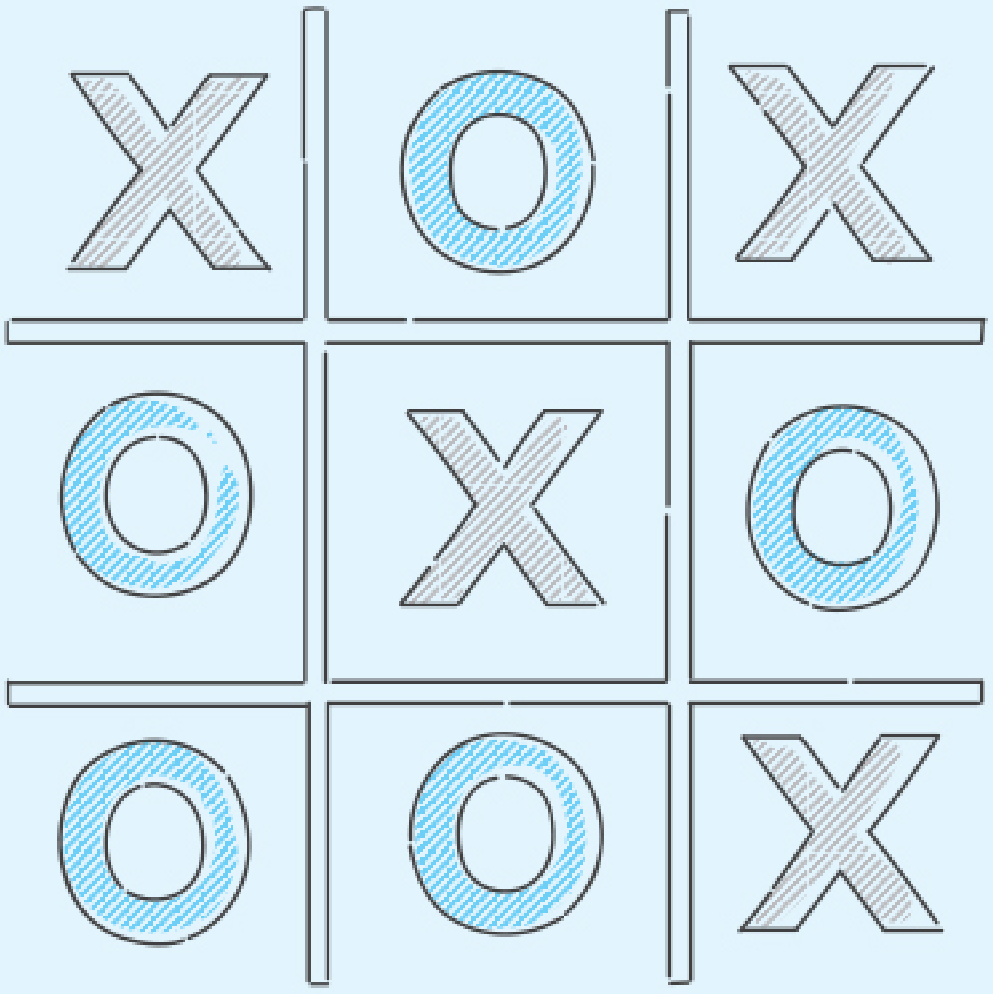
فهرست

پایه دوازدهم

پایه یازدهم

پایه دهم

فصل ۱



ماتریس و کاربردها

ماتریس و دترمینان به‌عنوان یکی از مهم‌ترین ابزارهای محاسباتی در ریاضیات مطرح است. در این فصل با ماتریس و دترمینان به‌همراه ویژگی‌های مقدماتی آن‌ها آشنا می‌شوید. این فصل همواره مورد توجه طراحان کنکور رشتهٔ ریاضی می‌باشد.

ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها

اگر A، B و C سه ماتریس ضرب‌پذیر باشند، آن‌گاه ویژگی‌های زیر همواره برقرار است:

۱ شرکت‌پذیری (پرانتزها را به دلخواه می‌توان جابه‌جا کرد)	$A\cdot B\cdot C=(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$
۲ توزیع‌پذیری از چپ توزیع‌پذیری از راست (از طرف دوم به طرف اول، فاکتورگیری برقرار است)	$A\cdot(B\pm C)=A\cdot B\pm A\cdot C$ $(A\pm B)\cdot C=A\cdot C\pm B\cdot C$
۳ ضرب عدد در ماتریس برای نمونه: $(۲A)(۳B)$ برابر با $۶AB$ است.	$(rA)\cdot(sB)=(rs)A\cdot B\ \ (r,s\in\mathbb{R})$

نتیجه:

۱ $(rA)\cdot B=A\cdot(rB)=rA\cdot B$

برای نمونه: $(۲A)B$ یا $A(۲B)$ یا $۲AB$ همگی یکسان‌اند.

۲ $(-A)\cdot(-B)=A\cdot B\ \ ,\ \ (-A)\cdot B=A\cdot(-B)=-A\cdot B$

تست: مجموع جواب‌های معادلهٔ $\begin{bmatrix}x & ۴ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۲ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۴\\ -۱\end{bmatrix}=۰$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۳- ۴) ۴-

پاسخ گزینه ۴ به کمک خاصیت شرکت‌پذیری، ابتدا حاصل‌ضرب ماتریس اول و ماتریس دوم را می‌یابیم:

$$\begin{bmatrix}x & ۴ & -۱\end{bmatrix}_{۱\times۳}\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۲ & ۴\end{bmatrix}_{۳\times۳}=\begin{bmatrix}۲x+۴ & x-۲ & ۴\end{bmatrix}_{۱\times۳}$$

حال ماتریس حاصل را در ماتریس سوم ضرب می‌کنیم؛ داریم:

$$\begin{bmatrix}۲x+۴ & x-۲ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۴\\ -۱\end{bmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow(۲x+۴)(x)+(x-۲)(۴)+(۴)(-۱)=۰\Rightarrow ۲x^۲+۴x+۴x-۸-۴=۰\Rightarrow ۲x^۲+۸x-۱۲=۰\xrightarrow{\div ۲}x^۲+۴x-۶=۰$$

پس مجموع جواب‌های این معادلهٔ درجهٔ دوم برابر با ۴- است.

اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۵}$، $B=[b_{ij}]_{m\times n}$، $C=[c_{ij}]_{۷\times۲}$ و $D=[d_{ij}]_{۷\times۳}$ باشد، درصورتی که حاصل‌ضرب $A\cdot(B\cdot C)$ تعریف شده باشد، آن‌گاه مرتبهٔ ماتریس حاصل‌ضرب $B\cdot D\cdot A$ کدام است؟

۱) ۳×۵ ۲) ۳×۳ ۳) ۵×۵ ۴) ۳×۷

پاسخ گزینه ۳ با توجه به فرض داده‌شده و شرط ضرب‌پذیری داریم:

$$A_{۳\times\underbrace{۵}\cdot B_{\underbrace{m}_{m=۵}\times \underbrace{n}}}\cdot C_{\underbrace{۷}_{n=۷}\times۲}$$

بنابراین مرتبهٔ ماتریس B، عبارت است از ۵×۷ و لذا داریم:

$$B_{۵\times۷}\cdot D_{۷\times۳}\cdot A_{۳\times۵}=[?]_{۵\times۵}$$

یک خاصیت غیرمنتظره در ضرب ماتریس‌ها

می‌دانیم در مجموعهٔ اعداد حقیقی «حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی غیرصفر، عددی حقیقی غیرصفر است.»؛ یعنی:

$$\forall a,b\in\mathbb{R}\ ;\ (a\neq۰\wedge b\neq۰)\Rightarrow ab\neq۰$$

از این خاصیت و با استفاده از عکس نقیض گزارهٔ شرطی نتیجه می‌شود که:

$$\forall a,b\in\mathbb{R}\ ;\ ab=۰\Rightarrow(a=۰\vee b=۰)$$

به عبارت دیگر اگر حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی برابر با صفر باشد، آن‌گاه حداقل یکی از آن‌ها برابر با صفر است.

اما این خاصیت در مورد ماتریس‌ها برقرار نیست! یعنی **اگر حاصل‌ضرب دو ماتریس، برابر با ماتریس صفر باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که حداقل یکی از ماتریس‌ها برابر با ماتریس صفر است؛** بنابراین برای دو ماتریس ضرب‌پذیر A و B داریم:

$$AB=\bar{O}\Rightarrow ??$$

برای نمونه: برای دو ماتریس غیرصفر $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ -۸ & ۴\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۴ & ۱\\ ۸ & ۲\end{bmatrix}$ داریم:

$$AB=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ -۸ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴ & ۱\\ ۸ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

یعنی $AB=\bar{O}$، اما $A\neq\bar{O}$ و $B\neq\bar{O}$ است.

تذکر: خاصیت حذف‌پذیری در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست.

اگر A، B و C سه ماتریس باشند، آن‌گاه در حالت کلی از $AB=AC$، نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$، به عبارت دیگر: $A\cdot B=A\cdot C\not\Rightarrow B=C$

(توجه کنید که تقسیم بر ماتریس بی‌معنی است)

تست: اگر A یک ماتریس مربعی باشد و $A^{۲}=۳A-۵I$، آن‌گاه $A^{۴}$ برابر کدام است؟

۱) $۳A-۲۰I$ ۲) $۳A+۲۰I$ ۳) $-۳A+۲۰I$ ۴) $-(۳A+۲۰I)$

پاسخ گزینه ۴ می‌دانیم $A^{۴}=A^{۲}\cdot A^{۲}$؛ پس:

$$A^{۴}=(۳A-۵I)(۳A-۵I)=۹A^{۲}-۱۵\underbrace{A\cdot I}_{A}-۱۵\underbrace{I\cdot A}_{A}+۲۵\underbrace{I\cdot I}_{I}=۹A^{۲}-۳۰A+۲۵I$$

$$=۹(۳A-۵I)-۳۰A+۲۵I=۲۷A-۴۵I-۳۰A+۲۵I=-۳A-۲۰I=-(۳A+۲۰I)$$

اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند و $AB+BA=\bar{O}$، آن‌گاه ماتریس $A^{۲}B$ با کدام ماتریس برابر است؟

۱) $-BA^{۲}$ ۲) $BA^{۲}$ ۳) $AB^{۲}$ ۴) $B^{۲}A$

پاسخ گزینه ۲ با توجه به فرض داریم:

$$AB+BA=\bar{O}\Rightarrow AB=-BA$$

حال تساوی بالا را از چپ در A ضرب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{A\cdot}A\cdot(AB)=-A\cdot(BA)$$

$$\xrightarrow{\text{شرکت‌پذیری}}(A\cdot A)\cdot B=-(A\cdot B)\cdot A$$

$$\Rightarrow \overbrace{A^{۲}}\cdot B=-(\overbrace{-BA})\cdot A\xrightarrow{\text{شرکت‌پذیری}}A^{۲}\cdot B=B\underbrace{(A\cdot A)}_{A^{۲}}\Rightarrow A^{۲}B=BA^{۲}$$

اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ ۲ & ۰\end{bmatrix}$ و α و β دو عدد حقیقی باشند، به‌طوری‌که $A^{۳}=\alpha A+\beta I_{۲}$، آن‌گاه $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینه ۱ ابتدا ماتریس $A^{۲}$، سپس ماتریس $A^{۳}$ را محاسبه می‌کنیم: داریم:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ ۲ & ۰\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ ۲ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷ & -۳\\ ۶ & -۲\end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=A^{۲}\cdot A=\begin{bmatrix}۷ & -۳\\ ۶ & -۲\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ ۲ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۵ & -۷\\ ۱۴ & -۶\end{bmatrix}$$

از طرفی می‌دانیم $\alpha A=\begin{bmatrix}۳\alpha & -\alpha\\ ۲\alpha & ۰\end{bmatrix}$ و $\beta I_{۲}=\begin{bmatrix}\beta & ۰\\ ۰ & \beta\end{bmatrix}$؛ بنابراین طبق فرض داریم:

$$A^{۳}=\alpha A+\beta I_{۲}\Rightarrow\begin{bmatrix}۱۵ & -۷\\ ۱۴ & -۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\alpha & -\alpha\\ ۲\alpha & ۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta & ۰\\ ۰ & \beta\end{bmatrix}\Rightarrow ۱۵=۳\alpha+\beta\ ,\ \underbrace{-۷=-\alpha+۰}_{\alpha=۷}\Rightarrow\beta=-۶\Rightarrow\alpha+\beta=۱$$

اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های $A^{۱۰}$ کدام است؟

۱) $۲^{۹}$ ۲) $۲^{۱۰}$ ۳) $۲^{۱۱}$ ۴) $۲^{۱۲}$

پاسخ گزینه ۳

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ ۲ & ۲\end{bmatrix}=۲A$$

$$A^{۳}=\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ ۲ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۴\\ ۴ & ۴\end{bmatrix}=۲^{۲}A$$

بنابراین می‌توان به‌طور استقرایی نتیجه گرفت $A^{۱۰}=۲^{۹}A$؛ پس $A^{۱۰}=\begin{bmatrix}۲^{۹} & ۲^{۹}\\ ۲^{۹} & ۲^{۹}\end{bmatrix}$؛ در نتیجه مجموع درایه‌های آن عبارت است از:

$$۲^{۹}+۲^{۹}+۲^{۹}+۲^{۹}=۴\times۲^{۹}=۲^{۲}\times۲^{۹}=۲^{۱۱}$$

بررسی اتحادهای جبری در ماتریس‌ها

اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه:

$$(A+B)^{۲}=(A+B)\cdot(A+B)=A^{۲}+AB+BA+B^{۲}$$

از آن‌جایی‌که ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی ندارد (یعنی $AB\neq BA$)؛ بنابراین سمت راست عبارت بالا تغییری نمی‌کند.

نتیجه: ۱ اتحادهای جبری در حالت کلی، در مجموعهٔ ماتریس‌ها برقرار **نیستند**.

حال فرض کنید $AB=BA$؛ یعنی A و B دو ماتریس تعویض‌پذیرند؛ بنابراین:

$$(A+B)^{۲}=(A+B)\cdot(A+B)=A^{۲}+\underbrace{AB+BA}_{۲AB}+B^{۲}=A^{۲}+۲AB+B^{۲}$$

۲ در مجموعهٔ ماتریس‌های تعویض‌پذیر، تمام اتحادهای جبری برقرار است.

بنابراین اگر A و B دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند، آن‌گاه:

$(A+B)^{۲}=A^{۲}+۲A\cdot B+B^{۲}$	$(A-B)^{۲}=A^{۲}-۲A\cdot B+B^{۲}$	$(A+B)(A-B)=A^{۲}-B^{۲}$
$(A+B)^{۳}=A^{۳}+۳A^{۲}\cdot B+۳A\cdot B^{۲}+B^{۳}$	$(A-B)^{۳}=A^{۳}-۳A^{۲}\cdot B+۳A\cdot B^{۲}-B^{۳}$	
$A^{۳}+B^{۳}=(A+B)(A^{۲}-A\cdot B+B^{۲})$	$A^{۳}-B^{۳}=(A-B)(A^{۲}+A\cdot B+B^{۲})$	

۳) با توجه به اینکه ماتریس همانی با هر ماتریس مربعی هم‌مرتبه با خودش تعویض‌پذیر است؛ پس ماتریس همانی با هر ماتریس مربعی هم‌مرتبه با خودش تمام اتحادهای جبری را تشکیل می‌دهد.

برای نمونه: اگر A یک ماتریس مربعی باشد، آن‌گاه:

$$(A+I)^{۲}=(A+I)\cdot(A+I)=A^{۲}+\underbrace{A\cdot I}_{A}+\underbrace{I\cdot A}_{A}+\underbrace{I\cdot I}_{I}=A^{۲}+۲A+I$$

یا می‌توان گفت:

$$A^{۳}-I=(A-I)\cdot(A^{۲}+A+I)$$

به‌طورکلی تمام اتحادهای جبری برای A و I (با فرض هم‌مرتبه بودن) برقرار است.

تست: برای دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبهٔ A و B، اگر $A\cdot B=۲B\cdot A$ باشد، آن‌گاه حاصل $(A+B)\cdot(A-B)$ کدام است؟

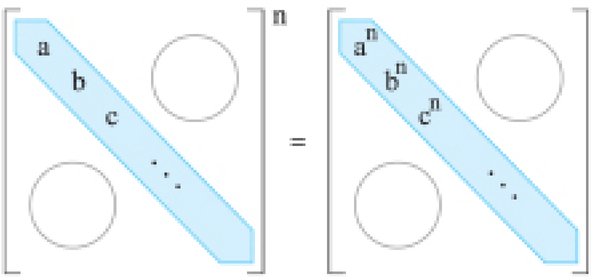
۱) $A^{۲}-B^{۲}$ ۲) $A^{۲}+۲A$ ۳) $A^{۲}-B^{۲}-A\cdot B$ ۴) $A^{۲}-B^{۲}-B\cdot A$

پاسخ گزینه ۴

$$(A+B)\cdot(A-B)=A^{۲}-\underbrace{A\cdot B}_{۲B\cdot A}+B\cdot A-B^{۲}=A^{۲}-۲B\cdot A+B\cdot A-B^{۲}=A^{۲}-B^{۲}-B\cdot A$$

توان‌های یک ماتریس قطری

برای محاسبهٔ توان‌های مختلف یک ماتریس قطری، کافی است اعداد روی قطر اصلی را به توان برسانیم. به عبارت دیگر داریم:



نتیجه: توان‌های مختلف ماتریس همانی، برابر با ماتریس همانی است. به عبارت دیگر:

$$\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ I^{n}=I$$

(توان در ماتریس همانی، تأثیری ندارد و باز هم ماتریس همانی همانند عدد ۱ رفتار می‌کند.)

تست: اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه $A^{۱۰۰}-A^{۹۹}$ برابر کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۲^{۹۹} & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۲^{۹۹} & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$

پاسخ گزینه ۳ با توجه به اینکه ماتریس A یک ماتریس قطری است؛ پس:

$$A^{۱۰۰}-A^{۹۹}=\begin{bmatrix}۲^{۱۰۰} & ۰\\ ۰ & ۱^{۱۰۰}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲^{۹۹} & ۰\\ ۰ & ۱^{۹۹}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲^{۱۰۰}-۲^{۹۹} & ۰\\ ۰ & ۱-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲^{۹۹} & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

توان‌های یک ماتریس شبه‌قطری

ماتریس‌های شبه‌قطری، در هنگام محاسبه توان‌های زوج و فرد رفتارهای متفاوتی دارند.

برای نمونه: ماتریس شبه‌قطری $A=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & a\\ ۰ & b & ۰\\ c & ۰ & ۰\end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم؛ داریم:

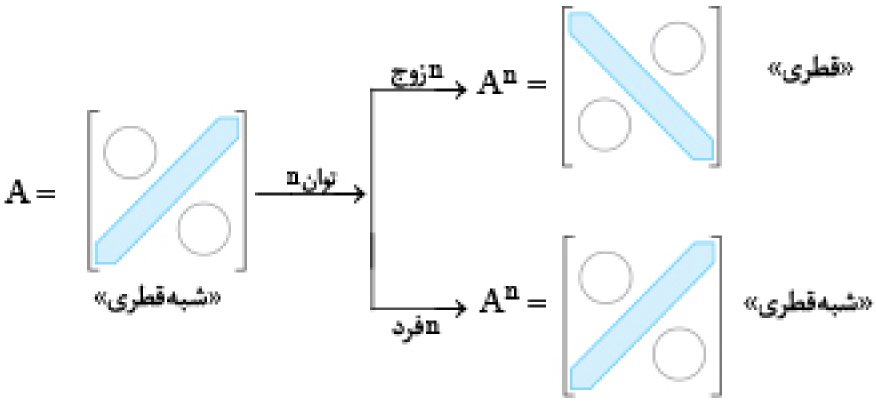
$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & a\\ ۰ & b & ۰\\ c & ۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۰ & a\\ ۰ & b & ۰\\ c & ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ac & ۰ & ۰\\ ۰ & b^{۲} & ۰\\ ۰ & ۰ & ac\end{bmatrix}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، توان دوم ماتریس شبه‌قطری A، یک ماتریس قطری است. اکنون به محاسبهٔ توان سوم آن می‌پردازیم:

$$A^{۳}=\begin{bmatrix}ac & ۰ & ۰\\ ۰ & b^{۲} & ۰\\ ۰ & ۰ & ac\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۰ & a\\ ۰ & b & ۰\\ c & ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & a^{۲}c\\ ۰ & b^{۳} & ۰\\ ac^{۲} & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

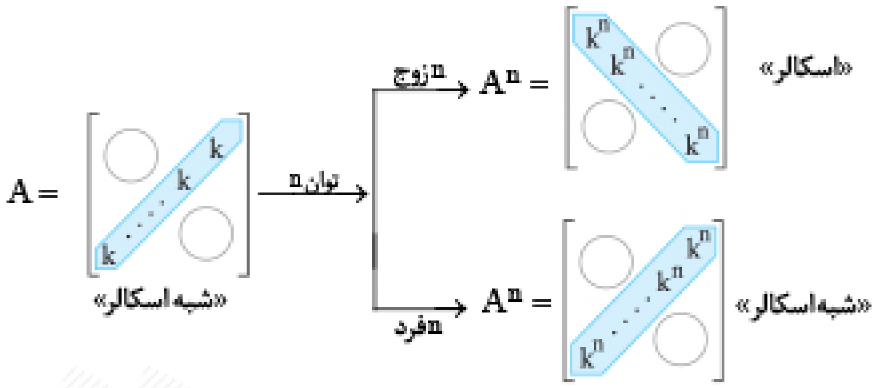
در توان سوم، ماتریس شبه‌قطری حاصل می‌شود.

به‌طورکلی داریم:



توان‌های یک ماتریس شبه اسکالر

هر ماتریس شبه اسکالر، اگر به توان عددی زوج برسد، تمام درایه‌های قطر فرعی آن به توان آن عدد می‌رسند و شکل ماتریس حاصل به‌صورت اسکالر است و اگر به توان عددی فرد برسد، تمام درایه‌های قطر فرعی آن به توان آن عدد می‌رسند و شکل ماتریس حاصل به‌صورت شبه اسکالر است. به عبارت دیگر:



تست: اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه A^4-A^3 کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 16 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 16 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & -8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 16 & 0 & -8 \\ 0 & 8 & 0 \\ -8 & 0 & 16 \end{bmatrix}$

پاسخ (گزینه ۴) با توجه به اینکه ماتریس A شبه اسکالر است، داریم:

$$A^{\overset{\text{زوج}}{4}}-A^{\overset{\text{فرد}}{3}}=\underbrace{\begin{bmatrix} 2^4 & 0 & 0 \\ 0 & 2^4 & 0 \\ 0 & 0 & 2^4 \end{bmatrix}}_{\text{(اسکالر)}}-\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2^3 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 2^3 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{(شبه‌اسکالر)}}=\begin{bmatrix} 2^4 & 0 & -2^3 \\ 0 & 2^4-2^3 & 0 \\ -2^3 & 0 & 2^4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 16 & 0 & -8 \\ 0 & 8 & 0 \\ -8 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

تذکر: ماتریس مربعی A را خود توان می‌گوییم، هرگاه $A^2=A$ که در این‌صورت: $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ A^n=A$

برای نمونه: ماتریس I همواره خودتوان است.

◂ توجه کنید که ممکن است ماتریس مربعی A در توان مثلاً سوم با خودش برابر شود، اما $A^2\neq A$ باشد که در این‌صورت ماتریس A خودتوان محسوب نمی‌شود.

تست: اگر برای دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبهٔ A و B، $A^2=A$ و $B=2A-I$ باشد، آن‌گاه ماتریس B^3 برابر کدام است؟

۱) B^2 ۲) $\bar{O}$ ۳) B ۴) A

پاسخ (گزینه ۳) چون A و I تعویض‌پذیرند: پس می‌توانیم اتحاد به کار ببریم (توجه کنید که ماتریس A خودتوان است: لذا تمام توان‌هایش با خودش برابر است.) و داریم:

$$B^3=(2A-I)^3=(2A)^3+3(2A)^2\cdot(-I)+3(2A)\cdot(-I)^2+(-I)^3$$

$$=8\underset{A}{\underbrace{A^3}}-12\underbrace{\underset{A}{A^2}\cdot I}_{A}+6\underbrace{A\cdot I}_{A}-I=8A-12A+6A-I=2A-I=B$$

هشدار: توجه کنید که نشان دادیم $B^3=B$، ولی ثابت نکردیم که $B^2=B$: پس نمی‌توان گفت ماتریس B خودتوان است.

اکنون ماتریس B^2 را می‌یابیم:

$$B^2=(2A-I)^2=4\underset{A}{A^2}-4\underbrace{A\cdot I}_{A}+I=4A-4A+I=I$$

به عبارت دیگر $B^2\neq B$: لذا ماتریس B خود توان نیست.

پاسخ گزینه۳ ابتدا درایه‌های ماتریس A را که هر کدام یک دترمینان ۲×۲ هستند، می‌یابیم:

$$\begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix}=(۴)(۱)-(۲)(-۱)=۶ \qquad \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}=(۲)(۲)-(۳)(۱)=۱$$

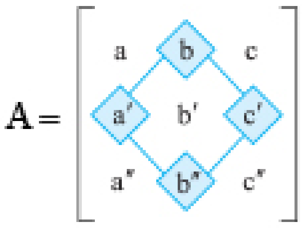
$$\begin{vmatrix} ۲ & -۳ \\ ۱ & ۵ \end{vmatrix}=(۲)(۵)-(-۳)(۱)=۱۳ \qquad \begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ ۲ & ۱۱ \end{vmatrix}=(۱)(۱۱)-(۵)(۲)=۱$$

بنابراین ماتریس A برابر است با: $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۶ \\ -۱ & ۱۳ \end{bmatrix}$؛ در نتیجه داریم: $|A|=(۱)(۱۳)-(۶)(-۱)=۱۹$

یافتن دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ به کمک روش بسط

ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. از این پس، چهار درایهٔ b، a'، b'' و c' را به عنوان چهار رأس لوزی نام می‌بریم. (به عبارت دیگر درایه‌های واقع در آدرس‌های ۱۲، ۲۱، ۲۳ و ۳۲، در هنگام محاسبهٔ دترمینان، علامت منفی تولید می‌کنند.)

برای یافتن دترمینان ماتریس ۳×۳ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:



۱ یک سطر (یا یک ستون) از ماتریس را به دلخواه انتخاب می‌کنیم.

۲ هر درایهٔ سطر (یا ستون) انتخابی را در دترمینان ۲×۲ حاصل از حذف سطر و ستون درایهٔ موردنظر ضرب می‌کنیم.

۳ در مرحلهٔ ۲، هر درایه‌ای که جزء چهار رأس لوزی است، علامت منفی برای آن در نظر می‌گیریم.

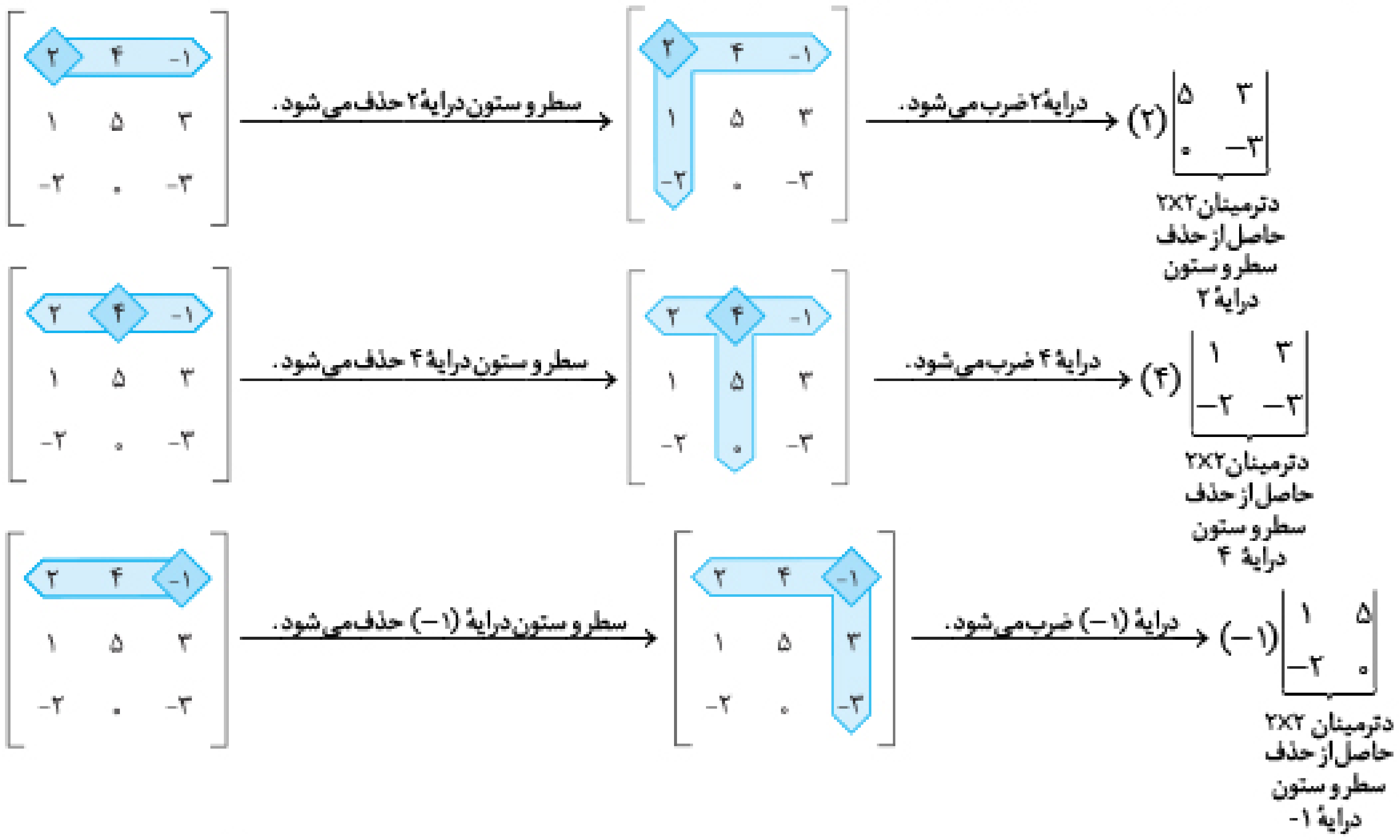
۴ نتایج حاصل از مرحلهٔ ۲ را با هم جمع می‌کنیم و عدد حاصل، دترمینان ماتریس ۳×۳ است.

برای نمونه: برای یافتن دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & -۱ \\ ۱ & ۵ & ۳ \\ -۲ & ۰ & -۳ \end{bmatrix}$ داریم:

◄ یک سطر یا ستون را به دلخواه انتخاب می‌کنیم. مثلاً سطر اول را برمی‌گزینیم (در این حالت می‌گوییم **بسط نسبت به سطر اول** صورت می‌گیرد.).

$$A=\begin{bmatrix} \boxed{۲ \quad ۴ \quad -۱} \\ ۱ \quad ۵ \quad ۳ \\ -۲ \quad ۰ \quad -۳ \end{bmatrix}$$

◄ درایه‌های سطر اول را در دترمینان ۲×۲ حاصل از حذف سطر و ستون هر درایه ضرب می‌کنیم:



◄ اکنون برای یافتن دترمینان ماتریس A، سه مقدار به‌دست‌آمده را با هم جمع می‌کنیم. (توجه کنید که درایهٔ ۴، جزء چهار رأس لوزی است و علامت منفی برای آن در نظر گرفته می‌شود.)

$$|A|=\begin{vmatrix} \boxed{۲ \quad ۴ \quad -۱} \\ ۱ \quad ۵ \quad ۳ \\ -۲ \quad ۰ \quad -۳ \end{vmatrix}=(۲)\underbrace{\begin{vmatrix} ۵ & ۳ \\ ۰ & -۳ \end{vmatrix}}_{-۱۵}-(۴)\underbrace{\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ -۲ & -۳ \end{vmatrix}}_{۳}+(-۱)\underbrace{\begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۰ \end{vmatrix}}_{۱۰}=(۲)(-۱۵)-(۴)(۳)+(-۱)(۱۰)=-۵۲$$

تذکر: علامت هر کدام از درایه‌ها، در هنگام محاسبهٔ دترمینان به کمک روش بسط، با دستور $(-۱)^{i+j}$ به‌دست می‌آید.

برای نمونه: علامت درایهٔ $a_{۲۱}$ همواره منفی است، زیرا $(-۱)^{۲+۱}=-۱$ (حالا متوجه شدید که چرا درایه‌های واقع در چهار رأس لوزی، در هنگام محاسبهٔ دترمینان به کمک روش بسط، همواره علامت منفی دارند؟!)

اکنون یک سطر (یا ستون) دیگر را انتخاب می‌کنیم. مثلاً ستون دوم را برمی‌گزینیم (بسط نسبت به ستون دوم):

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & -۱ \\ ۱ & ۵ & ۳ \\ -۲ & ۰ & -۳ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{سطر و ستون درایهٔ ۴ حذف می‌شود.}} \begin{bmatrix} ۲ & ۴ & -۱ \\ ۱ & ۵ & ۳ \\ -۲ & ۰ & -۳ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{درایهٔ ۴ ضرب می‌شود.}} \underbrace{(۴)\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ -۲ & -۳ \end{vmatrix}}_{\text{دترمینان ۲×۲ حاصل از حذف سطر و ستون درایهٔ ۴}}$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & -۱ \\ ۱ & ۵ & ۳ \\ -۲ & ۰ & -۳ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{سطر و ستون درایهٔ ۵ حذف می‌شود.}} \begin{bmatrix} ۲ & ۴ & -۱ \\ ۱ & ۵ & ۳ \\ -۲ & ۰ & -۳ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{درایهٔ ۵ ضرب می‌شود.}} \underbrace{(۵)\begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ -۲ & -۳ \end{vmatrix}}_{\text{دترمینان ۲×۲ حاصل از حذف سطر و ستون درایهٔ ۵}}$$

◂ توجه کنید برای درایهٔ صفر انجام عملیات بالا بی‌مورد است؛ زیرا حاصل‌ضرب درایهٔ صفر در دترمینان ۲×۲، برابر صفر است.

پس دترمینان ماتریس A عبارت است از:

$$|A|=\begin{vmatrix} ۲ & ۴ & -۱ \\ ۱ & ۵ & ۳ \\ -۲ & ۰ & -۳ \end{vmatrix}=-(۴)\underbrace{\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ -۲ & -۳ \end{vmatrix}}_{۳}+(۵)\underbrace{\begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ -۲ & -۳ \end{vmatrix}}_{-۸}=-۵۲$$

درایهٔ ۴ جزء چهار رأس لوزی است
پس علامت منفی برای آن در نظر گرفته می‌شود.

◂ همان‌طور که ملاحظه می‌شود، مقدار دترمینان، به انتخاب سطر یا ستون جهت عملیات بسط، ارتباطی ندارد و در هر دو حالتِ بالا، پاسخ یکسان است، اما واضح است در بسط نسبت به ستون دوم، به دلیل وجود درایهٔ صفر، عملیات بسط سریع‌تر صورت پذیرفت.

نتیجه: ۱ در محاسبهٔ دترمینان ماتریس ۳×۳، **بهتر است** سطر (یا ستونی) انتخاب شود که **تعداد درایهٔ صفر بیشتری** دارد.

۲ اگر در یک ماتریس **تمام اعداد یک سطر (یا یک ستون)** برابر با **صفر** باشند، آن‌گاه دترمینان آن ماتریس برابر **صفر** است.

تست: اگر دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۲ & a & ۵ \\ ۰ & ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ برابر ۶ باشد، آن‌گاه مقدار a کدام است؟

۱) ۸/۵ ۲) −۸/۵ ۳) ۱۲/۵ ۴) −۱۲/۵

پاسخ **گزینهٔ ۴** برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس ۳×۳، با توجه به اینکه بهتر است سطر یا ستونی انتخاب شود که تعداد درایه‌های صفر بیشتری دارد؛ پس انتخاب سطر دوم یا ستون دوم توصیه نمی‌شود. اکنون بسط نسبت به سطر اول را در نظر می‌گیریم:

درایهٔ (−۱) جزء چهار رأس لوزی است

$$|A|=۶\xrightarrow{\text{بسط نسبت به سطر ۱}}\underbrace{(۱)\begin{vmatrix} a & ۵ \\ ۳ & -۲ \end{vmatrix}}_{\text{دترمینان ۲×۲ حاصل از حذف سطر و ستون درایهٔ ۱}}-\underbrace{(-۱)\begin{vmatrix} ۲ & ۵ \\ ۰ & -۲ \end{vmatrix}}_{\text{دترمینان ۲×۲ حاصل از حذف سطر و ستون درایهٔ (−۱)}}=۶$$

$$\Rightarrow (۱)(-۲a-۱۵)-(-۱)(-۴-۰)=۶\Rightarrow -۲a=۲۵\Rightarrow a=-\frac{۲۵}{۲}=-۱۲/۵$$

تست: حاصل $\begin{vmatrix} ۰ & ۴ & ۳ \\ ۱ & -۱ & ۲ \\ ۰ & -۲ & ۶ \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ۲ & ۵ & ۱ \\ -۱ & ۴ & ۰ \\ ۳ & ۰ & -۲ \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) −۶۸ ۲) ۴۲ ۳) −۶۵ ۴) ۴۸

پاسخ **گزینهٔ ۱** **هشدار:** در جمع، تفریق و ضرب چند دترمینان، باید محاسبهٔ هر یک از دترمینان‌ها را به‌طور جداگانه انجام داد.

حاصل هر یک از دترمینان‌ها را به‌طور جداگانه محاسبه؛ سپس نتایج را با هم جمع می‌کنیم:

درایهٔ ۱ جزء چهار رأس لوزی است.

$$\begin{vmatrix} ۰ & ۴ & ۳ \\ ۱ & -۱ & ۲ \\ ۰ & -۲ & ۶ \end{vmatrix}\xrightarrow{\text{بسط نسبت به ستون اول}}-(۱)\underbrace{\begin{vmatrix} ۴ & ۳ \\ -۲ & ۶ \end{vmatrix}}_{۳۰}=-۳۰\ ,\quad \begin{vmatrix} ۲ & ۵ & ۱ \\ -۱ & ۴ & ۰ \\ ۳ & ۰ & -۲ \end{vmatrix}\xrightarrow{\text{بسط نسبت به سطر سوم}}(۳)\underbrace{\begin{vmatrix} ۵ & ۱ \\ ۴ & ۰ \end{vmatrix}}_{-۴}+(-۲)\underbrace{\begin{vmatrix} ۲ & ۵ \\ -۱ & ۴ \end{vmatrix}}_{۱۳}=-۳۸$$

پس جواب برابر با $-۶۸=(-۳۰)+(-۳۸)$ است.

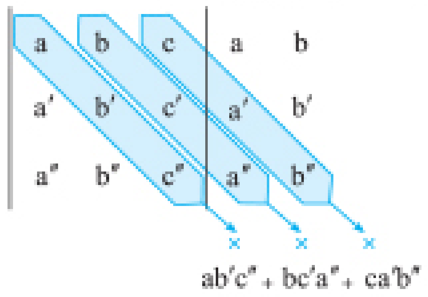
یافتن دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ به کمک روش ساروس

ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. برای یافتن دترمینان آن به کمک روش ساروس به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

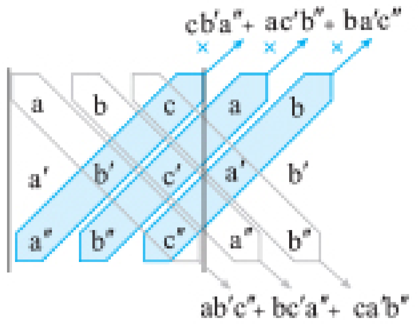
۱ دو ستون اول (از سمت چپ) را در سمت راست دترمینان ماتریس A می‌نویسیم:

$$\left|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{array}\right| \begin{array}{cc} a & b \\ a' & b' \\ a'' & b'' \end{array}$$

۲ حاصل‌ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی و حاصل‌ضرب درایه‌های واقع بر دو خط موازی با قطر اصلی را جداگانه محاسبه و هر سه عدد را با هم جمع می‌کنیم:



۳ حاصل‌ضرب درایه‌های واقع بر قطر فرعی و حاصل‌ضرب درایه‌های واقع بر دو خط موازی با قطر فرعی را جداگانه محاسبه و هر سه عدد را با هم جمع می‌کنیم:



۴ دترمینان ماتریس A برابر است با مجموع حاصل‌ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی و دو خط موازی آن منهای مجموع حاصل‌ضرب درایه‌های واقع بر قطر فرعی و دو خط موازی آن. به عبارت دیگر عدد حاصل از مرحلهٔ ۳ را از عدد حاصل از مرحلهٔ ۲ کم می‌کنیم:

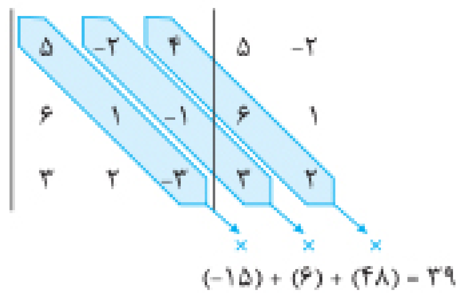
$$|A|=(ab'c''+bc'a''+ca'b'')-(cb'a''+ac'b''+ba'c'')$$

برای نمونه: برای یافتن دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۵ & -۲ & ۴ \\ ۶ & ۱ & -۱ \\ ۳ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$ به روش ساروس داریم:

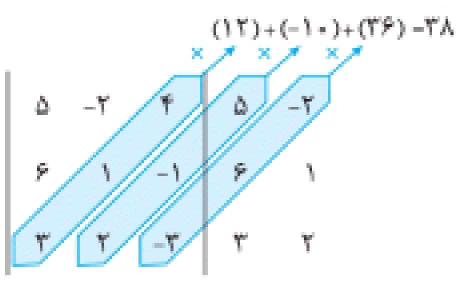
مرحلهٔ ۱: ابتدا دو ستون اول را در سمت راست دترمینان می‌نویسیم:

$$\left|\begin{array}{ccc} ۵ & -۲ & ۴ \\ ۶ & ۱ & -۱ \\ ۳ & ۲ & -۳ \end{array}\right| \begin{array}{cc} ۵ & -۲ \\ ۶ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{array}$$

مرحلهٔ ۲



مرحلهٔ ۳

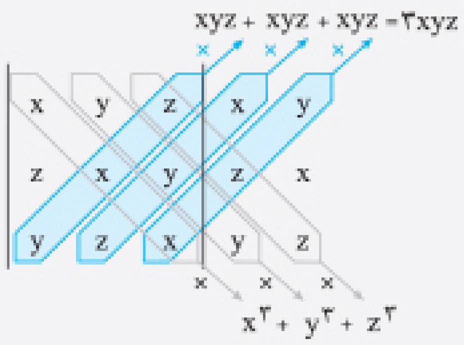


مرحلهٔ ۴: $|A|=۳۹-۳۸=۱$

تست: اگر حاصل $\left|\begin{array}{ccc} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{array}\right|$ برابر صفر باشد. آن‌گاه $x^۳+y^۳+z^۳$ برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) $۳xyz$ ۳) $(x+y+z)^۳$ ۴) $(xyz)^۳$

پاسخ گزینه ۲ به کمک روش ساروس داریم:



پس دترمینان داده‌شده برابر است با $x^۳+y^۳+z^۳-۳xyz$ و از آن‌جایی که طبق فرض مسئله حاصل این دترمینان برابر صفر است؛ داریم:

$$x^۳+y^۳+z^۳-۳xyz=۰ \Rightarrow x^۳+y^۳+z^۳=۳xyz$$

دترمینان ماتریس‌های مربعی خاص

دترمینان هر ماتریس **بالامثلثی، پایین‌مثلثی** و **قطری** برابر است با «**حاصل‌ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن**».

به عبارت دیگر:

$$\begin{vmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

(برای اثبات کافی است از روش بسط یا ساروس استفاده کنید.)

نتیجه: ① دترمینان هر ماتریس **اسکالر**، برابر است با یک درایهٔ روی قطر اصلی به توان مرتبهٔ ماتریس. به عبارت دیگر:

$$\begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} = k^2, \begin{vmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} = k^3, \begin{vmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{vmatrix} = k^4, \dots$$

② دترمینان ماتریس همانی، همواره برابر با ۱ است. به عبارت دیگر $|I_n| = 1$.

③ اگر k عددی حقیقی و I_n ماتریس همانی از مرتبهٔ $n \times n$ باشد، آن‌گاه $|kI_n| = k^n$.

برای اثبات، می‌دانیم ماتریس kI همواره یک ماتریس اسکالر است که تمام درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن برابر k است و طبق نتیجهٔ ①، دترمینان آن برابر است با k به توان مرتبهٔ ماتریس که در این‌جا n می‌باشد. به عبارت دیگر:

$$kI_n = k\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k \end{bmatrix} \Rightarrow |kI_n| = \begin{vmatrix} k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k \end{vmatrix} = k^n$$

برای نمونه: $|kI_3| = k^3$ ، $|kI_4| = k^4$ و ... است.

④ دترمینان هر ماتریس **شبه‌قطری** ۲×۲ و ۳×۳ با **قرینهٔ** حاصل‌ضرب درایه‌های واقع بر قطر فرعی آن برابر است.

به عبارت دیگر:

$$\begin{vmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{vmatrix} = -ab \quad , \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} = -abc$$

(برای اثبات کافی است از روش بسط یا ساروس کمک بگیرید.)

هشدار: دترمینان ماتریس‌های شبه‌قطری مرتبه‌های بالاتر، ممکن است از نتیجهٔ ④ پیروی نکنند.

تست: اگر $k_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}$ و $k_2 = \begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$ باشد، **آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری همواره درست است؟**

۱) $k_1 + k_2 = abc$ ۲) $k_1 - k_2 = abc$ ۳) $k_1 + k_2 = bc$ ۴) $k_1 - k_2 = bc$

پاسخ (گزینه ۳)

$$\left.\begin{array}{l} k_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{شبه‌قطری } 3\times 3} -abc \\ k_2 = \begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} \xlongequal{\text{قطری}} (a+1)bc = abc + bc \end{array}\right\} \xrightarrow{+} k_1 + k_2 = bc$$

چند ویژگی مهم دترمینان

ویژگی ①: خاصیت ضربی دترمینان: دترمینان حاصل‌ضرب دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه، با حاصل‌ضرب دترمینان‌های آن برابر است.

به عبارت دیگر اگر A و B **دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه** باشند، آن‌گاه $|AB| = |A||B|$.

◄ اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه $|AB| = |BA|$.

به عبارت دیگر ممکن است دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبهٔ A و B، تعویض‌پذیر نباشند، اما $|AB|$ با $|BA|$ همواره برابر است: زیرا هر دو با $|A||B|$ مساوی‌اند.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۵

ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

۱. ماتریس $A=[a_{ij}]_{5\times 5}$ به‌صورت $a_{ij}=\begin{cases} 2i-j & ; \ i=j \\ \dfrac{2x^2-9x+4}{2x^2-12x+4} & ; \ i\neq j \end{cases}$ مفروض است. اگر این ماتریس، قطری باشد، چند مقدار برای x موجود است؟

۱) یک ۲) دو ۳) بی‌شمار ۴) هیچ

۲. اگر $\begin{bmatrix} 4x & -x^2+5x \\ 2x+y & -y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x^2+2 & 4 \\ 3x-y & -y \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $x+y$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۳. اگر $A=[j^2+2i]_{2\times 3}$ و $B=[i^3-j]_{2\times 3}$ باشد، درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس $-B+2A$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۲۳ ۴) ۲۱

۴. اگر $A=\begin{bmatrix} c & 5 \\ 2 & a \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ b & 7 \end{bmatrix}$ و $A\cdot B=B\cdot A$ باشد. آن‌گاه حاصل $c-a$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) -15 ۳) -20 ۴) ۲۰

۵. اگر $A=\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ a & b \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشند. در این‌صورت حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) -2

۶. اگر حاصل‌ضرب $\begin{bmatrix} -2a & -2 \\ 2 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، در این‌صورت حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷. به ازای کدام مقادیر x و y ماتریس $\begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$، یک ماتریس قطری است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

۱) $x=1\ ,\ y=-7$ ۲) $x=2\ ,\ y=-7$ ۳) $x=2\ ,\ y=-5$ ۴) $x=1\ ,\ y=-5$

۸. اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & z \end{bmatrix}$ و A^2 ماتریس اسکالر باشد، حاصل x^2-y+z کدام است؟ (ریاضی مجدد ۱۴۰۱)

۱) ۳ ۲) -2 ۳) -6 ۴) صفر

۹. اگر $A=\begin{bmatrix} x & -1 & -x \\ 0 & 0 & 4 \\ y & z & z \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} 2z & \frac{1}{2} & 2 \\ 2z & 0 & -4y \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ و ماتریس AB به ازای $y\in\mathbb{Z}$ ماتریس اسکالر باشد، مقدار xy کدام است؟ (ریاضی تیر ۱۴۰۱)

۱) -1 ۲) -2 ۳) ۱ ۴) ۲

۱۰. بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس A از معادلهٔ $A\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $-\frac{9}{5}$ ۲) $\frac{9}{5}$ ۳) $\frac{7}{10}$ ۴) $-\frac{1}{5}$

۱۱. از رابطهٔ ماتریسی $[x \ \ 2x \ \ -1]\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix}=0$، عدد غیرصفر x، کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

۱) $\frac{2}{9}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{3}{5}$

۱۲. در معادلهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} x & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & x & 2 \\ -1 & 1 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ x \\ -1 \end{bmatrix} = \overline{O}$، مجموع جواب‌های x کدام است؟ $(x \in \mathbb{R})$

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) صفر ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) -1

۱۳. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس A کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۱۴. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس A کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۱) ۱۲ ۲) ۱۷ ۳) ۱۹ ۴) ۲۱

۱۵. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & x \\ x & 1 & -1 \end{bmatrix}$، $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $D = ABC$ باشد. به ازای کدام مقدار x، مجموع درایه‌های قطر اصلی و فرعی ماتریس D برابر هستند؟ (ریاضی دی ۱۴۰۱)

۱) -4 ۲) -3 ۳) ۵ ۴) ۶

۱۶. اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times A \times \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} c & d \\ b & a \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -d & -c \\ -b & -a \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -c & -d \\ -b & -a \end{bmatrix}$

۱۷. اگر ماتریس ناصفر $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ چنان باشد که $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4b_1 \\ 4b_2 \end{bmatrix}$، آن‌گاه مقدار a کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۱) -4 ۲) صفر ۳) ۴ ۴) ۱۲

۱۸. ماتریس‌های مربعی A و B مفروض‌اند. اگر $A^2 = A$ و $B^2 = B$ باشد و داشته باشیم $AB = BA$، در آن‌صورت کدام گزینه درست است؟

۱) $(A+B-AB)^2 = A^2 + B^2 + A^2B^2$ ۲) $(A+B-AB)^3 = -A-B+AB$

۳) $(A+B-AB)^3 = A-B-AB$ ۴) $(A+B-AB)^2 = A+B-AB$

۱۹. ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبهٔ A و B مفروض‌اند. اگر $AB = A$ و $BA = B$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $A^2 - B^2 = A+B$ ۲) $A^2 = B^2$ ۳) $A^2 + B^2 = A+B$ ۴) $A^3 = B^3$

۲۰. مجموع درایه‌های ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۵۰۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۹۹ ۴) ۱۰۱

۲۱. اگر $A^2 = A$ و $B = 2A - I$، در این‌صورت $A^3 + B^3$ کدام است؟

۱) $2A + B$ ۲) $A + 2B$ ۳) $A + B$ ۴) $A - B$

۲۲. اگر $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2 & 1 & -1 \\ d & e & f \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) -3 ۴) -6

۲۳. اگر $A^2 = 5A - 2I$، آن‌گاه A^3 کدام است؟

۱) $23A - 10I$ ۲) $25A - 10I$ ۳) $27A - 10I$ ۴) $25A - 12I$

۲۴. اگر $A^2 = A - 2I$ و $A^5 = \alpha A + \beta I$ باشد (I ماتریس همانی است.)، حاصل $\alpha + \beta$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -5 ۳) ۵ ۴) -6

۲۵. اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند و $AB^2 = B^2A$، آن‌گاه به‌ازای کدام مقدار حقیقی k رابطهٔ $AB = kBA$ برقرار است؟

۱) فقط -1 ۲) ± 1 ۳) فقط ۱ ۴) هر مقدار دلخواه مخالف صفر

۲۶. ماتریس‌های مربعی A و B مفروض‌اند. اگر $BA = -AB$ باشد، ماتریس $BA^2 - A^2B$ کدام است؟

۱) AB ۲) BA ۳) $\overline{O}$ ۴) I

۲۷. اگر برای دو ماتریس A و B بدانیم $AB - BA = I$، آن‌گاه حاصل $AB^2 - B^2A$ برابر کدام است؟

۱) $\overline{O}$ ۲) $2I$ ۳) $2A$ ۴) $2B$

۵۳. اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند و $BA=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $B(AB)^3A$ کدام است؟

۱) ۴۸ ۲) ۵۶ ۳) ۶۴ ۴) ۷۲

۵۴. اگر $A=\begin{bmatrix}3&3\\-3&-3\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}2&2\\-2&-2\end{bmatrix}$ و $A\times B=C$ باشد، ماتریس C^n کدام است؟ $(n\in\mathbb{N})$

۱) A ۲) B ۳) $\bar{O}_{2\times2}$ ۴) $I_{2\times2}$

۵۵. ماتریس‌های مربعی A و B از مرتبهٔ یکسان مفروض‌اند. اگر $\begin{cases}2A^6+2A^2+A+B=\bar{O}\\A^2-A+I=\bar{O}\end{cases}$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $3A+B=\bar{O}$ ۲) $A+B=I$ ۳) $A+3B=\bar{O}$ ۴) $A^2+B^2=\bar{O}$

۵۶. ماتریس‌های A و B مفروض‌اند. اگر $AB=B$ و $BA=A$ باشد، حاصل ماتریس $(A+B)^2$ کدام است؟

۱) $2A^2+2A$ ۲) $4A^2$ ۳) $4A$ ۴) $2(A+B)$

دترمینان

۵۷. اگر $A=\begin{bmatrix}a&a+2\\a-2&3\end{bmatrix}$، آن‌گاه به‌ازای کدام مقادیر a، دترمینان ماتریس A برابر صفر است؟

۱) ۱و۴ ۲) ۱-و۴ ۳) ۱و۴- ۴) ۱-و۴-

۵۸. اگر $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$، آن‌گاه دترمینان ماتریس $(A+I)^6$ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) صفر ۳) ۲۴۳ ۴) ۷۲۹

۵۹. اگر $A=\begin{bmatrix}2&-1\\-2&1\end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $A^2-2A+2I_2$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۰. اگر برای ماتریس A، تساوی $2A=\begin{bmatrix}|A|&2\\-1&|A|\end{bmatrix}$ برقرار باشد و $|A|>1$، حاصل دترمینان ماتریس $A-2I$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲

۶۱. اگر $A=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}3&-2\\4&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}5&4\\-2&-1\end{vmatrix}\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}2&6\\1&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}0&7\\2&-1\end{vmatrix}\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه دترمینان ماتریس AB کدام است؟

۱) ۱۴۴ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۲۰- ۴) ۱۴۴-

۶۲. ماتریس $A=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}2&1\\3&-1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}4&0\\1&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&-2\\3&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&2\\-1&4\end{vmatrix}\end{bmatrix}$ مفروض است، حاصل $\left|\dfrac{A}{|A|}\right|$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{21}$ ۲) $-\frac{1}{21}$ ۳) $\frac{1}{42}$ ۴) $-\frac{1}{42}$

۶۳. اگر $A=\begin{bmatrix}|A|&3\\4&|A|-3\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه حاصل $|A|$ کدام است؟

۱) ۲ , ۶ ۲) ۲- , ۶- ۳) ۲- , ۶ ۴) ۲ , ۶-

۶۴. اگر $A=\begin{bmatrix}3&-1&2\\a&2&1\end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix}3&a\\-1&2\\2&1\end{bmatrix}$ و $B=A\cdot C$، آن‌گاه به ازای کدام مجموعهٔ مقادیر a، حاصل دترمینان B عددی منفی است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $\{a\,;\,a<1\}$ ۳) $\{a\,;\,a>1\}$ ۴) $\mathbb{R}$

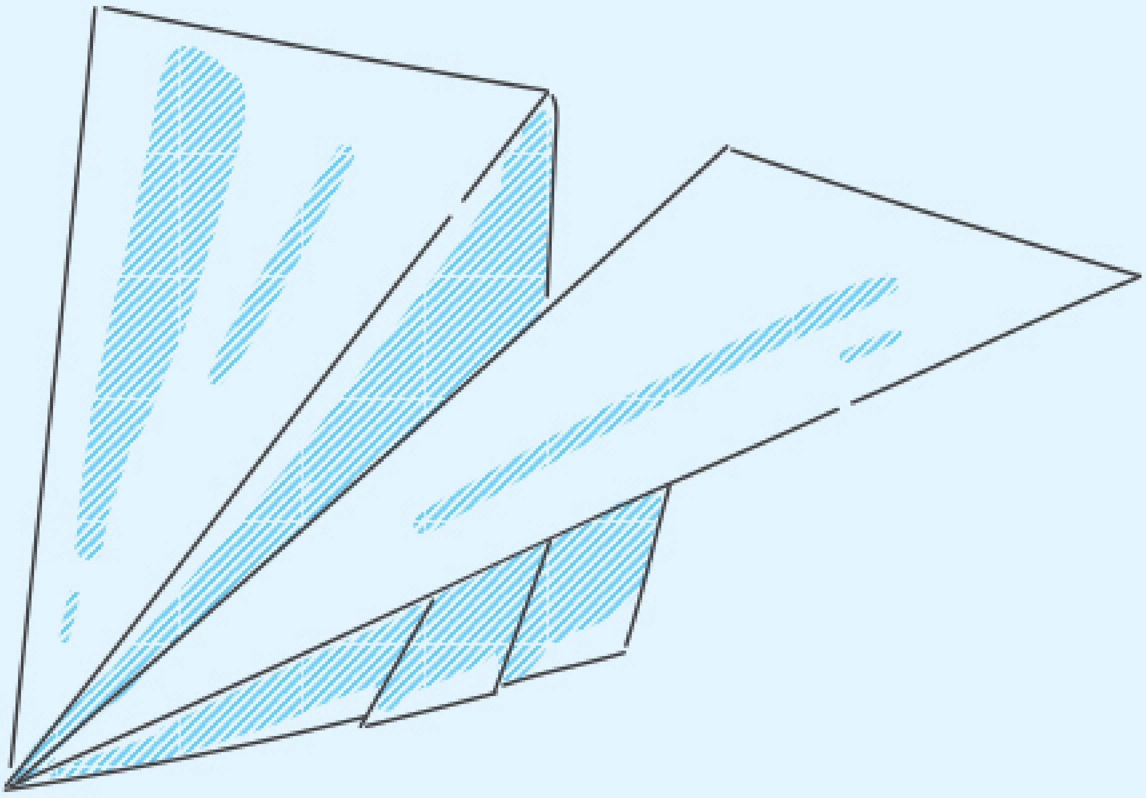
۶۵. در ماتریس $A=[a_{ij}]_{2\times2}$، اگر $a_{ij}=ij-3i$، مقدار $|A|$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۹ ۳) ۴ ۴) ۴-

۶۶. اگر تمام عضوهای ماتریس $A=\begin{bmatrix}2&3\\4&5\end{bmatrix}$ را با عدد k جمع کنیم، دترمینان A چه تغییری می‌کند؟

۱) k برابر می‌شود. ۲) با k جمع می‌شود. ۳) تغییری نمی‌کند. ۴) به مقدار k بستگی دارد.

فصل ۳



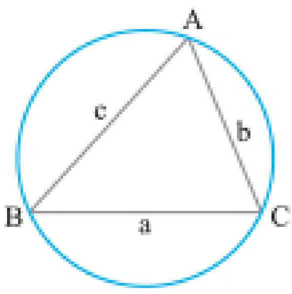
روابط طولی در مثلث

روابط طولی در مثلث، نه به عنوان یک فصل جداگانه، بلکه به عنوان یک ابزار مهم در حل سؤال‌ها و تست‌های هندسه در تمام آزمون‌ها مطرح است؛ بنابراین پیشنهاد می‌شود مباحث این فصل را به عنوان پیش‌نیاز در حل تست‌های هندسه در نظر بگیرید.

روابط طولی در مثلث

یکی از پرکاربردترین عملیات ریاضی در رشته‌های مهندسی، استفاده از روابط طولی در مثلث است که برای نمونه، برای محاسبهٔ عرض رودخانه‌ها، ارتفاع کوه‌ها، یافتن زوایای مناسب و غیره استفاده می‌شود.

قضیهٔ سینوس‌ها



در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازهٔ هر ضلع به سینوس زاویهٔ رأس روبه‌روی آن، برابر است با قطر دایرهٔ محیطی مثلث.

به عبارت دیگر در مثلث ABC، همواره:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=۲R \Rightarrow a=۲R\sin\hat{A}\ ,\ b=۲R\sin\hat{B}\ ,\ c=۲R\sin\hat{C}$$

(R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است.)

تست: در مثلث ABC، اگر $\hat{A}=۳۰^\circ$ و $AC=\sqrt{۲}BC$ باشد، آن‌گاه زاویهٔ C چند درجه می‌تواند باشد؟

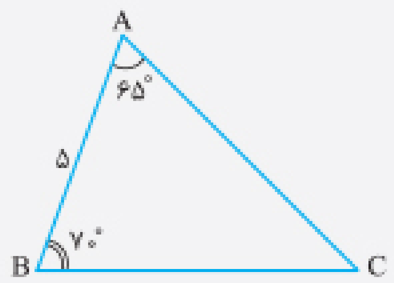
۱) ۵ یا ۴۵ ۲) ۴۵ یا ۷۵ ۳) ۴۵ یا ۱۳۵ ۴) ۱۵ یا ۱۰۵

پاسخ گزینه۴ می‌دانیم $AC=b$ و $BC=a$ است. از قضیهٔ سینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}} \xrightarrow{b=\sqrt{۲}a} \frac{a}{\sin۳۰^\circ}=\frac{\sqrt{۲}a}{\sin\hat{B}} \xrightarrow{\div a} \frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{\sin\hat{B}} \Rightarrow \sin\hat{B}=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \hat{B}=۴۵^\circ \text{ یا } ۱۳۵^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{C}=۱۸۰^\circ-(\hat{A}+\hat{B}) \Rightarrow \begin{cases}\hat{C}=۱۸۰^\circ-(۳۰^\circ+۴۵^\circ)=۱۰۵^\circ\\ \hat{C}=۱۸۰^\circ-(۳۰^\circ+۱۳۵^\circ)=۱۵^\circ\end{cases} \Rightarrow \hat{C}=۱۰۵^\circ \text{ یا } ۱۵^\circ$$

در شکل مقابل، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC چند برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است؟

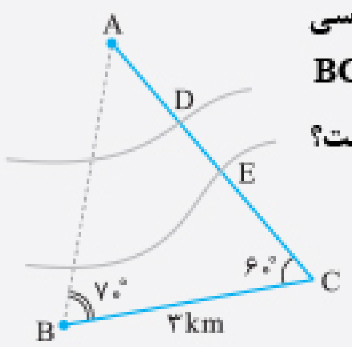


۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

پاسخ گزینه۴ می‌دانیم $\hat{C}=۱۸۰^\circ-(۶۵^\circ+۷۰^\circ)=۴۵^\circ$. از قضیهٔ سینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\frac{c}{\sin\hat{C}}=۲R \xrightarrow{c=۵} \frac{۵}{\sin۴۵^\circ}=۲R \Rightarrow \frac{۵}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=۲R \Rightarrow R=\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$$

در شکل مقابل، برای احداث یک پل از نقطهٔ A به نقطهٔ B بر روی قسمت عمیق رودخانه، یک گروه مهندسی تصمیم گرفتند با حرکت از نقطهٔ A و عبور از قسمت کم‌عمق (DE) و رسیدن به نقطهٔ C، بتوانند طول $BC=۲km$ را اندازه‌گیری نمایند. به کمک دستگاه زاویه‌یاب، اگر $\hat{B}=۷۰^\circ$ و $\hat{C}=۶۰^\circ$ باشد، طول پُل (AB) چند کیلومتر است؟ $(\sqrt{۳}=۱/۷\ ,\sin۵۰^\circ=۰/۷۵)$



۱) ۳/۲ ۲) ۳/۴
۳) ۴/۲ ۴) ۴/۴

پاسخ گزینه۲ واضح است که $\hat{A}=۱۸۰^\circ-(\hat{B}+\hat{C})=۱۸۰^\circ-(۶۰^\circ+۷۰^\circ)=۵۰^\circ$. پس طبق قضیهٔ سینوس‌ها داریم:

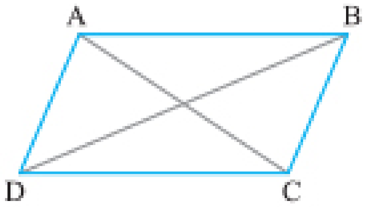
$$\frac{BC}{\sin\hat{A}}=\frac{AB}{\sin\hat{C}} \Rightarrow \frac{۲}{\sin۵۰^\circ}=\frac{AB}{\sin۶۰^\circ} \Rightarrow \frac{۲}{۰/۷۵}=\frac{AB}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \Rightarrow AB=\frac{\frac{۲\sqrt{۳}}{۲}}{۰/۷۵}=\frac{۲\times۱/۷}{۲\times۰/۷۵}=۳/۴\,km$$

پاسخ گزینه ۲

الف) با توجه به اینکه $\underbrace{۶^۲+۸^۲}_{۱۰۰} < \underbrace{۱۱^۲}_{۱۲۱}$، پس $a^۲ > b^۲ + c^۲$ و در نتیجه $\hat{A} > ۹۰^\circ$ است.

ب) در این قسمت $۸^۲ < ۷^۲ + ۴^۲$، پس $a^۲ < b^۲ + c^۲$ و لذا $\hat{A} < ۹۰^\circ$ است.

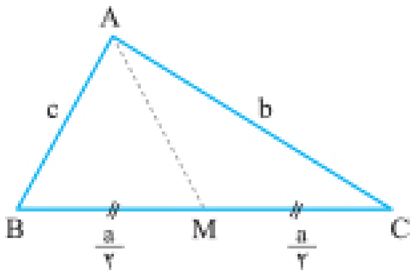
پ) چون $۲۵^۲ = ۶۲۵$، $۲۴^۲ = ۵۷۶$ و $۷^۲ = ۴۹$، درمی‌یابیم که $۲۵^۲ = ۲۴^۲ + ۷^۲$، و در نتیجه $a^۲ = b^۲ + c^۲$ و لذا $\hat{A} = ۹۰^\circ$ است.



۲ در هر متوازی‌الاضلاع، مجموع مربع‌های اندازهٔ دو قطر با دو برابر مجموع مربع‌های اندازهٔ دو ضلع مجاور (با مجموع مربع‌های اندازهٔ هر چهار ضلع) برابر است.

$$AC^۲ + BD^۲ = ۲(AB^۲ + BC^۲)$$

۳ قضیهٔ میانه‌ها: در هر مثلث مجموع مربع‌های اندازهٔ دو ضلع، برابر است با دو برابر مربع اندازهٔ میانهٔ وارد بر ضلع سوم، به اضافهٔ نصف مربع اندازهٔ ضلع سوم.



بنابراین در مثلث ABC (شکل مقابل) داریم:

$$b^۲ + c^۲ = ۲AM^۲ + \frac{a^۲}{۲}$$

تذکر: ۱ میانهٔ وارد بر سه ضلع مثلث را با نمادهای m_a، m_b و m_c نشان می‌دهیم و مطابق رابطهٔ بالا می‌توان برای هر سه میانه ثابت کرد که:

$$b^۲ + c^۲ = ۲m_a^۲ + \frac{a^۲}{۲} \quad , \quad a^۲ + c^۲ = ۲m_b^۲ + \frac{b^۲}{۲} \quad , \quad a^۲ + b^۲ = ۲m_c^۲ + \frac{c^۲}{۲}$$

۲ مجموع مربع‌های اندازهٔ سه میانهٔ هر مثلث با $\frac{۳}{۴}$ مجموع مربع‌های سه ضلع آن برابر است، یعنی:

$$m_a^۲ + m_b^۲ + m_c^۲ = \frac{۳}{۴}(a^۲ + b^۲ + c^۲)$$

(برای اثبات این مورد، کافی است سه تساوی مطرح‌شده در تذکر ۱ را با هم جمع کرده و مرتب کنید.)

تست: در مثلث ABC، اگر $AB = ۴$، $AC = ۶$ و $BC = ۸$ باشد، طول میانهٔ AM کدام است؟

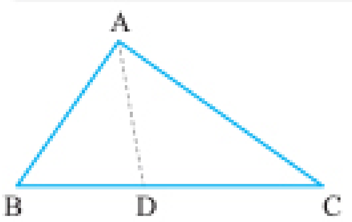
۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۶}$ ۳) $\sqrt{۱۰}$ ۴) $\sqrt{۱۵}$

پاسخ گزینه ۳ با توجه به قضیهٔ میانه‌ها داریم:

$$b^۲ + c^۲ = ۲AM^۲ + \frac{a^۲}{۲} \Rightarrow ۶^۲ + ۴^۲ = ۲AM^۲ + \frac{۸^۲}{۲} \Rightarrow AM^۲ = ۱۰ \Rightarrow AM = \sqrt{۱۰}$$

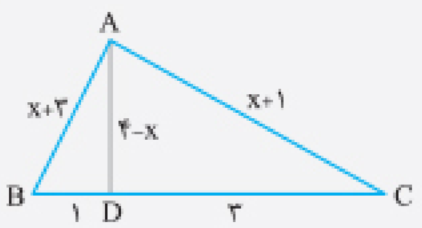
(با توجه به تذکر ۱ می‌توان طول سایر میانه‌ها را نیز محاسبه کرد.)

قضیهٔ استوارت: در مثلث ABC اگر D نقطهٔ دلخواه روی ضلع BC باشد، آن‌گاه:



$$AB^۲ \cdot DC + AC^۲ \cdot DB = AD^۲ \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC$$

تست: با توجه به شکل مقابل، اندازهٔ x کدام است؟



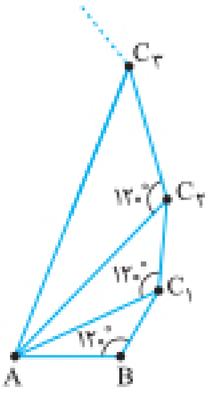
۱) $\frac{۱۲}{۱۳}$ ۲) $\frac{۱۲}{۱۷}$ ۳) $\frac{۱۵}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱۷}{۱۱}$

پاسخ گزینه ۱ با توجه به قضیهٔ استوارت داریم:

$$AB^۲ \cdot DC + AC^۲ \cdot DB = AD^۲ \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC$$
$$= (x+۳)^۲ \times ۳ + (x+۱)^۲ \times ۱ = (۴-x)^۲ \times ۴ + ۱ \times ۳ \times ۴$$

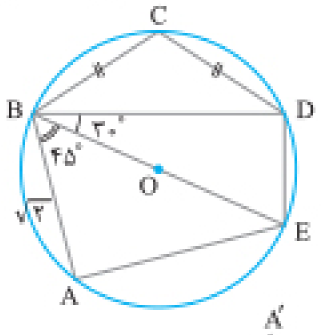
پس از حل معادلهٔ بالا، $x = \frac{۱۲}{۱۳}$ به‌دست می‌آید.

آزمون فصل



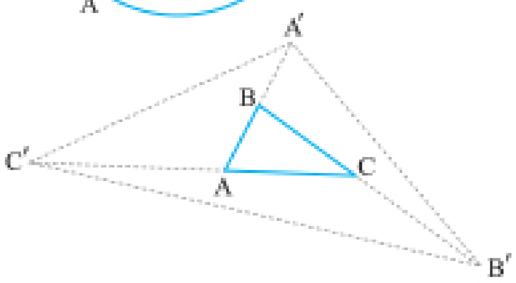
۱. در شکل مقابل، هر یک از مثلث‌های ABC_1، AC_1C_2، AC_2C_3 و ... همگی متساوی‌الساقین و زاویهٔ رأس همهٔ آن‌ها برابر ۱۲۰ درجه است. نسبت $\frac{AC_8}{AB}$ کدام است؟

۱) ۹
۲) $۹\sqrt{۳}$
۳) ۲۷
۴) ۸۱



۲. اگر در شکل مقابل، شعاع دایره ۱ واحد باشد، مساحت پنج‌ضلعی کدام است؟

۱) $۱+\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$
۲) $۲+\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$
۳) $۱+\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$
۴) $۲+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$



۳. ضلع‌های مثلث ABC را به‌صورت $AA' = ۲AB$، $BB' = ۵BC$ و $CC' = ۸CA$ امتداد می‌دهیم.
نسبت مساحت مثلث $A'B'C'$ به مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) ۳۲
۲) ۶۴
۳) ۲۸
۴) ۵۶

۴. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ با دو ضلع مجاور به طول‌های ۱۸ و ۱۲ واحد و یک زاویهٔ ۶۰ درجه، نیمسازهای دو زاویهٔ مقابل A و C قطر BD را در نقطه‌های E و F قطع می‌کنند. اندازهٔ پاره‌خط EF کدام است؟

۱) $۶\sqrt{۵}$
۲) $\frac{۶\sqrt{۵}}{۳}$
۳) $۶\sqrt{۷}$
۴) $\frac{۶\sqrt{۷}}{۵}$

۵. در مثلث ABC، اندازهٔ سه ضلع ۲، ۵ و ۶ است. حاصل $\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}$ چند برابر $\sqrt{۱۴}$ است؟

۱) $\frac{۲۸}{۴۵}$
۲) $\frac{۲۷}{۳۸}$
۳) $\frac{۲۹}{۵۱}$
۴) $\frac{۲۲}{۳۷}$

۶. طول ضلع‌های مثلثی تشکیل یک دنبالهٔ حسابی داده‌اند. اگر مساحت این مثلث، $\frac{۳}{۵}$ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی باشد که محیطش با محیط مثلث اصلی برابر است، نسبت بزرگ‌ترین ضلع مثلث اصلی به کوچک‌ترین ضلع آن کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$
۲) $\frac{۷}{۳}$
۳) $\frac{۹}{۴}$
۴) $\frac{۸}{۳}$

۷. در چهارضلعی $ABCD$، $BC = ۲$، $۲AB = CD = ۲\sqrt{۳}$ و $\hat{A} = \hat{D} = ۶۰^\circ$، در این‌صورت زاویهٔ B چند درجه است؟

۱) ۱۰۰
۲) ۱۲۰
۳) ۱۴۰
۴) ۱۵۰

۸. در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازهٔ اضلاع قائم ۲ و ۴ واحد است. فاصلهٔ دورترین رأس این مثلث از نقطهٔ تلاقی نیمسازهای داخلی آن کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$
۲) ۳
۳) $\sqrt{۱۰}$
۴) $۳\sqrt{۲}$

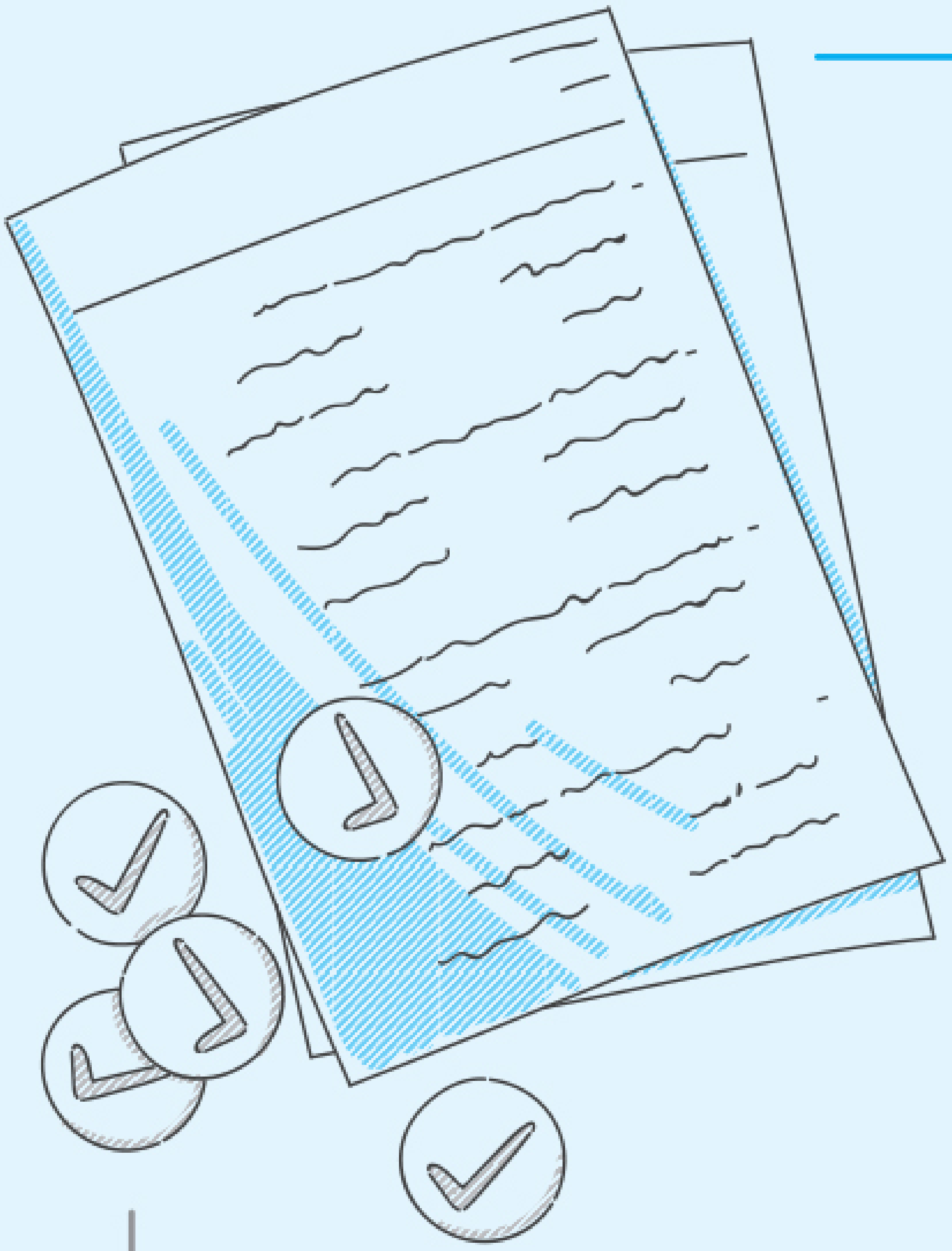
۹. در مثلث ABC هرگاه $AB = ۴\sqrt{۲}$، $\hat{B} = ۴۵^\circ$ و $\hat{C} = ۱۵^\circ$ باشد، طول نیمساز داخلی زاویهٔ رأس A چقدر است؟

۱) $۲(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})$
۲) $۲(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})$
۳) $۴(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})$
۴) $۴(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})$

۱۰. در هر مثلث قائم‌الزاویه، مجموع مربع‌های فاصله‌های رأس قائمه از دو نقطه‌ای که وتر را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند، چند برابر مربع وتر مثلث است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) $\frac{۵}{۹}$
۴) $\frac{۹}{۵}$

برای مشاهدهٔ پاسخ‌نامهٔ کلیدی آزمون فصل به انتهای کتاب مراجعه نمایید و برای دریافت پاسخ‌نامهٔ تشریحی آن رمزینهٔ مقابل را با گوشی هوشمند خود اسکن کنید یا به سایت مهروماه، صفحهٔ مربوط به این کتاب مراجعه نمایید.



پاسخ‌نامهٔ تشریحی

۱. گزینه ۱ در ماتریس قطری، همهٔ درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی باید صفر باشند. در این سؤال یعنی درایه‌های به شکل $\frac{۲x^۲-۹x+۴}{۳x^۲-۱۳x+۴}$ باید برابر صفر شوند؛ بنابراین:

$$۲x^۲-۹x+۴=۰ \xrightarrow{\text{تجزیه}} (۲x-۱)(x-۴)=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}, x=۴$$

با امتحان ریشه‌های این معادله در عبارت مخرج کسر، مشاهده می‌شود که $x=۴$، مخرج را صفر می‌کند؛ پس فقط $x=\frac{۱}{۲}$ قابل قبول است.

۲. گزینه ۳ طبق خاصیت تساوی در ماتریس‌ها، درایه‌ها نظیر به نظیر با هم برابرند؛ پس می‌توانیم چهار معادله داشته باشیم:

$$\begin{cases} x^۲+۳=۴x \Rightarrow x^۲-۴x+۳=۰ \Rightarrow x=۱,۳ \\ ۴=-x^۲+۵x \Rightarrow x^۲-۵x+۴=۰ \Rightarrow x=۱,۴ \end{cases}$$

از اشتراک جواب‌ها، $x=۱$ به‌دست می‌آید. داریم:

$$۳x-y=۲x+y \Rightarrow x=۲y \Rightarrow ۱=۲y \Rightarrow y=\frac{۱}{۲}$$

پس:

$$x+y=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

۳. گزینه ۴ از آن‌جایی که ماتریس‌های A و B دارای تعداد سطر و ستون برابر هستند، می‌توان عملیات خواسته شده را انجام داد. در این‌جا نیازی به پیدا کردن همهٔ درایه‌های ماتریس‌های A و B نداریم. در عملیات خواسته‌شده، درایهٔ سطر دوم و ستون سوم خواسته شده است؛ پس محاسبهٔ درایهٔ سطر دوم و ستون سوم از ماتریس‌های A و B کافی است:

$$a_{۲۳}=(۳)^۲+۲\times(۲)=۱۳, b_{۲۳}=(۲)^۳-۳=۵$$

حالا با توجه به خواص ضرب عدد در ماتریس درایهٔ $۲a_{۲۳}$ برابر با $۲\times۱۳=۲۶$ و درایهٔ $-b_{۲۳}$ برابر -۵ می‌باشد و در نهایت درایهٔ سطر دوم و ستون سوم از ماتریس خواسته‌شده برابر با $-۵+۲۶=۲۱$ است.

۴. گزینه ۳ حاصل‌ضرب‌های $A\cdot B$ و $B\cdot A$ را پیدا می‌کنیم:

$$A\cdot B=\begin{bmatrix} c & ۵ \\ ۳ & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ b & ۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳c+۵b & c+۳۵ \\ ۹+ab & ۳+۷a \end{bmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ b & ۷ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & ۵ \\ ۳ & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳c+۳ & ۱۵+a \\ bc+۲۱ & ۵b+۷a \end{bmatrix}$$

با مساوی قرار دادن یک درایهٔ متناظر در هر دو ماتریس حاصل داریم:

$$(AB)_{۱۲}=(BA)_{۱۲} \Rightarrow c+۳۵=۱۵+a \Rightarrow c-a=-۲۰$$

۵. گزینه ۲ اگر ماتریس‌های A و B تعویض‌پذیر باشند، تساوی $A\cdot B=B\cdot A$ برقرار می‌شود.

$$A\cdot B=B\cdot A \Rightarrow \begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ a & b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ a & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -۲-۳a & ۴-۳b \\ ۳-۲a & -۶-۲b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۸ & ۱ \\ -۲a+۳b & -۳a-۲b \end{bmatrix}$$

در ماتریس‌های مساوی، درایه‌های متناظر با هم برابرند. از تساوی درایه‌های واقع در سطر اول و ستون اول، یعنی $-۲-۳a=-۸$، مقدار a مساوی ۲ می‌شود و از تساوی درایه‌های واقع در سطر دوم و ستون اول داریم:

$$۳-۲a=-۲a+۳b \Rightarrow b=۱ \xrightarrow{a=۲} a+b=۲+۱=۳$$

۶. گزینه ۱ از آن‌جایی که حاصل‌ضرب دو ماتریس، یک ماتریس قطری است؛ پس درایه‌هایی که روی قطر اصلی قرار نگرفته‌اند، باید صفر باشند؛ یعنی درایه‌های $x_{۱۲}$ و $x_{۲۱}$ از ماتریس حاصل باید صفر باشند:

$$\begin{bmatrix} -۲a & -۲ \\ ۲ & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dots & ۲a+۴ \\ ۶-۲b & \dots \end{bmatrix}$$

از معادلات $۲a+۴=۰$ و $۶-۲b=۰$ مقادیر a و b به‌ترتیب برابر -۲ و ۳ به‌دست می‌آیند. در نتیجه حاصل $a+b$ برابر با ۱ است.

۷. گزینه ۲ می‌دانیم ماتریس حاصل، یک ماتریس ۲×۲ است(چرا؟)؛ پس برای آنکه یک ماتریس قطری ۲×۲ داشته باشیم، باید درایه‌های $a_{۱۲}$ و $a_{۲۱}$ برابر صفر باشند؛ پس:

$$a_{۱۲}=۰ \Rightarrow [x \quad -۱ \quad ۴]\cdot\begin{bmatrix} -۲ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}=۰ \Rightarrow -۲x+۴=۰ \Rightarrow x=۲$$

$$a_{۲۱}=۰ \Rightarrow [۲ \quad ۳ \quad ۱]\cdot\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ y \end{bmatrix}=۰ \Rightarrow ۴+۳+y=۰ \Rightarrow y=-۷$$

۸. گزینه ۴

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & y \\ ۰ & x & ۰ \\ ۱ & ۰ & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & y \\ ۰ & x & ۰ \\ ۱ & ۰ & z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱+y & ۰ & y+yz \\ ۰ & x^۲ & ۰ \\ ۱+z & ۰ & y+z^۲ \end{bmatrix}$$

با توجه به اسکالربودن ماتریس $A^۲$ داریم:

$$\begin{cases} ۱+z=۰ \Rightarrow z=-۱ \\ y+yz=۰ \xrightarrow{z=-۱} y\in\mathbb{R} \\ ۱+y=x^۲=y+z^۲ \end{cases}$$

پس حاصل عبارت موردنظر برابر است با:

$$x^۲-y+z=(۱+y)-y+(-۱)=۰$$

۹. گزینه ۲ ابتدا ضرب ماتریسی AB را تشکیل می‌دهیم:

$$AB=\begin{bmatrix} x & -۱ & -x \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ y & z & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲z & \frac{۱}{۲} & ۲ \\ ۲z & ۰ & -۴y \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۲xz-۲z & ۰ & ۲x+۴y \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۲yz+۲z^۲ & \frac{y}{۲}+\frac{z}{۲} & ۲y-۴yz \end{bmatrix}$$

با توجه به اسکالربودن ماتریس AB (طبق فرض داده‌شده) داریم:

$$\begin{cases} ۲xz-۲z=۲ \xrightarrow{\div۲} xz-z=۱ \quad (۱) \\ ۲y-۴yz=۲ \xrightarrow{\div۲} y-۲yz=۱ \quad (۲) \\ ۲x+۴y=۰ \xrightarrow{\div۲} x+۲y=۰ \\ ۲yz+۲z^۲=۰ \xrightarrow{\div۲} yz+z^۲=۰ \\ \frac{y}{۲}+\frac{z}{۲}=۰ \Rightarrow z=-y \quad (۳) \end{cases}$$

با جای‌گذاری رابطهٔ ۳ در ۲ داریم:

$$y-۲y(-y)=۱ \Rightarrow ۲y^۲+y-۱=۰$$

$$\Rightarrow y=-۱, \frac{۱}{۲} \xrightarrow{y\in\mathbb{Z}} y=-۱ \xrightarrow{(۳)} z=۱$$

$$\xrightarrow{\text{در } (۱)} x-۱=۱ \Rightarrow x=۲$$

پس $xy=-۲$ به‌دست می‌آید.

۱۰. گزینه ۲ ماتریس سمت راست دارای سه سطر است؛ بنابراین ماتریس A سه سطر دارد. از طرفی برای اینکه بتوان ماتریس A را در ماتریس $B=\begin{bmatrix}3&-1\\4&2\end{bmatrix}$ ضرب کرد، باید تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد؛ پس ماتریس A از مرتبهٔ ۳×۲ است.

$$A\begin{bmatrix}3&-1\\4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\\3&5\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a&b\\c&d\\e&f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1\\4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\\3&5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}3a+4b&-a+2b\\3c+4d&-c+2d\\3e+4f&-e+2f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\\3&5\end{bmatrix}$$

از برابر قرار دادن درایه‌های متناظر؛ پس از حل دستگاه‌های دو معادله دومجهولی، به‌ترتیب مقادیر دوتایی‌های (a,b)، (c,d) و (e,f) به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases}3a+4b=1\\-a+2b=2\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{3}{5}\ ,\ b=\frac{7}{10}$$

$$\begin{cases}3c+4d=-1\\-c+2d=0\end{cases}\Rightarrow c=-\frac{1}{5}\ ,\ d=-\frac{1}{10}$$

$$\begin{cases}3e+4f=3\\-e+2f=5\end{cases}\Rightarrow e=-\frac{7}{5}\ ,\ f=\frac{9}{5}$$

بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس A برابر $f=\frac{9}{5}$ است.

۱۱. گزینه ۱

$$\underbrace{[x\quad 2x\quad -1]\begin{bmatrix}3&-1&1\\4&0&-2\\1&2&0\end{bmatrix}}_{[11x-1\quad -x-2\quad -3x]}\begin{bmatrix}x\\2x\\-1\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow[11x-1\quad -x-2\quad -3x]\begin{bmatrix}x\\2x\\-1\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow(11x-1)x+(-x-2)(2x)+(-3x)(-1)=0$$

$$\Rightarrow 9x^2-2x=0\Rightarrow x(9x-2)=0\Rightarrow x=0\ ,\ \frac{2}{9}$$

۱۲. گزینه ۱

$$[x\quad 2\quad 1]\begin{bmatrix}x&-1&1\\2&x&3\\-1&1&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\x\\-1\end{bmatrix}=\bar{O}$$

$$\Rightarrow[x^2+3\quad x+1\quad 2x+6]\begin{bmatrix}2\\x\\-1\end{bmatrix}=\bar{O}$$

$$\Rightarrow 2(x^2+3)+x(x+1)-(2x+6)=0$$

$$\Rightarrow 2x^2+6+x^2+x-2x-6=0\Rightarrow 3x^2-x=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{3}\\x=0\end{cases}\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها}=\frac{1}{3}$$

۱۳. گزینه ۱ فرض می‌کنیم:

$$A=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}}_{C}\underbrace{\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}}_{D}$$

در این‌صورت سطر سوم ماتریس A عبارت است از:

$$(\text{سطر سوم ماتریس } BC)\times D=((\text{سطر سوم ماتریس } B)\times C)\times D$$

$$=\left([0\quad -1\quad 1]\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}\right)\times\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$$=[3\quad 7\quad -2]\times\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}=[7\quad 1\quad -5]$$

پس مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس برابر با ۳ است.

۱۴. گزینه ۴ ابتدا حاصل‌ضرب دو ماتریس اول را می‌یابیم:

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&9&3\\7&8&4\\3&2&5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}6&9&3\\7&8&4\\3&2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&?&?\\?&7&?\\?&?&5\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A، برابر ۲۱ است.

۱۵. گزینه ۱ ابتدا ضرب دو ماتریس A و B را می‌یابیم و سپس حاصل را در ماتریس C ضرب می‌کنیم.

$$D=ABC=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&1&1\\0&-2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&x&-1\\1&1&x\\x&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0\\1&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&x+1&-1+x\\x&-x+2&x\\-2-x&-3&-2x+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0\\1&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}$$

از ماتریس D فقط درایه‌هایی که لازم داریم را به دست می‌آوریم؛ بنابراین:

$$=\begin{bmatrix}5+x&&x+1\\&0&\\-2x-7&&-3\end{bmatrix}$$

اکنون شرط مسئله را اعمال می‌کنیم:

مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس D = مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس D

$$\Rightarrow(5+x)+(0)+(-3)=(x+1)+(0)+(-2x-7)$$

$$\Rightarrow 2+x=-x-6\Rightarrow x=-4$$

۱۶. گزینه ۱ ماتریس A را جای‌گذاری کرده و به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-c&-d\\-a&-b\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-c&-d\\-a&-b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d&c\\b&a\end{bmatrix}$$

۱۷. گزینه ۱

$$\begin{bmatrix}5&-2\\4&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4b_1\\4b_2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}5b_1-2b_2\\4b_1+ab_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4b_1\\4b_2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}5b_1-2b_2=4b_1\Rightarrow b_1=2b_2\ \boxed{*}\\4b_1+ab_2=4b_2\xrightarrow{\boxed{*}}4(2b_2)+ab_2=4b_2\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\div b_2}8+a=4\Rightarrow a=-4$$

۱۸. گزینه ۴ روش اول با توجه به گزینه‌ها، ابتدا توان دوم ماتریس $A+B-AB$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(A+B-AB)^2=(A+B-AB)(A+B-AB)$$

$$=A^2+AB-A^2B+BA+B^2-BAB-ABA-AB^2+ABAB$$

طبق فرض می‌دانیم $AB = BA$ ، $B^2 = B$ و $A^2 = A$: پس:

$$= A + \cancel{AB} - \cancel{AB} + \cancel{AB} + B - ABB - BAA - \cancel{AB} + BAAB$$

$$= A + B - A\underbrace{B^2}_{B} - B\underbrace{A^2}_{A} + B\underbrace{A^2}_{A}B$$

$$= A + B - AB - \underbrace{BA}_{AB} + \underbrace{BA}_{AB}B = A + B - AB - AB + A\underbrace{B^2}_{B}$$

$$= A + B - 2AB + AB = A + B - AB$$

روش دوم

ماتریس A را برابر ماتریس واحد هم‌مرتبه با A و B فرض می‌کنیم:

گزینهٔ «۱»: $(I+B-IB)^2 = I^2 + B^2 + I^2B \Rightarrow I = I + 2B$ ✗

گزینهٔ «۲»: $(I+B-IB)^3 = -I - B + IB \Rightarrow I = -I$ ✗

گزینهٔ «۳»: $(I+B-IB)^3 = I - B - IB \Rightarrow I = I - 2B$ ✗

گزینهٔ «۴»: $(I+B-IB)^2 = I + B - IB \Rightarrow I = I$ ✓

۱۹. گزینه ۳ ماتریس‌های A^2 و B^2 را پیدا می‌کنیم:

$$A^2 = (AB)^2 = A\underbrace{B\cdot A}_{B}B = \underbrace{AB}_{A}B = AB = A$$

$$B^2 = (BA)^2 = B\underbrace{AB}_{A}A = \underbrace{BA}_{B}A = BA = B$$

بنابراین:

$$A^2 + B^2 = A + B$$

۲۰. گزینه ۴ در این‌جا، حاصل‌ضرب چند ماتریس اولیه را پیدا می‌کنیم تا بتوانیم نتیجه‌گیری استقرایی کنیم:

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&3\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\ldots$$

پس می‌توان گفت که وقتی حاصل‌ضرب‌های قبلی در ماتریسی مثل $\begin{bmatrix}1&a\\0&0\end{bmatrix}$ ضرب می‌شوند، ماتریس حاصل، همان $\begin{bmatrix}1&a\\0&0\end{bmatrix}$ می‌باشد: بنابراین ماتریس حاصل‌ضرب‌های فوق برابر ماتریس آخر، یعنی $\begin{bmatrix}1&100\\0&0\end{bmatrix}$ می‌باشد که مجموع درایه‌های آن برابر ۱۰۱ است.

۲۱. گزینه ۳ از تساوی $A^2 = A$ درمی‌یابیم که ماتریس A خود توان است: پس $A^3 = A$.

حال برای یافتن B^3، توجه داریم که ماتریس I با هر ماتریس مربعی هم‌مرتبه با خودش تعویض‌پذیر است: پس به کمک اتحادها داریم:

$$B^3 = (2A - I)^3$$

$$\Rightarrow B^3 = (2A)^3 + 3(2A)^2(-I) + 3(2A)(-I)^2 + (-I)^3$$

$$= 8A^3 - 12A^2 + 6A - I = 2A - I = B \Rightarrow A^3 + B^3 = A + B$$

۲۲. گزینه ۲ واضح است که ماتریس A از مرتبهٔ 1×3 است (چرا؟): پس فرض می‌کنیم $A = [x\ \ y\ \ z]$ و داریم:

$$\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}_{3\times1}[x\ \ y\ \ z]_{1\times3}=\begin{bmatrix}a&b&c\\3&1&-1\\d&e&f\end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}2x&2y&2z\\x&y&z\\3x&3y&3z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b&c\\3&1&-1\\d&e&f\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{از سطر دوم}} x = 3\,,\ y = 1\,,\ z = -1$$

$$\xrightarrow{\text{از سطر اول}} a = 2x = 6\,,\ b = 2y = 2\,,\ c = 2z = -2 \Rightarrow a + b + c = 6$$

۲۳. گزینه ۱ $A^2 = 5A - 2I \xrightarrow{Ax} A^3 = 5A^2 - 2AI$

ماتریس AI برابر ماتریس A می‌شود: داریم:

$$A^3 = 5A^2 - 2A \xrightarrow{A^2 = 5A - 2I} A^3 = 5(5A - 2I) - 2A$$

$$\Rightarrow A^3 = 25A - 10I - 2A = 23A - 10I$$

۲۴. گزینه ۳

$$A^2 = A - 2I \Rightarrow A^4 = (A - 2I)^2 = \underbrace{A^2}_{A-2I} - 4\underbrace{AI}_{A} + 4\underbrace{I^2}_{I} = -3A + 2I$$

$$\xrightarrow{\times A} A^5 = -3A^2 + 2\underbrace{IA}_{A} \Rightarrow A^4 = -3A^2 + 2I$$

$$= -3(A - 2I) + 2A = -A + 6I \Rightarrow \alpha = -1\,,\ \beta = 6 \Rightarrow \alpha + \beta = 5$$

۲۵. گزینه ۲

$$AB^2 = B^2A \Rightarrow \underbrace{AB}_{kBA}B = BBA \Rightarrow kB\underbrace{AB}_{kBA} = BBA$$

از فرض $AB = kBA$ از فرض $AB = kBA$

$$\Rightarrow kB(kBA) = BBA \Rightarrow k^2BBA = BBA \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = \pm 1$$

۲۶. گزینه ۳ در رابطهٔ خواسته‌شده، توان‌ها را به‌صورت ضرب می‌نویسیم تا به رابطهٔ $C = BAA - AAB$ برسیم: سپس به جای ماتریس BA در عبارت اول ماتریس $-AB$ و به جای ماتریس AB در عبارت دوم $-BA$ قرار می‌دهیم:

$$C = BAA - AAB = (-AB)A - A(-BA) = -ABA + ABA = \bar{O}$$

۲۷. گزینه ۴ رابطهٔ داده‌شده را از حالت توان خارج کرده و به‌صورت ضرب ماتریس می‌نویسیم:

$$AB^2 - B^2A = ABB - BBA$$

از تساوی داده‌شده در مسئله نتیجه می‌شود که $AB = I + BA$ و $BA = AB - I$: حال این مقادیر را در رابطهٔ خواسته‌شده جای‌گذاری می‌کنیم:

$$ABB - BBA = (I + BA)B - B(AB - I)$$

$$\Rightarrow IB + BAB - BAB + BI = IB + BI = B + B = 2B$$

۲۸. گزینه ۳ اگر A و B ماتریس‌های برابر باشند، در حالت کلی ماتریس‌های A^n و B^n نیز برابرند، اما عکس این در حالت کلی برقرار نیست. به‌عنوان مثال ماتریس‌های $B=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم و داریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},\ B^2=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

در این‌جا، ماتریس‌های A^2 و B^2 باهم برابرند، اما ماتریس‌های A و B با هم برابر نیستند. برای بررسی گزینهٔ «۱» توان‌ها را به‌صورت ضرب ماتریس می‌نویسیم:

$$BA^n = B\underbrace{AA\ldots A}_{n\text{تا}} = (BA)\underbrace{AA\ldots A}_{n-1\text{تا}} = AB\underbrace{A\ldots A}_{n-1\text{تا}}$$

$BA = AB$

$$= A(BA)\underbrace{A\ldots A}_{n-2\text{تا}} = A(AB)\underbrace{A\ldots A}_{n-2\text{تا}} = A^2(BA)A\ldots A$$

$BA = AB$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود رفته‌رفته، توان‌های ماتریس A در طرف چپ بیشتر و ماتریس B به طرف راست منتقل می‌شود تا به ماتریس A^nB می‌رسد. در مورد درستی گزینهٔ «۲» به درسنامه نگاه کنید.

۲۹. گزینه ۴ چون ماتریس‌های قطری تعویض‌پذیرند؛ بنابراین اتحادها دربارهٔ ماتریس‌های قطری برقرار است:

$$(A+B)^2=A^2+B^2+2AB\Rightarrow A^2+B^2=(A+B)^2-2\underbrace{AB}_{2I}$$

اما $A+B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ ؛ پس:

$$\Rightarrow A^2+B^2=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}-4I$$

$$=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$$

$$(A+B)^2(A^2+B^2)=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$$

۳۰. گزینه ۲

$$A=B+C\Rightarrow A-B=C$$

$$\Rightarrow (A-B)^2=C^2\Rightarrow A^2-AB-BA+B^2=C^2$$

توجه کنید که در این‌جا ذکر نشده که ضرب ماتریس‌های A وB، خاصیت جابه‌جایی دارد.

۳۱. گزینه ۱ ابتدا هر دو ماتریس A و B را تشکیل می‌دهیم:

$$A=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} j=1 & j=2 & j=3\end{array}\\ & \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c} \\ i=1\\ i=2\\ i=3\end{array},\quad B=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} j=1 & j=2 & j=3\end{array}\\ & \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c} \\ i=1\\ i=2\\ i=3\end{array}$$

بنابراین:

$$A-B=\begin{bmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A-B)^2=\begin{bmatrix}\boxed{0\quad 0\quad 1}\\-1&0&0\\0&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}0\\-1\\0\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}0\\0\\-1\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\?&?&?\\?&?&?\end{bmatrix}$$

۳۲. گزینه ۲

$$\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{6}\\6&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{6}\\6&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{6}\\6&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I$$

پس:

$$\Rightarrow 2A+I=-I\Rightarrow 2A=-2I\Rightarrow A=-I\Rightarrow A^5=-I$$

در نتیجه:

$$A^5B=-IB=-B=\begin{bmatrix}-6&0\\0&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

۳۳. گزینه ۱

$$\text{قطری است}\ A\Rightarrow\begin{cases}2b+1=0\Rightarrow b=-\frac{1}{2}\\ a-2b=0\Rightarrow a=2b=-1\end{cases}$$

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}c-1&0\\0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c-1&0\\0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(c-1)^2&0\\0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{اسکالر}}(c-1)^2=\frac{1}{4}\Rightarrow c-1=\pm\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}c=\frac{1}{2}\\ c=\frac{3}{2}\Rightarrow \max(a+b+c)=0\end{cases}$$

۳۴. گزینه ۱

درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس (A^3)

= درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس $(A^2\cdot A)$

= (سطر دوم ماتریس A^2)$\cdot$(ستون سوم ماتریس A)

پس به سطر دوم ماتریس A^2 نیاز داریم:

سطر دوم ماتریس A^2 = سطر دوم ماتریس $(A\cdot A)$ = (سطر دوم ماتریس A)$\cdot A$

$$=\begin{bmatrix}0&1&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&x&y\\0&1&x\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&2x\end{bmatrix}$$

درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس A^3

= (سطر دوم ماتریس A^2)$\cdot$(ستون سوم ماتریس A)

$$=\begin{bmatrix}0&1&2x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\x\\1\end{bmatrix}=3x$$

۳۵. گزینه ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}2&1&5\\-3&0&4\\1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&5\\-3&0&4\\1&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&2&24\\\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots\end{bmatrix}$$

سطر اول ماتریس A^3 = سطر اول ماتریس $(A^2\cdot A)$

$$=(\text{سطر اول ماتریس } A^2)\cdot A=\begin{bmatrix}6&2&24\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&5\\-3&0&4\\1&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30&6&86\end{bmatrix}$$

۳۶. گزینه ۲

$$A^2=\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}$$

سطر اول ماتریس $(A^2\cdot A^2)$ = (سطر اول A^2)$\cdot A^2$

$$=\begin{bmatrix}3&-4&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}$$

۳۷. گزینه ۲ ابتدا ماتریس A^2 را پیدا کرده؛ سپس در رابطهٔ داده‌شده قرار می‌دهیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}-2&1\\5&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&1\\5&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&2\\10&21\end{bmatrix}$$

$$A^2=\alpha A+\beta I_2\Rightarrow\begin{bmatrix}9&2\\10&21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\alpha&\alpha\\5\alpha&4\alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta&0\\0&\beta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2\alpha+\beta&\alpha\\5\alpha&4\alpha+\beta\end{bmatrix}$$

در ماتریس‌های مساوی، درایه‌ها، نظیر به نظیر با هم برابرند؛ پس:

$$9=-2\alpha+\beta\xrightarrow{\alpha=2}\beta=13\Rightarrow(\alpha,\beta)=(2,13)$$

۳۸. گزینه ۲ در ماتریس A، درایه‌های قطری برابر ۱ و درایه‌های غیرقطری برابر ۲ هستند:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2-4A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&8&8\\8&4&8\\8&8&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس حاصل برابر با ۱۵ است.

به همین ترتیب برای رسیدن به ماتریس B^2، در دو طرف تساوی $B=AB$ از طرف چپ، ماتریس B را ضرب می‌کنیم:

$$B=AB \Rightarrow B\cdot B=B\cdot(AB)\Rightarrow B^2=(BA)\cdot B=A\cdot B$$

$$\Rightarrow B^2=B$$

اکنون داریم:

$$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=A+B+A+B=2(A+B)$$

۵۷. گزینه ۲ دترمینان ماتریس A برابر صفر است؛ پس داریم:

$$|A|=\begin{vmatrix} a & a+2 \\ a-2 & 3\end{vmatrix}=3(a)-(a+2)(a-2)=0$$

$$\Rightarrow a^2-3a-4=0 \Rightarrow (a-4)(a+1)=0\Rightarrow a=4\,,\, a=-1$$

۵۸. گزینه ۴ ماتریس $I+A$ به‌ترتیب زیر به‌دست می‌آید:

$$A+I=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس خواسته‌شده برابر است با:

$$|(A+I)^6|=|A+I|^6=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}^6=(2\times2-1\times1)^6=3^6=729$$

۵۹. گزینه ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}2&-1\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&-3\\-6&3\end{bmatrix}=3A$$

$$\Rightarrow A^2-3A+2I_2=3A-3A+2I_2=2I_2 \xrightarrow{\text{دترمینان}} 2^2\underbrace{|I|}_{1}=4$$

۶۰. گزینه ۲

$$2A=\begin{bmatrix}|A|&3\\-1&|A|\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{دترمینان}}|2A_{2\times2}|=|A|^2+3$$

$$\Rightarrow 2^2|A|=|A|^2+3\Rightarrow |A|^2-4|A|+3=0$$

$$\Rightarrow |A|=1,3\xrightarrow{|A|>1}|A|=3\Rightarrow 2A=\begin{bmatrix}3&3\\-1&3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A-2I=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A-2I|=(-\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2})-(-\frac{1}{2}\times\frac{3}{2})=1$$

۶۱. گزینه ۴

$$AB=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}3&-2\\4&3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}5&4\\-2&-1\end{vmatrix}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}2&6\\1&0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0&7\\2&-1\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6\\-14\end{bmatrix}$$

$$=(17)(-6)+(3)(-14)=-144$$

۶۲. گزینه ۴ می‌دانیم $\begin{vmatrix}2&1\\3&-1\end{vmatrix}=-5$، $\begin{vmatrix}4&0\\1&1\end{vmatrix}=4$، $\begin{vmatrix}2&-2\\3&1\end{vmatrix}=8$ و $\begin{vmatrix}0&2\\-1&4\end{vmatrix}=2$؛

پس $A=\begin{bmatrix}-5&4\\8&2\end{bmatrix}$ و لذا $|A|=-42$؛ بنابراین:

$$|\frac{A}{|A|}|=|\frac{1}{|A|}A_{2\times2}|=(\frac{1}{|A|})^2|A|=\frac{1}{|A|}=\frac{1}{-42}=-\frac{1}{42}$$

۶۳. گزینه ۳ کافی‌است از دو طرف تساوی ماتریسی داده‌شده، دترمینان بگیریم. دقت داشته باشید که پارامتر $|A|$ که به عنوان درایه در ماتریس آمده، یک عدد حقیقی است.

$$|A|=\begin{vmatrix}|A|&3\\4&|A|-3\end{vmatrix}\Rightarrow |A|=|A|(|A|-3)-4\times3$$

$$\Rightarrow |A|=|A|^2-3|A|-12\Rightarrow |A|^2-4|A|-12=0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه}}(|A|-6)(|A|+2)=0\Rightarrow |A|=6,|A|=-2$$

۶۴. گزینه ۱

$$B=A\cdot C=\begin{bmatrix}3&-1&2\\a&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&a\\-1&2\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14&3a\\3a&a^2+5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |B|=\begin{vmatrix}14&3a\\3a&a^2+5\end{vmatrix}=14(a^2+5)-3a\times3a=5a^2+70$$

از آن‌جایی که a^2 عددی همواره نامنفی است: حاصل دترمینان ماتریس B همواره مثبت می‌باشد.

۶۵. گزینه ۱ ابتدا ماتریس A را با به‌دست آوردن درایه‌هایش می‌سازیم:

$$A=\begin{bmatrix}1\times1-3\times1 & 1\times2-3\times1\\ 2\times1-3\times2 & 2\times2-3\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-1\\-4&-2\end{bmatrix}$$

سپس دترمینان ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$|A|=\begin{vmatrix}-2&-1\\-4&-2\end{vmatrix}=(-2)(-2)-(-1)(-4)=4-4=0$$

۶۶. گزینه ۳ عدد k را به تمام عضوهای ماتریس A اضافه می‌کنیم تا به ماتریس $B=\begin{bmatrix}2+k&3+k\\4+k&5+k\end{bmatrix}$ برسیم: سپس دترمینان ماتریس‌های A و B را پیدا کرده و با هم مقایسه می‌کنیم:

$$|A|=\begin{vmatrix}2&3\\4&5\end{vmatrix}=10-12=-2$$

$$|B|=\begin{vmatrix}2+k&3+k\\4+k&5+k\end{vmatrix}=(2+k)(5+k)-(3+k)(4+k)$$

$$=k^2+7k+10-(k^2+7k+12)=-2$$

بنابراین مقادیر دو دترمینان با هم برابرند.

۶۷. گزینه ۱ ابتدا حاصل هر کدام از دترمینان‌ها را می‌یابیم: سپس اعداد به‌دست‌آمده را در هم ضرب می‌کنیم. داریم:

$$\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&3&5\\-4&0&1\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{بسط نسبت به ستون دوم}}(3)\underbrace{\begin{vmatrix}1&-1\\-4&1\end{vmatrix}}_{-3}=-9$$

$$\begin{vmatrix}3&4&-1\\0&5&0\\4&2&-2\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{بسط نسبت به سطر دوم}}(5)\underbrace{\begin{vmatrix}3&-1\\4&-2\end{vmatrix}}_{-2}=-10$$

پس جواب برابر $(-10)(-9)=90$ است.

۶۸. (گزینه ۴) ابتدا حاصل دترمینان ماتریس A را می‌یابیم:

$$|A|=\begin{vmatrix}3&-2&2\\-1&0&-3\\4&6&2\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{ساروس}}\left|\begin{array}{ccc|cc}3&-2&2&3&-2\\-1&0&-3&-1&0\\4&6&2&4&6\end{array}\right|$$

$$0+(-54)+(4)=-50 \qquad 0+(24)+(-12)=12$$

$$\Rightarrow |A|=12-(-50)=62$$

اکنون به تمام درایه‌های قطر اصلی ماتریس A، یک واحد می‌افزاییم و ماتریس حاصل را B می‌نامیم. داریم:

$$B=\begin{bmatrix}4&-2&2\\-1&1&-3\\4&6&3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{ساروس}}\left|\begin{array}{ccc|cc}4&-2&2&4&-2\\-1&1&-3&-1&1\\4&6&3&4&6\end{array}\right|$$

$$8+(-72)+(6)=-58 \qquad 12+(24)+(-12)=24$$

$$\Rightarrow |B|=24-(-58)=82$$

واضح است که: $|B|-|A|=20$

۶۹. (گزینه ۲) با توجه به اینکه روی ستون دوم این دترمینان، دو درایهٔ صفر موجود است، دترمینان را نسبت به ستون دوم بسط می‌دهیم (جملات با ضریب صفر را نمی‌نویسیم.):

$$\begin{vmatrix}x&0&k\\1&\boxed{x+1}&0\\2&0&x+2\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{بسط نسبت به ستون دوم}}(x+1)\begin{vmatrix}x&k\\2&x+2\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (x+1)[x(x+2)-2k]=0\Rightarrow\begin{cases}x+1=0\\x(x+2)-2k=0\end{cases}$$

از آن‌جایی که این معادله فقط یک ریشه دارد؛ پس معادلهٔ $x^2+2x-2k=0$ باید فاقد ریشه باشد؛ یعنی:

$$\Delta<0\Rightarrow 4-4(-2k)<0\Rightarrow k<-\frac{1}{2}$$

تنها گزینه‌ای که در آن $k<-\frac{1}{2}$ است، گزینهٔ «۲» است.

۷۰. (گزینه ۴) در این دترمینان، سطر سوم دارای دو درایهٔ صفر می‌باشد؛ پس دترمینان را نسبت به همین سطر بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix}1&x&x^2\\1&x^2&x\\1&0&0\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{بسط نسبت به سطر سوم}}(1)\underbrace{\begin{vmatrix}1&x&x^2\\1&x^2&x\\1&0&0\end{vmatrix}}_{\text{حذف سطر سوم و ستون اول}}=(1)\begin{vmatrix}x&x^2\\x^2&x\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow x\cdot x-x^2\cdot x^2=0\Rightarrow x^2-x^4=x^2(1-x^2)=0\Rightarrow x=0,1,-1$$

۷۱. (گزینه ۴) حاصل این دترمینان را با روش ساروس می‌نویسیم:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc}1+x^2&x&0&1+x^2&x\\x&1+x^2&x&x&1+x^2\\0&-x&1+x^2&0&-x\end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc}1+x^2&x&0&1+x^2&x\\x&1+x^2&x&x&1+x^2\\0&-x&1+x^2&0&-x\end{array}\right|$$

$$=(1+x^2)(1+x^2)(1+x^2)+(x)(x)(0)+(0)(x)(-x)$$

$$-(0)(1+x^2)(0)-(1+x^2)(x)(-x)-(x)(x)(1+x^2)=0$$

$$\Rightarrow (1+x^2)^3+(1+x^2)x^2-x^2(1+x^2)=0$$

$$\Rightarrow (1+x^2)^3=0\Rightarrow 1+x^2=0$$ غ‌ق‌ق

۷۲. (گزینه ۲) در رابطهٔ اول، حاصل دترمینان سمت چپ با استفاده از روش بسط برابر است با:

$$\begin{vmatrix}2&3&x\\1&2&4\\3&1&3\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{به سطر اول}]{\text{بسط نسبت}}2\begin{vmatrix}2&4\\1&3\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1&4\\3&3\end{vmatrix}+x\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}$$

$$=2(6-4)-3(3-12)+x(1-6)=31-5x$$

با توجه به فرض داریم:

$$31-5x=\begin{vmatrix}x&1\\-1&5\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 31-5x=5x+1\Rightarrow 10x=30\Rightarrow x=3$$

دترمینان خواسته‌شده برابر است با:

$$\begin{vmatrix}2x&-1\\3x&x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&-1\\9&3\end{vmatrix}=3\times6-9(-1)=27$$

۷۳. (گزینه ۱) ابتدا دترمینان ماتریس A را به کمک بسط نسبت به سطر دوم می‌یابیم:

$$|A|=(1)\begin{vmatrix}1&1\\2&-2\end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix}1&2\\2&2\end{vmatrix}=-8\Rightarrow |A^2|=|A|^2=64$$

$$\Rightarrow |B|=64$$

اما از آن‌جایی که B یک ماتریس اسکالر است و می‌دانیم دترمینان هر ماتریس اسکالر، برابر با ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن است؛ پس اگر درایه‌های واقع بر قطر اصلی ماتریس B را برابر x فرض کنیم، آن‌گاه $x^3=64$ و لذا $x=4$ است؛ پس مجموع درایه‌های ماتریس B برابر $3\times4=12$ می‌باشد. (توجه کنید که در ماتریس اسکالر، درایه‌های غیرقطری، همگی صفر هستند.)

۷۴. (گزینه ۱) دترمینان D را نسبت به سطر دوم بسط می‌دهیم:

$$(1):\ \begin{vmatrix}1&2&4\\a&b&1\\2&5&1\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{بسط نسبت به سطر دوم}}-a\begin{vmatrix}2&4\\5&1\end{vmatrix}+b\begin{vmatrix}1&4\\2&1\end{vmatrix}-\underbrace{\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix}}_{A}$$

دترمینان را نسبت به سطر سوم بسط می‌دهیم:

$$(2):\ \begin{vmatrix}1&2&4\\2&5&1\\a&b&-1\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{بسط نسبت به سطر سوم}}a\begin{vmatrix}2&4\\5&1\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}1&4\\2&1\end{vmatrix}-\underbrace{\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix}}_{A}$$

اگر طرفین تساوی‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم، داریم:

$$D+\begin{vmatrix}1&2&4\\2&5&1\\a&b&-1\end{vmatrix}=-2A\Rightarrow\begin{vmatrix}1&2&4\\2&5&1\\a&b&-1\end{vmatrix}=-2A-D$$

$$=-D-2\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix}=-D-2(5-4)=-D-2$$

۷۵. (گزینه ۱) از آن‌جایی که در طرف دوم تساوی، x به‌صورت ضریب است، باید در محاسبهٔ دترمینان از طرف راست، عدد x به‌صورت ضریب قرار بگیرد.