نادرست است به‌عنوان مثال اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & ۲\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$ آن‌گاه $A^{۲}=\overline{O}$ ولی $A\neq\overline{O}$ . و می‌دانیم در ضرب ماتریس‌ها از اتحادهای جبری در حالت کلی نمی‌توان استفاده کرد، پس گزینه‌ی «۳» هم نادرست است. بنابراین گزینه‌ی «۴» درست است، زیرا ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد به همین علت مثلاً ماتریس $A^{۳}$ که برابر $A\times A\times A$ است را می‌توان به‌صورت $A^{۲}\times A$ یا $A\times A^{۲}$ نوشت.

## حاصل‌ضرب چند ماتریس خاص

**۱** حاصل‌ضرب دو ماتریس قطری هم‌مرتبه یک ماتریس قطری است و برای محاسبه‌ی حاصل‌ضرب باید درایه‌های روی قطرهای دو ماتریس را نظیربه‌نظیر در هم ضرب کنیم. یعنی:

$$\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & ۰ & ۰ \\ ۰ & b' & ۰ \\ ۰ & ۰ & c' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} aa' & ۰ & ۰ \\ ۰ & bb' & ۰ \\ ۰ & ۰ & cc' \end{bmatrix}$$

به همین علت برای محاسبه‌ی توان ماتریس‌های قطری کافیست درایه‌های قطر اصلی را به توان برسانیم. به عنوان نمونه:

$$\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} a^n & ۰ & ۰ \\ ۰ & b^n & ۰ \\ ۰ & ۰ & c^n \end{bmatrix}$$

**تست:** اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۱۳۹۷}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳- ۳) صفر ۴) ۱-

**حل:** ماتریس $A$ یک ماتریس قطری است پس:

$$A^{۱۳۹۷}=\begin{bmatrix} ۱^{۱۳۹۷} & ۰ & ۰ \\ ۰ & (-۱)^{۱۳۹۷} & ۰ \\ ۰ & ۰ & (-۱)^{۱۳۹۷} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۱۳۹۷}$ برابر ۱- است. در نتیجه گزینه‌ی «۴» درست است.

**۲** حاصل‌ضرب دو ماتریس بالامثلثی (پایین مثلثی) هم‌مرتبه یک ماتریس بالامثلثی (پایین‌مثلثی) است و درایه‌های روی قطر این حاصل‌ضرب مثل حاصل‌ضرب ماتریس‌های قطری به‌دست می‌آید و سایر درایه‌های غیرصفر را باید با ضرب کردن پیدا کرد. به‌عنوان نمونه به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$\begin{bmatrix} a & d & e \\ ۰ & b & f \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & d' & e' \\ ۰ & b' & f' \\ ۰ & ۰ & c' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} aa' & x & y \\ ۰ & bb' & z \\ ۰ & ۰ & cc' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ d & b & ۰ \\ e & f & c \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} a^n & ۰ & ۰ \\ x & b^n & ۰ \\ y & z & c^n \end{bmatrix}$$

مقادیر $x$ ،$y$ و $z$ را با تعریف ضرب ماتریس باید به‌دست آورد.

**مثال:** ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۱ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۳ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. درایه‌های ماتریس $A^۲+B^۲+AB$ را پیدا کنید.

**حل:** ماتریس‌های $A$ و $B$ بالامثلثی هستند پس ماتریس‌های $A^۲$، $B^۲$ و $AB$ نیز بالامثلثی هستند. پس درایه‌های روی قطر اصلی به‌سادگی محاسبه می‌شوند و درایه‌های زیر قطر اصلی صفر هستند. پس فقط در محاسبه‌ی آن‌ها باید درایه‌های بالای قطر اصلی را با ضرب به‌دست آوریم.

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۱ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۱ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۶ \\ ۰ & ۱ & -۶ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$B^۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۳ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۳ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۶ \\ ۰ & ۱ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۱ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۳ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A^۲+B^۲+AB=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}=۳I$$

**۳** اگر $A^{۲}=A$ آن‌گاه $A^{n}=A$ $(n\in\mathbb{N})$

**مثال:** اگر $A=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۳}&\frac{۱}{۳}&\frac{۱}{۳}\\\frac{۱}{۳}&\frac{۱}{۳}&\frac{۱}{۳}\\\frac{۱}{۳}&\frac{۱}{۳}&\frac{۱}{۳}\end{bmatrix}$ آن‌گاه ماتریس $A^{۱۳۹۸}-A^{۱۳۹۷}$ را به‌دست آورید.

**حل:** ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را پیدا می‌کنیم.

$$A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۳}&\frac{۱}{۳}&\frac{۱}{۳}\\\frac{۱}{۳}&\frac{۱}{۳}&\frac{۱}{۳}\\\frac{۱}{۳}&\frac{۱}{۳}&\frac{۱}{۳}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{۱}{۳}&\frac{۱}{۳}&\frac{۱}{۳}\\\frac{۱}{۳}&\frac{۱}{۳}&\frac{۱}{۳}\\\frac{۱}{۳}&\frac{۱}{۳}&\frac{۱}{۳}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۳}&\frac{۱}{۳}&\frac{۱}{۳}\\\frac{۱}{۳}&\frac{۱}{۳}&\frac{۱}{۳}\\\frac{۱}{۳}&\frac{۱}{۳}&\frac{۱}{۳}\end{bmatrix}=A$$

بنابراین $A^{۱۳۹۸}=A$ و $A^{۱۳۹۷}=A$ درنتیجه $A^{۱۳۹۸}-A^{۱۳۹۷}=\overline{O}$.

**مثال:** اگر $A^{۲}=A$ آن‌گاه ثابت کنید $(I-A)^{۲}=I-A$.

**حل:** ماتریس $(I-A)^{۲}$ را به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای پیدا می‌کنیم:

$$(I-A)^{۲}=I+A^{۲}-۲A\overset{A^{۲}=A}{\Rightarrow}(I-A)^{۲}=I+A-۲A\Rightarrow(I-A)^{۲}=I-A$$

**۴** اگر $A^{۲}=I$ آن‌گاه اگر $n$ زوج باشد $A^{n}=I$ و اگر $n$ فرد باشد $A^{n}=A$.

**تست:** اگر $A=\begin{bmatrix}۰&۰&۱\\۰&۱&۰\\۱&۰&۰\end{bmatrix}$ آن‌گاه ماتریس $A^{۱۳۹۸}-A^{۱۳۹۷}$ برابر کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-۱&۰&۱\\۰&۰&۰\\۱&۰&-۱\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۱&۰&-۱\\۰&۰&۰\\-۱&۰&۱\end{bmatrix}$

**حل:** ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را پیدا می‌کنیم.

$$A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix}۰&۰&۱\\۰&۱&۰\\۱&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۰&۱\\۰&۱&۰\\۱&۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}=I$$

بنابراین $A^{۱۳۹۸}=I$ و $A^{۱۳۹۷}=A$، داریم:

$$A^{۱۳۹۸}-A^{۱۳۹۷}=I-A=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۰&۰&۱\\۰&۱&۰\\۱&۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰&-۱\\۰&۰&۰\\-۱&۰&۱\end{bmatrix}$$

پس گزینه‌ی «۴» درست است.

**۵** حاصل‌ضرب یک ماتریس قطری و یک ماتریس دلخواه مربعی هم‌مرتبه با آن.

اگر ماتریس قطری $A=\begin{bmatrix}a_{۱}&۰&\cdots&۰\\۰&a_{۲}&\cdots&۰\\\vdots&&\ddots&\vdots\\۰&۰&\cdots&a_{n}\end{bmatrix}$ از سمت چپ در ماتریس $B_{n\times n}$ ضرب شود حاصل ماتریس $C_{n\times n}$ است کـه سـطر اول آن $a_{۱}$ برابر سطر اول $B$، سطر دوم آن $a_{۲}$ برابر سطر دوم $B$ و ... سطر $n$اُم آن $a_{n}$ برابر سطر $n$ام ماتریس $B$ است.

اگر ماتریس قطری $A$ از سمت راست در $B$ ضرب شود حاصل ماتریس $D_{n\times n}$ است که ستون اوّل آن $a_{۱}$ برابر ستون اول $B$، ستون دوم آن $a_{۲}$ برابر ستون دوم و ستون $n$اُم آن $a_{n}$ برابر ستون $n$اُم ماتریس $B$ است.

به‌عنوان مثال اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&-۲&۰\\۰&۰&۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۴&-۲&۵\\۶&-۱&۷\\-۲&۰&۴\end{bmatrix}$ باشد آن‌گاه:

$$A\times B=\begin{bmatrix}۴&-۲&۵\\-۲(۶)&-۲(-۱)&-۲(۷)\\۳(-۲)&۰&۳(۴)\end{bmatrix}\quad,\quad B\times A=\begin{bmatrix}۴&-۲(-۲)&۳(۵)\\۶&-۲(-۱)&۳(۷)\\-۲&۰&۳(۴)\end{bmatrix}$$